

# 粘弹性波动方程正演模拟与参数反演

单启铜（地球探测与信息技术）

指导教师：乐友喜教授

## 摘要

地震波在真实介质中传播与在理想介质中传播有很多不同之处，介质的粘滞性会损耗地震能量，使振幅衰减并且视频率逐渐降低。地震波的这种衰减和频散，使得不能直接从地震数据上得到准确的地下信息和分辨率更高的图像。

本文从粘弹性介质的波动方程入手，从理论上分析了地震波在粘弹性介质中的吸收和衰减。采用伪谱法和有限差法研究粘弹性介质中的波场，模拟过程中引入不同的边界条件，推导出不同边界条件下的粘弹性介质波动方程。通过数值模拟，比较了不同方法、不同边界的模拟效果，着重分析了不同粘滞系数对地震波吸收和衰减的影响，得到了有关介质的粘滞性对地震波传播影响的认识和结论。

在此基础上，采用遗传算法和模拟退火算法相结合的非线性方法来反演粘性介质中的参数，目的是得到与介质粘滞性密切相关的地层的品质因子，然后通过偏移补偿地震波传播中的吸收和衰减，得到更好的成像效果，提高资料的分辨率。

关键词：粘弹性，品质因子，参数反演，遗传算法，吸收和衰减

# **Simulation and inversion of wave equation in viscoelastic media**

SHAN Qi-tong

(Geophysical Prospecting and Information Technology)

Directed by Professor YUE You-xi

## **Abstract**

The propagation of seismic wave exists many differences in real medium and ideal medium. The viscosity of medium can dissipate energy of seismic wave and amplitude, decrease the apparent frequency. So it is hard to obtain detailed subsurface information and high resolution image directly.

Absorption and attenuation of seismic wave in viscoelastic medium have been analyzed from the theory through viscoelastic wave equation. Pseudo-spectral method and finite difference method have been used to the wavefield simulation of viscoelastic medium in this paper. Different boundary conditions were introduced. The formulae of different boundary conditions in 2-D Kelvin viscoelastic medium have been derived independently. The numerical simulation compared different method and different boundary conditions. The influence of different coefficient of viscosity on wavefield absorption and attenuation has been analyzed and the conclusions about the influence of coefficient of viscosity on wave propagation have been achieved through wavefield simulation.

In this base, the unite nonlinearity method of genetic algorithm and simulated annealing algorithm has been used to inverse the parameter of viscoelastic medium and obtain quality factor. Then, compensation of seismic wave absorption and attenuation in migration can obtain more correctly and accurately subsurface image.

**Keywords:** Viscoelastic, Quality factor, Parameter inversion, Genetic algorithms, Absorption and attenuation

## 独创性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中国石油大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签 名： 单启钢 2007 年 6 月 1 日

## 关于论文使用授权的说明

本人完全了解中国石油大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件及电子版，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

(保密论文在解密后应遵守此规定)

学生签名： 单启钢 2007 年 6 月 1 日  
导师签名： 张素 2007 年 6 月 1 日

## 第1章 前言

### 1.1 选题的目的及意义

常规地震处理技术的理论前提是：大地介质是完全弹性介质，地震波在其中的传播满足达朗贝尔方程。这样，地震波在其传播途中没有能量的损失和波形的畸变，地表检波器接收到的应该是很高分辨率的脉冲波形。但是，实际情况并非如此，地表检波器接收到的是有一定延时而且频率很低的地震复合波。而且在远离震源处接收到的地震波中，低频成分比高频成分丰富，不同频率的波在传播中的相速度也不一样。在远离震源处接收的波谱与波源实际的波谱也不同，这说明大地对地震波有衰减和吸收的作用，特别对其高频成分，吸收更为严重，导致地震资料的分辨率降低。

目前在讨论地震波传播理论时，绝大部分情况下把地震波看作弹性波。事实上，地震波在真实介质中传播与在理想介质中传播有很多不同之处，介质的粘滞性会损耗地震能量，使振幅衰减并且视频率逐渐降低。地震波的这种衰减和频散，使得不能直接从地震数据上得到详细的地下信息和分辨率更高的图像。所以，研究地震波在粘弹性介质中传播的性质具有重要意义。

### 1.2 国内外研究和发展现状

斯托克斯 (Stocks) 1845 年首次着手研究粘弹性介质中的地震波，其后这种介质中地震波传播理论和应用得到了较大发展，出现了一系列的理论和研究方法。

N.H. Ricker 首先将子波理论推广到粘弹性介质中，考虑了粘滞性类型的内摩擦引起的能量损耗，用统一完整的观点将地震波在传播中的衰减包括在理论中<sup>[1]</sup>。Aki and Richards (1980) 做了许多有关粘弹性数学模型的理论研究工作。目前用于研究理论粘弹性物理模型包括：开尔分—佛格特模型 (Madja et al., 1985)；标准线固体模型 (Aki and Richards, 1980)；用连续频谱的弛豫时间表示的标准线性固体模型 (Madja et al., 1985)。

在粘弹性介质波场正演方面, Tong Xu和George A.McMechan (1998) 运用近地表地震数据进行了三维粘弹性正演模拟<sup>[2]</sup>。Stekl和R.G.Pratt (1998) 用旋转的频率域有限差分算子进行的精确粘弹性正演模拟<sup>[3]</sup>。在反演方面, Gauthier (1986), Kolb和Canadas (1986) 以及Mora (1987) 等人进行了二维介质中非线性反演的初次尝试。Helgesen和Landro (1993) 实现了弹性数据中的声波反演。Qingbo Liao和George A.McMechan (1996) 开展了多频粘滞声波模拟和反演。Adam P.Koesoemadinata 和George A.McMechan (2001) 由砂岩的岩石物理性质估计粘弹性介质的地震参数。Koesoemadinata和McMechan (2003) 提出了一种用于计算地震属性 ( $V_p, V_s, \rho, Q_p, Q_s$ ) 的方法。Upendra K.Tiwari和George A.McMechan (2004) 研究了非完全参数化对油藏岩石物理性质全波场粘弹性地震数据反演的影响。

近年来国内也开展了许多有关粘弹性介质中地震波的研究。毕玉英, 杨宝俊 (1995) 实现了二维粘弹介质中完全波场正演模拟。他们将传播时间分解成了传播水平时间和垂直时间两部分, 当平面源入射改为线源入射时, 便把角度—时间集转化成了空间—时间集, 从而可以在大偏移距情形中应用这种计算方法, 使得合成地震记录包含了反射纵波、转换波、折射波、面波以及多次波等全波场信息。宋守根等 (1996) 从粘弹性波动方程出发, 建立了一种地层散射波场纵横向高分辨波场外推方法。实现了粘弹性介质地震复合波变焦分离与波场外推技术。这一方法有别于完全弹性介质三大波场外推方法(即有限差分法、克希霍夫法和 F-K 法); 同时, 与 N.Bleistein 和 J. K. Cohen 成像方法也不同, 对积分方程无需作线性化近似而进行反演, 其有较大的适应性, 能改善地震资料纵横向分辨率。张建贵等 (1999) 以大地介质为粘弹性介质为前提, 结合小波分析理论的地震波波动方程聚焦成像技术在塔北某区进行了 2D 地震资料的目标处理, 得到了一套高分辨率、高信噪比和高保真的地震处理剖面。崔建军, 何继善 (2001) 从二维粘弹性波动方程出发, 在频率波数域内导出了粘弹性波动方程的正演和偏移算法<sup>[4]</sup>。程昌钧 (2001) 研究了粘弹性介质中波的逆散射

问题。杨午阳等(2003)对  $F-K$  域粘弹性波动方程进行了保幅偏移的研究<sup>[5]</sup>。奚先和姚姚(2004)研究了二维粘弹性随机介质的波场<sup>[6]</sup>。刘财等(2005)对常  $Q$  粘弹性介质<sup>[7]</sup>和线性粘弹介质<sup>[8]</sup>中的地震波进行了研究。

在参数反演方面。杨顶辉等(1997)提出了一种各向异性动力学方程反演新算法<sup>[9]</sup>。采用直接反演方法,从动力学方程出发,利用一系列的正演模拟,反复修正其反演参数,以达到收敛之目的。针对这种方法但存在的不足:①反演结果强烈依赖于初始模型;②由于这种方法利用了最小二乘原理以建立迭代方程  $G^T G \Delta X = G^T \Delta U$ , 其中的  $G$  由位移分量对反演参数的偏导数所组成。一般情况下,这些偏导数均为非线性泛函,通常是直接利用位移分量的改变量与反演参数的改变量之比来线性化这些泛函,这种处理本身带来了巨大的误差。对于第一个问题他们提出用由华罗庚和王元(1978)提出的均匀布点方法以尽可能地解决其不唯一性问题;对于第二个问题,通过对原波动方程组求偏导数,建立关于以位移分量对模型各参数的偏导数为变量的二阶偏微分方程组,然后直接利用正演方法求出其比较精确的迭代矩阵,从而实现其反演过程。宋海斌,张关泉(1998)就层状介质弹性参数反演问题进行了研究<sup>[10]</sup>。他们认为目前地震波动方程反问题研究主要是声波方程的反问题。随着地震勘探的深入和数字技术的发展,传统的声波模型已经不能满足地震勘探的需求。地震波动方程反问题在向基于矢量弹性波方程、各向异性介质波动方程、双相介质波动方程的多个弹性参数反演方向发展和延伸。基于这些波动方程的反演研究与传统的声波方程反问题研究相比,具有以下特点:一、这些波动方程较真实地模拟了地震波在地下介质中的传播.如矢量弹性波动方程描述了纵、横波在固体介质中的传播和耦合。因此,复杂波动方程反问题研究比较符合实际情况。二、这些波动方程反问题研究可以给出较多的参数,而这些参数(如纵、横波速度比、泊松比)对识别岩性和含油气特征相当重要,例如低泊松比常常是含气砂岩的指示特征。三、这些波动方程反演研究的难度相应增大,如何提出正确的反问题

也尚需深入研究。由于高维波动方程反演研究有两方面的困难：一方面，理论研究相当困难，就高维声波反问题而言，也尚未得到完满的解决。另一方面，巨大的计算量常常令现有的最先进的巨型并行机也无法承受。因此，层状介质弹性参数反演研究是现实的，并会成为最受数学家和地球物理学家广泛关注的研究领域之一。层状介质参数反演问题比较容易研究，虽然层状介质的假设离实际有一定距离，但对层状介质情况下反问题的研究，一方面可以了解问题的性态，对一般情况下反问题的研究是有参考价值的；另一方面对实际问题的数值求解是十分有益的，如在实际地震勘探领域，一维声波方程反演已逐步实用。此外，张秉铭，张中杰（2000）提出一种新的地层弹性参数直接反演方法<sup>[11]</sup>。张美根等（2003）实现了时间域全波场各向异性弹性参数反演<sup>[12]</sup>。朱定等（2004）利用 VSP 直达波资料反演了粘弹介质的相速度及品质因子<sup>[13]</sup>。

在所有的这些方法中，很少有用伪谱法<sup>[14]</sup>对非均匀粘弹性介质中的波场进行模拟<sup>[15]</sup>，也很少有粘弹性参数反演方面的研究进展。本次研究是在总结前人研究的基础上利用伪谱法对粘弹性介质波场进行正演模拟<sup>[16]</sup>及参数反演<sup>[17]</sup>，研究地震波传播过程中的吸收和衰减<sup>[18]</sup>，寻找一种较为合适的方法对地震波的吸收衰减进行补偿，从而提高地震资料的分辨率，这在实际应用方面也有很好的前景。

### 1.3 主要研究内容和研究思路

1、粘弹性波动方程正演模拟。分别采用差分法和伪谱法进行粘弹性介质中地震波场正演模拟，模拟地面、井间和 VSP 的地震波场。模拟过程中分别采用了吸收边界条件、加宽衰减边界条件和 PML 边界条件，推导不同边界条件下的波动方程，并比较不同方法和不同边界的模拟效果，通过数值模拟分析不同粘滞系数对地震波吸收和衰减的影响，得到了有关介质的粘滞性对地震波传播影响的认识和结论。

2、粘弹性波动方程参数反演。采用遗传算法和模拟退火算法相结合的混合算法，从正问题出发，经过反复迭代，从而实现其反演过程，得到粘弹性介质中的速度、品质因子及界面深度等参数。



3、粘滞效应的偏移补偿。地层的品质因子是描述地震波在粘弹性介质中传播时信号衰减的重要参数。由反演的品质因子，补偿地震波传播中的吸收和衰减，提高资料的分辨率。

## 第2章 粘弹性介质中的地震波

### 2.1 粘弹性介质

固相、流相和气相是物质存在的三种基本形态。严格地讲,纯粹以这三种相态存在的物质几乎是不存在的。把物质的相态比作一个“相态谱系”,或一个坐标轴,三种基本相态是坐标轴上的三个基本点,大量的物质相态都是分布在三个基本点之间。粘弹性介质是介于流相粘性介质和固相粘性介质之间的一种介质。粘弹性介质本身分布在一个较宽的“谱”范围,有些粘弹性介质的“相态”靠近“流相点”,如麦克斯韦粘弹性介质;某些粘弹性介质的“相态”靠近“固相”点,如开尔芬粘弹性介质。任何一种介质或材料到底处于粘弹性介质(材料)“谱”的何种位置,除了介质(材料)自身材质外,还与介质(材料)的围压条件,如温度、压力等因素有关。成岩前的岩浆是流体,成岩后的“花岗岩”是固体,但在高速撞击下,它与流体没有什么差异<sup>[19]</sup>。

粘弹性介质是连续介质力学中的重要组成部分,特别是现代经济建设与高新材料科学技术的发展极大地促进了其理论和应用的发展。高聚物材料和复合材料等新材料、新结构的力学性能研究试验与应用;复杂介质结果力学特性研究测试;地球层圈结构成分研究探测;石油天然气能源勘探;天然地震预报、岩土滑坡、泥石流等减灾防灾;在岩土、环境、工程力学;生物力学;以及国防等领域,粘弹性介质(材料)理论与应用研究有着特殊的重要地位并发挥越来越大的作用。

完全粘弹性介质没有考虑介质形变与温度压力的影响因素。从弹性波动力学角度讲,应变与应力是瞬时关系,即某一时刻的应力与该时刻的应变成比例关系。完全弹性体的应变是可逆的,即当瞬时外力去掉后,弹性体完全恢复原状。应变的可逆性表明形变过程进行得十分缓慢,每一时刻固体都处于准平衡状态。固体各处都处于同一温度。因此在弹性体中没有考虑形变场与温度场的互相影响问题,或者说没

有考虑机械运动与热运动的耦合问题。

粘性的基本行为是介质的非弹性性质。主要表现在：随着时间变化，介质有发生永久形变的特点。对于某些固体即使在小应变状态下，这些固体介质也具有这种非弹性特性。考虑固体的这种特性，可以把这样的固体称为粘弹性介质，或粘弹性体。粘弹性体与弹性体相比更接近客观实际情况，地球的壳状介质实际就是粘弹性体。

粘弹性介质对地震波能量的吸收和衰减机理是非常复杂的。有一种流行并较为接近实际的解释，即介质内部的热效应现象。在宏观理论中，固体的粘性可看成是固体内部存在摩擦力，由于它的存在，固体形变时，外力将克服摩擦力做功，使得形变过程中伴随有热效应出现。例如：压缩区温度升高，膨胀区温度降低，在固体中出现温度的不均匀性，会产生热量传导，即地震波的能量以热量的形式在传播过程中发生衰减和耗散。此外，地震波能量的耗散与孔隙介质中流体的性质有关，通过实验室的岩石样品测试和物理模拟已证实了这一点。从地震波传播理论角度讲，这要涉及到双相介质的知识，目前双相介质的理论和应用研究也是倍受人们关注的。

## 2.2 描述粘弹性介质的有关名词和概念

### 1、蠕变

在一定的应力作用下，完全弹性介质的应变基本为一定值，不随时间而变化。对于理想粘性流体，变形（即应变）则以等应变率随时间而增加，通常用牛顿流体定律来描述<sup>[19]</sup>。

在恒定应力作用下，应变随时间而增加，这种现象称为“应变蠕变”，简称“蠕变”。不同介质或同一种介质在不同的条件下有不同程度的蠕变。蠕变越大，介质保持其原有的形状及尺寸的能力越差；反之则能力越强。

### 2、回复

若在某一时间卸去载荷，完全弹性介质将恢复原样，若不考虑惯性，则应变会瞬间为零。对粘弹性介质，在某一时刻去除外力，介质首先做瞬时弹性成分回复，其后有逐渐向原样回复的过程，这种蠕变

回复现象,称为滞弹性回复或延滞回复,简称“回复”。人工瞬态激发的弹性波场,在震源破碎带外的介质中,产生的应变在短暂时间内几乎可以完全恢复原样,即恢复到零应变状态。在某些介质在一定的条件下,其内部将残留不可恢复的应力。

### 3、应力松弛

当应变恒定时,应力随时间而减少的现象称为“应力松弛”。这种现象与蠕变相对应,应力松弛的一般过程是,开始时应力很快衰减,而后逐渐降低并趋于某一恒定值。从流变机理方面讲,粘性流动将使应力经过足够长的时间后衰减至零。因此可以说,在一定的条件下,应力较快趋于零的介质是流体;而经过相当长的时间后应力衰减至某一定值的介质则是固体。

描述恒定应力和恒定应变一般事业单位阶跃函数。如恒定应力和恒定应变可以分别用  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  和  $e(t) = e_0 H(t)$  来描述。其中单位阶跃函数  $H(t)$  定义如下:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

注意上式  $t = 0$  时,  $H(t) = 1$  的定义。于是  $H(t)$  的傅氏变换是

$$H(t) \leftrightarrow \frac{1}{iw}$$

## 2.3 粘弹性介质的分类

### 2.3.1 达朗贝尔介质

达朗贝尔介质是直接从运动方程加入粘性因素而得到的一种粘弹性介质,介质具有均匀和各向同性。

### 2.3.2 麦克斯韦尔 (Maxwell) 介质

一维情况下,一个线性弹簧器和一个阻尼器串联就是麦克斯韦尔 (Maxwell) 粘弹性单元体。



图 2-1 麦克斯韦(Maxwell)粘弹性单元体

麦克斯韦(Maxwell)介质物性参数与均匀弹性各向同性介质物性参数的对应规则是:

$$\mu \leftrightarrow \frac{\mu}{1 + \frac{1}{\tau l_t}} \text{ 和 } \lambda \leftrightarrow \lambda$$

式中,  $l_t$ 表示对时间变量求偏导;  $\mu$ 是切变模量;  $\lambda$ 是拉梅常数;  $\eta$ 是粘性系数;  $\tau = \eta/\mu$ 表示的是固体的驰豫时间。

### 2.3.3 开尔芬 (Kelvin) 介质

一个表示弹性的弹簧器和一个表示粘性的阻尼器并联就是开尔芬粘弹性单元体。如图 2-2。

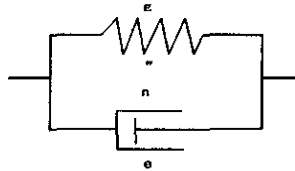


图 2-2 开尔芬 (Kelvin) 粘弹性单元体

开尔芬 (Kelvin)介质物性参数与均匀弹性各向同性介质物性参数的对应规则是:

$$\mu \leftrightarrow \mu + \mu' l_t \text{ 和 } \lambda \leftrightarrow \lambda + \lambda' l_t$$

式中,  $\mu'$ 和  $\lambda'$ 是粘性拉梅系数。

### 2.3.4 三元件的标准线性粘弹性介质

该模型是一个弹性元件和一个开尔芬(Kelvin)单元体串联组成。

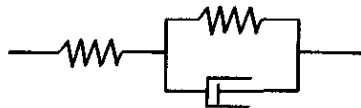


图 2-3 三元件的标准线性粘弹性体

三元件的标准线性粘弹性介质物性参数与均匀弹性各向同性介质物性参数的对应规则是:

$$\mu \leftrightarrow \frac{\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu'_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu'_1} \text{ 和 } \lambda \leftrightarrow \lambda + \lambda'_1$$

### 2.3.5 标准线性粘弹性介质

线性粘弹性体就是麦克斯韦尔(Mexwell)或开尔芬(Kelvin)单元体与弹性体(或流体)元件串联或并联组成的粘弹性单元体模型。

### 2.3.6 波尔茨曼介质

波尔茨曼介质是根据波尔茨曼叠加原理建立的一种粘弹性介质模型。

波尔茨曼介质物性参数与均匀弹性各向同性介质物性参数的对应规则是:

$$\mu \leftrightarrow i\omega\mu(\omega) \text{ 和 } \lambda \leftrightarrow i\omega\lambda(\omega)$$

其中,符号 $\leftrightarrow$ 左端是各向同性弹性介质时间域的物性参数,右端是波尔茨曼介质频率域的物性参数。

## 2.4 处理粘弹性介质的思路方法

处理粘弹性问题一般有三种思路及处理方法<sup>[19]</sup>:

### 2.4.1 从本构方程加介质的粘滞性因素

本构方程是描述介质物理性质的基本方程。介质的物理性质通过该方程中的系数矩阵即物性矩阵来体现。如介质的弹性、粘性、各相异性、双相等性质都可以用系数矩阵予以描述。理论物理化学工作者研究物质结构的一项重要内容就是,如何用本构方程去刻画物质的结构和性质。这种做法是处理不同介质的基本和主要方法。

粘弹性介质地震波的传播规律的研究,需要用到粘弹性的本构方程。这种本构关系的重要特点之一是应力与应变不再是简单的瞬时关系,而必须包含时间的导数项。也就是说,某一时刻的应力不仅与该时刻的应变有关,而且与应变的历史有关。与时间因素有关的应力与应变之间的函数关系是很复杂的。许多学者在这一方面进行了探讨,

因而出现了许多以作者名字命名的介质模型,如斯托克斯(stocks)、开尔芬(kelvin)和线形粘弹体等。对于应变来说,粘弹性体的本构关系仍呈线形,也称这类粘弹性体为线形粘弹体。处理物性矩阵中物性参数非常有效的方法就是,弹性介质物性参数与粘弹性介质物性参数的对应规则,它可以大大简化粘弹性介质相关问题,如基本方程、波动方程等的处理。

粘弹性介质是连续介质力学的重要内容之一。均匀粘弹性各向同性介质中弹性波传播理论体系相同,需要研究介质内体积元“位移、应力、应变”三个量的关系。从静态角度讲,同样存在三个方程。动力平衡运动方程即奈维尔方程,它描述了位移与应力之间的关系;运动学方程即柯西方程,该方程刻画了位移与应变之间的关系,当介质内每一位置点的“位移”已知时,由位移计算应变是可以做到的;本构方程即物性方程,回答了介质内部应力与应变之间的关系,物性方程通过应力与应变的平衡关系揭示介质(材料)的物性性质。从弹性波传播的角度讲,由上述三个基本方程可以得到“波动方程”,以及“速度方程”和“能量方程”。上述六个方程是半空间,即单一介质内弹性波传播理论的基本方程。由此,可以认识和掌握粘弹性介质中弹性波传播的特点和规律。

建立本构方程可以使用两种方法。一种是器件组合法。这里包含弹簧器和阻尼器并联方式的开尔芬介质;弹簧器和阻尼器串联方式的麦克斯韦介质。第二重是波尔茨曼叠加法,由这种方法引入的介质称为波尔茨曼介质。

建立介质本构方程时,首先从一维情况入手,阐明了微分型和积分型本构方程,以及有关的概念原理。然后运用相同的思路和方法,把一维的结论拓展到三维空间粘弹性介质,使用物性参数的“对应规则”是得到三维粘弹性介质本构方程的基本手段;其中重点的典型模型是开尔芬介质、麦克斯韦介质和波尔茨曼介质。同时,运用“对应规则”可以直接得到波动方程和波函数。

### 2.4.2 从运动方程加入阻尼因素

在普通物理学, 无阻尼振子的一元微分方程为

$$m\ddot{x} + kx = f(t)$$

有阻尼振子振动的一元常微分方程形式的运动方程为

$$m\ddot{x} + s\dot{x} + kx = f(t)$$

式中,  $m$  是弹簧振子的质量;  $s$  是阻尼系数;  $k$  是弹簧的刚度系数;  $f(t)$  是外力;  $x$  是位移; 上面的方程可以用牛顿第二定律来解释: 弹簧振子所受的力满足:

$$\text{合外力} = \text{合内力}$$

这里, 合外力是  $f(t)$ 。合内力由惯性力  $m\ddot{x}$ 、阻尼力  $s\dot{x}$  和弹性力  $kx$  三部分组成。上述方程也称为弹簧振子的运动方程。采用相同的处理方法, 可以得到三维空间的粘弹性介质。直接从运动方程加入粘性因素, 以这种方式得到的粘弹性介质, 典型的介质是达朗贝尔粘弹性介质。

### 2.4.3 结合方法

结合方法就是把本构方程加入介质的粘滞性因素与运动方程加入阻尼因素两种方式结合在一起的方法。



### 第3章 开尔芬粘弹性介质中的波场研究

开尔芬(Kelvin)粘弹性介质,也可称为斯托克斯(Stocks)和佛格特(Volght)粘弹体。这种介质模型是用一个表示弹性的弹簧器和一个表示粘性的阻尼器并联来描述固体的非完全弹性特征。在三维空间情况下,各质点之间用这种模型器相互联系在一起。由于开尔芬体在计算上较为简单,因此在描述地震波衰减时多用开尔芬模型,它对低频成分有很好的近似性,但对高频成分有过度的衰减作用。

开尔芬介质的波动方程有以下几种形式:矩阵形式的波动方程,分量形式的波动方程,矢量形式的波动方程以及射线上平面波的矢量波动方程。这些形式的波动方程,在加入粘滞项以后,其表达类型可以同均匀弹性各项同性介质的情况相对应<sup>[20]</sup>。

开尔芬介质中弹性波场的纵波场和横波的分解。纵波场和横波场在开尔芬粘弹性介质中是可以分解的;处理问题的思路和方法同均匀弹性各向同性介质相类似。矢量波场的分解,可以使矢量波动方程的求解和相关各种问题的研究,转换成单独对纵波或对横波波场的研究,有利于相关问题的处理分析,特别是场的分布特点和波传播特性。

开尔芬粘弹性介质中的地震波传播的基本特点是波的相速度为复数,波数也为复数,速度的特征方程法是获得速度解析表达形式的主要手段。使用复数波数的传播特点简介直观,其复数的实部描述了波的等相位面传播的速度,虚部描述了波振幅的衰减特性。对衰减特性,引入了“空间衰减系数”和“时间衰减系数”,即波的频散和能量衰减是粘弹性介质中波传播的重要特性。开尔芬介质中波的传播速度具有频散现象;波的能量(或振幅)随传播距离呈指数衰减,在相同的传播距离时,高频成分较之低频成分衰减严重。在振幅衰减因素中,介质粘性衰减较之球面扩散衰减相比是微弱的因素。

在处理粘弹性问题的思路及处理方法上,采用从本构方程加介质的粘滞性因素。本构方程是描述介质物理性质的基本方程。介质的物理性质通过该方程中的系数矩阵即物性矩阵来体现。

### 3.1 开尔芬介质的本构方程

开尔芬粘弹性介质三维空间本构方程如下:

$$\sigma_{6 \times 1} = D_{6 \times 6} \varepsilon_{6 \times 1} + D'_{6 \times 6} l_t \varepsilon_{6 \times 1} = (D_{6 \times 6} + D'_{6 \times 6} l_t) \varepsilon_{6 \times 1} = D_{6 \times 6}^* \varepsilon_{6 \times 1} \quad (3-1)$$

式中,  $l_t$  为时间导数,  $\sigma_{6 \times 1} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz})^T$  为应力分量,  $\varepsilon_{6 \times 1} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz})^T$  为应变分量,  $D_{6 \times 6}$  是弹性介质的弹性矩阵,  $D'_{6 \times 6}$  是粘性介质的弹性矩阵,  $D_{6 \times 6}^*$  是开尔芬介质的弹性矩阵。

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} \lambda' + 2\mu' & \lambda' & \lambda' & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda' + 2\mu' & \lambda' & 0 & 0 & 0 \\ \lambda' & \lambda' & \lambda' + 2\mu' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu' \end{bmatrix}$$

均匀各向同性介质的弹性参数与开尔芬介质的弹性参数, 时间域“对应规则”是:

$$\lambda \leftrightarrow \lambda + \lambda' l_t, \mu \leftrightarrow \mu + \mu' l_t, K \leftrightarrow K + K' l_t$$

符号“ $\leftrightarrow$ ”左端是弹性介质的弹性参数, 右端是开尔芬介质的弹性参数; 两端的弹性参数可以彼此对应并相互转换。 $\lambda$ ,  $\mu$  和  $K$  分别是弹性介质的拉梅系数和体积模量;  $\lambda'$ ,  $\mu'$  和  $K'$  是粘性介质的拉梅系数和体积模量。

当粘性拉梅系数  $\lambda'$  和  $\mu'$  均为零时, 介质退化为均匀弹性各向同性介质, 开尔芬介质的本构方程变为均匀各向同性介质的本构方程

$$\sigma_{6 \times 1} = D_{6 \times 6} \varepsilon_{6 \times 1} \circ$$

### 3.1.1 距阵形式的波动方程

开尔芬介质场变量位移、应力和应变三者之间的关系可以通过三个基本方程予以描述。三个方程为

$$\sigma_{6 \times 1} = D_{6 \times 6}^k \varepsilon_{6 \times 1} \quad (\text{本构方程}) \quad (3-2)$$

$$\varepsilon_{6 \times 1} = L_{6 \times 3} u_{3 \times 1} \quad (\text{柯西方程}) \quad (3-3)$$

$$\rho \ddot{u}_{3 \times 1} = L_{3 \times 6} \sigma_{6 \times 1} \quad (\text{奈维尔方程}) \quad (3-4)$$

上述三个方程之间经相互代入并整理后有

$$\rho \ddot{u}_{3 \times 1} = (L_{3 \times 6} C_{6 \times 6}^k L_{6 \times 3}) u_{3 \times 1} \quad (3-5)$$

上式就是开尔芬介质距阵形式的波动方程。

均匀弹性各向同性介质距阵形式的波动方程是

$$\rho \ddot{u}_{3 \times 1} = (L_{3 \times 6} C_{6 \times 6} L_{6 \times 3}) u_{3 \times 1}$$

两者在数学函数关系上具有完全的“一致性”。上述所有式中偏导数算符距阵  $L_{6 \times 3}$  表示为

$$L_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} L_{6 \times 3}^{11} \\ L_{6 \times 3}^{21} \\ L_{6 \times 3}^{31} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } L_{6 \times 3}^{11} = \begin{bmatrix} l_x & 0 & 0 \\ 0 & l_y & 0 \\ 0 & 0 & l_z \end{bmatrix}, \quad L_{6 \times 3}^{21} = \begin{bmatrix} 0 & l_z & l_y \\ l_z & 0 & l_x \\ l_y & l_x & 0 \end{bmatrix}$$

$L_{3 \times 6}$  是  $L_{6 \times 3}$  的转置距阵。

### 3.1.2 分量形式的波动方程

均匀各向同性介质分量形式的波动方程是

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_x = \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) l_x \theta \\ \rho \ddot{u}_y = \mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) l_y \theta \\ \rho \ddot{u}_z = \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) l_z \theta \end{cases} \quad (3-7)$$

由“对应规则”，把上式中参数  $\lambda$  和  $\mu$  分别用  $\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}$  和  $\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}$  置换。

上式变为，

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_x = \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) l_x \theta + \mu \nabla^2 \dot{u}_x + (\lambda' + \mu') l_x \dot{\theta} \\ \rho \ddot{u}_y = \mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) l_y \theta + \mu \nabla^2 \dot{u}_y + (\lambda' + \mu') l_y \dot{\theta} \\ \rho \ddot{u}_z = \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) l_z \theta + \mu \nabla^2 \dot{u}_z + (\lambda' + \mu') l_z \dot{\theta} \end{cases} \quad (3-8)$$

上式就是开尔芬介质位移矢量满足的分量形式的波动方程。式中，

$$\theta = l_x u_x + l_y u_y + l_z u_z, \quad \dot{\theta} = l_x \dot{u}_x + l_y \dot{u}_y + l_z \dot{u}_z$$

$$\dot{u}_i = l_i \dot{u}_i, \quad (i = x, y, z \text{ 或 } 1, 2, 3), \quad \nabla^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$$

其中 $\theta$ 是体变系数， $\dot{\theta}$ 是体变系数对时间变量求偏导， $\nabla^2$ 是拉普拉斯算符， $l_i$ 是时间偏导算符，其它类同。

### 3.1.3 矢量形式的波动方程

位移矢量 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 与体积应变系数 $\theta$ 的关系是 $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$ 。式

(3-8)中的三个分量方程可以合并成如下方成

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \dot{\vec{u}} + (\lambda' + \mu') \nabla \dot{\theta} \quad (3-9)$$

由于 $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$ ，上式又可以写成

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \dot{\vec{u}} + (\lambda' + \mu') \nabla (\nabla \cdot \dot{\vec{u}}) \quad (3-10)$$

上述两式就是开尔芬介质矢量形式的波动方程。

## 3.2 矢量波场的纵波和横波波场的分解

开尔芬介质与均匀弹性各向同性介质一样，体积应变系数 $\theta$ 和旋转应变矢量 $\vec{\omega}$ 与位移矢量 $\vec{u}$ 同样存在 $\theta = \nabla \cdot \vec{u}$ 和 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$ 的关系。同时，开尔芬介质的地震波场也是无旋无散场。

基于上述理由，开尔芬介质矢量波场中体积应变系数 $\theta$ 和旋转应变矢量 $\vec{\omega}$ ，以及标量位 $\varphi$ 和矢量位 $\vec{\psi}$ 函数都可以进行分解。而且波场分解的场论原理和矢量分析算法与均匀弹性各向同性介质完全一样，但结果有所区别。

### 3.2.1 波场无旋位移场和无散位移场的分解

开尔芬介质矢量形式的波动方程是

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \dot{\vec{u}} + (\lambda' + \mu') \nabla \dot{\theta}$$

由于  $\theta = \nabla \cdot \bar{u}$ ，上式可写为

$$\rho \ddot{\bar{u}} = \mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \mu \nabla^2 \dot{\bar{u}} + (\lambda' + \mu') \nabla (\nabla \cdot \dot{\bar{u}})$$

无旋位移场  $\bar{u}_p$  的表达式为

$$\bar{u}_p = (u_x)_p \bar{i} + (u_y)_p \bar{j} + (u_z)_p \bar{k} \quad (3-11)$$

而均匀弹性各向同性介质，无旋位移场  $\bar{u}_p$  为

$$\rho \ddot{\bar{u}}_p = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \bar{u}_p$$

运用开尔芬介质与弹性介质之间的“对应规则”，用  $\lambda \leftrightarrow \lambda + \lambda'$ ，

$\mu \leftrightarrow \mu + \mu'$ ，置换上式中的  $\lambda$  和  $\mu$ ，得到

$$\rho \ddot{\bar{u}}_p = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \bar{u}_p + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\bar{u}}_p \quad (3-12)$$

上式就是开尔芬介质中  $\bar{u}_p$  满足的时间-空间域波动方程

与获得无旋位移场  $\bar{u}_p$  波动方程的方法。对于无散位移场  $\bar{u}_s$ ，在时间-空间域的波动方程为

$$\rho \ddot{\bar{u}}_s = \mu \nabla^2 \bar{u}_s + \mu' \nabla^2 \dot{\bar{u}}_s \quad (3-13)$$

### 3.2.2 矢量波场体变系数和旋转系数的波动分解

开尔芬介质的矢量形式波动方程是

$$\rho \ddot{\bar{u}} = \mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) + \mu \nabla^2 \dot{\bar{u}} + (\lambda' + \mu') \nabla (\nabla \cdot \dot{\bar{u}})$$

对上式等号两端位移矢量  $\bar{u}$  分别取散度，并注意到  $\theta = \nabla \cdot \bar{u}$  和  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ ，得到

$$\rho \ddot{\theta} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\theta} \quad (3-14)$$

把上式与式 (3-12)：

$$\rho \ddot{\bar{u}}_p = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \bar{u}_p + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\bar{u}}_p$$

进行比较，两式具有完全相同的数学表达形式，由此可知式 (3-14) 是开尔芬介质中纵波传播满足的波动方程。

对开尔芬介质矢量形式的波动方程两端位移矢量  $\bar{u}$  取旋度，并注意到  $\bar{\omega} = \nabla \times \bar{u}$  和  $\nabla \times \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) = \nabla \times \nabla \theta = 0$ 。经整理有

$$\rho \ddot{\tilde{\omega}} = \mu \nabla^2 \tilde{\omega} + \mu \nabla^2 \dot{\tilde{\omega}} \quad (3-15)$$

上式与

$$\rho \ddot{\tilde{u}}_s = \mu \nabla^2 \tilde{u}_s + \mu \nabla^2 \dot{\tilde{u}}_s$$

进行比较, 两式具有完全相同的数学表达形式, 由此可知式 (3-15) 是开尔芬介质中横波传播满足的波动方程。

### 3.2.3 位移位的标量位和矢量位满足的波动方程

标量位  $\varphi$  和矢量位  $\vec{\psi}$ , 它们满足

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s = \nabla \varphi + \nabla \times \vec{\psi}, \text{ 其中, } \nabla \times \vec{u}_p = 0, \nabla \cdot \vec{u}_s = 0 \quad (3-16)$$

式中  $\varphi$  是胀缩扰动的标量位函数,  $\vec{\psi}$  是旋转扰动的矢量位函数。把上式代入开尔芬介质的矢量波动方程

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \dot{\vec{u}} + (\lambda' + \mu') \nabla (\nabla \cdot \dot{\vec{u}})$$

然后再对该式等号两端各取散度, 经整理后得到

$$\rho \ddot{\phi} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\phi} \quad (3-17)$$

上式就是开尔芬介质中标量位移位  $\varphi$  满足的波动方程, 上式与 (3-14) 具有相同的数学表达形式。

同理, 把 (3-17) 式代入开尔芬介质的矢量波动方程, 然后再对该式等号两端各项取旋度。整理后得到

$$\rho \ddot{\vec{\psi}} = \mu \nabla^2 \vec{\psi} + \mu \nabla^2 \dot{\vec{\psi}} \quad (3-18)$$

上式就是开尔芬介质中矢量位移位函数  $\vec{\psi}$  满足的波动方程, 上式与 (3-15) 具有相同的数学表达形式。

综上所述, 时间-空间域纵波满足的波动方程是

$$\begin{cases} \rho \ddot{\vec{u}}_p = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \vec{u}_p + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\vec{u}}_p \\ \rho \ddot{\theta} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\theta} \\ \rho \ddot{\phi} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\phi} \end{cases}$$

横波满足的波动方程是

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_s = \mu \nabla^2 \bar{u}_s + \mu' \nabla^2 \dot{\bar{u}}_s \\ \rho \ddot{\bar{\omega}} = \mu \nabla^2 \bar{\omega} + \mu' \nabla^2 \dot{\bar{\omega}} \\ \rho \dot{\bar{\psi}} = \mu \nabla^2 \bar{\psi} + \mu' \nabla^2 \dot{\bar{\psi}} \end{cases}$$

### 3.2.4 应变系数与位移位函数之间的关系

下面阐述体积应变系数  $\theta$  和标量位移位函数  $\varphi$ ，以及旋转应矢量  $\bar{\omega}$  和矢量位移位函数  $\bar{\psi}$  之间的关系。

因为  $\theta = \nabla \cdot \bar{u}$  和  $\nabla \cdot \nabla \times \bar{\psi} = 0$ ，所以式 (3-17) 中

$$\nabla \bar{u} = \nabla \cdot (\nabla \varphi + \nabla \times \bar{\psi}) = \nabla^2 \varphi = \theta \quad (3-19)$$

纵波波动方程  $\rho \ddot{\varphi} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\varphi}$  可改写成

$$\rho \ddot{\varphi} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi + (\lambda' + 2\mu') l_t \nabla^2 \varphi \quad (3-20)$$

其中  $l_t$  表示对时间变量求偏导数。

比较 (3-19) 和 (3-20) 最后得到

$$\frac{\rho}{(\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') l_t} \ddot{\varphi} = \nabla^2 \varphi = \theta \quad (3-21)$$

上式就是体积应变系数  $\theta$  和标量位移位函数  $\varphi$  之间的关系。

同理， $\bar{u} = \bar{u}_p + \bar{u}_s = \nabla \varphi + \nabla \times \bar{\psi}$ ，取  $\bar{u} = \nabla \varphi - \nabla \times \bar{\psi}$ ，并对等号两端各项取旋度，且  $\nabla \times \bar{u}_p = \nabla \times \nabla \varphi = 0$  即  $\bar{u}_p$  是无旋场成分。于是有，

$$\nabla \times \bar{u} = \nabla \times \bar{u}_s = -\nabla \times \nabla \times \bar{\psi} = -\nabla (\nabla \cdot \bar{\psi}) + \nabla^2 \bar{\psi} \quad (3-22)$$

因为  $\nabla \cdot \bar{\psi} = 0$  和  $\nabla \times \bar{u} = \bar{\omega}$ 。则上式变为

$$\nabla \times \bar{u} = \bar{\omega} = \nabla^2 \bar{\psi} \text{ 或 } \bar{\omega} = \nabla^2 \bar{\psi} \quad (3-23)$$

横波波动方程  $\rho \dot{\bar{\psi}} = \mu \nabla^2 \bar{\psi} + \mu' \nabla^2 \dot{\bar{\psi}}$  可以写成

$$\frac{\rho}{\mu + \mu' l_t} \dot{\bar{\psi}} = \nabla^2 \bar{\psi} = \bar{\omega} \quad (3-24)$$

上式就是旋转应矢量  $\bar{\omega}$  和矢量位移位函数  $\bar{\psi}$  之间的关系。

综上所述，体积应变系数  $\theta$  和标量位移位函数  $\varphi$  之间的关系是

$$\frac{\rho}{(\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') l_t} \ddot{\varphi} = \nabla^2 \varphi = \theta$$

旋转应矢量  $\bar{\omega}$  和矢量位移函数  $\bar{\psi}$  之间的关系是

$$\frac{\rho}{\mu + \mu' l_i} \ddot{\bar{\psi}} = \nabla^2 \bar{\psi} = \bar{\omega}$$

### 3.3 纵波和横波传播的波函数

无旋位移场对应的波动方程为

$$\rho \ddot{\bar{u}}_p = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \bar{u}_p + (\lambda' + 2\mu') \nabla^2 \dot{\bar{u}}_p$$

取  $\bar{u}_p$  中的某一分量并令其为  $\tilde{u}_p$ ,  $\tilde{u}_p$  对应的时间域形式为  $u_p$ , 得到开尔芬介质频率域满足纵波传播的波动方程为

$$\rho \omega^2 \tilde{u}_p = [(\lambda + 2\mu) + (\lambda' + 2\mu') i \omega] \nabla^2 \tilde{u}_p \quad (3-25)$$

令描述衰减特性的无量纲品质因数是

$$Q_p = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda' + 2\mu'} \frac{1}{\omega} = \frac{V_p^2}{\eta_p^2} \frac{1}{\omega} \quad (3-26)$$

$$\eta_p^2 = \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho} = \frac{V_p^2}{Q_p} \frac{1}{\omega} \quad (3-27)$$

其中  $Q_p$  是纵波的品质因子;  $V_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$  是均匀弹性各向同性介质纵波传播的相速度;  $\omega$  是圆频率;  $\eta_p$  是介质对纵波的粘性参数。

由此式 (3-25) 可变为

$$\omega^2 \tilde{u}_p = (V_p^2 - \eta_p^2 i \omega) \nabla^2 \tilde{u}_p \quad (3-28)$$

再把  $Q_p$  代入可得

$$\omega^2 \tilde{u}_p = \left( V_p^2 - i \frac{V_p^2}{Q_p} \right) \nabla^2 \tilde{u}_p \quad (3-29)$$

由均匀弹性各向同性介质的波动方程式  $\ddot{\bar{u}}_p = V_p^2 \nabla^2 \bar{u}_p$ , 可以得到开尔芬介质中纵波传播的相速度为

$$V_{p-kelvin} = \left( V_p^2 - i \frac{V_p^2}{Q_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-30)$$



当  $1/Q_p \ll 1$  时, 上式可近似写成

$$V_{p-kelvin} \approx V_p^2 - i \frac{V_p^2}{2Q_p} \quad (3-31)$$

式中  $V_{p-kelvin}$  是开尔芬介质中纵波传播的相速度, 它为复数。

因为介质具有均匀各向同性, 利用  $\omega = k_x \cdot V_{p-kelvin}$  关系, 把  $V_{p-kelvin}$  代入  $X$  轴方向的波函数  $u_p = \exp[i(k_x x - \omega t)]$ , 经简化得到

$$u_p = \exp\left(-\frac{k_x V_p}{2Q_p} t\right) \exp\left[i(k_x x - k_x V_p t)\right]$$

最后得到

$$u_p = \exp(-\beta_p t) \exp\left[i(k_x x - k_x V_p t)\right] \quad (3-32)$$

式中:

$$\beta_p = \frac{k_x V_p}{2Q_p}, \quad k_x = \frac{\omega}{V_p}, \quad V_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$$

称为时间衰减系数。由上式可知: 波在传播过程中振幅按指数规律衰减, 衰减幅度均与衰减系数和传播时间成正比; 品质因数  $Q_p$  越小衰

减系数越大,  $Q_p$  与粘性拉梅系数  $(\lambda' + 2\mu')$  成反比。因为  $Q_p = \frac{V_p^2}{\eta_p^2} \frac{1}{w}$ ,

在  $\frac{V_p^2}{\eta_p^2}$  为常数时,  $Q_p$  与频率成反比, 即波在同样的传播时间或距离时,

高频成分较之低频成分衰减严重。在  $1/Q_p \ll 1$  时, 平面谐波传播的速度近似为均匀各向同性介质中的速度  $V_p$ ;  $\eta_p^2 = 0$  即  $(\lambda' + 2\mu') = 0$  时, 介质退化为均匀弹性各向同性介质,  $V_{p-kelvin} = V_p$ 。

复数相速度  $V_{p-kelvin}$ , 其实部描述了谐波等相位面的传播速度, 其虚部描述了谐波等振幅面的衰减特性; 地震波传播的速度与频率有关, 这种现象称为地震波传播的“频散现象”。频散现象是粘弹性介质中地震波传播的普遍现象, 产生的原因是粘弹性介质对地震波频率

成分具有选频吸收作用, 使对应频率成分的振幅衰减所造成。

同理, 开尔芬介质频率域满足横波传播的波动方程的某个分量可写成

$$\rho\omega^2\tilde{u}_s = (\mu + \mu'i\omega)\nabla^2\tilde{u}_s \quad (3-33)$$

令描述衰减特性的无量纲品质因数是

$$Q_s = \frac{\mu}{\mu'} \frac{1}{\omega} = \frac{V_s^2}{\eta_s^2} \frac{1}{\omega} \quad (3-34)$$

$$\eta_s^2 = \frac{\mu'}{\rho} = \frac{V_s^2}{Q_s} \frac{1}{\omega} \quad (3-35)$$

其中  $Q_s$  是横波的品质因子,  $\eta_s$  是介质对横波的粘性参数,  $V_s = \sqrt{\mu/\rho}$  是均匀弹性各向同性介质横波传播的相速度。

当  $1/Q_s \ll 1$  时, 经推导得到开尔芬介质中横波传播的相速度为

$$V_{s-kelvin} \approx V_s^2 - i \frac{V_s^2}{2Q_s} \quad (3-36)$$

### 3.4 开尔芬粘弹性介质波动方程的推导

考虑各向同性、强间断的、非均匀粘弹性介质的情况。其矢量形式的波动方程可表示如下:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mu\nabla^2\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\nabla\theta + \mu'\nabla^2\dot{\mathbf{u}} + (\lambda' + \mu')\nabla\dot{\theta}$$

式中,  $\mathbf{u}$  为位移向量,  $\rho$  为密度函数,  $\lambda, \mu$  为拉梅系数,  $\lambda', \mu'$  为粘滞系数,  $\theta$  为体应变,  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ,  $\Delta = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2})$ 。

对于二维情况, 由广义虎克定律粘弹性波动方程的应力分量和应变分量的关系为:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{zz} + (\lambda' + 2\mu')\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial t} + \lambda'\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial t} \\ \sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \lambda'\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial t} + (\lambda' + 2\mu')\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial t} \end{aligned} \quad (3-37)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_x = 2\mu\varepsilon_{xz} + 2\mu' \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial t}$$

写成向量形式，即粘弹性介质的本构方程为：

$$\sigma = D\varepsilon + D' \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

式中  $\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{zx})^T$  为应力分量， $\varepsilon = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{zx})^T$  为应变分量， $D$  为弹性矩阵， $D'$  为粘性矩阵。

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad D' = \begin{bmatrix} \lambda' + 2\mu' & \lambda' & 0 & 0 \\ \lambda' & \lambda' + 2\mu' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu' \end{bmatrix}$$

把矢量形式写成分量形式，且把应力和应变的关系及拉梅系数与纵横波的关系代入就可得到分量形式的波动方程（二维情况）：

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho(\alpha^2 - 2\beta^2) \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho \beta^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \eta_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \rho(\eta_p^2 - 2\eta_s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho \eta_s^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-38)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \rho(\alpha^2 - 2\beta^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \beta^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho \eta_p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} + \rho(\eta_p^2 - 2\eta_s^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho \eta_s^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3-39)$$

式中， $\alpha$ ， $\beta$  分别是纵横波的速度， $\eta_p$ ， $\eta_s$  分别是介质关于纵波和横波的粘滞系数：

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \beta^2 = \frac{\mu}{\rho} \\ \eta_p^2 &= \frac{\lambda' + 2\mu'}{\rho} = \frac{\alpha^2}{Q_p} \frac{1}{w}, \quad \eta_s^2 = \frac{\mu'}{\rho} = \frac{\beta^2}{Q_s} \frac{1}{w} \end{aligned}$$

其中  $Q_p$  和  $Q_s$  分别为纵波和横波的品质因子。

$$Q_p = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda' + 2\mu'} \frac{1}{w} = \frac{\alpha^2}{\eta_p^2} \frac{1}{w}, \quad Q_s = \frac{\mu}{\mu'} \frac{1}{w} = \frac{\beta^2}{\eta_s^2} \frac{1}{w}$$

以上各量的量纲：品质因子是无量纲量； $\rho\alpha^2$ 和 $\rho\beta^2$ 的量纲为“牛顿·米<sup>-2</sup>”； $\lambda'$ 和 $\mu'$ 的量纲为“牛顿·秒·米<sup>-2</sup>”；粘性系数 $\eta_p^2$ 和 $\eta_s^2$ 的量纲是“米<sup>2</sup>·秒<sup>-1</sup>”。

对于非均匀介质，式(3-38)和(3-39)式可表示成如下形式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \left[ \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ & + \left[ 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 4\beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ & + \left[ \eta_p^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x \partial z} + \eta_s^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right] \\ & + \left[ 2\eta_p \frac{\partial \eta_p}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right) - 4\eta_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} + 2\eta_s \frac{\partial \eta_s}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right) \right] \\ & + \left\{ \left[ \alpha^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + (\alpha^2 - 2\beta^2) \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \beta^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[ \eta_p^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right) - 4\eta_s \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} + \eta_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \right] \right\} / \rho \quad (3-40) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & \left[ \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ & + \left[ 2\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 4\beta \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ & + \left[ \eta_p^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x \partial z} + \eta_s^2 \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right] \\ & + \left[ 2\eta_p \frac{\partial \eta_p}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right) - 4\eta_s \frac{\partial \eta_s}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + 2\eta_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \left[ \alpha^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + (\alpha^2 - 2\beta^2) \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \left[ \eta_p^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right) - 4\eta_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \eta_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) \right] \right\} / \rho \quad (3-41)$$

### 3.5 边界条件

边界条件处理的好坏直接影响到模拟的最终结果。由于在计算区域人为引入了反射界面，产生人为边界反射，而该反射边界不是我们所期望的，因此必须构造边界条件，使该界面产生尽可能少的反射，这样才能模拟地震波在无限介质中传播的过程。目前使用较多的是 Clayton 等<sup>[21]</sup>提出的旁轴近似边界条件和 Cerjan 等<sup>[22]</sup>提出的扩边吸收边界条件。基于标量波动方程旁轴近似理论的吸收边界条件，由于频率和角度的限制，这些吸收边界条件效果并不很理想。而近几年发展起来的最佳匹配层<sup>[23]</sup> (perfectly matched layer, 简称 PML) 边界条件是波沿传播方向逐渐衰减的衰减边界方法，该方法最初是由 Berenger<sup>[24]</sup>在 1994 年作为一种电磁波的吸收边界条件提出的<sup>[25]</sup>，基本思想是在计算区域周围加入匹配层起到衰减边界的作用<sup>[26]</sup>。

#### 3.5.1 差分法

有限差分数值模拟技术是声波或弹性波场数值模拟中最为流行的方法之一<sup>[27]</sup>，然而传统的有限差分方法在求解波动方程时，会产生不期望的数值频散或称网格频散，导致了数值模拟结果分辨率的降低。究其根源，是因为基于波动方程的有限差分求解过程，通常是利用一离散化的有限差分方程去逼近波动方程，从而使得相速度变成了离散空间间隔的函数。因此，当每一波长内空间采样太少(即空间网格太粗)时，就会产生数值频散<sup>[28]</sup>。

二阶精度有限差分解实际上是对波动方程中的波函数(位移函数，位函数或其他函数)在其 Taylor 展开式中略去了二阶以上的高阶项后得到的一种近似表达式。为了提高有限差分的精度，减少数值模拟中频散的发生，需要进一步保留一部分高阶项，也就是说，要保留三阶、四阶甚至更高阶的微量，使差分方程的近似程度更加接近实际

的偏微分方程。同时,波动方程里还含有关于时间的二次导数项,但时间导数项的高精度差分却不能象空间差分那样通过增加参与计算的样点数来得到,因为在时间轴上,函数值是永远向前迭代的,而不能利用下一个时刻或以后几个时刻的函数值。因此,高精度的时间差分难以在时间轴上直接实现。但可以通过适当的变换,借助各空间坐标点上的波场值及导数值的组合,来达到提高差分精度的目的。通常情况下,只取等号右端的前三项,即达到所谓的二阶精度,这也就是关于时间的二阶差分格式。为了提高精度,可以再多取一项或几项,得到具有四阶或更高阶精度的时间差分格式,即通过多步高精度空间差分运算将时间差分的精度也提高到四阶或更高阶<sup>[29]</sup>。

通过提高有限差分格式的精度,可充分减少每一个波长内的采样点而不产生数值频散,因此问题可以轻而易举地得到解决。但事实上并非如此,因为再提高差分格式的精度,将会大大增加计算量。因此,不可能无限制地通过提高有限差分格式的精度来消除在粗网格计算条件下的网格频散<sup>[30]</sup>。

有限差分法是一种最常用的正演模拟方法,现已比较成熟,正向提高精度的方向发展<sup>[31]</sup>。1970年,Alterman等首先将有限差分法应用于地震波动方程模拟中,之后,Alford等研究了有限差分法的精度,Virieux提出了稳定的二阶(空间和时间)弹性波有限差分格式,它适用于任何泊松比的介质,Levander将Virieux的方法推广到空间四阶、时间二阶的情况。Crase则发展了精度可达任意阶的高阶交错网格法,但其计算量和内存要求比低阶有限差分法大幅度增加。Magnier等提出了最小网格有限差分法,它能压制非最小网格的人为现象。周家纪和贺振华用大网格快速差分算法模拟地震波的传播,其空间网格可以取得很大,大大缩短了计算时间。

### 1、旁轴近似边界条件

关于旁轴近似的问题,Claebout(1970)和Claebout与Johnson(1971)都作过深入的讨论,在这里仅对其作一简要的概述。

二维波场的模拟是在有限区域进行的,如图3-1所示包含四个人

工边界: BT、BB、BL、BR。我们以 BB 边界为例, 导出边界条件。  
式(3-38)和(3-39)可作为波场模拟的内点和次边界公式。

对于边界场点, 介质可看成是均匀的, 因此可得到以下表达式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\ & + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \eta_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3-42)$$

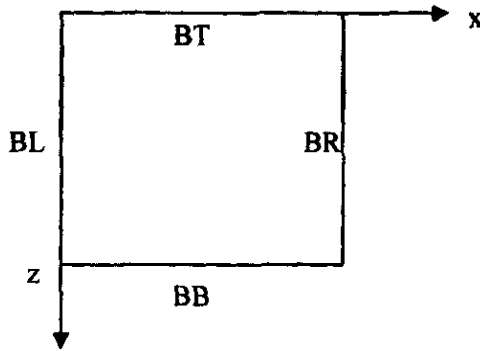


图 3-1 模拟区域与坐标系的关系图

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = & \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \\ & + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \eta_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3-43)$$

上述两式可写成:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = D_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + H_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z \partial x} + P_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ D_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + H_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial z} + P_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] \quad (3-44)$$

$$\text{式中: } D_1 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} \eta_p^2 & 0 \\ 0 & \eta_s^2 \end{bmatrix}, \quad H_1 = (\alpha^2 - \beta^2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = (\eta_p^2 - \eta_s^2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} \beta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} \eta_s^2 & 0 \\ 0 & \eta_p^2 \end{bmatrix}$$

对(3-44)式 Fourier 变换得:

$$I = D_1 \left(\frac{k_x}{w}\right)^2 + H_1 \left(\frac{k_x}{w} \frac{k_z}{w}\right) + P_1 \left(\frac{k_z}{w}\right)^2 + w \left[ D_2 \left(\frac{k_x}{w}\right)^2 + H_2 \left(\frac{k_x}{w} \frac{k_z}{w}\right) + P_2 \left(\frac{k_z}{w}\right)^2 \right] \quad (3-45)$$

(1) 边界为二阶吸收边界 I

对下边界 BB 近似成只含  $\frac{k_z}{w}$  的一次式, 设

$$I\left(\frac{k_z}{w}\right) = A_1 + B_1 \left(\frac{k_x}{w}\right) + C_1 \left(\frac{k_x}{w}\right)^2 + w \left[ A_2 + B_2 \left(\frac{k_x}{w}\right) + C_2 \left(\frac{k_x}{w}\right)^2 \right] \quad (3-46)$$

将上式代入(3-44)式, 比较系数, 可得:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}, \quad B_1 = (\beta - \alpha) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2} - \alpha & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} - \beta \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\eta_s^2}{2\beta^3} & 0 \\ 0 & -\frac{\eta_p^2}{2\alpha^3} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \left( \frac{\eta_p^2}{2\alpha^2} - \frac{\eta_s^2}{2\beta^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{\beta\beta} \\ -\frac{\beta}{\alpha} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\eta_s^2}{2\beta^2} \left( \frac{\beta}{2} - \alpha \right) & 0 \\ 0 & -\frac{\eta_p^2}{2\alpha^2} \left( \frac{\alpha}{2} - \beta \right) \end{bmatrix}$$

对(3-45)式两边同乘以  $w^2$  后 Fourier 变换可得 BB 边的二阶吸收边界条件:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial z} + A_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - B_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} + C_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - B_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} + C_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (3-47)$$

同理, 可得

顶边界:

$$-\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial z} + A_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - B_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} + C_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - B_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} + C_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (3-48)$$

左边界:



$$-\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} + A_1' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - B_1^T \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial z} + C_1' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - B_2^T \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial z} + C_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3-49)$$

右边界:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} + A_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - B_1^T \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial z} + C_1' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - B_2^T \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial z} + C_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3-50)$$

其中:

$$A_1' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix}, \quad B_1^T = (\beta - \alpha) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\beta} & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1' = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} - \beta & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{2} - \alpha \end{bmatrix}$$

$$A_2' = \begin{bmatrix} -\frac{\eta_p^2}{2\alpha^3} & 0 \\ 0 & -\frac{\eta_s^2}{2\beta^3} \end{bmatrix}, \quad B_2^T = \left( \frac{\eta_p^2}{2\alpha^2} - \frac{\eta_s^2}{2\beta^2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\beta}{\alpha} \\ -\frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2' = \begin{bmatrix} -\frac{\eta_p^2}{2\alpha^2} \left( \frac{\alpha}{2} - \beta \right) & 0 \\ 0 & -\frac{\eta_s^2}{2\beta^2} \left( \frac{\beta}{2} - \alpha \right) \end{bmatrix}$$

(2) 边界为二阶吸收边界 II

此时下边界的近似式为:

$$I\left(\frac{k_z}{w}\right) = A_1 + C_1 \left(\frac{k_x}{w}\right)^2 + w \left[ A_2 + C_2 \left(\frac{k_x}{w}\right)^2 \right] \quad (3-51)$$

同理将 (3-51) 式代入 (3-44) 式可得二阶吸收边界条件 II。

$$\text{顶边界: } -\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial z} + A_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + C_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (3-52)$$

$$\text{底边界: } \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial z} + A_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + C_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (3-53)$$

$$\text{左边界: } -\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} + A_1' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + C_1' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + C_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3-54)$$

$$\text{右边界: } \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t \partial x} + A_1 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + C_1' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + C_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (3-55)$$

式中的系数与1中吸收边界条件中相应的系数相同。

(3) 边界为一阶吸收边界

利用波动方程一阶旁轴近似, 由式(3-45)可得BB的一阶吸收

$$\text{边界: } \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + A_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-56)$$

同理可得:

$$\text{顶边界: } \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} - A_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} - A_2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-57)$$

$$\text{左边界: } \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - A_1' \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} - A_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-58)$$

$$\text{右边界: } \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + A_1' \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + A_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-59)$$

式中的系数与二阶吸收边界条件中相应的系数相同。

(4) 边界场为自由边界 (仅对顶边界)

根据弹性波动理论可知, 在自由边界 BT( $Z=0$ )上应力应消失, 则有:

$$\sigma_{xx} |_{z=0} = 2\mu \varepsilon_{xx} + 2\mu' \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} \quad (3-60)$$

$$\sigma_{zz} |_{z=0} = \lambda \varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{zz} + \lambda' \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t} + (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial t} \quad (3-61)$$

$$\text{即 } \beta^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \eta_s^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) = 0 \quad (3-62)$$

$$(\alpha^2 - 2\beta^2) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\beta^2 \frac{\partial w}{\partial z} + (\eta_p^2 - 2\eta_s^2) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + 2\eta_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0 \quad (3-63)$$

(5) 边界为反射边界 (仅对顶边界)

当顶边界为反射边界时, 顶边界上的波场值均为零。

当四围均为吸收边界, 此时角点的边界条件可用波动方程的一阶旁轴近似来表示。

对于左边界, 一阶旁轴近似表示如下:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - A_1' \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} - A_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-64)$$

对于右边界, 一阶旁轴近似表示如下:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + A_1' \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + A_2' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-65)$$

式(3-64)为左上角点和左下角点的边界条件, 式(3-65)为右上角点和右下角点的边界条件。

此外, 当顶边界为自由边界且其他边为吸收边界, 则角点的边界可用式(3-62)和(3-63)来表示。左上角和右上角用(3-62)式表示, 左下角和右下角用(3-63)式表示。

而当顶边界为反射边界且其他边为吸收边界时, 角点的波场值为零。

稳定性是一个实用差分格式必备的条件。差分格式有两种, 一是隐式差分格式, 二是显式差分格式。一般来讲, 隐式差分格式为无条件稳定, 而显式差分格式是有条件稳定的, 并随差分精度的不同而有所不同, 在理论分析和实验证明后, 当空间和时间采样间隔满足条件

$$\Delta t \leq \frac{\left[1 + (v_{s_{\max}} / v_{p_{\min}})^2\right]^{(-1/2)} \cdot h}{v_{p_{\max}}} \quad (3-66)$$

时, 式中  $h = \min(\Delta x, \Delta z)$ , 为了使条件进一步加强, 我们在实际应用中采用  $1/2 \Delta t$ 。

在差分计算过程中, 如果空间和时间采样间隔不当, 就会导致波形畸变, 派生出多个同相轴, 这种现象称为频散现象。它是由于相速度和群速度的不一致而造成的, 并且这种现象随空间采样间隔的增加而增强。空间采样间隔引起的频散, 高频成分滞后于低频成分; 而时

间采样间隔引起的频散，高频成分超前于低频成分。因此在差分计算时，当采样间隔满足  $G$ （每个波场所占的网格点数）的条件：

$$G = \lambda / h \geq 5$$

$$h \leq \frac{1}{5} \lambda = \frac{1}{5} v_{\min} T = \frac{1}{5} v_{\min} / f, \text{ 可以取 } h = \frac{1}{10} v_{\min} / f$$

式中  $\lambda$  为波长， $h$  为最大采样间隔，即  $h = \max(\Delta x, \Delta z)$ 。

## 2、PML 吸收边界条件

图 3-2 是利用完全匹配层作为吸收边界条件的示意图，中间部分是所要研究的区域，四周是完全匹配层，用来吸收边界反射<sup>[32]</sup>。

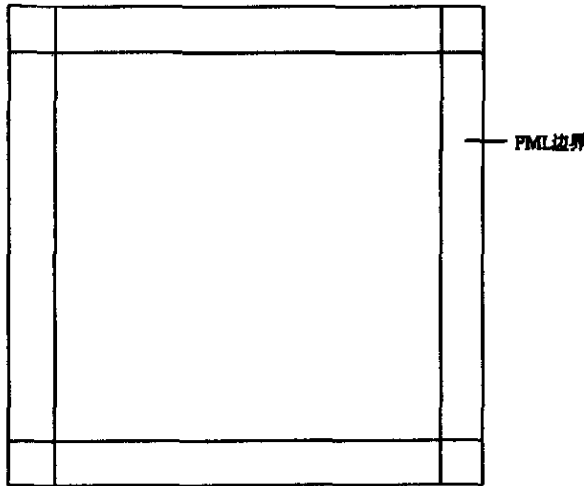


图 3-2 PML 吸收边界的计算网格示意图

下面以二维声波方程来说明完全匹配层的基本思想。二维声波方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 u$$

其中  $u$  是位移函数， $v$  是介质速度，上面方程可以进一步改写为：

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} = v^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} = v^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{cases} \quad \text{其中,} \quad \begin{cases} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial z} \end{cases}$$

其中  $u = u_x + u_z$ ,  $u_x$ ,  $u_z$ ,  $A_x$ ,  $A_z$  为新引入的中间变量。

为了消除反射, PML 区域必须要有衰减, 方程中加入指数衰减项, 方程变为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} + q_x u_x = v^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + q_z u_z = v^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial A_x}{\partial t} + q_x A_x = \frac{\partial (u_x + u_z)}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} + q_z A_z = \frac{\partial (u_x + u_z)}{\partial z} \end{cases}$$

其中的指数衰减项  $q_j$  ( $j = x, z$ ) 与  $(h/H)^n$  成比例关系, 这里的  $h$  是 PML 的深度,  $H$  是 PML 的总深度<sup>[33]</sup>。

也就是说  $q_x$  起到衰减  $x$  方向传播的波,  $q_z$  起到衰减  $z$  方向传播的波的作用。对于任意方向传播的波, 以通过矢量分解, 分解成  $x$  方向和  $z$  方向传播的波, 分别进行衰减。波场是按传播距离的指数规律衰减, 衰减速度很快。当衰减系数  $q_x$ 、 $q_z$  随空间位置变化时, 不会在介质中产生任何反射<sup>[34]</sup>。

以  $\frac{\partial u_x}{\partial t} + q_x u_x = v^2 \frac{\partial A_x}{\partial x}$  为例来说明衰减方程的差分解法。方程两端

同乘以因子  $e^{q_x t}$ , 则方程变为:

$$e^{q_x t} \frac{\partial u_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x u_x = v^2 e^{q_x t} \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

上式经整理可写成如下形式:

$$\frac{\partial (e^{q_x t} u_x)}{\partial t} = v^2 e^{q_x t} \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

对上式做时空域差分变换, 可得

$$u_x^{n+1} = \left[ u_x^n + \frac{\Delta t v^2}{\Delta x} (A_x^{i+1} - A_x^i) \right] e^{-q_x \Delta t}$$

同理，对于粘弹性介质中的波动方程，如下式所示：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \eta_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \rho f \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \eta_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \rho f_z \end{aligned} \quad (3-67)$$

上面两式可进一步改写成下面的形式：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial C_x}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial C_x}{\partial x} + \eta_s^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \\ &\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial x} \\ &\frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial z} \\ &\frac{\partial C_x}{\partial t} = \frac{\partial(w_x + w_z)}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \alpha^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial C_z}{\partial z} + \beta^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial C_z}{\partial z} + \eta_s^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} \right] \\ &\frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial(w_x + w_z)}{\partial x} \\ &\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial(w_x + w_z)}{\partial z} \\ &\frac{\partial C_z}{\partial t} = \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

其中， $A_x, A_z, B_x, B_z, C_x, C_z$ 为引入的中间变量。对上面两式引入衰减变量可得：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + q_x u_x &= \alpha^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial C_x}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + q_z u_z &= \beta^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_s^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial A_x}{\partial t} + q_x A_x &= \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z}{\partial t} + q_z A_z &= \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial z} \\ \frac{\partial C_x}{\partial t} + q_z C_x &= \frac{\partial(w_x + w_z)}{\partial z} \end{aligned} \right. \quad (3-68)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_x}{\partial t} + q_x w_x &= \alpha^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial C_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial C_z}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial w_z}{\partial t} + q_z w_z &= \beta^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_s^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} + q_x B_x &= \frac{\partial(w_x + w_z)}{\partial x} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + q_z B_z &= \frac{\partial(w_x + w_z)}{\partial z} \\ \frac{\partial C_z}{\partial t} + q_x C_z &= \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad (3-69)$$

对(3-68)和(3-69)两端同乘以因子  $e^{q_x t}$ ，则方程变为：

$$\left\{ \begin{aligned} e^{q_x t} \frac{\partial u_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x u_x &= e^{q_x t} \left[ \alpha^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial C_x}{\partial x} \right] + e^{q_x t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial C_x}{\partial x} \right] \\ e^{q_x t} \frac{\partial u_z}{\partial t} + e^{q_x t} q_z u_z &= e^{q_x t} \beta^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} + e^{q_x t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_s^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \\ e^{q_x t} \frac{\partial A_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x A_x &= e^{q_x t} \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial x} \\ e^{q_x t} \frac{\partial A_z}{\partial t} + e^{q_x t} q_z A_z &= e^{q_x t} \frac{\partial(u_x + u_z)}{\partial z} \\ e^{q_x t} \frac{\partial C_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_z C_x &= e^{q_x t} \frac{\partial(w_x + w_z)}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} e^{q_x t} \frac{\partial w_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x w_x &= e^{q_x t} \left[ \alpha^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial C_z}{\partial z} \right] + e^{q_x t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial C_z}{\partial z} \right] \\ e^{q_x t} \frac{\partial w_z}{\partial t} + e^{q_x t} q_x w_z &= e^{q_x t} \beta^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} + e^{q_x t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_s^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \\ e^{q_x t} \frac{\partial B_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x B_x &= e^{q_x t} \frac{\partial (w_x + w_z)}{\partial x} \\ e^{q_x t} \frac{\partial B_z}{\partial t} + e^{q_x t} q_x B_z &= e^{q_x t} \frac{\partial (w_x + w_z)}{\partial z} \\ e^{q_x t} \frac{\partial C_z}{\partial t} + e^{q_x t} q_x C_z &= e^{q_x t} \frac{\partial (u_x + u_z)}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

对(3-68)式进行时空域差分变换, 经整理得到  $x$  方向的差分计算公式:

$$\begin{aligned} u_x^{n+1} &= \left\{ u_x^n + \Delta t \left[ \alpha^2 \frac{A_x^{i+1} - A_x^i}{\Delta x} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{C_x^{i+1} - C_x^i}{\Delta x} \right] + \right. \\ &\left. \left\{ \left[ \eta_p^2 \frac{A_x^{i+1} - A_x^i}{\Delta x} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{C_x^{i+1} - C_x^i}{\Delta x} \right]^n - \left[ \eta_p^2 \frac{A_x^{i+1} - A_x^i}{\Delta x} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{C_x^{i+1} - C_x^i}{\Delta x} \right]^{n-1} \right\} \right\} e^{-q_x \Delta t} \\ u_z^{n+1} &= \left\{ u_z^n + \Delta t \left[ \beta^2 \frac{A_z^{j+1} - A_z^j}{\Delta z} \right] \right. \\ &\left. + \left\{ \left[ \eta_s^2 \frac{A_z^{j+1} - A_z^j}{\Delta z} \right]^n - \left[ \eta_s^2 \frac{A_z^{j+1} - A_z^j}{\Delta z} \right]^{n-1} \right\} \right\} e^{-q_x \Delta t} \\ A_x^{n+1} &= \left\{ A_x^n + \Delta t \left[ \frac{u_x^{i+1} - u_x^i}{\Delta x} + \frac{u_z^{i+1} - u_z^i}{\Delta x} \right] \right\} e^{-q_x \Delta t} \\ A_z^{n+1} &= \left\{ A_z^n + \Delta t \left[ \frac{u_x^{j+1} - u_x^j}{\Delta z} + \frac{u_z^{j+1} - u_z^j}{\Delta z} \right] \right\} e^{-q_x \Delta t} \\ C_x^{n+1} &= \left\{ C_x^n + \Delta t \left[ \frac{w_x^{j+1} - w_x^j}{\Delta z} + \frac{w_z^{j+1} - w_z^j}{\Delta z} \right] \right\} e^{-q_x \Delta t} \end{aligned}$$

对上(3-69)式进行时空域差分变换, 经整理得到  $z$  方向的差分计算公式:



$$\begin{aligned}
 w_x^{n+1} &= \left\{ w_x^n + \Delta t \left[ \alpha^2 \frac{B_z^{j+1} - B_z^j}{\Delta z} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{C_z^{j+1} - C_z^j}{\Delta z} \right] + \right. \\
 &\quad \left. \left[ \eta_p^2 \frac{B_z^{j+1} - B_z^j}{\Delta z} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{C_z^{j+1} - C_z^j}{\Delta z} \right]^n - \left[ \eta_p^2 \frac{B_z^{j+1} - B_z^j}{\Delta z} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{C_z^{j+1} - C_z^j}{\Delta z} \right]^{n-1} \right\} e^{-q_x \Delta t} \\
 w_z^{n+1} &= \left\{ w_z^n + \Delta t \left[ \beta^2 \frac{B_x^{i+1} - B_x^i}{\Delta x} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \eta_s^2 \frac{B_x^{i+1} - B_x^i}{\Delta x} \right]^n - \left[ \eta_s^2 \frac{B_x^{i+1} - B_x^i}{\Delta x} \right]^{n-1} \right\} e^{-q_z \Delta t} \\
 B_x^{n+1} &= \left\{ B_x^n + \Delta t \left[ \frac{w_x^{i+1} - w_x^i}{\Delta x} + \frac{w_z^{j+1} - w_z^j}{\Delta x} \right] \right\} e^{-q_x \Delta t} \\
 B_z^{n+1} &= \left\{ B_z^n + \Delta t \left[ \frac{w_x^{j+1} - w_x^j}{\Delta z} + \frac{w_z^{i+1} - w_z^i}{\Delta z} \right] \right\} e^{-q_z \Delta t} \\
 C_z^{n+1} &= \left\{ C_z^n + \Delta t \left[ \frac{u_x^{i+1} - u_x^i}{\Delta x} + \frac{u_z^{j+1} - u_z^j}{\Delta x} \right] \right\} e^{-q_z \Delta t}
 \end{aligned}$$

### 3.5.2 伪谱法

有限差分法的算法简单快速，但难以克服频散效应，而要解决频散问题，须加密数值计算的网格，这势必会导致计算量增加，效率下降。因此，选择一种既能精确计算，又有较高计算效率的方法就显得非常必要，而伪谱法正好符合这种要求。

伪谱法是一种有效的数值模拟方法，权衡精度和效率，有其它方法不可替代的优点。在二维介质中，用伪谱法做波传播的正演数值模拟由来已久，由于条件限制，以前的研究者仅限于二维算法程序的开发和研究。20世纪80年代末，Kosloff等人用三维声波方程和三维弹性波方程做均匀各向同性介质中波传播的模拟，并与解析计算结果和超声物理模拟进行比较，证明了方法的正确性。Reshef等用伪谱法作了三维声波模拟，所设计的模型在水平和垂直方向有任意的密度和波

速,并应用了吸收边界条件。Nielsen 等将伪谱法用到了曲线网格的二维声波方程的模拟中。Tessmen 等则用伪谱法在存在表面地形的情况下模拟了弹性波的传播。1987年, Tal-Ezer 等提出了新的快速展开法,该方法可看作谱法类中的另一种。与伪谱法不同的是,其时间导数用契比雪夫展开法来计算,可取较大的时间步长,当其与高阶的空间微商结合时,有较高的精度。该方法实质上避免了伪谱法计算中时间精度是二阶而空间精度可达无限阶的不平衡性。但是该法处理吸收边界和自由表面边界条件比较困难,计算量和占用内存也较大。张文生等(1998)用伪谱法进行了二维横向各向同性介质波动方程的正演模拟,特别是对边界吸收问题作了有效的处理,证明了伪谱法是有限差分法近似阶数趋于无限时的极限,它用快速傅氏变换来计算空间导数,计算精度要高于有限差分法。为满足快速傅氏变换的条件,伪谱法的空间网格点数必须限制取 2 的正整数幂<sup>[35]</sup>。

反周期扩展法是针对伪谱法提出来的,因为快速傅氏变换包含着周期性的边界条件,由此计算的波场有较强的周期性边界反射或一些假像,这可以通过增加两倍的计算量来消除这些效应,但这种处理不能用于其它的正演模拟方法中。当有必要考虑底面边界反射时,可采用衰减型吸收边界条件和反周期扩展相结合的方法来消除底边界的效应。同时,在伪谱法计算中,震源可更集中于一点,这对提高精度有好处;还可取相对较大的空间网格步长,以使用来减少计算量。另外,对波动方程系数间断的情况,伪谱法比有限差分法更有效,这也是伪谱法比差分法精度高的另一原因。

伪谱法是用 Fourier 变换求空间导数,用有限差分求时间导数的一种数值计算方法。它采用 Fourier 变换的微分性质,将波动方程中对空间的导数运算进行 Fourier 变换到波数域,而空间域的导数运算在波数域中变为乘法运算,然后将其进行反 Fourier 变换,回到空间域,完成空间导数运算,而时间导数采用差分近似。伪谱法在一个空间波长上最少仅需要 2 个网格点,由此可以次用较大的空间步长,减少计算量,进而节省计算机内存。且利用空间的全局信息对波场函数

关于空间变量以三角函数为基作插值逼近, 可用快速傅立叶变换求得, 具有较高的计算精度和较快的计算速度。从而使它具有了高精度、节省计算时间、节省存储空间以及对计算区域内介质性质变化不用作特别处理等优点。

用伪谱法解方程时, 对空间和时间都进行了离散化, 这种离散化必然导致计算误差<sup>[36]</sup>。误差主要来源于两个方面, 一个是离散空间产生的误差, 就是在离散的空间中表示函数; 另一个是时间微分造成的误差。如果这些误差随着时间的递推而增加的话。就会引起解的发散, 从而导致解的不稳定。对于弹性波, 因 $V_p > V_s$ , 取最大纵波波速值, 得到弹性波时间步长 $\Delta t$ 和网格单元边长 $\Delta d$ 应满足的稳定性条件:

$$\Delta t < \frac{\sqrt{2}\Delta d}{\pi V_{p\max}}$$

### 1、扩边吸收边界条件

在数值模拟过程中, 为了避免 Fourier 变换周期性产生的折叠效应和人为边界条件引入的边界反射, 采用 Cerjan C. (1985) 提出的吸收边界, 即在边界乘上一个缓慢衰减的权函数:

$$G = e^{-[\alpha(N-i)]^2}, 1 \leq i \leq N$$

其中 $\alpha$ 为衰减系数,  $N$ 为吸收边界宽度。显然, 这种离散型吸收边界条件在吸收区域使波的振幅呈指数衰减而被吸收掉, 从而不产生边界反射。该方法主要缺点是吸收系数 $\alpha$ 和参数 $N$ 要凭经验选取, 如吸收系数选择不合适, 则仍会导致很强的边界反射。

此外, 本文中还使用了一种新的扩边方法。普通的扩边是直接原来边界旁补上一定宽度的边界, 此时所补边界的参数场信息取决于原始边界的参数场信息, 即无论原始地层是水平层还是倾斜层所扩边界都为水平层。这样就存在一个问题, 若原始地层为倾斜层, 扩边之后原始边界和所补的边界的交点就会形成点绕射, 使得波场变得复杂, 降低了地震分辨率。为了尽可能消除由此造成的影响, 我们在补

边的同时考虑了地层的变化趋势，按照地层的原始形态补边，这对降低倾斜层的影响有一定的效果。

## 2、PML 吸收边界条件

粘弹性介质伪谱法 PML 边界的推导过程同差分法类似，只是在对方程离散时，对时间做差分变换，对空间做傅立叶变换。伪谱法的基本思想是通过快速傅氏变换避免对空间坐标求偏导数，只是在时间域上作差分运算，可使用较大网格。相对于有限差分而言，无频散误差，精度高。而且利用快速傅立叶变换（FFT）计算空间导数，速度也较快。对于时间导数，则是采用二阶精度的中心差分法求解。

$$\left\{ \begin{aligned} e^{q_x t} \frac{\partial u_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x u_x &= e^{q_x t} \left[ \alpha^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial C_x}{\partial x} \right] + e^{q_x t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial A_x}{\partial x} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial C_x}{\partial x} \right] \\ e^{q_z t} \frac{\partial u_z}{\partial t} + e^{q_z t} q_z u_z &= e^{q_z t} \beta^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} + e^{q_z t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_s^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \\ e^{q_x t} \frac{\partial A_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x A_x &= e^{q_x t} \frac{\partial (u_x + u_z)}{\partial x} \\ e^{q_z t} \frac{\partial A_z}{\partial t} + e^{q_z t} q_z A_z &= e^{q_z t} \frac{\partial (u_x + u_z)}{\partial z} \\ e^{q_x t} \frac{\partial C_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x C_x &= e^{q_x t} \frac{\partial (w_x + w_z)}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

对于上式时间域做差分变换，空间域做傅立叶变换。经整理得到  $x$  方向的差分计算公式：

$$\begin{aligned} u_x^{n+1} &= \left\{ u_x^n + \Delta t \left[ \alpha^2 (ik_x A_x) + (\alpha^2 - \beta^2) (ik_x C_x) \right] \right. \\ &\quad + \left\{ \left[ \eta_p^2 (ik_x A_x) + (\eta_p^2 - \eta_s^2) (ik_x C_x) \right]^n \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[ \eta_p^2 (ik_x A_x) + (\eta_p^2 - \eta_s^2) (ik_x C_x) \right]^{n-1} \right\} \right\} e^{-q_x \Delta t} \\ u_z^{n+1} &= \left\{ u_z^n + \Delta t \beta^2 (ik_z A_z) + \left\{ \left[ \eta_s^2 (ik_z A_z) \right]^n - \left[ \eta_s^2 (ik_z A_z) \right]^{n-1} \right\} \right\} e^{-q_z \Delta t} \\ A_x^{n+1} &= \left[ A_x^n + ik_x (u_x + u_z) \right] e^{-q_x \Delta t} \end{aligned}$$

$$A_z^{n+1} = [A_z^n + ik_z(u_x + u_z)]e^{-q_z \Delta t}$$

$$C_x^{n+1} = [C_x^n + ik_x(w_x + w_z)]e^{-q_x \Delta t}$$

$$\left\{ \begin{aligned} e^{q_x t} \frac{\partial w_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x w_x &= e^{q_x t} \left[ \alpha^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\partial C_z}{\partial z} \right] + e^{q_x t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_p^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} + (\eta_p^2 - \eta_s^2) \frac{\partial C_z}{\partial z} \right] \\ e^{q_x t} \frac{\partial w_z}{\partial t} + e^{q_x t} q_x w_z &= e^{q_x t} \beta^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} + e^{q_x t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \eta_s^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} \right] \\ e^{q_x t} \frac{\partial B_x}{\partial t} + e^{q_x t} q_x B_x &= e^{q_x t} \frac{\partial (w_x + w_z)}{\partial x} \\ e^{q_x t} \frac{\partial B_z}{\partial t} + e^{q_x t} q_x B_z &= e^{q_x t} \frac{\partial (w_x + w_z)}{\partial z} \\ e^{q_x t} \frac{\partial C_z}{\partial t} + e^{q_x t} q_x C_z &= e^{q_x t} \frac{\partial (u_x + u_z)}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

对于上式时间域做差分变换，空间域做傅立叶变换。经整理得到  $z$  方向的差分计算公式：

$$\begin{aligned} w_x^{n+1} &= \left\{ w_x^n + \Delta t \left[ \alpha^2 (ik_z B_z) + (\alpha^2 - \beta^2) (ik_z C_z) \right] \right. \\ &\quad + \left. \left[ \eta_p^2 (ik_z B_z) + (\eta_p^2 - \eta_s^2) (ik_z C_z) \right]^n \right. \\ &\quad \left. - \left[ \eta_p^2 (ik_z B_z) + (\eta_p^2 - \eta_s^2) (ik_z C_z) \right]^{n-1} \right\} e^{-q_x \Delta t} \end{aligned}$$

$$w_z^{n+1} = \left\{ w_z^n + \Delta t \beta^2 (ik_x B_x) + \left[ \eta_s^2 (ik_x B_x) \right]^n - \left[ \eta_s^2 (ik_x B_x) \right]^{n-1} \right\} e^{-q_x \Delta t}$$

$$B_x^{n+1} = [B_x^n + ik_x(w_x + w_z)]e^{-q_x \Delta t}$$

$$B_z^{n+1} = [B_z^n + ik_z(w_x + w_z)]e^{-q_z \Delta t}$$

$$C_z^{n+1} = [C_z^n + ik_z(u_x + u_z)]e^{-q_x \Delta t}$$

### 3.6 震源函数

选取雷克子波、雷克子波的一阶导数、最小相位子波三种函数分别作为震源函数，在应用时可根据实际情况选取其中的一个。

雷克子波:  $F = (1 - 2\pi^2 f^2 t^2) \exp(-\pi^2 f^2 t^2)$

其一阶导数:

$$F = (-4\pi^2 f^2 t) \exp(-\pi^2 f^2 t^2) + (1 - 2\pi^2 f^2 t^2) \exp(-\pi^2 f^2 t^2) (-2\pi^2 f^2 t)$$

最小相位子波:  $F = t \cdot \exp(-3.5 ft) \cdot \sin(2\pi ft)$

式中  $f$  为子波主频。

### 3.7 激发方式

在进行正演模拟的时候,必然要考虑关于震源的加载问题,我们使用的震源类型主要有以下四种:

#### 3.7.1 集中力源

集中力源是以网格内的一点为中心,沿某一方向进行震源模拟,其中既有纵波分量,也有横波分量。

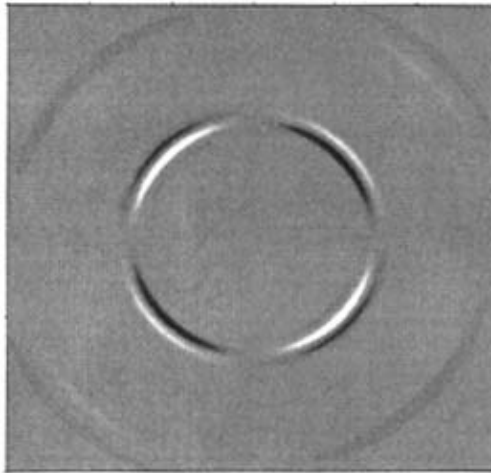


图 3-3 集中力源在均匀介质中的时间切片 ( $u$  分量)

#### 3.7.2 纵波源

沿着网格内构成圆形的四点的径向方向模拟炸药震源,只产生纵波分量。

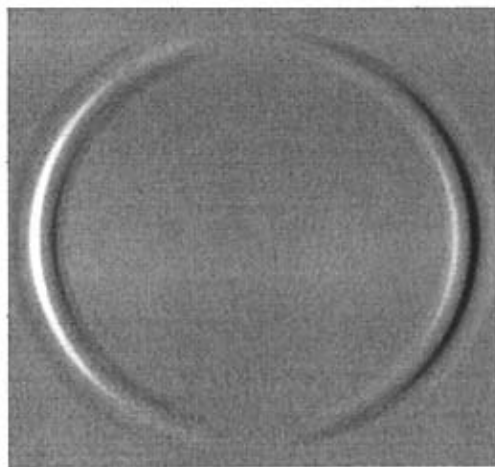


图 3-4 纵波源在均匀介质中的时间切片 ( $u$  分量)

### 3.7.3 横波源

沿着网格内构成圆形的四点的切线方向模拟剪切震源，只产生横波分量。

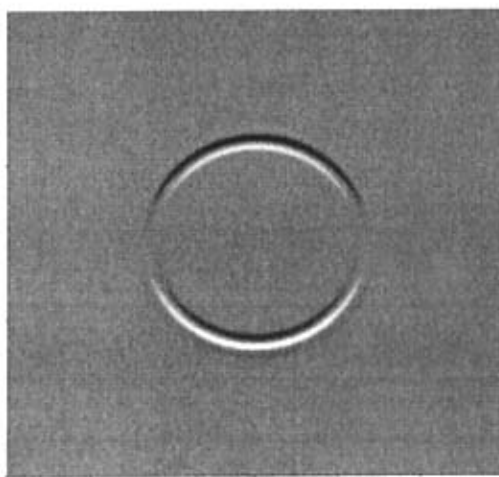


图 3-5 横波源在均匀介质中的时间切片 ( $u$  分量)

### 3.7.4 等能量源

等能量震源是沿着网格内构成圆形的四点的网格线方向进行震源模拟，它的某一方向上的力是该点处横波力与纵波力的矢量和。

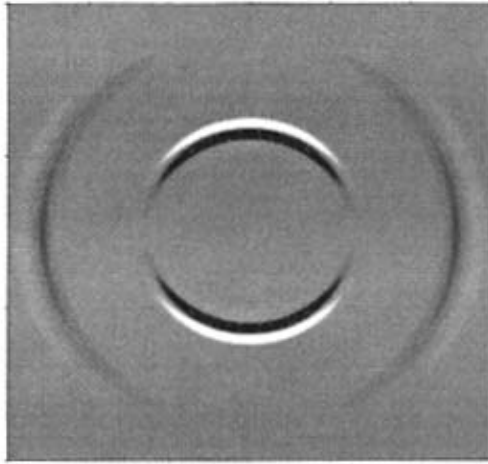


图 3-6 等能量源在均匀介质中的时间切片 (u 分量)

在实际应用时,会根据不同的需要选择不同的震源类型进行数值模拟。

### 3.8 数值模拟

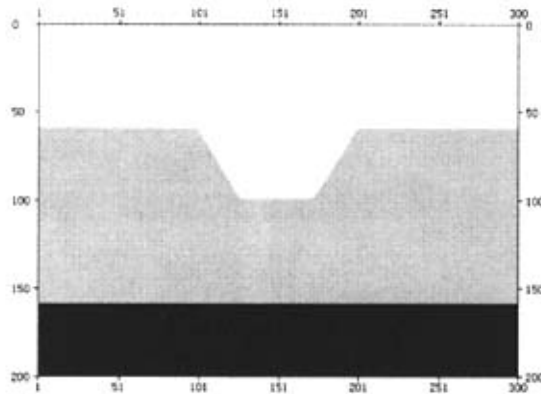
#### 3.8.1 差分法和伪谱法模拟

为了验证伪谱法和差分法这两种方法之间的差异,我们设计了一  $3000m \times 2000m$  的凹陷模型,如图 3-7 所示。空间间隔  $\Delta x = \Delta z = 10m$ , 时间采样间隔为  $1ms$ ,震源在中心  $(1500m, 0m)$  处,主频为  $15 Hz$ ,使用最小相位子波模拟,其它参数如表 3-1 所示。

表 3-1 凹陷介质参数

层号	深度(m)	$V_p (m/s)$	$\rho (g/cm^3)$
第一层	580(980)	2000	2
第二层	1590	2500	3
第三层	2000	3000	4





3-7 凹陷地质模型

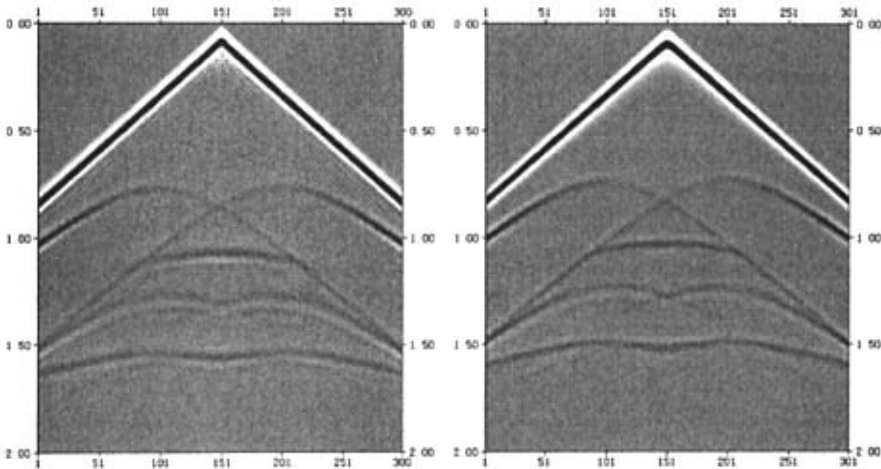


图 3-8 差分法的合成记录

图 3-9 伪谱法的合成记录

从合成记录图 3-8 和图 3-9 中都可以清楚地看到不同层的直达波、反射波、多次波和凹陷界面的绕射波。从计算的速度看，四阶有限差分法明显高于伪谱法，但是图 3-8 中直达波和反射波同相轴存在明显的频散现象，而图 3-9 中同相轴却很干净。如要克服差分法的频散，必须加密差分网格，这样会使计算效率大大降低，因此使用伪谱法既保证精度又能有较高的计算效率。

### 3.8.2 边界条件模拟

#### 1、差分法边界条件模拟

为了比较不同边界的效果，设计一均匀介质模型，模型大小为

3000m×3000m，空间间隔  $\Delta x = \Delta z = 10m$ ，时间采样间隔为1ms，震源在中心(1500m,1500m)处，主频为15 Hz，水平方向激发，采用雷克子波的一阶导数进行模拟。

图 3-10 是四周都为自由边界时的波场快照。图 3-11 是四周都为反射边界时的波场快照，可以看到边界处有明显的反射，且相位发生了转换。图 3-12 是四周都为吸收边界时波场快照，可以看出边界处的吸收效果较好。

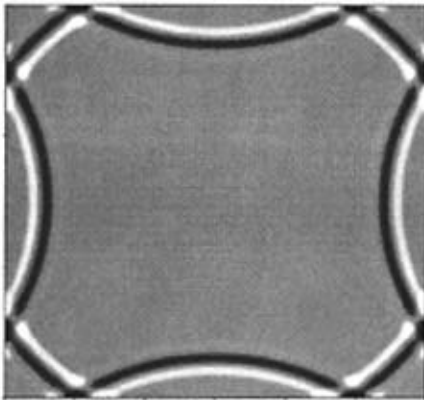


图 3-10 四周都为自由边界时 500ms 的快照

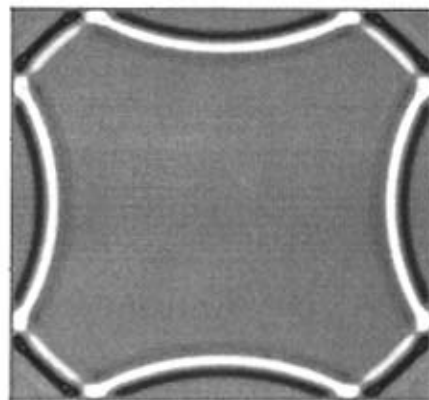


图 3-11 四周都为反射边界时 500ms 的快照

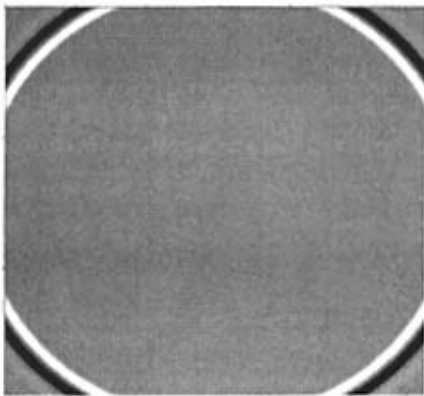


图 3-12 四周都为吸收边界时 500ms 的快照

图 3-13 和图 3-14 是一阶吸收边界条件和二阶吸收边界条件在同一时刻的波场快照，采用相同能量显示，可以看出二阶吸收边界的吸

收效果比一阶吸收边界的好。

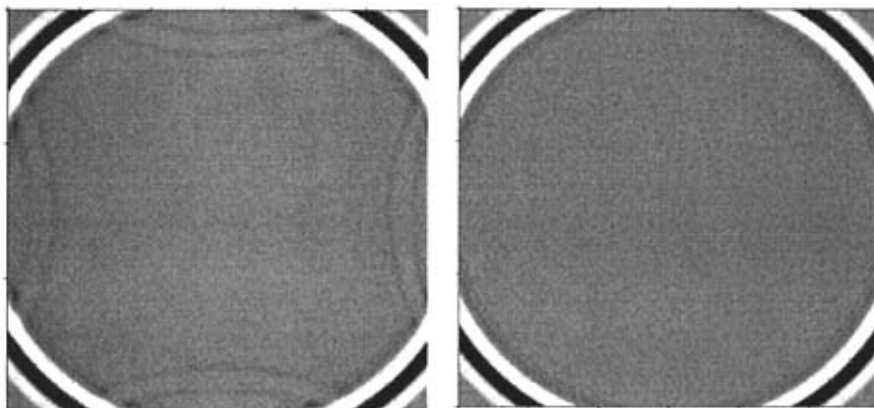


图 3-13 一阶吸收边界时 500ms 的快照 图 3-14 二阶吸收边界时 500ms 快照

图 3-15 和图 3-16 为分别为采用二阶旁轴近似和 PML 处理边界时得到的同一时刻的波场快照。为了使结果看得更加明显，对图示数据采用能量增强处理，可以看出采用旁轴近似处理边界时，波场传到边界处没有被完全吸收，产生了一些弱反射；而采用 PML 处理边界时，很好地消除了边界反射。

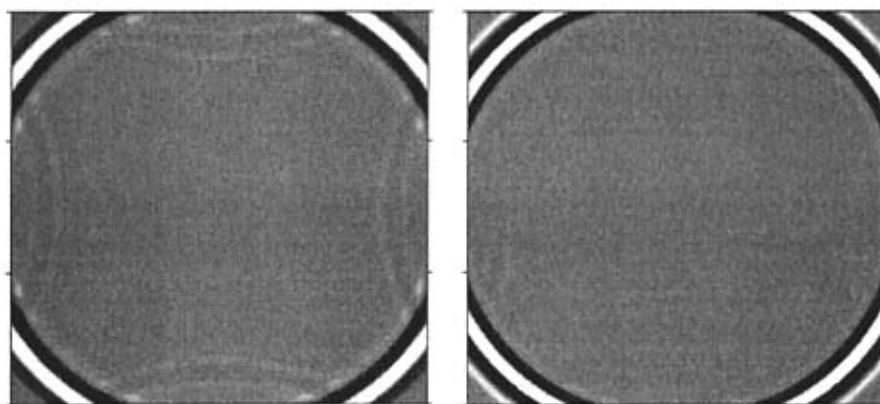
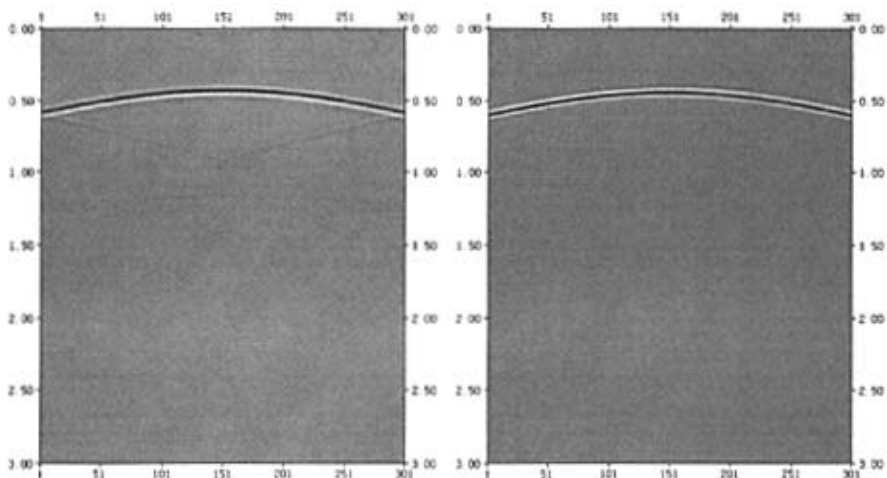


图 3-15 二阶吸收边界时 500ms 的快照 图 3-16 PML 边界时 500ms 快照

图 3-17 是两者合成记录的对比，可以看出采用 PML 处理边界时，直达波同相轴很清晰，边界处的反射基本消除。



(a)

(b)

图 3-17 均匀介质共炮记录

(a) 旁轴近似吸收边界; (b)PML 边界

2、伪谱法边界条件模拟

采用与上面相同的模型来比较伪谱法的边界条件。图 3-18 和图 3-19 分别是未加边界和加扩边吸收边界时同一时刻的波场快照。

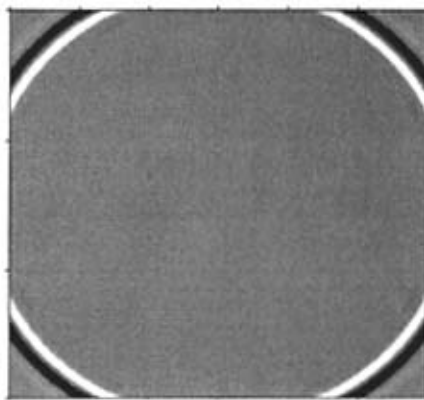
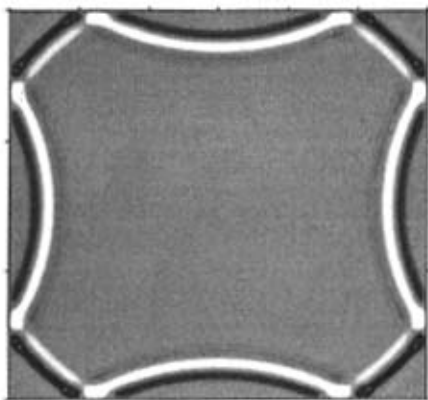


图 3-18 未加边界时 500ms 的快照

图 3-19 扩边吸收边界时 500ms 快照

图 3-20 和图 3-21 分别是扩边吸收边界和 PML 吸收边界在同一时刻的波场快照，扩边吸收边界经能量加强显示后边界处还是存在一些弱反射，而 PML 边界的吸收效果很好。

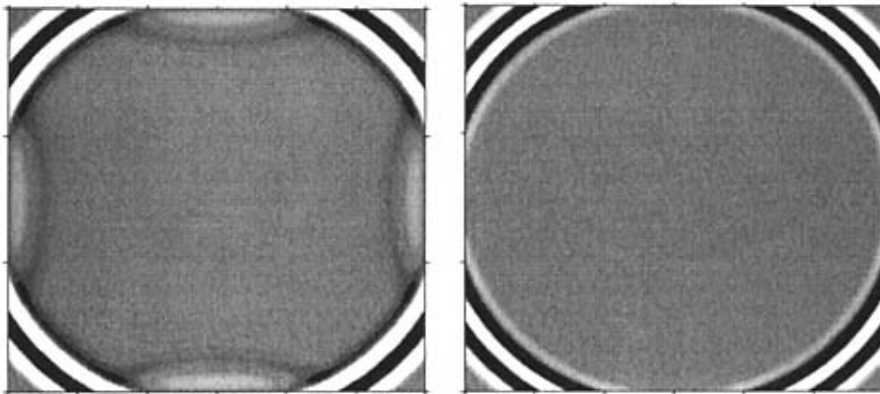


图 3-20 扩边阶吸收边界时 500ms 的快照 图 3-21 PML 边界时 500ms 快照

### 3.8.3 地面地震模拟

#### 1、声波和粘滞声波模拟

为了验证介质的粘滞性对地震波的吸收衰减作用，我们设计一  $3000m \times 3000m$  的网格模型，网格大小为  $10m$ ，震源坐标  $(1500m, 50m)$ ，时间间隔  $1ms$ ，震源主频  $30Hz$ ，其它参数如表 3-2 所示。分别用声波和粘滞声波进行模拟，图 3-22 是  $750ms$  处两者的波场快照，可以看出粘滞声波的能量有明显的衰减；图 3-23 是两者合成记录的对比图，声波模型的反射波同相轴能量强于粘滞声波的反射波同相轴，且越往深层能量衰减的越严重；图 3-24 是第 300 道处两者合成记录的对比图，可看到粘滞声波的振幅有明显的降低。

表 3-2 三层水平层状介质参数

层号	深度(m)	$V_p(m/s)$	$\rho(g/cm^3)$	$Q$
第一层	700	2500	2	20
第二层	1800	3000	3	20
第三层	3000	4000	5	20

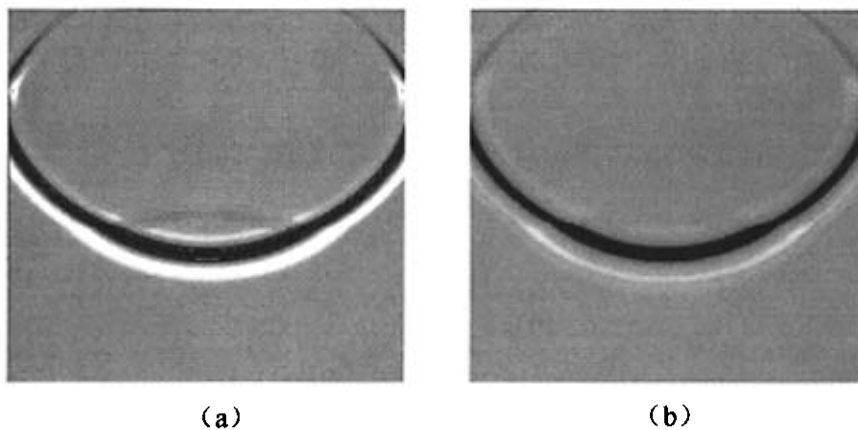


图 3-22 声波和粘滞声波共炮记录 750ms 处的波场快照

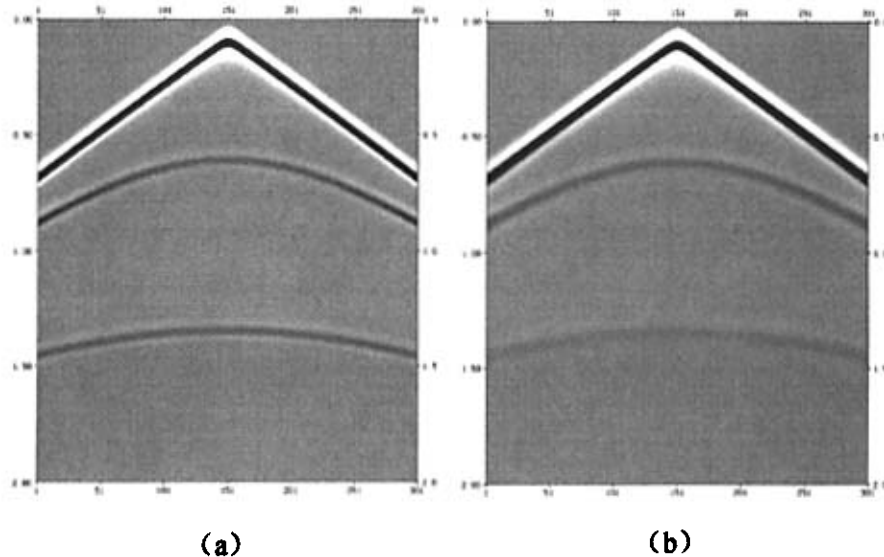


图 3-23 声波和粘滞声波的合成记录对比

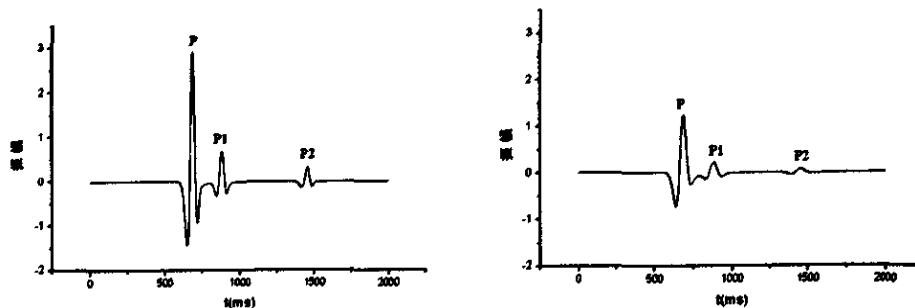


图 3-24 声波和粘滞声波第 300 道的合成记录对比

2、弹性波和粘弹性波模拟

为了验证粘弹性介质中的吸收和衰减作用，我们设计了一个  $3000m \times 3000m$  的网格模型，网格大小为  $10m$ ，震源坐标  $(1500m, 100m)$ ，时间间隔  $1ms$ ，震源主频  $30Hz$ ，其它参数如表 3-3 所示。分别用弹性波动方程（相当于粘滞系数趋于无穷小）和加入粘滞系数的粘弹性波动方程模拟，经数值模拟得到的水平分量和垂直分量分别如图 3-25 所示。将合成记录的直达波切除，并取出第 100 道  $500ms \sim 1500ms$  处记录的水平分量和垂直分量，如图 3-26 所示。图 3-27 所示的是弹性波和粘弹性波频谱的对比。

表 3-3 两层水平层状介质参数

层号	深度(m)	$V_p(m/s)$	$V_s(m/s)$	$Q_p$	$Q_s$	$\rho(g/cm^3)$
第一层	1000	2500	1500	100	80	2
第二层	3000	4000	2500	100	80	4

从图 3-25 中可以看出，粘弹性波记录的反射波振幅比弹性波有明显的衰减，且同相轴能量变弱；图 3-26 中粘弹性波记录振幅明显减弱，反射波形和相位畸变严重，且记录中与 S 波相关的波的成分比 P 波的高频吸收和频散强；图 3-27 振幅谱中可以看出粘弹性波反射波的主频向低频方向移动，高频吸收明显，有效频带变窄。

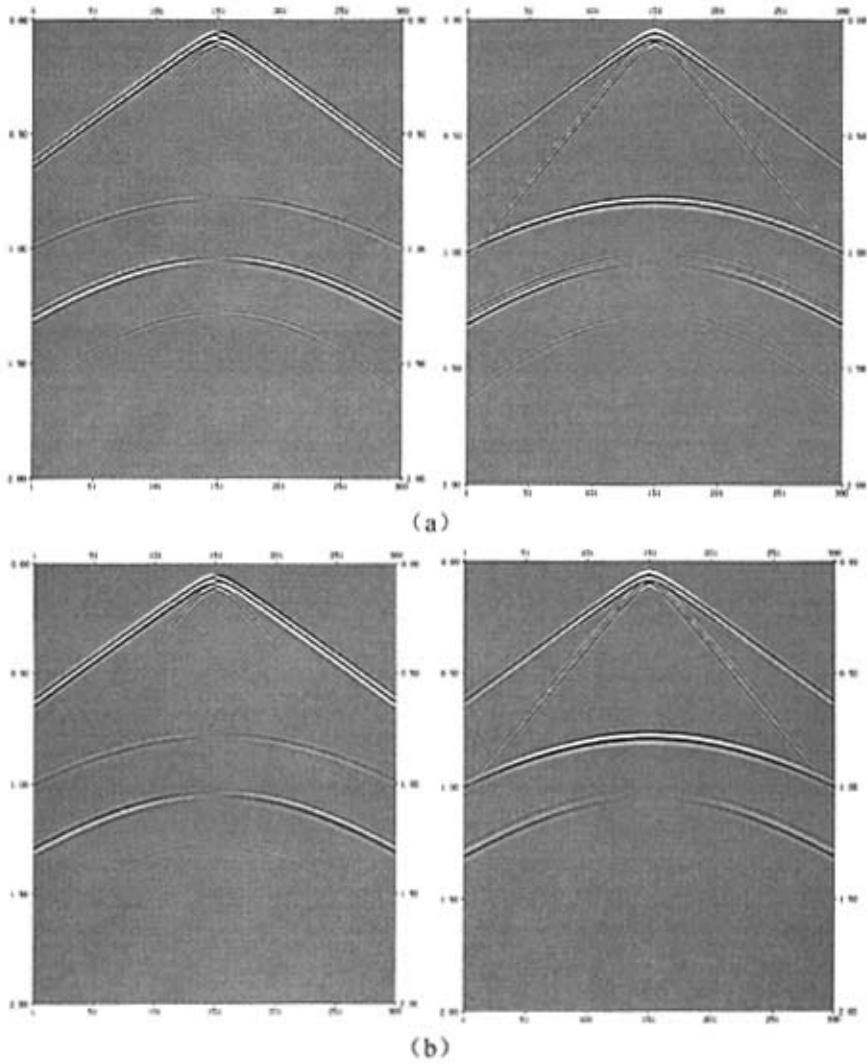


图 3-25 二维弹性波动方程模拟记录 (a) 和粘弹波动方程模拟记录 (b) 的对比图  
(左: 水平分量; 右: 垂直分量)



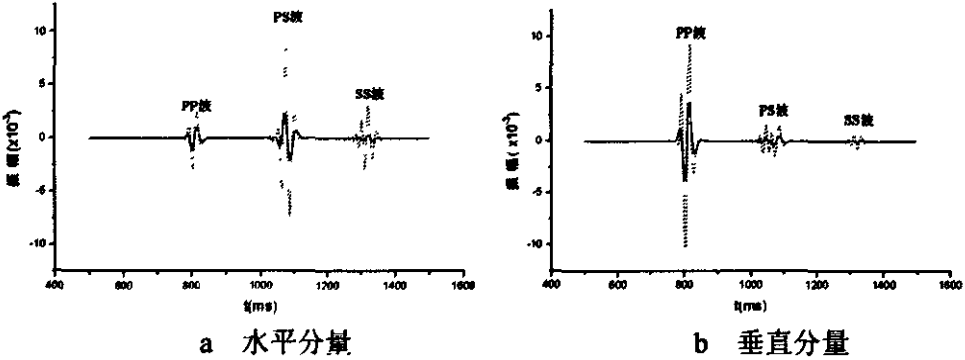


图 3-26 第 100 道弹性波记录和粘弹性波记录的对比  
(虚线为弹性波；实线为粘弹性波)

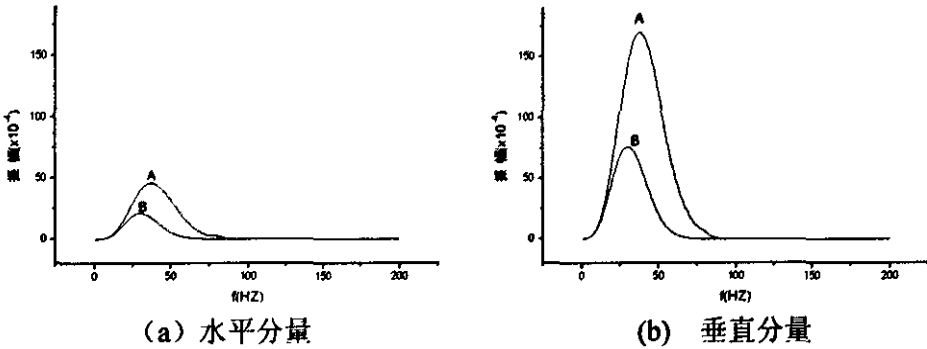


图 3-27 第 100 道弹性波和粘弹性波记录 PP 波振幅谱的对比  
(A: 弹性波记录; B: 粘弹性波记录)

对表二模型分别取不同的  $Q$  值 ( $Q_p = 100, 500, 2000, \infty, Q_s = 80, 400, 1600, \infty$ ), 得到图 3-28 所示的振幅谱, 可以看出随着品质因子减小 (相应的粘滞系数越大), 振幅降低, 主频减小, 有效频带也越来越窄。当品质因子增大到一定的程度, 如图 3-29、图 3-30、图 3-31 所示, 介质的粘滞性对地震波的影响就可以忽略了, 此时地震波的振幅、主频、频宽几乎都不存在衰减。

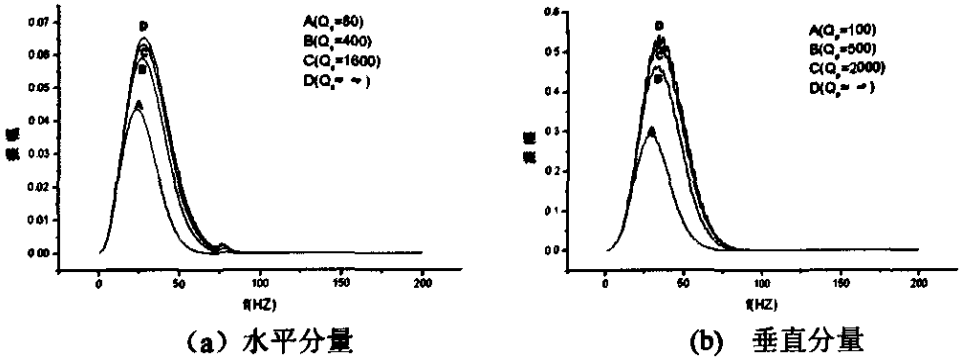


图 3-28 不同品质因子对应的 PP 波振幅谱

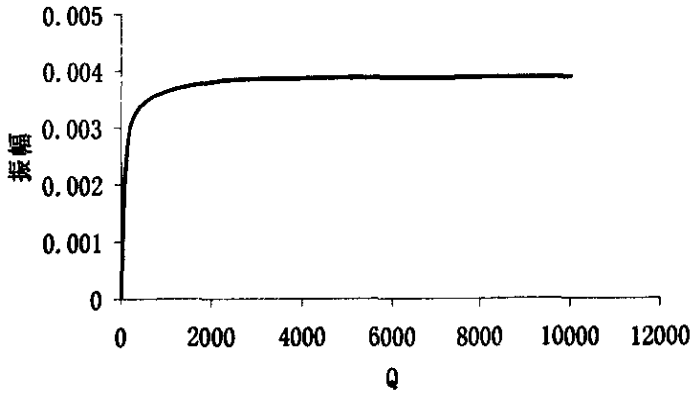


图 3-29 PP 波的振幅随品质因子的变化曲线

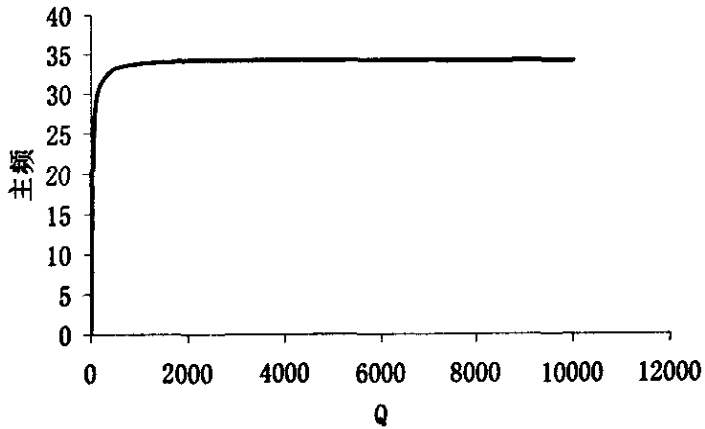


图 3-30 PP 波主频随品质因子的变化曲线

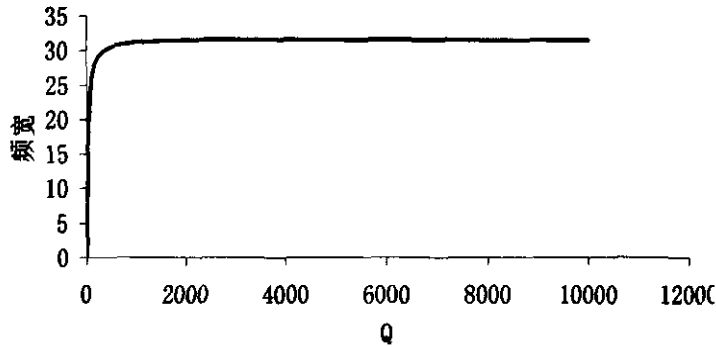


图 3-31 PP 波频宽随品质因子的变化曲线

### 3.8.4 井间地震模拟

井间地震技术是油气田勘探开发领域的一项新技术，它将震源置入一口井中（震源井）激发，在其周围一口井或多口井（接收井）放置检波器接收地震波，记录地震波的频率、振幅、相位等信息的地震技术。同利用井间地震成像技术可以对井间小幅度构造、小断块、薄层的横向变化等进行精细的描述，并可在油气开采过程中对储集层参数进行动态监测，分析流体的流动方向、残余油气数量及分布情况，以提高油气采收率。

设计一三层水平介质模型，介质模型参数如表3-4所示。井间距为1000m，井段长3000m，左井激发，右井接收，炮点在左井1200m深度处，采用的时间和空间步长分别为  $\Delta t = 1ms$ ， $\Delta x = \Delta z = 10m$ ，记录长度为  $T = 3s$ ，采用最小相位子波分别用弹性波和粘弹性波进行正演模拟。图3-32是粘弹性波井间记录300ms处的波场快照。从模拟记录图3-33中可以清楚地看到不同层的直达波、反射波、透射波和转换波。理论上，当密度为常数时，地震波从低速介质传入高速介质，反射波与入射波同相位；波从高速介质传入低速介质，反射波与入射波是反相位的，从快照和合成记录中都可以明显看出这一点。图3-34是接收点位于不同位置处弹性波和粘弹性波的井间合成记录对比，展示了地震波传播的粘滞效应，粘弹性介质地震波的波形幅值明显低于完全弹性地震波的波形。

表 3-4 三层水平层状介质参数

层号	深度(m)	$V_p$ (m/s)	$V_s$ (m/s)	$Q_p$	$Q_s$	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )
第一层	698.7754	2500	1500	100	80	2
第二层	1795.2279	3000	2000	100	80	2
第三层	3000	4000	2500	100	80	2

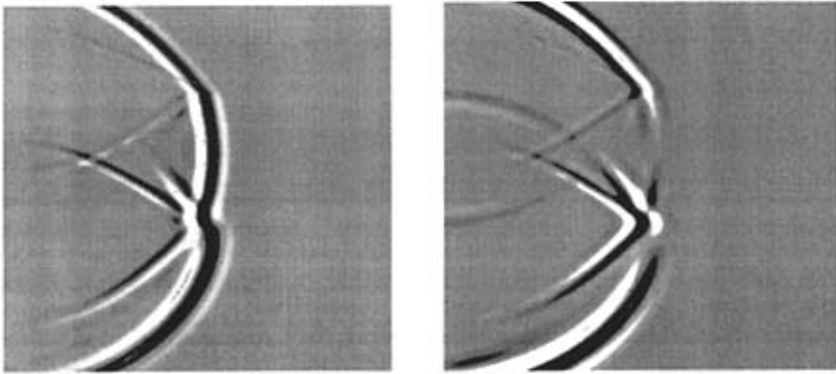


图 3-32 粘弹性波井间记录 300 ms 处的波场快照  
(左：水平分量；右：垂直分量)

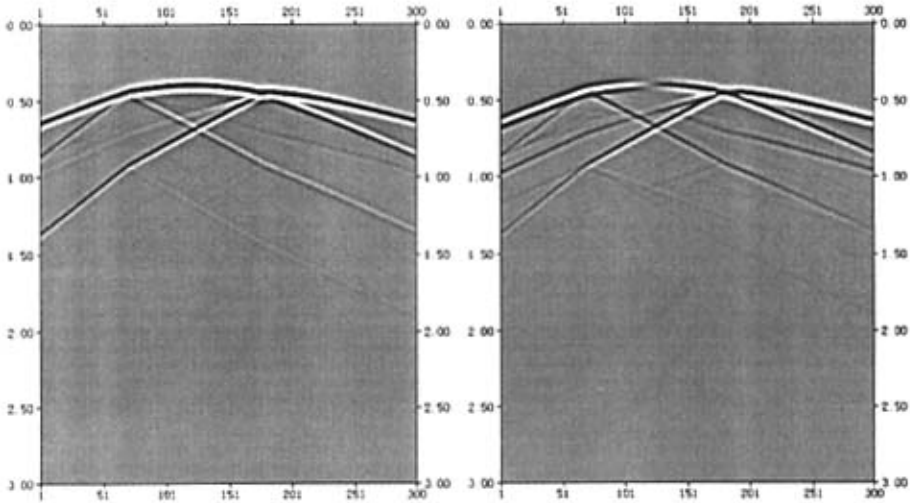


图 3-33 粘弹性波井间合成记录  
(左：水平分量；右：垂直分量)

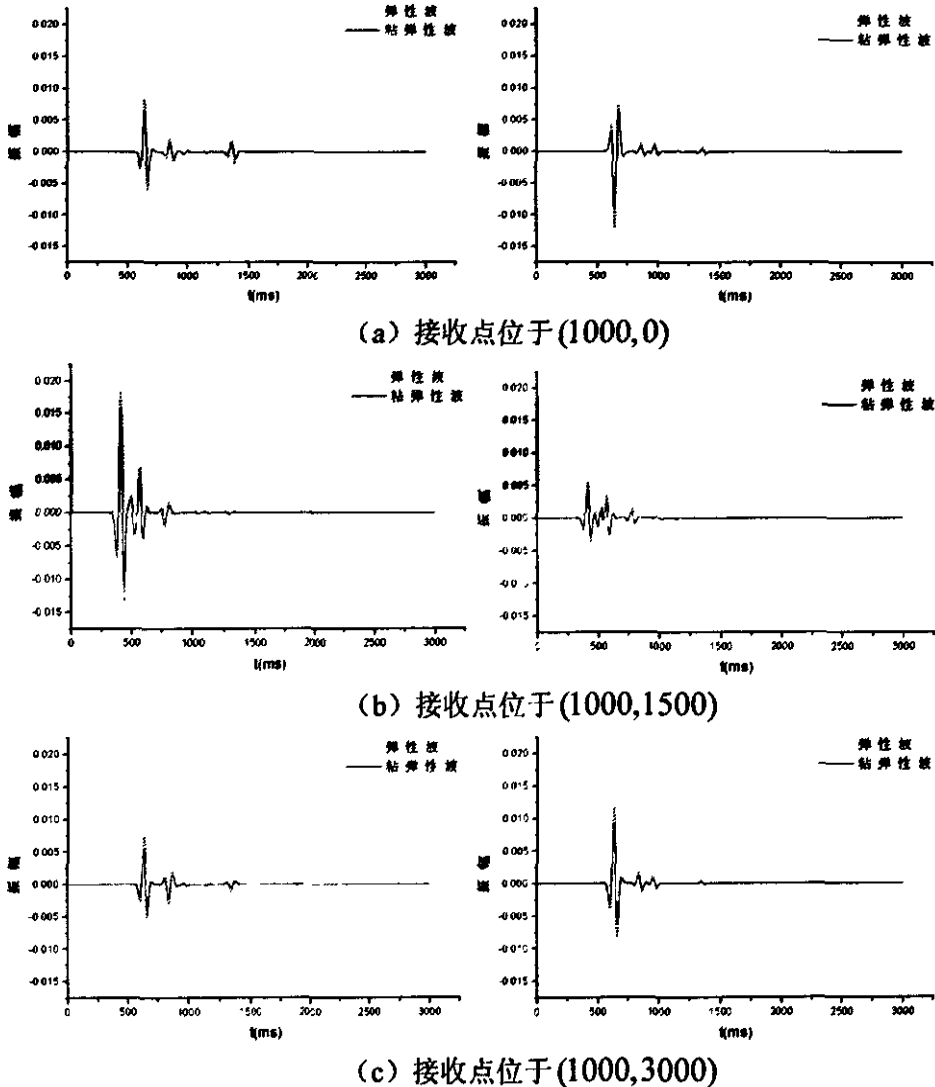


图 3-34 接收点位于不同位置处弹性波和粘弹性波的井间合成记录对比

(左: 水平分量; 右: 垂直分量)

### 3.8.5 VSP 模拟

与地面地震相比, VSP 资料的信噪比和分辨率均有很大提高, 波的运动学和动力学特征明显; 接收点分布在介质内部, 记录的地震波较真实地反映研究对象, 干扰因素少, 不仅可以获得直达波信息, 还可同时记录上行波和下行波, 震源可重复性容易实现, 能在开发过程中有效地监测油藏流体的动态变化, 为油藏开发调整提供依据。VSP 资料可提供子波、反褶积因子、速度、反射系数、衰减系数, 可帮助

识别地面地震记录上的多次波, 并指明多次波的来源和传播过程, 提供地下地层结构同地面测量参数之间最直接的对应关系, 提供速度及速度比、振幅及振幅比、频率及频率比以及波形结构等信息, 可研究井孔周围隐蔽性的油藏及砂岩体, 或检测油气及圈定储油范围, 因此 VSP 技术得到了日益广泛的应用。

设计一  $1000m \times 3000m$  三层水平介质模型, 介质的模型参数如表 3-4 所示。地面激发, 炮点在地面  $(0,0)$  处, 在  $(1000,0)$  处的井中接收, 采用的时间和空间步长分别为  $\Delta t = 1ms$ ,  $\Delta x = \Delta z = 10m$ , 记录长度为  $T = 3s$ , 采用最小相位子波分别用弹性波和粘弹性波进行正演模拟。图 3-35 是粘弹性波 VSP 记录  $300ms$  处的波场快照。从模拟记录图 3-36 中可以清楚地看到不同层的直达波、反射波、透射波和转换波。图 3-37 是接收点位于不同位置处弹性波和粘弹性波的 VSP 合成记录对比。

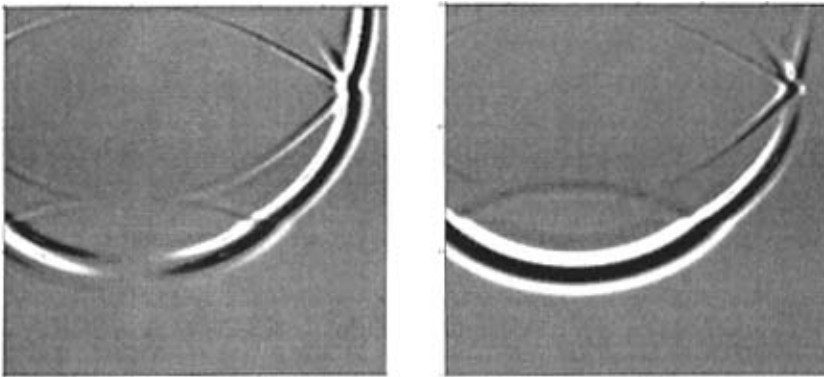


图 3-35 粘弹性波 VSP 记录  $400ms$  处的波场快照  
(左: 水平分量; 右: 垂直分量)

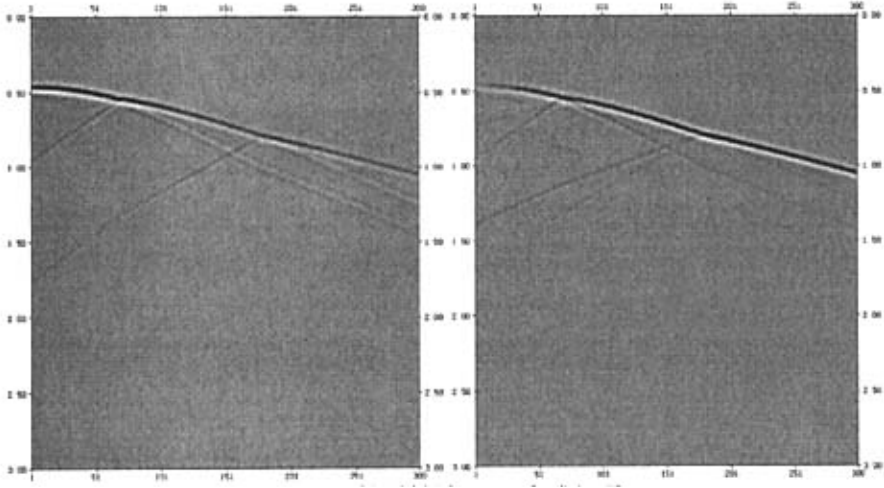
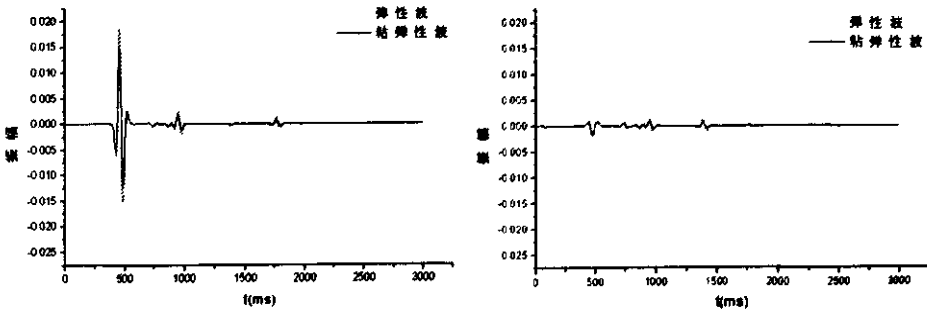
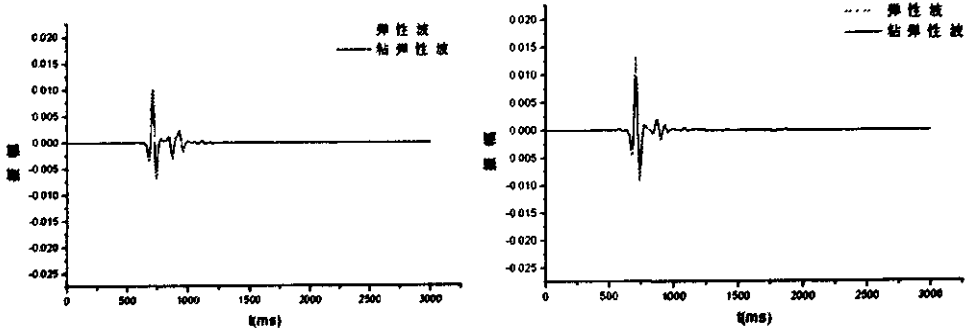


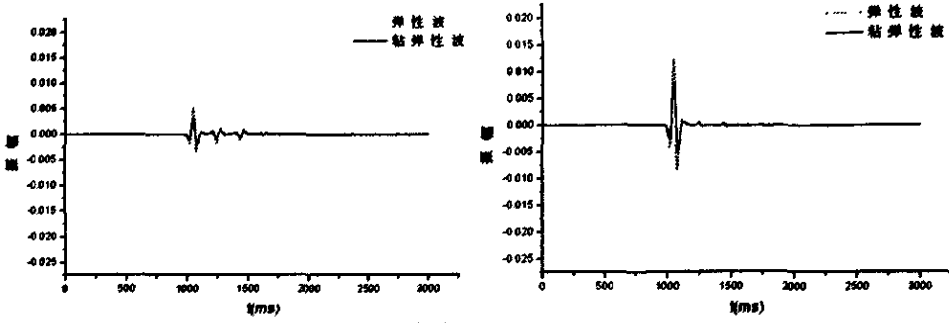
图 3-36 粘弹性波 VSP 合成记录  
(左: 水平分量; 右: 垂直分量)



(a) 接收点位于(1000,0)



(b) 接收点位于(1000,1500)



(c) 接收点位于(1000,3000)

图 3-37 接收点位于不同位置处弹性波和粘弹性波的 VSP 合成记录对比

(左: 水平分量; 右: 垂直分量)



## 第4章 粘弹性波场的参数反演

反演问题是地球物理学研究中一个重要而又困难的问题,最主要的困难是反演结果存在着多解性(非唯一性)<sup>[37][38]</sup>。这种非唯一性不是由于反演方法或技巧上的缺陷引起的,而是地球物理问题本身存在的固有困难。困难之一是观测资料不完备。由于地球物理观测手段(地球表面或上空或地下)无法直接获得反映地球内部物质的充足的信息,使得反演结果有多种可能的解,而每一种可能的解都能满足不充分的观测数据,地球物理观测信息的不足是无法用数学技巧来弥补的。困难之二是任何地球物理观测都存在干扰和误差。这种受畸变的观测数据使得反演计算不稳定,导致反演结果的很大变动。因此,在解地球物理反演问题时,要根据已有资料,尽可能多地引入先验信息、附加约束条件,以减少解的非唯一性<sup>[39]</sup>。

地球物理学中反演问题的研究,在早期主要来自科学家对地球内部结构的好奇心,并受到物理学和地质学发展的推动。应用物理学的方法来勘探矿产的思想萌芽于19世纪,而勘探地球物理方法的研究和试验却是在第一次世界大战前后伴随着现代工业的发展而兴起的。至上世纪50年代以前,由于计算工具的限制,对反演问题的研究远不如正演问题的研究那么受重视,其推断解释的工具主要为用于地震走时曲线或位场曲线的特征法(曲线斜率、特征点等),与正演结果对比的选择法和量板法,以及用观测信号来推测场源参数的积分法等。

1967-1970年间,被喻为反演之父的美国地球物理学家Backus和Gilbert连续发表了三篇关于地球物理反演的文章,建立了在连续介质情况下如何处理数据有限又有误差的观测数据以及解的非唯一性问题的BG反演理论。BG反演理论讨论的是模型为连续的情况,因此总是导致欠定的方程组,不便于在计算机上作快速计算。与BG理论对应的离散模型的情况下的反演在1972年由美国的Wiggins和英国的Jackson等人先后提出,这就是广义反演方法。由于Parker等人的介绍和推广,完善了BG反演理论和方法,使之在70年代后期逐渐普及,并成为地球物理学中相对独立的一个分支。

近年来,非线性理论在自然科学的各个领域成为研究前沿,受到人们的普遍关注。大多数自然现象都是非线性的,地球物理反问题也是这样<sup>[40]</sup>。实践表明,非线性反演要比线性反演更接近实际。非线性优化方法有基于导数的最陡下降法、牛顿法、共轭梯度法等,基于非导数的非线性优化方法包括遗传算法<sup>[41]</sup>、模拟退火法<sup>[42]</sup>,随机搜索、下山单纯形搜索等等<sup>[43]</sup>。由于计算技术的日新月异,特别是并行机的出现,各类非线性优化计算方法得到了迅速发展<sup>[44]</sup>,在地球物理反演中已经发挥了重要作用<sup>[45]</sup>。

## 4.1 遗传算法

遗传算法(Genetic Algorithms, 简称 GA)是由美国 Michigan 大学的 John Holland 教授创建的。它来源于达尔文的进化论、魏茨曼的物种选择学说和孟德尔的群体遗传学说。其基本思想是模拟自然界遗传机制和生物进化论而形成的一种过程搜索最优解的算法。其特点是几乎不需要所求问题的任何信息而仅需要目标函数的信息,不受搜索空间是否连续或可微的限制就可找到最优解。依据它的并行性,非常适用于大规模并行计算机。因此,遗传算法适用于解决复杂的非线性和多维空间寻优问题,在地球物理反演中也得到较为广泛的应用<sup>[46]</sup>。

### 4.1.1 遗传算法的基本概述

遗传算法是模拟生物在自然环境中的遗传和进化过程而形成的一种自适应全局优化概率搜索算法。该算法是一种具有整体收敛性和不需要目标函数梯度信息的优化算法,其主要特点是群体搜索策略和群体中个体之间的信息交换,搜索不依赖于梯度信息。它尤其适合于处理传统搜索方法难于解决的复杂和非线性问题。

与模拟退火法在模型空间中从一点到另一点进行追踪、搜索不同,遗传算法对模型群体进行追踪、搜索。也就是说,遗传算法中的地球物理模型状态是通过模型群体传送的。因此,从某种意义上说,遗传算法具有更大的潜力,因为它具有比模拟退火法更大且更加复杂的“记忆”能力。

遗传算法把优化问题的解的空间映射为遗传空间,把每一可能的

解编码为一个称为染色体的编码,染色体的每一位称为基因。每一个染色体(对应一个个体)代表一个解,一定数量的个体组成群体。

遗传算法首先随机地产生一些个体组成初始群体,即问题的候选解,按照预先根据目标函数确定的适应度函数计算各个体对问题环境的适应度,再根据个体适应度对个体对应的染色体进行选择,抑制适应度低的染色体,弘扬适应度高的染色体,然后进行交叉等遗传操作产生进化了的一代群体。如此反复操作,一代一代不断地向更优解方向进化,最后得到满足某种收敛条件的最适应问题环境的群体,从而获得问题的最优解。图 4-1 是一个遗传算法的示意图。

#### 4.1.2 遗传算法的实现方法

##### 1、编码和产生初始群体

首先要确定参数的变化范围及所要求的分辨率。通常遗传算法对模型参数的二进制编码进行工作,所以遗传算法的首要步骤是对模型参数进行二进制编码。按照遗传学的术语,这个二进制的“染色体”中的每一个二进制位称为一个“基因”,只能取 0 或 1 两个值。需要注意的是,参数编码并不意味着从十进制换算成二进制这种简单的变换。同一个参数可以编成不同的码,取决于参数的取值范围(最大值  $\max$ , 最小值  $\min$ )和要求的精度  $\Delta$ 。如果该染色体有  $n$  位的话,则  $\min$  为该染色体  $n$  位全部为 0 所表示的参数值,而  $\max = \min + 2^{(n-1)}\Delta$ , 其余值可类推得到。

初始模型群体是随机产生的。显然,初始模型群体中的个体在模型空间中分布得越均匀越好,最好是模型空间中的各代表区域中均有成员。因此,初始模型群体较大显然有利于搜索。但是,群体太大会使计算工作量增加。初始群体选出之后,就可以进入由选择、交叉和变异等步骤组成的迭代运算过程。

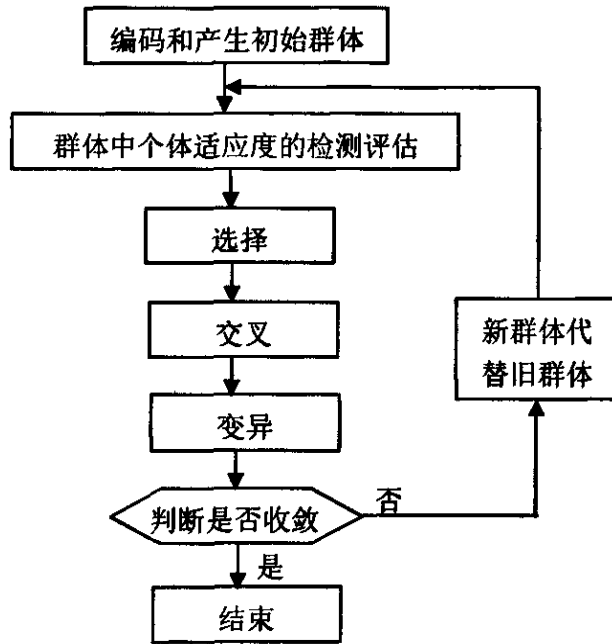


图 4-1 遗传算法基本流程图

## 2、选择

选择是产生新的模型群体的过程中的第一步。它从群体中挑选模型配成对(亲本)以进行交换。选择的基本思想为群体中的每个成员都有合理的繁殖机会,但较优秀的成员(即适值较大的成员)应有更多的机会。因此,选择是建立在群体中各模型适值大小的基础上进行的,是按适值算出的选择概率进行随机采样得到的。适值的大小与模型对应的目标函数(或后验概率)密切相关。若求极小,则目标函数(或后验概率)越小适值越大;反之,若求极大,则目标函数(或后验概率)越大适值越小。按适值计算选择概率可以有多种方法(只要能保证适值越大,概率越大即可)。一种最常用也最简单的选择概率计算公式为:

$$P_s(x_i) = f(x_i) / \sum_1^m f(x_i) \quad (4-1)$$

式中,  $P_s(x_i)$  是每个个体的选择概率,  $m$  是群体规模,  $f(x_i)$  为模型每个个体的适应度函数。

### 3、交叉

交叉是遗传算法的重要过程,是遗传算法的内力。交叉为亲本模型的重组,即将两个亲本模型拷贝的片段剪接在一起构成后代子本模型。显然,这种交叉完全模拟遗传过程中两个染色体遗传基因的交叉过程。

最基本也最简单的交叉方式为一点交叉。在染色体内部随机地选择一个交叉点,将一个亲本染色体在此点前的第一段与另一个亲本染色体在此点后的第二段结合在一起构成子本后代染色体,从而得到两个子本后代。

因为交叉的实质是在模型空间中进行大范围的搜索,搜索的空间区域很可能与原先的采样区域相距较远,故这种搜索属于非邻近区域搜索过程,它可以产生一个十分有效的模型空间普查。线性化或拟线性反演方法、模拟退火法都属于邻近区域搜索过程,搜索的强度和内在的潜能远不如遗传算法。

### 4、变异

变异是对偶然的(按较低的变异概率随机选择的)后代中的一个或多个随机选择的基因作随机摄动。变异在遗传过程中是十分重要的。因为若不存在变异,则子本模型不可能获得群体中不存在的染色体基因,因而也就不可能出现强有力的进化,出现超过前代的变化。最简单的变异方法就是将模型参数二进制编码的某一位由1变为0或由0变为1。发生变异的情况应当少(即变异概率 $P_m$ 应当低),但必须有。生物学中变异是保证物种不会退化的重要手段。在非线性反演中,变异是使得模型空间搜索更加彻底的重要方法。

经过交叉和变异,产生出新的子本模型。如果没有“死亡”或“更新”,则群体会越来越大,出现不可收拾的现象,因此必须有更新。所谓更新,就是根据自然界中“适者生存”的原则,在不同模型间进行竞争的过程。一般遗传算法都有一个“群体规模在遗传过程中保持不变”的基本原则。在这一原则下可以有各种更新方法。一个较好的方法是比较子本模型的适值与群体中其他模型的适值,保留适值较大

的模型即可。

#### 4.1.3 遗传算法的基本步骤及特点

遗传算法的基本步骤可总结为：

- 1、选取合适的编码技术把具体问题的参数集转化为类似染色体的数字串，一般用二进制数字串；

- 2、在可能解空间的制约下，随机地产生一个由二进制数字串组成的特征串族；

- 3、计算族中每个串对应的适值（相当于目标函数值）的大小；

- 4、利用复制算子把当前族中的串按与适值成比例的概率  $P_r$  复制到新族中；

- 5、利用杂交算子把从当前族中随机选取的两个父本的染色体按一定规则进行杂交，杂交概率  $P_c$  决定杂交运算是否进行；

- 6、变异算子以概率  $P_m$  作用于新族中每个串上；

- 7、计算新族中各串的适值；

- 8、判断是否满足收敛条件。满足条件，算法停止；否则，继续执行 4, 5, 6, 7 步，直到算法终止。

遗传算法具有进化计算的所有特征，同时又具有自身的特点：

- 1、直接处理的对象是决策变量的编码集而不是决策变量的实际值本身，搜索过程既不受优化函数的连续性约束，也没有优化函数导数必须存在的要求。

- 2、遗传算法采用多点搜索或者说是群体搜索，具有很高的隐含并行性。

- 3、遗传算法是一种自适应搜索技术，其选择、交叉、变异等运算都是以一种概率方式来进行，从而增加了搜索过程的灵活性，同时能以很大的概率收敛于最优解，具有较好的全局优化求解能力。

- 4、遗传算法直接以目标函数值为搜索信息，对函数的性态无要求，具有较好的普适性和易扩充性；同时，我们可以把搜索范围集中到适应度较高的部分搜索空间中，从而提高了搜索效率。

5、遗传算法的基本思想简单,运行方式和实现步骤规范,便于具体使用。

遗传算法的优势是很明显的。首先,它在搜索过程中不容易陷入局部极值。即使在所定义的适值函数是不连续、非规则或有噪音的情况下,它也能以很大的概率搜索到整体最优值。其次,由于它固有的并行性,遗传算法非常适用于大规模并行计算机。

## 4.2 模拟退火算法

模拟退火法(Simulated Annealing,简称SA)是Kirkpatrick等1983年首先提出的,自问世以来很快受到广大地球物理学家的密切注意。近年来,它在可靠性和有效性等方面都得到了很大的发展,成为一种十分受欢迎的非线性多参数联合反演方法<sup>[45]</sup>。

### 4.2.1 模拟退火算法的基本概述

模拟退火法是以优化问题的求解与物体退火过程的相似性为基础,利用Metropolis算法,并用温度更新函数适当控制温度的下降过程实现模拟退火,从而达到求解全局优化问题的目的。

退火即晶体生长的过程中物体先被加温熔化,使其固体规则性被彻底破坏,粒子排列也从较有序的状态变为无序的状态,从而消除系统中原先可能存在的非均匀性状态,使随后进行的冷却过程以某一平衡态为始点,然后逐渐冷却,粒子运动渐趋有序,当温度降至结晶温度后,粒子运动变为围绕晶体格点的微小振动,液体凝成固体的晶态,这一过程是慢慢进行的过程。如果冷却太快,会产生非晶体状的亚稳态玻璃体。

Kirkpatrick等人把晶体的生长模拟成对优化问题搜索到局部极值,把物理系统的能量模拟成优化问题的目标函数。这样,就实现了优化问题的模拟退火算法。

### 4.2.2 模拟退火算法的实现方法

模拟退火算法是源于物理中固体物质的退火过程的原理。在热力学中将晶体缓慢冷却的过程称为“退火”,在这一过程中原子失去热动力时有充裕的时间重新分布并达到有序状态,从而使系统达到最低

能量状态。

在“退火”过程中系统的能量服从玻尔兹曼 (Boltzman) 概率分布, 即系统依概率处于某一种状态  $x$  下的热平衡状态:

$$P(x) = \exp\left(\frac{-E(x)}{K_B T}\right) \quad (4-2)$$

式中  $E(x)$  表示系统处于状态  $x$  下的能量,  $K_B$  为 Boltzman 常数,  $T$  为温度, 该式说明随着温度  $T$  的降低, 系统处于高能  $E(x)$  状态的概率随之减小, 这就是退火规律。

模拟退火算法首先要确定一个能量函数即目标函数, 求解最优化问题一般通过 Metropolis 抽样和“退火”两个过程来实现。Metropolis 抽样过程是在某一给定温度  $T$  的情况下, 对解的状态空间进行随机抽样。具体的计算方法为: 对于每个模型参数的当前值给一个随机的扰动, 组成系统的一个新的状态, 计算扰动造成的能量变化  $\Delta E$  (在非线形反演问题中, 就是计算扰动造成的目标函数或后验概率的变化); 如果  $\Delta E \leq 0$  (即能量减少), 则该扰动被接受; 如果  $\Delta E > 0$  (即能量增加), 则该扰动被接受的概率为

$$P(\Delta E) = \exp\left(\frac{-\Delta E}{T}\right) \quad (4-3)$$

扰动若被接受, 模型参数值就修改; 否则仍然使用原模型参数值。按此规律随机地扰动模型参数, 最终会使系统达到当前温度的平衡状态。因为算法的每一步均只取决于目前的状态而不是过去的状态, 而每一步的搜索既有可能向  $E$  减小的方向进行, 也有可能向  $E$  增大的方向进行 (与线性化或拟线性反演方法只能向一个方向搜索不同), 从而有可能舍弃局部极值。故经过足够长时间后, 系统特性已不受初始状态影响 (即算法求得的当前解与初始模型猜测无关)。

#### 4.2.3 模拟退火算法的基本步骤及特点

模拟退火算法的基本步骤可描述如下:

- 1、随机产生一个初始最优点, 以它作为当前最优点, 并计算目



标函数值。

2、设置初始温度： $\theta \leftarrow T_0$ ；

3、设置循环计数器初值： $t \leftarrow 1$ ；

4、对当前最优点作一随机变动，产生一个新的最优点，计算新的目标函数值，并计算目标函数值的增量 $\Delta$ ；

5、如果 $\Delta < 0$ ，则接受该新产生的最优点为当前最优点；如果 $\Delta \geq 0$ ，则以概率 $p = \exp(-\Delta/\theta)$ 接受该新产生的最优点为当前最优点；

6、如果 $t < \text{终止步数}$ ，则： $t \leftarrow t+1$ ，转向第4步；

7、如果未到达冷却状态，则： $\theta \leftarrow T(t)$ ，转向第3步；如果已到达冷却状态，则：输出当前最优点，计算结束。

模拟退火法与线性化或拟线性反演方法不同。它不仅可以向目标函数(或后验概率)增大(或减小)的方向搜索，也能向目标函数(或后验概率)减小(或增大)的方向搜索，故可以从局部极值中爬出，不会陷在局部极值中。模拟退火法与传统蒙特卡洛反演方法也有不同，它不是盲目地进行随机搜索，而是在一定的理论指导下进行随机搜索，即“启发”式随机搜索，故能保证搜索效率高，能达到整体极值。

模拟退火法反演的关键是在执行算法时应缓慢地降低温度。如果系统冷却得足够慢，平衡条件得以保持，则模型参数最终能收敛于最低能量的基态，否则(降温过快)有可能陷入局部极值。

由此可见，模拟退火法兼有传统蒙特卡洛法和线性化或拟线性反演方法的功能：当温度 $T$ 很高时，对任何一组新模型接受的可能性都大致相同，类似于传统蒙特卡洛法；在低温状态时，接受低能量模型的可能性十分大而接受高能量模型的可能性几乎没有，又类似于线性化或拟线性反演方法。关键是“温度”这个控制参数(其单位与目标函数相同)。即在高温下“熔化”系统，在低温下使系统“凝固”；系

统的整体性质在高温下出现,而精细的细节在低温下发展。

这种方法在运行中必须缓慢降低温度,在每一温度下要达到平衡才可前进。因此,该方法的优点是能搜索到目标函数(或后验概率)的整体极值,其缺点是计算效率比较低下,需要耗费大量的机时。

### 4.3 混合遗传模拟退火算法

混合遗传模拟退火算法的基本思想是将遗传算法与模拟退火算法相结合而构成的一种优化算法。与基本遗传算法的总体运行过程相类似,遗传模拟退火算法也是从一组随机产生的初始解(初始群体)开始全局最优解的搜索过程。它先通过选择、交叉、变异等遗传操作来产生一组新的个体,然后再独立地对所产生出的各个个体进行模拟退火过程,以其结果作为下一代群体中的个体。这个运行过程反复迭代地进行,直到满足某个终止条件为止。

遗传算法的局部搜索能力较差,但把握搜索过程总体的能力较强,而模拟退火算法具有较强的局部搜索能力,并能使局部搜索算法避免陷入局部最优解,但模拟退火算法对整个搜索空间的情况了解不多,不便使搜索过程进入最有希望的搜索区域,从而使得模拟退火算法的运算效率不高。将遗传算法与模拟退火算法结合起来,取长补短而形成的性能优良的全局搜索算法,即遗传模拟退火算法。

遗传模拟退火算法的主要操作步骤如下:

- 1、确定种群大小  $m$ , 交叉概率  $P_c$ , 变异概率  $P_m$ , 初始温度  $T_0$  和温度冷却参数  $a$ ;
- 2、初始化种群,随机产生  $m$  个可行解  $x_i (1 \leq i \leq m)$  组成初始种群;
- 3、选择操作;
- 4、交叉操作和模拟退火操作。随机选取两个个体  $x_1, x_2$ , 使用交叉生成子代  $x'_1, x'_2$ , 计算  $x'_1, x'_2$  的适应度  $f(x'_i), i=1,2$ 。若  $f(x'_i) > f(x_i)$ , 则用  $x'_i$  代替  $x_i$ , 否则以概率  $\exp((f(x'_i) - f(x_i))/T)$  接受  $x'_i$ ;

5、变异操作和模拟退火操作。根据4中的方法决定是否接受变异后的新个体;

6、降温,  $T = T_0 \cdot a^k$ ,  $a$  为一个(0,1)之间的常数,  $k$  为迭代次数;

7、算法终止条件判断, 如满足终止条件, 则输出最优解, 算法结束; 否则转步骤3。

#### 4.4 遗传模拟退火算法在叠前反演中的应用

叠前地震波场参数反演是通过反演地层参数及分界面位置, 从而得到地下地质模型。首先需进行正演模拟, 已知地层的界面和参数, 通过伪谱法模拟, 从而为反演提供初始数据。

设地质模型的深度变化函数用多项式表示为:

$$z_i(x) = C_{0i} + C_{1i}x + C_{2i}(2x^2 - 1) + C_{3i}(4x^3 - 3x) + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (4-4)$$

其中:  $L$  为地层的数目,  $z_i(x)$  为第  $i$  个界面在坐标  $x$  处的深度,  $x$  为震源点和接收点之间的水平坐标,  $C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, \dots, C_{3i}$  为多项式的各阶系数。  $z_i = C_{0i}$  表示水平地层;  $z_i = C_{0i} + C_{1i}x$  表示倾斜地层;  $z_i = C_{0i} + C_{1i}x + C_{2i}(2x^2 - 1) + C_{3i}(4x^3 - 3x) + \dots$  可以表示任意复杂的弯曲地层, 接近于地下真实情况。

地质模型的速度函数用多项式表示为:

$$V_i(x) = D_{0i} + D_{1i}x + D_{2i}(2x^2 - 1) + D_{3i}(4x^3 - 3x) + \dots, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (4-5)$$

其中  $V_i(x)$  为第  $i$  层地在坐标  $x$  处的速度,  $x$  为震源点和接收点之间的水平坐标,  $D_{0i}, D_{1i}, D_{2i}, \dots, D_{3i}$  为多项式的各阶系数。当  $V_i(x) = D_{0i}$  时, 该层速度横向不变; 当  $V_i(x) = D_{0i} + D_{1i}x$  时, 该层速度沿  $x$  方向线性变化; 当  $V_i(x) = D_{0i} + D_{1i}x + D_{2i}(2x^2 - 1) + D_{3i}(4x^3 - 3x) + \dots$  时, 该层速度沿  $x$  方向变化较为复杂, 接近于地下真实地层的速度变化。

给定深度和速度多项式的系数就建立起了地层结构, 地震参数反演是通过合成记录来反演地下的界面位置和速度变化, 即:

$\{C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, \dots, C_{Mi}, D_{0i}, D_{1i}, D_{2i}, \dots, D_{Ni}, i=1, 2, \dots, L\}$ , 反演方法采用混合遗传算法。

1、混合编码: 编码是连接问题与算法的桥梁, GA 在执行求解之前, 首先要选择合适的编码方式, 将问题的所有参变量编码成对应的子串, 再将各子串首尾连接成一定长度的串, 即染色体, 一个串代表解空间的一个解。

速度场可通过深度和速度函数的多项式系数进行构建, 因而在进行反演时需同时优化  $L_1 = L(M+1)$  个界面深度多项式中的系数  $\{C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, \dots, C_{Mi}, i=1, 2, \dots, L\}$  和  $L(N+1)$  个速度多项式中的系数  $\{D_{0i}, D_{1i}, D_{2i}, \dots, D_{Ni}, i=1, 2, \dots, L\}$ , 共有  $L_2 = L(M+N+2)$  个待求变量。通过多项式表示深度和速度的变化, 需求解的未知变量比速度场划分的网格数大大减少, 因而使该方法所求的未知数大幅度减少, 简化了模型, 从而可以得到较好的结果。将  $L_1$  个深度系数  $C_{ij}$  和  $L_2$  个速度系数  $D_{ij}$  按一定的顺序进行排列, 从而形成解向量  $(C, D)$  的元素列表  $\{C_{0i}, C_{1i}, C_{2i}, \dots, C_{Mi}, D_{0i}, D_{1i}, D_{2i}, \dots, D_{Ni}, i=1, 2, \dots, L\}$ 。本文直接将可行解向量  $(C, D)$  的元素列表作为个体的数据结构。然后根据实际情况确定  $C$  的上下限  $C_u$ 、 $C_v$  以及  $D$  的上下限  $D_u$ 、 $D_v$ , 即确定 GA 搜索的范围。

由于采用了浮点数混合编码技术, 使编码后的子串长度大大减少, 从而使得遗传算法中的解向量维数大大减少, 既提高了运算速度, 又较好地解决了多解性问题。

2、产生初始群体: 选择一个整数  $m$  作为群体的规模, 随机产生解空间的  $m$  个初始个体作为初始群体  $\{(C_i^0, D_i^0), i=1, 2, \dots, m\}$ , 代表问题的一些可能解。

3、适应度评价: 根据问题的目标函数合理地定义一个适应度函数, 用以反映个体对问题环境适应能力的强弱, 即解的优劣。

反演问题采用观测数据与合成地震数据的误差来构成目标函数。当地层参数的估计值与实际地层参数接近时，其合成记录也越接近实际地震数据，目标函数也越小。

目标函数采用误差准则来构造：

$$F = N^{-1} \sum_i \sum_j \frac{\sum_i [|u_{i,j}^{obs} - u_{i,j}^{mod}|]}{\sum_i [|u_{i,j}^{obs}| + |u_{i,j}^{mod}|]} \quad (4-6)$$

其中， $N = N_R \cdot N_S$  为总地震道数， $N_R, N_S$  分别为炮点数和接收点数， $u_{i,j}$  为某炮地震记录道集中第  $j$  道 ( $j=1,2,\dots,N_R$ ) 记录， $u_{i,j}^{mod}$  为理论模型参数， $u_{i,j}^{obs}$  为观测参数。

评价函数：评价函数的作用是给出个体的适应度。一般地，可以把优化问题的目标函数直接当作评价函数。采用适应度函数来衡量地层估计参数的优劣，适应度函数值越大，说明该地层模型越接近实际地层参数。在本问题中，最优解的目标函数对应于极小，因而可取评价函数  $f$  为：

$$f_i(C, D) = \frac{1}{F_i}, \quad i=1,2,\dots,m \quad (4-7)$$

其中  $m$  为群体规模。

4、选择：选择体现适者生存的自然法则。一般采用与适应度成比例的概率方法，个体适应度越高，其被选择的机会越多。选择的目的是从群体中选出繁殖后代的双亲。

5、交叉：交叉是重要的遗传算子，最简单的交叉是一点交叉，其它还有双点交叉、均匀交叉和算术交叉等。交叉操作的发生概率称为交叉概率。本文采用“混合交叉技术”。设第  $t$  代的两个个体为  $(C'_a, D'_a)$ 、 $(C'_b, D'_b)$ ，首先把交叉点限制在  $(L_1+1, L_1+L_2)$  范围内，然后对  $D'_a$ 、 $D'_b$  进行通常意义下的交叉得到  $D''_a$ 、 $D''_b$ ，再将交叉点限制在  $(1, L_1)$  范围内，对  $C'_a$ 、 $C'_b$  进行交叉得到  $C''_a$ 、 $C''_b$ ，于是得到子代

个体  $(C_a^{t+1}, D_a^{t+1})$ 、 $(C_b^{t+1}, D_b^{t+1})$ 。

6、变异：变异是按位进行的，即以变异概率改变串上的某一位。变异是一个微妙的遗传操作，能起到恢复丢失的遗传信息，生成新的遗传信息的作用，从而保持群体中个体的多样性，有效地防止算法的早熟收敛，但过分的变异会使 GA 退化为随机搜索。本文采用的变异操作如下：设第  $t$  代对某个个体  $(C', D')$  的第  $j$  位进行变异，若变异位是  $C'_j$ ，则定义  $C'_j = \text{random}(C_v, C_u)$ ；若变异位是  $D'_j$ ，则定义  $D'_j = \text{random}(D_v, D_u)$ ，而保持其它位不变。其中  $\text{random}(a, b)$  返回  $[a, b]$  间的随机数。

7、退火接受新个体：本文的混合遗传模拟退火算法是独立地对选择、交叉、变异等遗传操作所产生的一组新个体进行模拟退火过程。这里通过选择、交叉、变异等遗传操作所产生的一组新个体独立地随机选择各个个体中的两个基因作为扰动点，经扰动后的个体所得的适应度增强则一定接受这个新个体，而新个体所得的适应度减小时，以某一概率接受这个新个体。这里采用  $\exp(-\Delta/t)$  作为接受新状态的条件，其中  $\Delta$  为新旧状态的目标值差， $t$  为退火温度。

8、系统参数及迭代终止条件：设定群体规模  $m$ ，交叉概率  $p_c$  和变异概率  $p_m$  等参数，若给定进化代数  $T$ ，则进化计算  $T$  代后就终止运行。另外，为评价 GA 的收敛性能，定义离线性能函数  $P(t) = \sum_{i=1}^t f'_{\max} / t$ ，其中  $f'_{\max}$  为第  $i$  代的最大个体适应度， $P(t)$  是第  $t$  代的离线性能值。在早期搜索过程中， $P(t)$  将迅速增长；在后期搜索过程中， $P(t)$  的增长将平缓下来，并最终趋向于收敛值。若前后两代的离线性能值变化差异小于给定小值  $\varepsilon$  时就终止运行。

## 4.5 模型试算

### 4.5.1 声波反演

#### 1、两层介质模型

为验证上述反演算法的有效性，设计如下理论模型，如表 4-1 所示。采用伪谱法进行正演模拟，地面激发地面接收，道间距为 10m，20 道接收。反演时，取种群大小  $P = 64$ ，杂交概率  $P_c = 0.85$ ，变异概率  $P_m = 0.05$ 。给定初始模型如表 4-1 所示进行反演，得到如图 4-2 所示的反演结果。

表 4-1 两层介质模型

层号	深度(m)	$V_p$ (m/s)	初始深度(m)	初始 $V_p$ (m/s)
第一层	85.0153	2500	120.00	2200.0
第二层	200.00	2800	200.00	2500.0

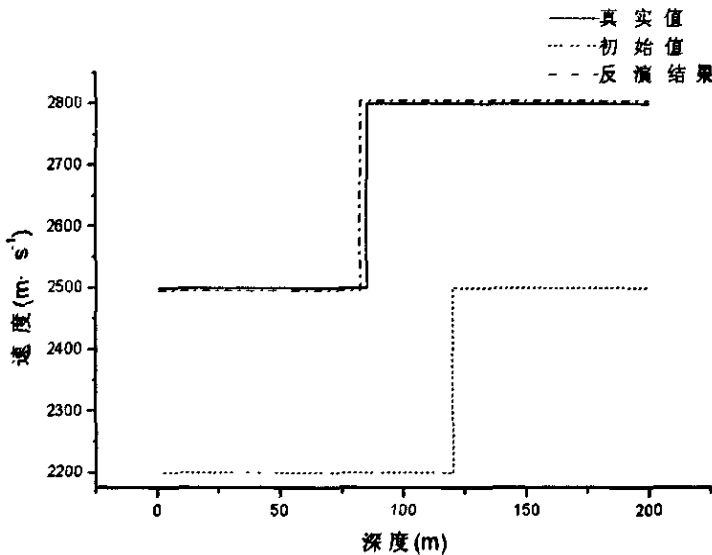


图 4-2 两层模型的反演结果与模型和理论值之间的关系

当取不同的初始模型进行反演时，只要初始值与理论值相差小于 12% 时都能得到较好的反演结果，证明该算法具有较强的适应性。而相差大于 15% 得到的结果就很差了。

初始模型所用的子波主频为 15 Hz，反演时在小于 1~28 Hz 的频带范围内，反演结果与实际值非常接近，这主要是在主频周围函数响应最强。在大于 28 Hz 的频带范围内，反演结果比较差，如图 4-3，图 4-4，图 4-5 所示。

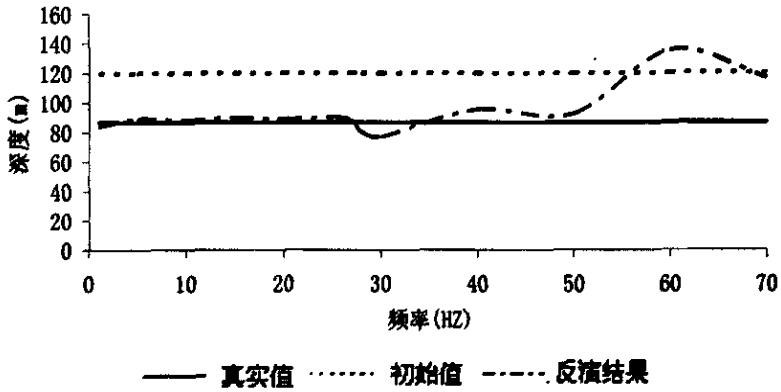


图 4-3 反演的界面与频率的关系图

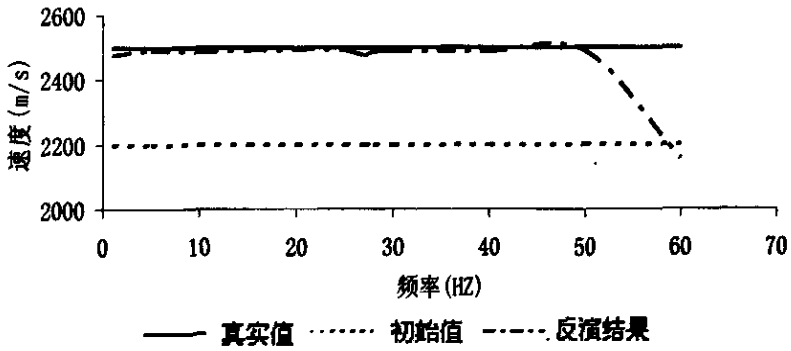


图 4-4 反演的第一层的速度与频率的关系图

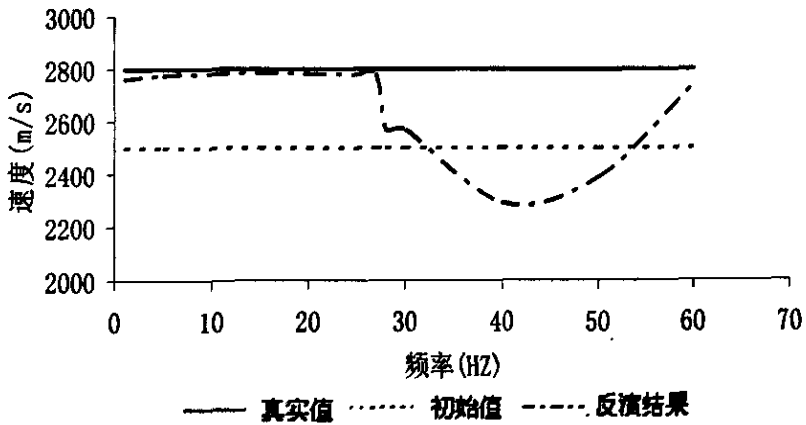


图 4-5 反演的第二层的速度与频率的关系图

## 2、四层介质模型

模型参数如表 4-1 所示。用伪谱法进行正演模拟，采用地面激发



地面接收，道间距为10m，25道接收。反演时，取种群大小  $P = 80$ ，杂交概率  $P_c = 0.85$ ，变异概率  $P_m = 0.05$ 。给定初始模型如表 4-2 所示进行反演，得到较好的反演结果，如图 4-6 所示。

表 4-2 四层介质模型

层号	深度(m)	$V_p$ (m/s)	初始深度(m)	初始 $V_p$ (m/s)
第一层	114.9847	2000	90.0	2150.0
第二层	201.8349	3800	180.0	3680.0
第三层	316.8196	2500	350.0	2600.0
第四层	400	3500	400.0	3250.0

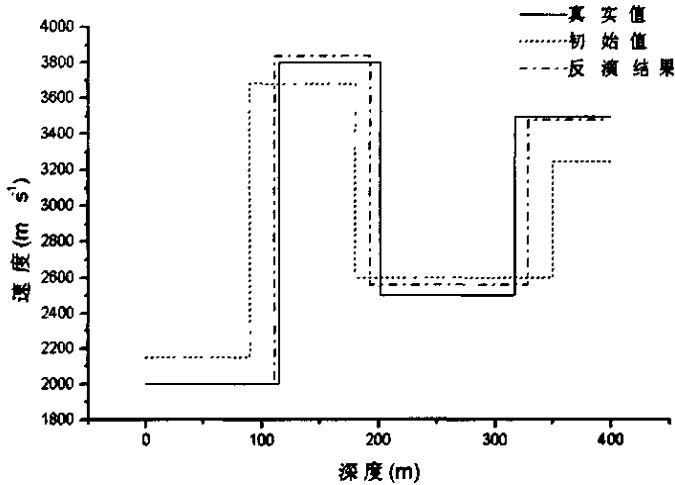


图 4-6 四层模型的反演结果与模型和理论值之间的关系

### 4.5.2 粘滞声波反演

#### 1、水平介质模型

##### (1) 两层介质模型

用伪谱法进行正演模拟，采用地面激发，在(200,0)处的井中接收，道间距为10m，20道接收。反演时，取种群大小  $P = 64$ ，杂交概率  $P_c = 0.85$ ，变异概率  $P_m = 0.05$ 。给定初始模型如表 4-3 所示进行反演，得到如图 4-7 和图 4-8 所示的反演结果。由于该模型的所用的品质因子相对较大，地层的吸收明显，所以品质因子的反演结果也较好。

表 4-3 两层介质模型

层号	深度(m)	$V_p$ (m/s)	$Q$	初始深度(m)	初始 $V_p$ (m/s)	$Q$
第一层	85.0153	2500	60	112.0	2200.0	105
第二层	200	2800	80	200.0	2700.0	42

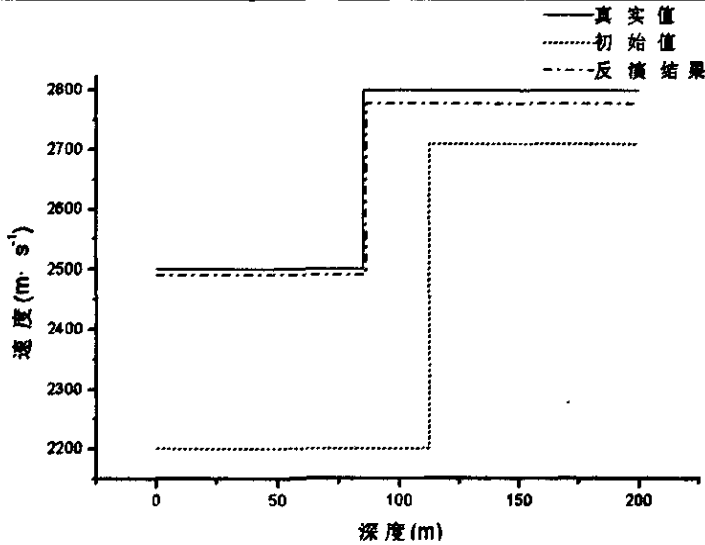


图 4-7 两层模型的速度值反演结果与模型和理论值之间的关系

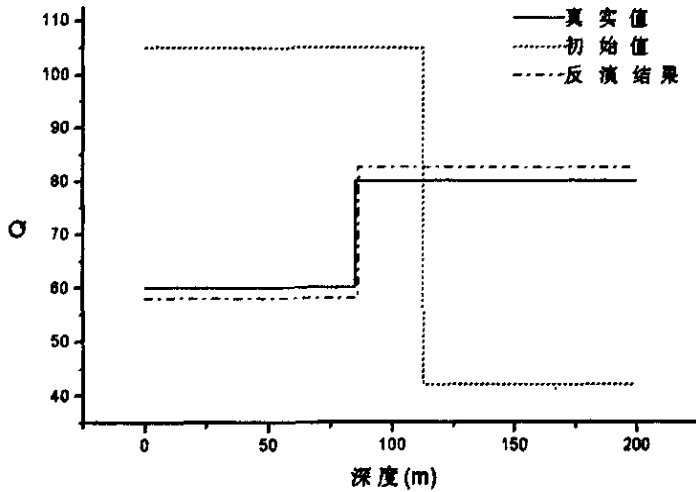


图 4-8 两层模型的品质因子反演结果与模型和理论值之间的关系

图 4-9, 图 4-10 是在不同频率下两层介质的品质因子反演结果, 可以看出在 6~23Hz 的频带范围内, 反演结果较好, 说明品质因子对频率变化的响应比速度敏感得多。

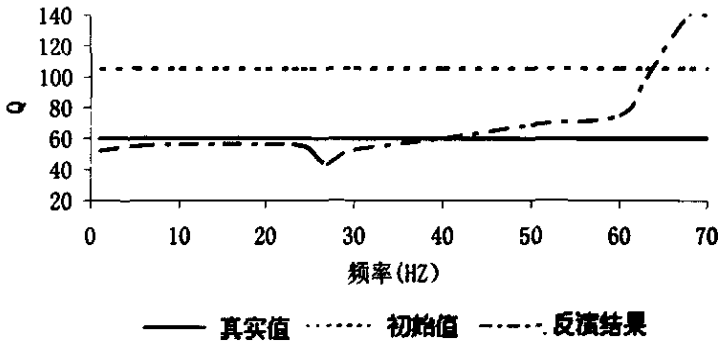


图 4-9 反演的第一层品质因子与频率的关系图

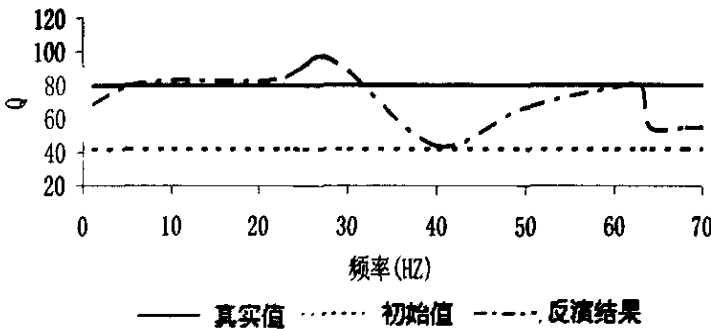


图 4-10 反演的第二层品质因子与频率的关系图

(2) 四层介质模型

模型参数如表 4-1 所示。用伪谱法进行正演模拟，采用地面激发，(250,0) 处的井中接收，道间距为 10m，25 道接收。反演时，取种群大小  $P = 80$ ，杂交概率  $P_c = 0.85$ ，变异概率  $P_m = 0.05$ 。给定初始模型如表 4-4 所示进行反演，得到如图 4-11 和 4-12 所示的反演结果。

表 4-4 四层介质模型

层号	深度(m)	$V_p(m/s)$	$Q$	初始深度(m)	初始 $V_p(m/s)$	$Q$
第一层	114.9847	2000	60	65.00	2145.0	25
第二层	205.5046	3800	110	175.00	3580.0	150
第三层	311.9266	2500	75	350.00	2400.0	45
第四层	400	3500	95	400.00	3650.0	130

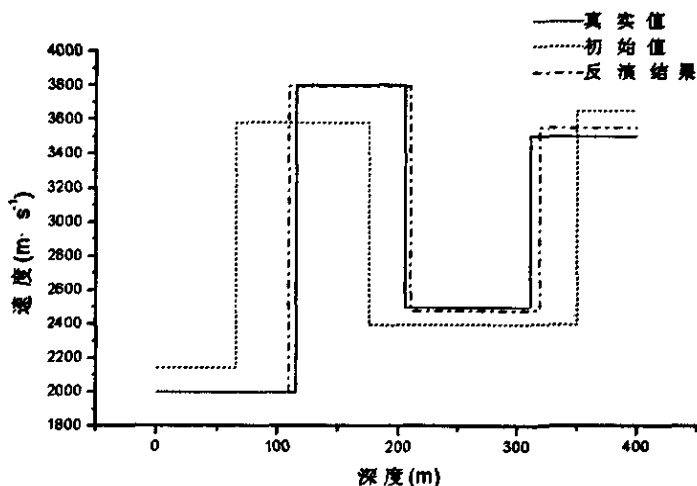


图 4-11 四层模型的速度值反演结果与模型和理论值之间的关系

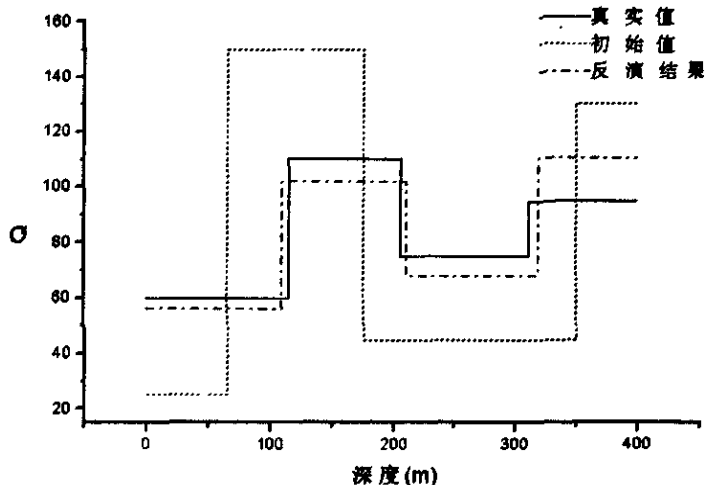


图 4-12 四层模型的品质因子反演结果与模型和理论值之间的关系

## 2、倾斜介质模型

### (1) 两层介质模型

介质模型如图 4-13 和图 4-14 所示，用伪谱法进行正演模拟，采用地面激发，在(200,0)处的井中接收，道间距为10m，20道接收。反演时，取种群大小  $P = 80$ ，杂交概率  $P_c = 0.85$ ，变异概率  $P_m = 0.05$ 。给定初始速度和初始品质因子模型如图 4-15 和图 4-16 所示进行反演，得到如图 4-17 和 4-18 所示的结果，可以看出速度、品质因子和界面都得到了较好的反演结果。

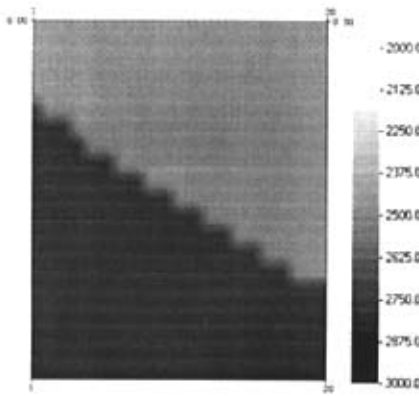


图 4-13 速度模型

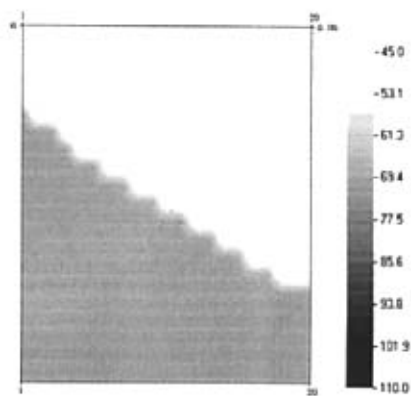


图 4-14 品质因子模型

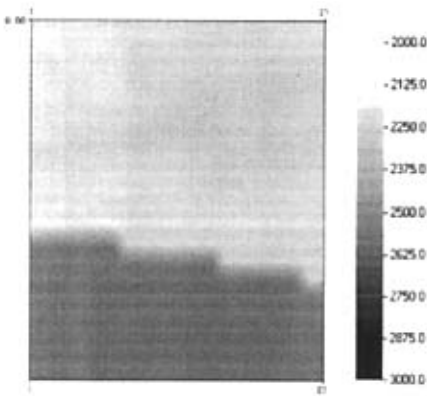


图 4-15 初始速度模型

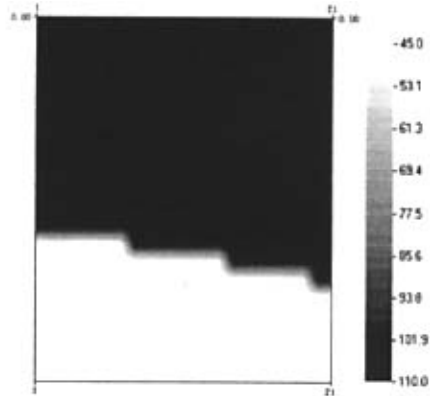


图 4-16 初始品质因子模型

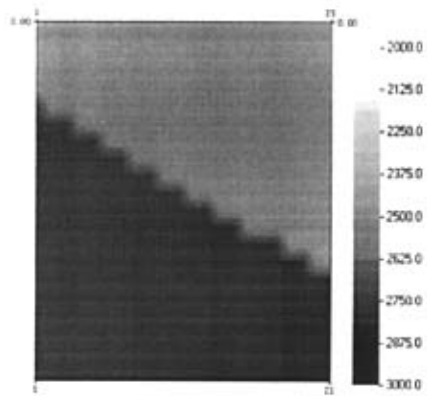


图 4-17 反演速度结果

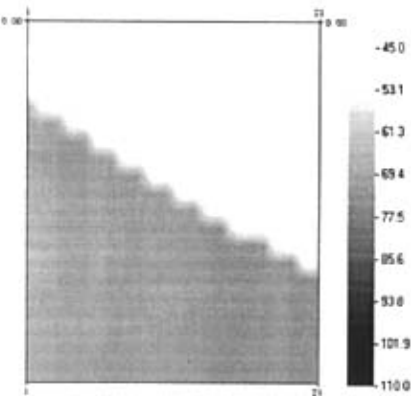


图 4-18 反演品质因子结果

(2) 四层介质模型

采用伪谱法进行正演模拟，采用地面激发地面接收，道间距为 10m，60 道接收。反演时，取种群大小  $P=100$ ，杂交概率  $P_c=0.85$ ，变异概率  $P_m=0.05$ 。介质模型如图 4-19 和图 4-20 所示，给定初始速度和初始品质因子模型如图 4-21 和图 4-22 所示进行反演，得到如图 4-23 和 4-24 所示的反演结果。可以看出，初始模型为三层时也得到了较好的反演结果。

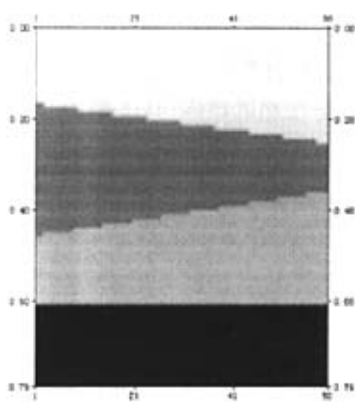


图 4-19 速度模型

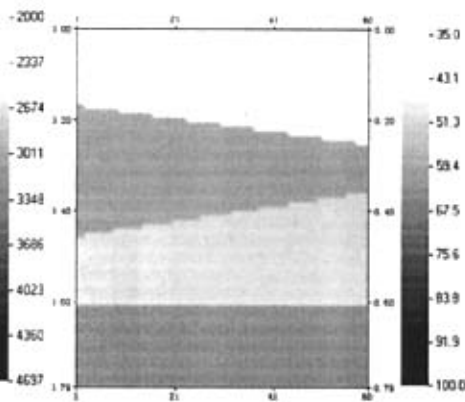


图 4-20 品质因子模型

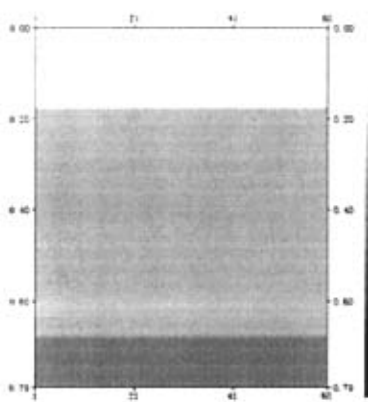


图 4-21 初始速度模型

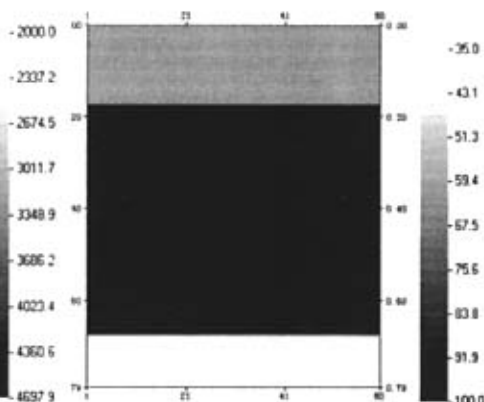


图 4-22 初始品质因子模型

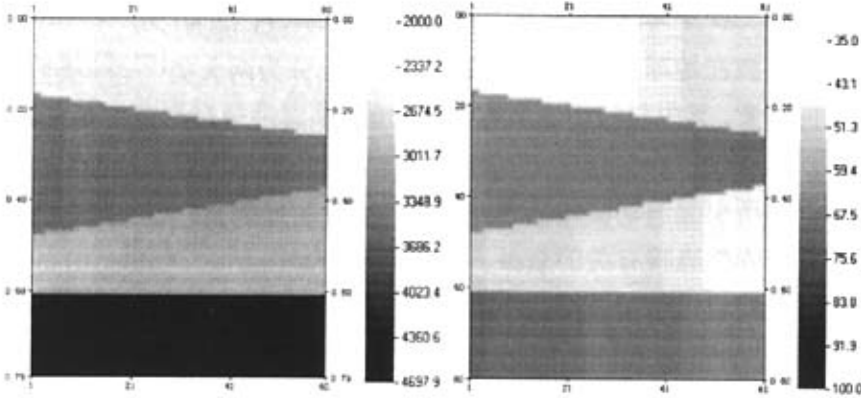


图 4-23 反演速度结果

图 4-24 反演品质因子结果

从上述几种模型的反演结果可以看出，品质因子的反演结果总体上是还是不错的，但比起速度场的反演结果还是相对较差，且对频率变化的响应比速度敏感。当品质因子较大时，介质近似弹性介质，反演结果与实际值相差较大；当品质因子较小时，介质吸收非常强烈，则反演结果与真实值吻合较好。总体来说，品质因子的变化对地震记录面貌的影响不是很大，反演结果对它的变化不是很敏感，不同的初始模型得到的反演结果会存在一定的差别。

## 第5章 粘弹性介质中的衰减补偿研究

地震波在地球介质中的衰减原因基本上分为两大类<sup>[47]</sup>,一类归结为几何因素,其中包括由于波阵面的扩展、地震波通过界面时的反射、折射以及通过不均匀介质(不均匀尺度与波长大小可以相比较)时造成的散射所引起波动振幅的衰减;另一类是物理因素,即与地球介质的非完全弹性直接有关的衰减,也称固有衰减(*intrinsic attenuation*)。本章节主要讨论由于介质的非弹性所造成的衰减<sup>[48]</sup>。

### 5.1 衰减的基本理论

#### 5.1.1 岩石的吸收衰减机制

M.N.Toksz, D.H.Johnston 和 A.Timur 通过实验室详细研究,讨论了岩石对地震波的吸收衰减的各种机制,指出地震波在岩石中衰减的主要原因是摩擦、液体流动、粘性张弛以及扩散。岩石的基质滞弹性损耗包括地震波在岩石颗粒之间的界面上以及裂缝的两个表面之间的相对运动而引起的摩擦损耗;由于液体流动引起的衰减,这种衰减包括孔隙和流体之间界面上因剪切运动而引起的张弛,在一块完全饱和的岩石中,主要是由于岩石格架相对于流体夹杂物之间的相对运动而引起的损耗;喷射现象、局部饱和效应、能量吸收、以及由于小孔隙的散射和来自薄层的大量不规则反射和选择性反射;完全干燥的岩石中的衰减小于潮湿或者饱和的岩石衰减,这是由于液体在裂缝中的润滑,推进了滑动摩擦使衰减增加,在饱和多孔的岩石中,液体流动引起的衰减机制的效应,次于摩擦机制的效应。超声频率下,在疏松的、可以渗透的岩石中, N.C.Dutta 和 H.Ode 认为岩石的吸收衰减的主要是由 Biot 型液体流动引起的。Grant 研究了砂岩中速度和衰减的流体效应,他利用超声波衰减研究了合成孔隙介质和岩石在饱和流体作用下的速度与衰减,用介质微裂隙纹中的流体粘滞性和孔隙壁的粗糙程度来解释岩石的衰减机制,并且认为超声波衰减与 Biot 理论之间的差异取决于砂岩中复杂的孔隙形状。

虽然岩石的每一种衰减机制都是在一定的物理条件下成立,但在



大多数已定条件下, 岩石窄裂缝以及岩石颗粒表面上的摩擦是主要的衰减机制。

### 5.1.2 岩石的吸收衰减参数

#### 1、对数衰减量

$$\delta = \ln \left[ \frac{A_1}{A_2} \right] \quad (5-1)$$

式中  $A_1$ 、 $A_2$  是相邻两个波峰的振幅值。

#### 2、吸收系数 $\alpha$

均匀吸收介质中传播的平面波振幅方程为

$$A(r, t) = A_0 e^{-\alpha r} \omega(t) \quad (5-2)$$

其中,  $A_0$  为初始振幅值;  $r$  为传播距离;  $\alpha$  为吸收系数;  $\omega(t)$  为波动函数。在吸收介质中, 振幅值随传播距离的增大而呈指数减小, 显

$$\alpha = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\delta f}{v} \quad (5-3)$$

#### 3、衰减系数 $\beta$

平面波每走一个波长的振幅衰减分贝数, 即

$$\beta = 20 \lg \left( \frac{A_1}{A_2} \right) \quad (5-4)$$

#### 4、品质因子 $Q$

地震波衰减的一个重要物理参量是介质的品质因子  $Q$  值, 它描述了介质非完全弹性特征, 它是地层的内部本质特性。一般来说介质的  $Q$  值与地壳的结构特征有关, 常常用下面的式子来定义: 当波传播一个波长  $\lambda$  的距离后, 原来储存的能量  $E$  与消耗能量  $\Delta E$  之比的  $2\pi$  倍, 即

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \quad (5-5)$$

$\delta$  与  $Q$  都是表示地震波振动一周的衰减情况, 它们之间的关系是:

$$\delta = \frac{\pi}{Q} \quad (5-6)$$

对数衰减量  $\delta$ 、吸收系数  $\alpha$ 、衰减系数  $\beta$  和品质因数  $Q$  之间的关系:

$$\beta = 20 \lg \left( \frac{A_1}{A_2} \right) = 20 \lg(e^\delta) = 20 \lg(e^{\alpha \lambda}) = 20 \left[ \frac{\ln e^{\alpha \lambda}}{\ln 10} \right] = 8.686 \alpha \lambda \quad (5-7)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{\delta}{\pi} = \frac{\alpha \lambda}{\pi} = \frac{\beta}{8.686 \pi} = \frac{\beta}{27.29} \quad (5-8)$$

## 5.2 影响地层吸收衰减的因素

地震波在传播过程中发生衰减,其衰减的过程反映了传播介质的弹性粘滞特性。一种介质的弹性粘滞特性既决定于外力作用的大小和时间长短,又取决于岩石本身的性质。岩石的吸收特性比较复杂,不仅不同的岩石吸收特性不同,而且同一种岩石随着频率、压力、温度、流体饱和状态和应变振幅等物理量的变化,吸收特性也发生变化<sup>[49]</sup>。地震波在地下介质传播时,地层的吸收性质及其影响因素可得出如下结论<sup>[50]</sup>:

- 1、岩石吸收性质从地表到地球深处变化范围很大,且对纵波和横波各不相同,横波的吸收衰减高于纵波的吸收衰减。
- 2、地层对各类波的吸收与波的频率有关,随频率增加而增大接近于线性关系。
- 3、地层的吸收性质与地震波在地层内的速度之间存在反比关系,高速的岩石,吸收性弱;而低速的岩石,吸收性强。吸收性质如同地震波速一样,频散异常现象较弱。
- 4、地层岩石吸收性质首先决定于岩石保存状态和内部结构。矿物颗粒和粒度对吸收性质影响不大;地层静压力随深度而加大,使岩石压紧,结构致密,引起吸收性变弱;到破坏的岩石结构,将使它的吸收性增强。
- 5、由固、液、气构成的多相介质中,对吸收性质影响最显著的是气态物质,在岩石孔隙饱和液中渗入少量气态物质,可以明显提高对纵波能量的吸收。
- 6、对大多数地区,泥岩的平均吸收性比砂岩强,砂岩的吸收性

比页岩和灰岩的吸收性强。砂岩含油气时,其吸收性显著增强。

7、岩石的吸收性质还与其埋藏深度有关,随埋藏深度增加而减少。

8、温度越高,吸收越小。

9、孔隙中流体的性质对吸收也有影响。

由此可知地层吸收性质与岩相、孔隙度、含油气成分等有密切关系,可以用它来预测岩性、预测砂泥岩分布,在有利的条件下可以用来直接预测石油和天然气的存在。

### 5.3 地层吸收衰减的补偿方法

#### 5.3.1 反Q滤波法

根据 Futterman 模型<sup>[51]</sup>,反Q滤波的振幅衰减部分满足:

$$A(\omega, t) = A(\omega, 0) \exp(-\omega t / 2Q) \quad (5-9)$$

则反Q滤波公式为:  $H(f) = \exp(\pi |f| / Q + i\phi(f))$  (5-10)

实际上,反Q滤波法是在时间域逐点变化补偿频率<sup>[52]</sup>,它是通过多次褶积完成这一频率补偿过程,该方法需要知道地层的品质因素Q值<sup>[53]</sup>。

#### 5.3.2 谱白化

通过展平信号的振幅谱来达到补偿衰减的目的<sup>[54]</sup>,它的特点是对信号的振幅谱进行处理,而不改变信号的相位谱,因此也称“零相位反褶积”。可以在时间域进行,也可以在频率域进行。这种方法是每隔一定时间开一个时窗,然后对时窗内数据进行谱白化。缺点时时窗开大了会造成对深层的补偿不足,时窗开小了又使反射系数的统计特性消失<sup>[55]</sup>。

#### 5.3.3 小波变换频率补偿

利用小波变换进行频率补偿来提高分辨率的方法在一些文献中已有介绍<sup>[56]</sup>,大多是采用小波多分辨分析将数据分解到不同尺度的时频域,而后对不同尺度的信息进行增益处理。由于在任意时间的小波函数和尺度函数都是正交的,如对这些尺度进行过分的处理将会破坏

这种正交性，造成重构数据畸变。如在不同的尺度上作均方根增益，它的结果同谱白化一样会破坏反射系数序列，有时甚至更坏。因此，只能在允许的范围内，尽可能地保持正交性的条件下补偿高频信息，同时要注意空间的变化关系。

### 5.4 粘滞声波介质中的偏移补偿

粘弹性介质波场延拓的目的是通过补偿恢复地震波传播过程中衰减损失的能量，提高地震剖面的分辨率，增强地震剖面的质量<sup>[57]</sup>。

弹性介质时，地震波在一维  $Z$  方向传播的波函数可以表示成延拓关系：

$$u(\omega, z + \Delta z) = u(\omega, z) \exp\left(\pm i\omega \frac{\Delta z}{V}\right) \quad (5-11)$$

式中，“+”和“-”分别表示下行波和上行波。 $V$ 为均匀弹性各向同性介质中波的传播速度； $\Delta z$ 是延拓步长。令  $k_z = \omega/V$ ，上式可写为

$$u(\omega, z + \Delta z) = u(\omega, z) \exp(\pm k_z \Delta z)$$

在频率空间域，位置  $z$  处对给定的  $\omega$ ，已知速度  $V$  条件下，可以进行波场延拓。下行波场延拓是由  $u(\omega, z)$  递推  $u(\omega, z + \Delta z)$ ，上行波场延拓是由  $u(\omega, z + \Delta z)$  递推  $u(\omega, z)$ 。

粘弹性介质时，波场  $Z$  方向的递推公式是

$$u(\omega, z + \Delta z) = u(\omega, z) \exp\left(-\frac{\omega}{2QV} \Delta z\right) \exp\left(\pm i\omega \frac{\Delta z}{V}\right) \quad (5-12)$$

上式是 Hargreaves(1991)利用傅式变换做单道反  $Q$  滤波进行能量补偿的公式，也是地震数据处理中能量补偿的主要公式之一。在频率空间域，位置  $z$  处对给定的  $\omega$ ，已知速度  $V$  和品质因素  $Q$ ，可以进行波场延拓。

$$u(\omega, z) = \exp\left(-\frac{\omega}{2QV} z\right) \exp\left(\pm i\omega \left(t - \frac{z}{V}\right)\right) \quad (5-13)$$

由弹性波延拓的公式，粘弹性介质下行波场延拓是由  $u(\omega, z)$  递推  $u(\omega, z + \Delta z)$ ，公式为

$$u(\omega, z + \Delta z) = u(\omega, z) \exp\left(-\frac{\omega}{2QV} \Delta z\right) \exp\left(i\omega \frac{\Delta z}{V}\right) \quad (5-14)$$

上式表明,地震波随着传播距离的增大,振幅呈指数衰减(高频成分)。上式描述了包含反射的双程实际地震记录,该记录也称为地震波远离震源的正向传播过程,上式也可视为经过半程处理后的地震记录。

上行波场延拓是由 $u(\omega, z + \Delta z)$ 递推 $u(\omega, z)$ , 公式为

$$u(\omega, z) = u(\omega, z + \Delta z) \exp\left(-\frac{\omega}{2QV} \Delta z\right) \exp\left(-i\omega \frac{\Delta z}{V}\right) \quad (5-15)$$

上式表示记录是地震波聚向震源的逆向传播过程。地震波随着距离的减小,振幅按照指数规律补偿恢复(高频成分),这个过程也成为“反 $Q$ 滤波”。实际地震记录参照上式处理也就实现了“反 $Q$ 滤波”。

已知弹性介质的二维声波方程为

$$\frac{\partial^2 U(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U(x, z, t)}{\partial t^2} \quad (5-16)$$

关于 $t$ 和 $x$ 做二维傅氏变换,得

$$\frac{\partial^2 u(k_x, z, \omega)}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{V^2} - k_x^2\right) u(k_x, z, \omega) = 0 \quad (5-17)$$

当为粘弹性介质时,速度与频率相关且为复数,即此时的波数:

$k(\omega) = \omega/V(\omega)$ 为复数,而开尔芬介质中的复波数可表示成如下形式:

$$k_{Kelvm-Pb} = k(\omega) = k_R + k_I \approx k(1 + i/2Q) \approx \frac{\omega}{V}(1 + i/2Q) \quad (5-18)$$

其中 $k_R$ 和 $k_I$ 分别是开尔芬复波数的实部和虚部, $k$ 近似为弹性介质中的波数, $Q$ 为介质的品质因子。

而此时粘弹性方程的频散关系为

$$k_z^2 = k(\omega) = k^2 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right)^2 - k_x^2 \quad (5-19)$$

当 $Q \gg 1$ 时,上式可近似为:  $k_z^2 \approx k^2 \left(1 - i \frac{\text{sign}_1}{2Q}\right) - k_x^2$  (5-20)

其中,  $sign_1 = -1$  和  $sign_1 = 1$  时分别表示波的正传播和逆传播过程: 正传播是波的能量衰减过程, 逆传播过程就是能量的补偿恢复过程。

由上式可以进一步得到粘弹性介质频率空间域波场延拓公式:

$$\frac{\partial u(x, z, \omega)}{\partial z} = ik_z = isign_2 \frac{\omega}{V} \sqrt{\left(1 - i \frac{sign_1}{2Q}\right) - \frac{k_x^2}{k^2}} u(x, z, \omega) \quad (5-21)$$

其中,  $sign_2 = -1$  和  $sign_2 = 1$  分别表示上行波和下行波。在位置  $z$ , 对给定的  $\omega$ , 已知  $V$  和  $Q$  的条件下, 可以进行波场的正逆向延拓, 其中  $V$  近似取为均匀弹性各向同性介质中波的相速度。

### 5.4.1 水平层状模型

为了验证偏移补偿的效果, 我们设计了一四层水平介质模型, 模型参数如表 5-1 所示, 地质模型如图 5-1。采用地面 9 炮激发, 地面 100 道接收。第二层的品质因子低, 地层的吸收衰减作用较强。图 5-2 是该模型 9 炮合成记录, 可以看出下层的能量弱。图 5-3, 图 5-4 分别是不加补偿的偏移结果和补偿粘滞影响的偏移结果, 可以看出补偿后第二层的同相轴更清晰, 深层同相轴的能量得到了加强, 整个记录的分辨率也有相应的提高。模型试算表明, 该方法不但能够有效补偿反射能量, 并在一定程度上提高了信噪比, 提高资料的分辨率。图 5-5, 图 5-6 分别为补偿前后两个地震道放大显示的结果。

表 5-1 介质模型参数

层号	深度(m)	$V_p$ (m/s)	$Q$
第一层	542.7744	3000	40
第二层	695.9331	1500	20
第三层	1054.0153	3000	40
第四层	1500.0000	4000	60

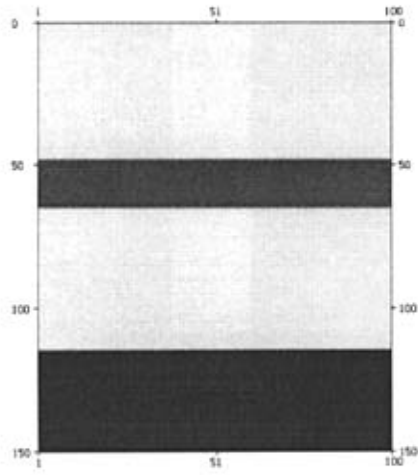


图 5-1 四层介质模型

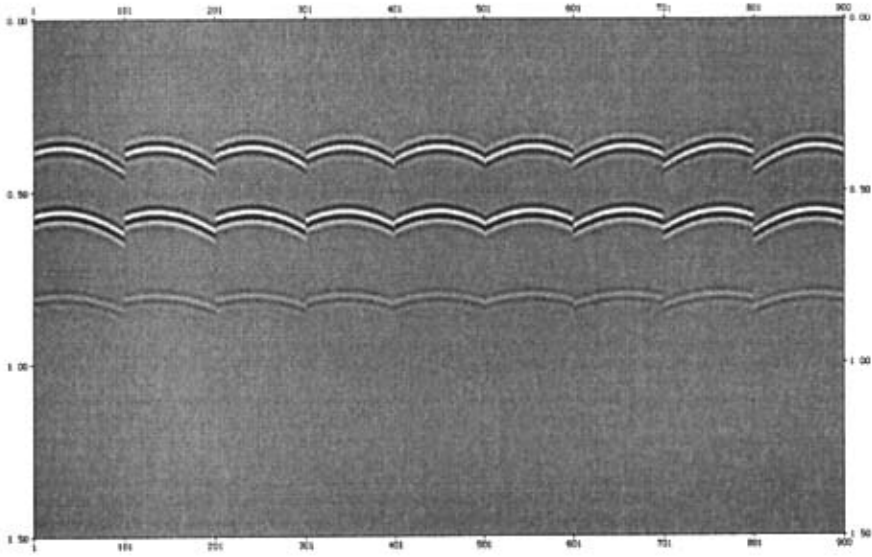


图 5-2 四层介质模型 9 炮合成记录

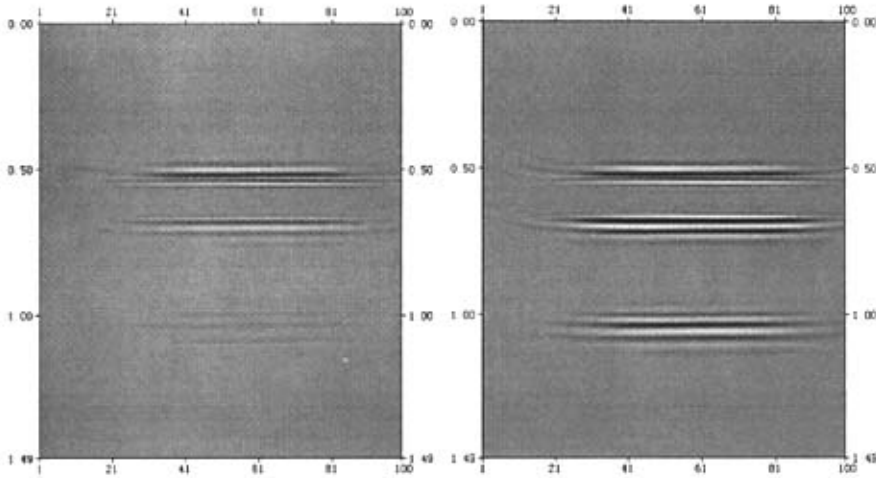


图 5-3 不做补偿的偏移结果

图 5-4 粘滞补偿的偏移结果

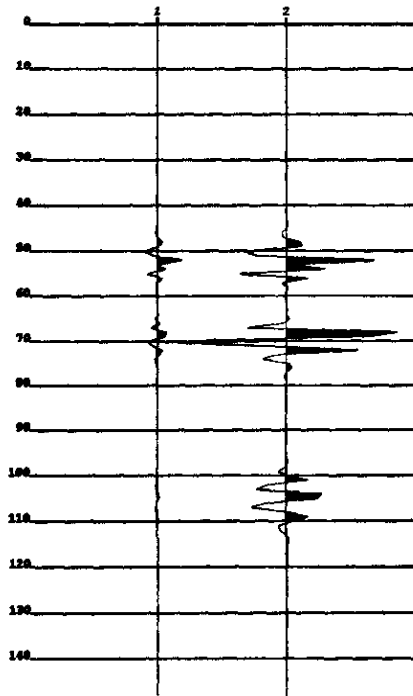


图 5-5 补偿前后第 50 道放大显示

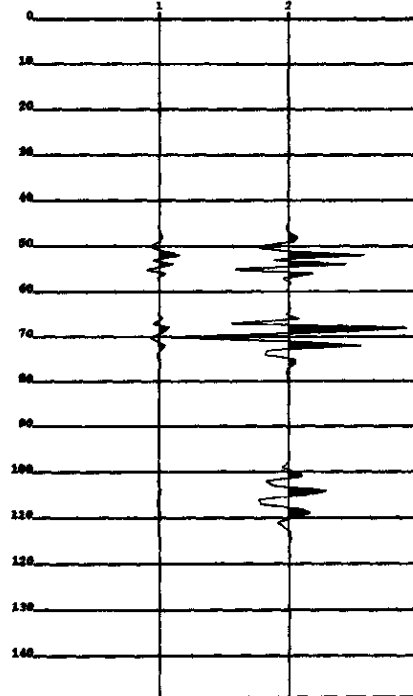


图 5-6 补偿前后第 80 道放大显示

### 5.4.2 楔状模型

下图 5-7 和图 5-8 分别是一楔状介质的速度模型和品质因子模型，采用地面 10 炮激发，地面 190 道接收。图 5-9 是该模型 10 炮激发的合成记录。图 5-10，图 5-11 分别是不加补偿的偏移结果和补偿



粘滞影响的偏移结果，可以看出补偿后深层同相轴的能量得到了加强，地层之间的接触关系较为清楚的反映出来，整个记录的分辨率也有相应的提高。

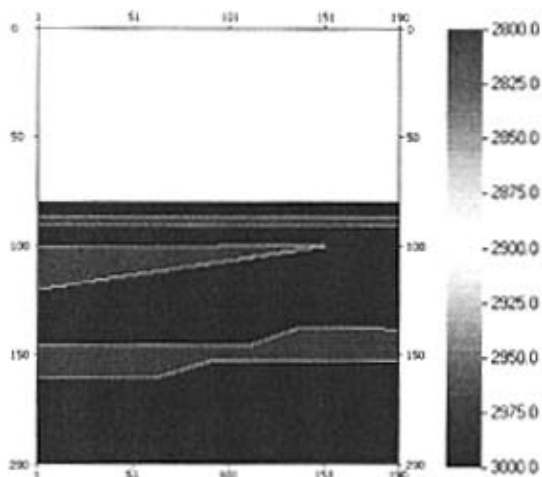


图 5-7 楔状介质速度模型

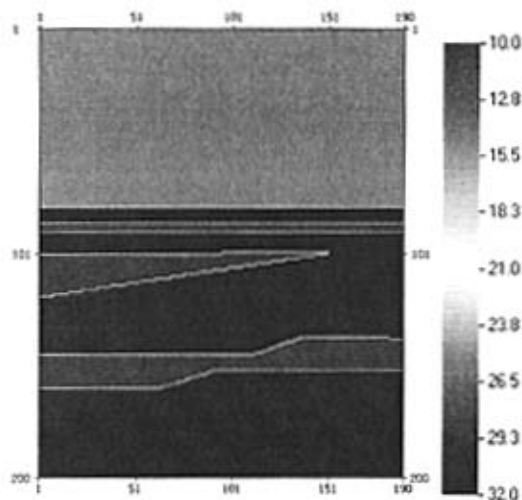


图 5-8 楔状介质品质因子模型

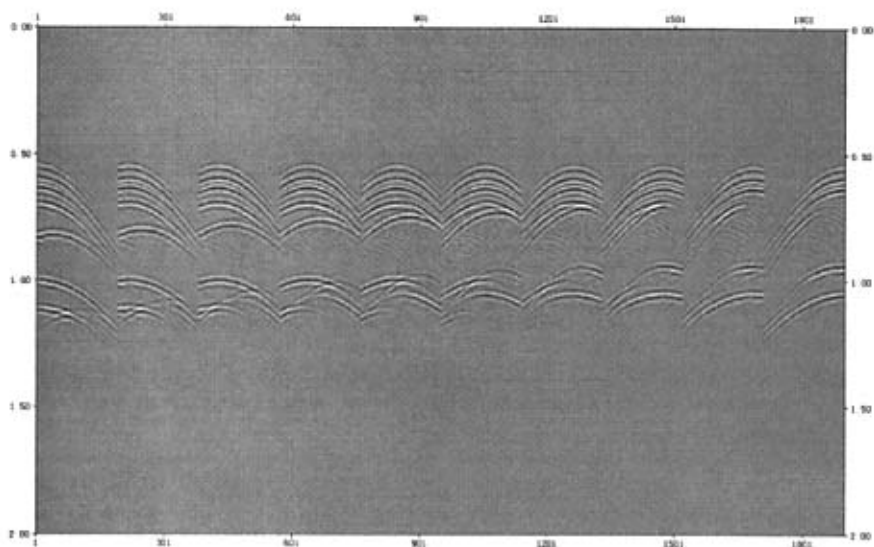


图 5-9 楔状介质模型 10 炮合成记录

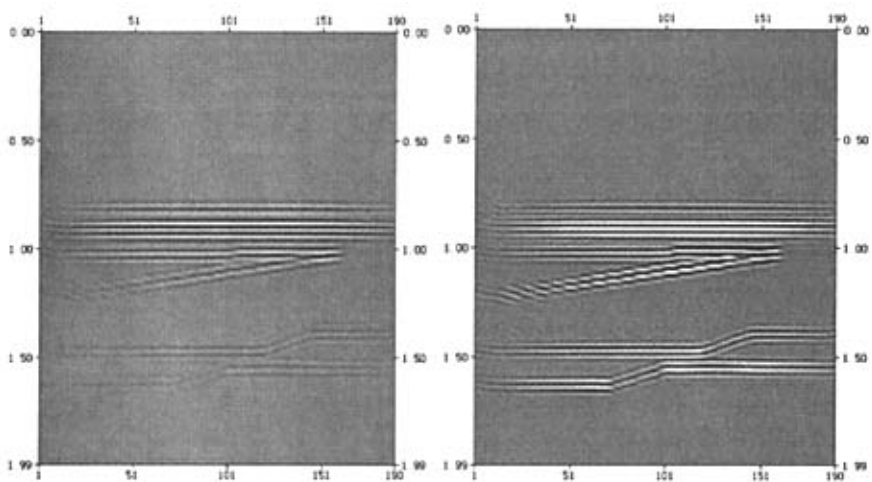


图 5-10 不做补偿的偏移结果

图 5-11 粘滞补偿的偏移结果

## 第6章 结论和建议

### 6.1 结论

1、粘弹性介质中波的吸收衰减与介质的粘性参数有关，不同的介质具有不同的粘性参数。品质因子越小粘性系数越大，波的吸收和衰减越严重。

2、本文运用不同的方法对粘弹性介质中的波场进行了模拟，结果表明伪谱法比差分法的计算精度高，模拟效果优于差分法。在边界条件的处理上，分别采用吸收边界条件，扩边吸收边界条件，最佳匹配层边界条件。事实证明相对其他边界条件，最佳匹配层边界条件能有效吸收边界反射。本文中对一般的扩边边界条件进行了改进，按照边界的趋势进行扩边，这对倾斜层的模拟结果有一定的改善。文中首次将最佳匹配层边界条件引入伪谱法模拟中，对原有波动方程进行了改造，使得只需要对空间域做一维傅立叶变换，大大提高了伪谱法的计算效率。由于伪谱法本身具有很高的计算精度，在计算效率改善的条件下将能更好地运用于复杂介质的波场模拟，这对伪谱法更好地运用于波场模拟起到了很大的推动作用。

3、参数反演时，采用遗传算法与模拟退火算法相结合的方法，即遗传模拟退火算法来反演叠前地震参数。遗传算法把握搜索过程总体的能力较强，而模拟退火算法具有较强的局部搜索能力。两者结合，取长补短，形成一种新的全局搜索算法。采用多项式展开表示界面深度和速度，可以同时反演出地下复杂构造的界面形态和速度等参数的变化。该方法与网格化速度反演相比减少了未知参数，简化了模型，较好地克服了多解性问题，试验结果表明该方法可以达到较高的反演精度，且具有较强的稳定性。由于品质因子的变化对地震记录面貌的影响不是很大，反演结果对它的变化不是很敏感。当品质因子较大时，介质近似弹性介质，反演结果与实际值相差较大；当品质因子很小时，介质吸收强烈，则反演结果与真实值则吻合得较好。

4、由反演所得的品质因子，通过偏移补偿地震波的吸收衰减，同相轴的能量得到了加强，特别是深层的界面得到了更好的成像，提

高了资料的分辨率。

## 6.2 建议

1、反演时，若地层分界面的数目大致可以确定，但分界面的位置以及速度未知时，初始地质模型对反演结果影响不大。若地层分界面的数目、位置以及速度均未知时：初始地质模型的选定；震源点个数和接收点个数；遗传算法中的关键参数如群体规模、迭代次数等均会对反演结果造成一定的影响。如果初始地质模型与实际情况差异较大，则要求震源点个数和接收点个数能够达到一定的数量，且群体规模、迭代次数设置较为合理时就有可能得到较为理想的反演结果。当地层的分界面很复杂，速度横向变化较大时还需进一步的研究和探讨。

2、本文只对粘滞声波介质模型的品质因子进行了反演，反演的算法和效果还需进一步改进，今后的工作需向粘弹性介质和实际资料反演的方向努力。反演得到地层品质因子，不仅可以对地震波传播过程中的吸收衰减进行补偿，还可以通过其空间分布进行油藏描述和油气预测，对于非构造油气圈闭的勘探具有重要作用，可以直接用来寻找油气。

## 参考文献

- [1] (美)N.H.瑞克, 许云译, 吴律校. 粘弹性介质中的地震波. 北京: 地质出版社, 1981
- [2] Tong Xu, George A. McMechan. Efficient 3-D viscoelastic modeling with application to near-surface land seismic data. *Geophysics*, 1998; 63(2): 601~612
- [3] Stekl, R.G. Pratt. Accurate viscoelastic modeling by frequency-domain finite differences using rotated operators, *Geophysics*, 1998; 63(5): 811~823
- [4] 崔建军, 何继善. 粘弹性波动方程正演和偏移. *中南工业大学学报*, 2001; 32(5): 441~444
- [5] 杨午阳, Houzhu Zhang, 茅金根等. F-X 域粘弹性波动方程保幅偏移. *石油物探*, 2003; 42(3): 285~288
- [6] 奚先, 姚姚. 二维粘弹性随机介质中的波场特征分析. *地球物理学进展*, 2004; 19(3): 608~615
- [7] 张智, 刘财, 邵志刚等. 伪谱法在常 Q 粘弹介质地震波场模拟中的应用效果. *地球物理学进展*, 2005; 20(4): 945~949
- [8] 刘财, 张智, 邵志刚等. 线性粘弹体中地震波场伪谱法模拟技术. *地球物理学进展*, 2005; 20(3): 640~644
- [9] 杨顶辉, 滕吉文, 张中杰. 各向异性动力学方程反演新算法. *地震学报*, 1997; 19(4): 376~382
- [10] 宋海斌, 张关泉. 层状介质弹性参数反演问题研究综述. *地球物理学进展*, 1998; 13(4): 67~78
- [11] 张秉铭, 张中杰. 一种新的地层弹性参数直接反演方法. *地震学报*, 2000; 22(6): 654~660
- [12] 张美根, 王妙月, 李小凡等. 时间域全波场各向异性弹性参数反演. *地球物理学报*, 2003; 46(1): 94~100
- [13] 朱定, 陈国俊, 蔡成国. 利用 VSP 直达波资料反演粘弹介质的相速度及品质因子. *勘探地球物理学进展*, 2004; 27(5): 337~342

- [14]张文生, 何樵登. 二维横向各向同性介质的伪谱法正演模拟. 石油物探, 1998; 33(3): 8~14
- [15]傅旦丹, 何樵登. 正交各向异性介质地震弹性波场的伪谱法正演模拟. 石油物探, 2001; 40(3): 8~14
- [16]孟凡顺, 郭海燕, 和转等. 复杂地质体粘滞弹性波正演模拟的有限差分法. 青岛海洋大学学报, 2000; 30(2): 315~320
- [17]张宝金, 曹景忠, 马在田等. 基于波动理论的地震波参数反演探讨. 勘探地球物理进展, 2002; 25(3): 42~46, 78
- [18]马昭军, 刘洋. 地震波衰减反演研究综述. 地球物理学进展, 2005; 20(4): 1074~1082
- [19]牛滨华, 孙春岩. 半空间介质与地震波传播. 北京: 石油工业出版社, 2002: 89~170
- [20]杜世通. 地震波动力学. 东营: 石油大学出版社, 1996
- [21]Clayton R and Engquist B. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. Bull. Seismic. Society. America, 1977; 67(6): 1529~1540
- [22]Cerjan C, Kosloff D, Kosloff R, Reshef M. A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. Geophysics, 1995; 50(3): 705~708
- [23]W C Chew, W H Weedon, and A Sezginer. A 3-D perfectly matched medium by coordinate stretching and its absorption of static fields. in 11th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, Monterey, CA, 1995; 1: 482~487
- [24]Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. Journal Computation Physics, 1994; 114: 185~200
- [25]Hastings F.D, Schneider J.B & Broschat S.L. Application of the perfectly matched layer (PML) absorbing boundary condition to elastic wave propagation. Journal Acoustical Society of America, 1996; 100(5): 3061~3069

- [26]Hesthaven J.S. On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations. *Journal Computation Physics*,1998; 142: 129~147
- [27]马在田. 地震成像技术—有限差分法偏移. 北京: 石油工业出版社, 1989: 1~34, 61~84, 87~100
- [28]范祯祥, 郑仙种. 地震波数值模拟与偏移成像. 郑州: 河南科学技术出版社, 1994
- [29]Xiuming wang etc.Nnmerical experiments for elastic wave propagation: analyses for accuracy and partially saturated fluid effects. SEG Int'l Exposition and 74th Annual Meeting \*Denver, Colorado\*10-15 October 2004: 254~258
- [30]Adam P.Koesoemadinate,George A.McMechan\*. Empirical estimation of viscoelastic seismic parameters from petrophysical on sandstone. *Geophysics*, 2001; 66(5):294~307
- [31]Xiaosong Zeng, Gordon F.West. Dithering of absorbers for efficient finine-difference modeling of viscoelastic wave progration. *Geophysics*, 1998; 63(5):347~352
- [32]Kosmanis T.I, Yioultis T.V & Tsiboukis T.D. Perfectly matched anisotropic layer for the numerical analysis of unbounded eddy-current problems. *IEEE Trans. Magn*,1999; 35(5): 4452~4458
- [33]Zeng Y.Q, He J.Q & Liu Q.H. The application of the perfectly matched layer in numerical modeling of wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 2001; 66(4): 1258~1266
- [34]Tsili Wang and Xiaoming Tang. Finite-difference modeling of elastic wave propagation: A nonsplitting perfectly matched layer approach: *Geophysics*, 2003; 68(5):1749~1755
- [35]Collino F and T sogka C. Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 2001; 66(5):294~307
- [36]Dimitri Komatitsch and Jeroen Tromp. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave

- equation. *Geophysical Journal International*, 2003; 154:146~153
- [37]杨文采. 地球物理反演和地震层析成像. 地质出版社, 1989
- [38]范祯祥, 郑仙种. 地震波参数反演与应用技术. 郑州: 河南科学技术出版社, 1998
- [39]杨文采. 评地球物理反演的发展趋向. 地学前缘(中国地质大学, 北京), 2002; 9(4): 389~396
- [40]杨文采. 地球物理反演的遗传算法. 石油物探, 1995; 34(1): 116~122
- [41]傅旦丹, 何樵登. 遗传算法的改进及其在各向异性介质参数反演中的应用. 石油物探, 2002; 41(3): 293~298
- [42]任传祥, 张海, 范跃祖. 混合遗传-模拟退火算法在公交智能调度中的应用. 系统仿真学报, 2005; 17(9): 2075~2081
- [43]刘怀亮, 刘森. 一种混合遗传模拟退火算法及其应用. 广州大学学报(自然科学版), 2005; 4(2): 141~145
- [44]Upendra K.Tiwari, George A.McMechan, Effects of incomplete parameterization on inversion of full wavefield viscoelastic seismic data for petrophysical reservoir properties, SEG Int'l Exposition and 74th Annual Meeting \*Denver, Colorado\*10-15 October 2004: 274~283
- [45]Qingbo Liao, George A.McMechan\*. Multifrequency viscoacoustic modeling and inversion. *Geophysics*, 1996, 61(5): 524~522
- [46]Fusheng Yang\*, Shaoxin Qian. 3-D viscoelastic wave equation inversion: Application of wavelet transform. *Geophysics*, 1991; 61(5): 684~692
- [47]刘建华, 胥颐, 郝天珩. 地震波衰减的物理机制研究. 地球物理学进展, 2004; 19(1): 1~7
- [48]凌云. 大地吸收衰减分析. 石油地球物理勘探, 2001; 36(1): 1-8
- [49]陈树民, 宋永忠, 牛彦良. 松辽盆地地层吸收特性和地震波衰减规律研究. 地球物理学进展, 2001; 16(4): 43~52
- [50]王辉, 常旭, 高峰. 时间域相邻道地震波衰减成像研究. 地球物理



- 学报, 2001; 44(3): 396~403
- [51]姚振兴, 高星, 李维新. 用于深度域地震剖面衰减与频散补偿的反 Q 滤波方法. 地球物理学报, 2003; 46(2): 229~233
- [52]裴江石, 际树民. 近地表 Q 值求取及振幅补偿. 地球物理学进展, 2001; 16(4): 18~22
- [53]严又生, 宜明理, 魏新等. 井间地震速度和 Q 值联合层析成像及应用. 石油地球物理勘探 2001; 36(1): 9~17.
- [54]刘财, 刘洋, 王典. 均匀倾斜层状地层中地震波球面扩散补偿方法研究. 地球物理学进展, 2004; 19(3): 590~595;
- [55]钱绍瑚, 高建华, 谷永兴. 地层吸收衰减模型的制作及补偿方法的研究. 石油地球物理勘探, 1998; 33(1): 19~23
- [56]李鲍鹏, 李衍达, 张学工. 基于小波包分解的地层吸收补偿. 地球物理学报, 2000; 43(4): 543~547
- [57]李树军, 李国发, 张春涛等. 偏移中地震波粘滞效应的补偿研究. 石油物探, 2005, 44(4): 316~319

## 致 谢

本论文是在导师乐友喜教授的精心指导下完成的，特向老师致以最衷心的感谢。他对教学和科研孜孜不倦、一丝不苟的精神使我终身受益。他亲切和蔼，待人热忱，三年来不管是在生活上还是在学习上都给予了我莫大的支持和关心，为我提供了舒适的工作环境和优越的科研条件。他在我的论文选题和计划安排上做了大量的工作，使得我的论文最终顺利完成。

感谢师兄弟曾有利，孙银行、郭旭光、张军舵等人在完成论文期间给我提供的帮助和宝贵意见。同时感谢地球物理系全体老师这三年来对我潜移默化的教诲，也感谢所有默默关心和支持我的家人、同学和朋友。

## 个人简历、在学习期间的研究成果

单启铜,男,1981年出生于江苏省江都市,中共党员。2000年9月至2004年7月,就读于中国石油大学(华东)勘查工程与技术专业,获学士学位。2004年9月进入中国石油大学(华东)攻读地球探测与信息技术硕士学位,主要从事地震波正演模拟及参数反演等方面的学习和研究。

发表学术论文:

- [1] Youxi Yue,Qitong Shan,Youliang Zeng and Yinghang Sun. SVM method in reservoir parameter prediction by means of seismic waveform. SPG/SEG Kunming International Geophysical Conference,2006
- [2] 单启铜,乐友喜. PML 边界条件下二维粘弹性介质波场模拟. 石油物探, 2007; 46(2): 126~130, 206
- [3] 曾有良,乐友喜,单启铜,孙银行. 基于高分辨率 Radon 变换的 VSP 波场分离方法研究. 石油物探, 2007; 46(2): 115~119