

## 摘 要

本文研究工作主要包括如下两部分：

### 一、差分干涉条纹图的处理、分析研究

- 1> 提出了一套对差分载波条纹图进行处理、分析的方法。
- 2> 研究解决了由于差分剪切造成无法准确确定圆管表面位置的困难，推导出相应的几个运算公式，成功地解决了从条纹图的处理分析开始，到折射率、密度、温度及它们的梯度计算、圆管壁面换热系数计算等全过程的自动或半自动处理分析。
- 3> 编制了一整套从条纹图处理分析、到各种物理量的计算分析、各种物理量显示等全过程的自动或半自动处理分析软件。
- 4> 通过扰动前、后处理数据相减法，基本消除了差分干涉系统本身引入的实验误差，提高了仪器的检测精度。

### 二、在接触应力的混合求解法探索中：

- 1> 在接触应力的分析研究中，由于无法提供用于实验检测的接触面，使得接触应力的检测成为难题。本文提出一种新的将实验技术与数值计算相结合的混合求解法，为解决接触应力、装配应力、残余应力的检测提供了一种有效的途径。
- 2> 为检验提出的混合求解法的可行性，文中设计了一种装配应力混合求解法的数值模拟实验，研究表明混合求解法完全可行。
- 3> 本文针对发动机叶片传统数值计算中，将叶片根部榫头作刚体处理存在的问题，重新建立了计算模型、改进了边界约束条件。计算分析表明，根部榫头区域存在比较明显的应力集中区，计算分析将为叶片设计提供一定的科学依据。
- 4> 探索研究了将三维光弹性实验与数值计算相结合的叶片根部榫头接触应力的混合求解法，已经完成了检测点及实验值的确定、混合求解模型的建立、计算公式及相应软件的编制，并完成了部分数值计算工作。

两项研究工作的背景，分别针对两个委托研究项目。

**关键词：**差分干涉、图像处理、接触应力

## Abstract

This paper mainly includes two parts as follows:

### I . Image Processing And Analysis For Shearing Interferometry Fringe Patterns

- 1> In this paper a new method was presented to analyze the fringe patterns of shearing interferometry.
- 2>The problem of image displacement of the tube surface brought by shearing effect was solved and the relevant equations were deduced to compute the refractive index, density, temperature and their gradient field. Also the heat transfer coefficient of the heat-tube surface was acquired.
- 3>A set of software was programmed to analyze fringe patterns and auto compute fringe order distribution. The other relevant results also could be computed and displayed directly on the screen.
- 4>This method can eliminate the systematic aberrations of the optical system by subtracting the carrier fringe from the disturbed fringe so to increase the measurement precision.

### II . Investigation Of The Problem Of Contact Stress Using Mixed Method

- 1>There are some difficulties in study of the contact stress because the stress distribution of the contact surface often can't get directly from the experiment. This paper offered a new method combining experimental technology with numerical computation to solve the problems of contact stress, assembly stress and residual stress.
- 2>An experimental numerical simulation using mixed method to study the contact stress was designed and accomplished to verify the feasibility of this method.
- 3>The improved computational model of engine vane was built and the constrained condition was reformed compared with the traditional model, which simply deal vane root as a whole rigid body. The computational result indicates that there exist stress concentration zone in the root part of the vane that should be considered in the future vane design.
- 4>The contact stress of the root part of the engine vane was studied using 3D photo-elastic experiment combining with finite element analysis. The computational model was built, and the experimental value on some test point has been acquired. A part of numerical computation and program has been finished.

The above researches' background originated from two consigned projects.

**Key words:** Shearing Interferometry, Image Processing, Contact Stress

# 第一部分：差分干涉条纹图处理

## 第一章：前言

光学流动显示技术在工程热物理及有关领域中有着重要的应用。通常利用流体的光学性质，由光学显示技术来测定流体热力学状态参数的空间分布。流体的温度、浓度等状态参数与密度有确定的函数关系，而流体的光学折射率又是其密度的函数。由于流体折射率对通过流体的光线会产生扰动，因此有许多种光学方法可以通过鉴别光线被扰动的程度来确定流体折射率的空间分布，进而求出密度、温度或浓度等参数的空间分布。

与逐点、接触式的检测技术相比较，光学流动显示技术有许多优点：

- 1> 能以图像的方式给出全场信息，不仅信息容量大，而且信息显示很直观；
- 2> 光线传播十分迅速，能用于流场的动态测量；
- 3> 没有机械探头，对待测的流场没有干扰作用。

经典干涉法、激光全息和电子散斑干涉法等光学干涉技术，是通过测量光线的位相变化，也即光程的变化来确定折射率的全场分布，进而求出流体密度或温度的空间分布。但光学干涉法需要借助参考光束才能实现光学的干涉计量，因此对光学系统有很高的防震要求。

差分干涉仪借助光学剪切元件(如沃拉斯顿棱镜)，使在像平面内形成横向错位一个微小距离的两幅光场，且互相干涉形成差分干涉条纹。该干涉条纹反映了折射率梯度分布，进而可以求出密度梯度、温度梯度或浓度梯度分布。差分干涉仪不需要参考光束，光学系统紧凑，对防震要求也比较低，因此应用较为便利。

利用光学干涉技术进行流体温度场检测，必须分析和处理大量的干涉条纹图，最理想的方法是利用相移检测技术。但由于流场的不稳定，通常的相移检测

系统很难利用，而实时相移系统不仅复杂，而且价格昂贵。

为此，本文试图直接分析和处理加有载波的差分干涉条纹图，以便求出条纹级数的全场分布。文中将扰动前、后的载波条纹图，分别经过条纹细化、级数编码、全场拟合等处理，首先求出全场每个像素点上的条纹级数；然后再对应相减，计算出仅仅由于温度扰动引起的差分干涉条纹移动量的全场分布。

实验中发现，由于差分干涉仪的质量问题，使得差分干涉载波条纹的方向及间距均有很大的误差。这势必影响最终的测量结果。而应用本文提出的条纹图的上述分析和处理方法，可以基本上消除差分干涉系统本身引进的实验误差。

## 第二章：差分条纹图的处理及分析

## § 2.1 差分干涉仪的工作原理

## 1. 差分干涉仪

图 2-1 所示是沃拉斯顿棱镜差分干涉仪示意图。激光器发出的线偏振光，经偏振方向调节器调节到与沃拉斯顿棱镜光轴成  $45^\circ$  的方向上；扩束镜与准直镜 Len-1 将激光束变成扩束的平行光，并通过流场；透镜 Len-2 和 Len-3 将光束视场缩小，且将流场的中心剖面成像在毛玻璃 Glass 上。沃拉斯顿棱镜放置在透镜 Len-2 的后焦点附近，把入射光分成偏振方向正交的、沿不同方向传播的两束线偏振光。经过一个偏振方向与沃拉斯顿棱镜光轴成  $45^\circ$  方向的偏振片，两束偏振光横向错位微小距离  $d$  后互相干涉，在毛玻璃 Glass 上形成带有载波条纹的差分干涉条纹图。若沃拉斯顿棱镜中心放置在透镜 Len-2 的后焦点处，则没有载波条纹；

沃拉斯顿棱镜中心偏离焦点越远，载波条纹越密。CCD 摄像系统将成像于毛玻璃 Glass 上的差分干涉载波条纹图记录并存储到图像处理系统中。

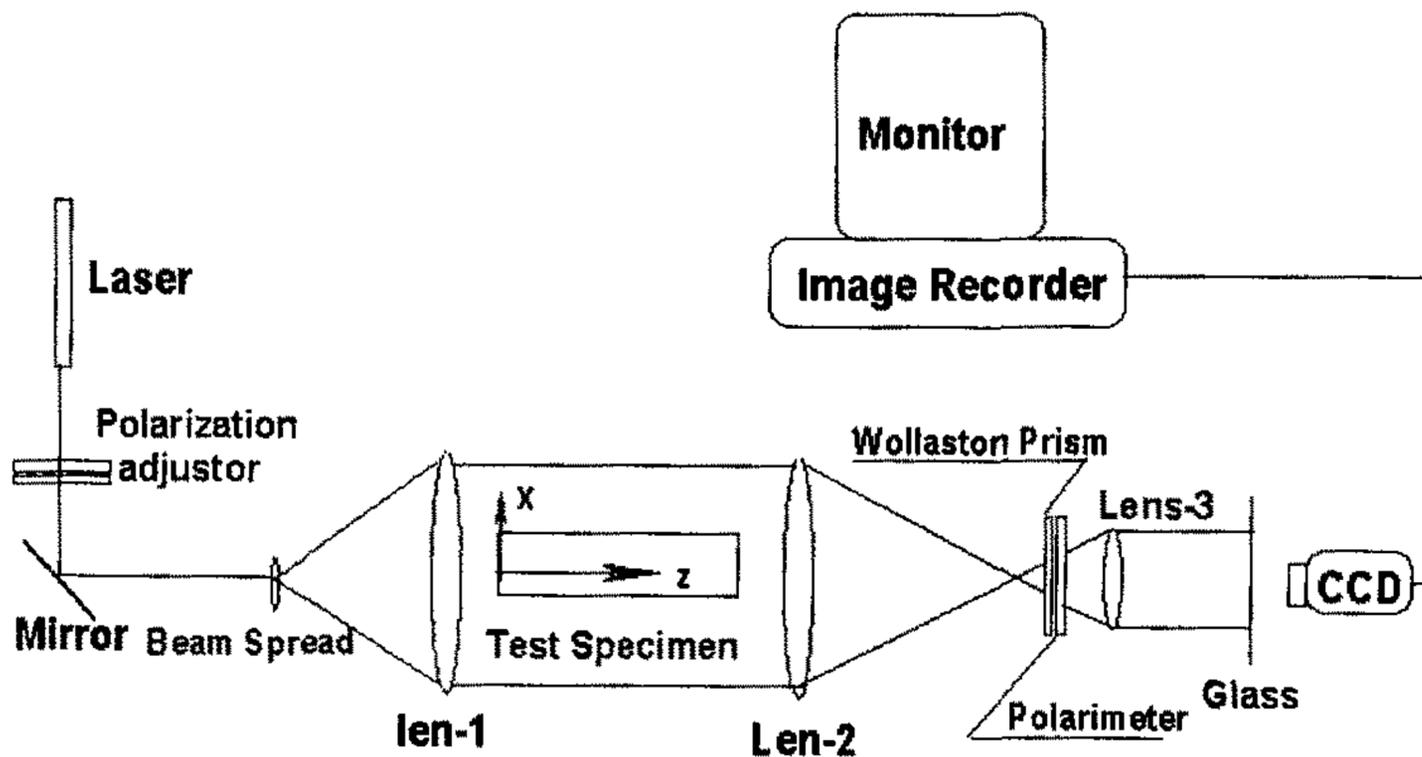


图 2-1 Wollaston 棱镜差分干涉仪示意图

## 2. 差分干涉的测试原理

经过简单的推导，可以求得差分干涉条纹相对漂移量可用如下公式计算：

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{d}{\lambda} \int \frac{\partial n(x, y, z)}{\partial x} dz \quad (2-1)$$

式中， $\Delta S$  是条纹绝对漂移量； $S$  是载波条纹的间距； $\Delta S/S = \Delta N(x, y)$  是条纹的相对漂移量， $d$  是物空间剪切量， $\lambda$  是激光波长， $n$  是流体折射率的空间分布函数。

也可以将公式(2-1)表示成如下形式：

$$\int \frac{\partial n(x, y, z)}{\partial x} dz = \frac{\Delta N(x, y) \cdot \lambda}{d} \quad (2-2)$$

## 3. 二维气体密度场的测量

对于二维流场，由(2-2)式可以求得：

$$\frac{\partial n(x, y)}{\partial x} = \frac{\Delta N(x, y) \cdot \lambda}{d \cdot L} \quad (2-3)$$

式中， $L$  是沿光线传播方向流场的长度。

对于气体，利用格拉德斯通-戴尔关系式，可以求出如下的折射率梯度与密度梯度之间的关系式：

$$\frac{\partial n(x, y)}{\partial x} = K \frac{\partial \rho(x, y)}{\partial x} \quad (2-4)$$

式中， $K$  是格拉德斯通-戴尔常数，用氦-氖激光测量空气的密度时， $K=2.256 \times 10^{-4} \text{m}^3/\text{kg}$ ； $\rho(x, y)$  是密度分布。

将(2-4)式代入(2-3)式，可求出如下的密度梯度场：

$$\frac{\partial \rho(x, y)}{\partial x} = \frac{\Delta N(x, y) \cdot \lambda}{d \cdot K \cdot L} \quad (2-5)$$

积分(2-5)式，可以得到下式：

$$\rho(x, y) = \rho_{\infty} - \left(\frac{\lambda}{d.K.L}\right) \int_{x_{\infty}}^x \Delta N(x, y) dx \quad (2-6)$$

式中， $\rho_{\infty}$  是环境密度。

如果气流压力为常数，则利用理想气体状态方程，可以求出环境密度  $\rho_{\infty}$ ：

$$\rho_{\infty} = \frac{MP_{\infty}}{RT_{\infty}} \quad (2-7)$$

式中， $p_{\infty}$  为环境压力，通常为 1atm； $T_{\infty}$  为环境的绝对温度； $M$  为气体分子量，空气的  $M=28.97\text{g/mol}$ ； $R=0.08231 \cdot \text{atm/mol} \cdot \text{K}$ ，是气体常数。

将(2-7)式代入(2-6)式，可以求得气体的密度计算公式：

$$\rho(x, y) = \frac{MP_{\infty}}{RT_{\infty}} - \left(\frac{\lambda}{d.K.L}\right) \int_{x_{\infty}}^x \Delta N(x, y) dx \quad (2-8)$$

#### 4. 二维气体温度场的测量

利用理想气体状态方程，可以由气体密度场求出气体温度分布  $T(x, y)$ ：

$$T(x, y) = \frac{MP}{R\rho(x, y)} \quad (2-9)$$

由(2-9)式，可以求得温度梯度分布：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{MP}{R\rho^2(x, y)} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2-10)$$

这样，将(2-8)式和(2-4)式代入(2-10)式，就可以求得气体的温度梯度分布。

## § 2.2 水平热管自然对流温度场测量

### 1. 实验装置

试件如图 2-2 所示，是一个水平放置的圆管。圆管外层是铜管，铜管套在聚四氟乙烯芯棒上，芯棒表面的螺纹内缠绕着电阻丝，用于加热；管子两端安装了聚四氟乙烯封头。实验装置如图 2-1 所示。

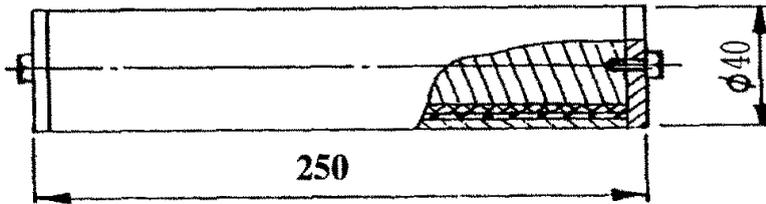
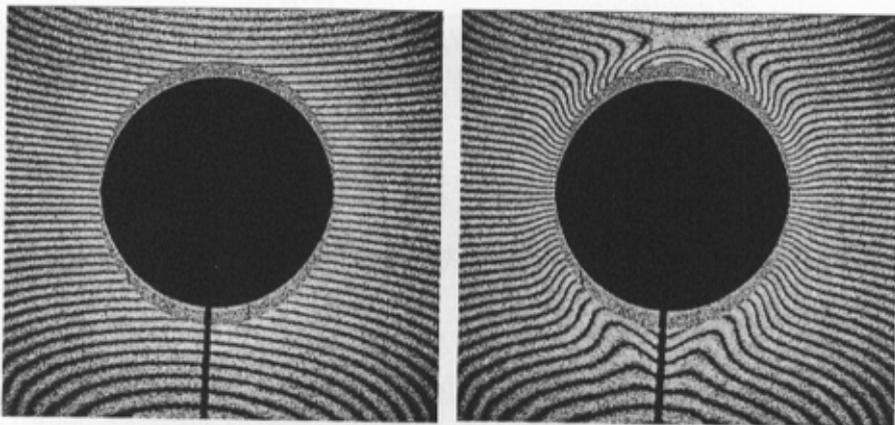


图 2-2 水平热管示意图

### 2. 差分干涉条纹图

本文实验利用沃拉斯顿棱镜差分干涉仪测量水平热管周围的二维自然对流温度场。图 2-3 是一幅典型的差分干涉条纹图，其中，图 2-3a 是扰动前的载波条纹图；图 2-3b 是扰动后的载波条纹图。由图 2-3b 可见，载波条纹畸变严重，主要是仪器质量不好。如果不通过条纹图处理，去掉畸变引起的实验误差，实验结果将很不理想。



(a) 扰动前

(b) 扰动后

图 2-3 差分干涉条纹图

## § 2.3 载波条纹图处理及分析

本文提出的条纹图的处理及分析方法较适用于载波条纹图，因为一定的载波条纹密度才能保证拟合精度的要求。

本文以差分干涉载波条纹图的处理、分析为例，介绍载波条纹图的处理分析过程。

载波条纹图的处理分析过程大致如下：

第一步：图像预处理：

对扰动前后的差分干涉条纹图分别进行：中值滤波、二值化、灰度反转、条纹细化等处理。

第二步：高级处理：

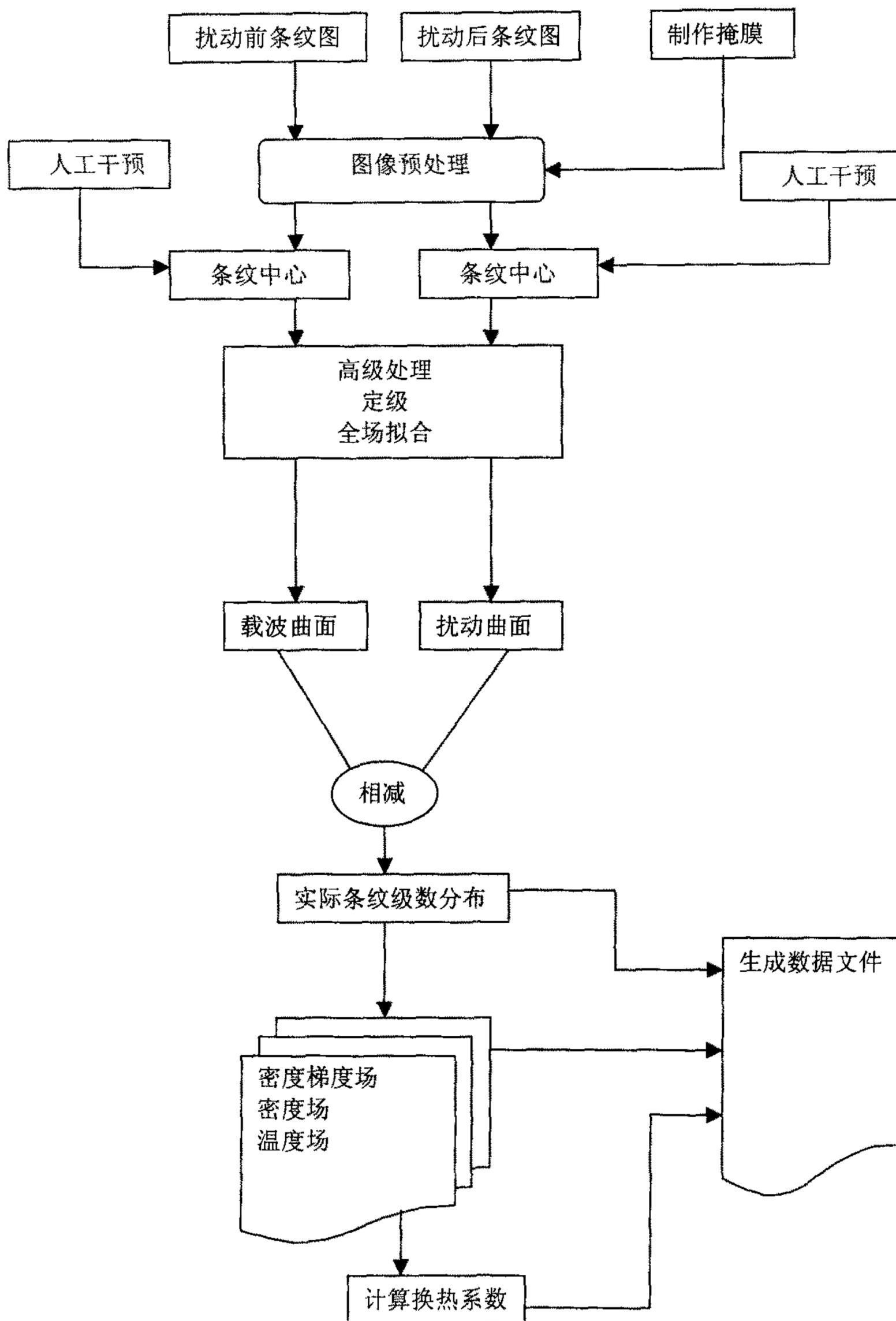
对经过条纹图预处理的条纹图进行如下的处理：

- 1> 对扰动前后的细化条纹各自抽取中心，确定整数级条纹；
- 2> 在人工适当干预下，进行条纹自动定级，得到条纹级数的整数级分布；
- 3> 利用条纹整数级分布数据，通过全场二维拟合，得到全场每个像素上的条纹级数分布。
- 4> 将扰动后的条纹级数减去扰动前的条纹级数，计算出仅由温度扰动引起的条纹级数  $\Delta N(x, y)$  分布，同时消除了载波条纹的畸变。

第三步：后处理：

- 1> 利用公式(2-3)，计算折射率梯度分布。
- 2> 利用公式(2-5)，计算密度梯度分布。
- 3> 利用公式(2-8)计算出密度  $\rho(x, y)$  的分布。
- 4> 利用公式(2-9)，计算出温度分布。
- 5> 利用公式公式(2-10)，计算出温度梯度分布。

§ 2.3.1 处理和分析流程图



### § 2.3.2 条纹图的预处理

条纹图的预处理过程如下：

#### 1. 对称条纹图的裁剪

由于条纹图 2-3(a)和(b)具有较好的对称性，为了便于计算机处理，在以下处理及分析过程中，只取其关于 Y 轴对称的右半部分，见图 2-4(a)和(b)。裁剪中应注意保证两幅图相对位置准确，这可以在 Photoshop 中先将两幅图放在同一文件的两个图层中，然后再行裁剪。

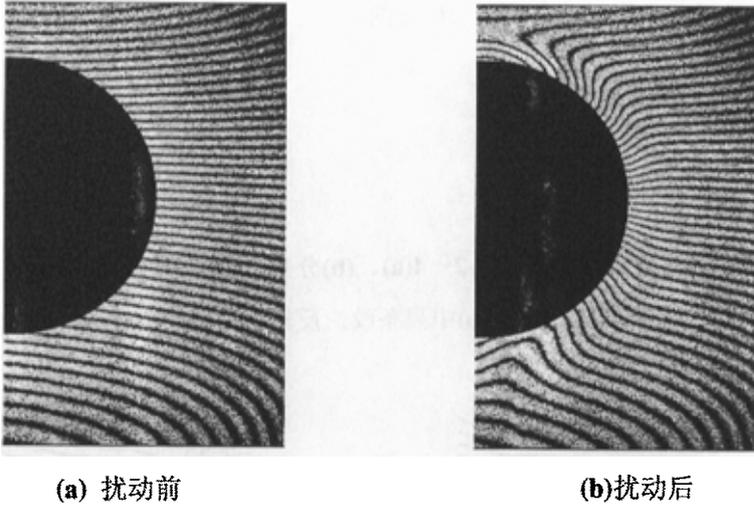


图 2-4 差分干涉载波条纹图

#### 2. 掩膜文件的制作

图 2-5 是利用 Photoshop 制作的掩膜文件。掩膜文件要求是二值图，灰度值 255 代表有效区域，同时必须保证图 2-4(a)、图 2-4(b)和图 2-5 的相对位置均一致。

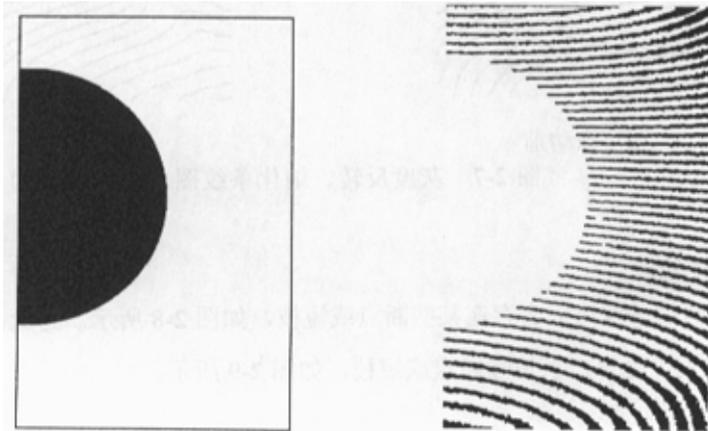


图 2-5 掩膜文件

图 2-6 二值化图

### 3. 条纹图平滑处理

### 4. 条纹图中值滤波

### 5. 条纹图二值化

二值化过程对全图作灰度统计，并将统计结果以灰度分布图给出。根据所给的灰度分布，选择合适的阈值，此例取 116。

图 2-6 是差分干涉载波条纹的二值化图。

### 6. 条纹图反转

### 7. 条纹图细化

扰动前后原始差分干涉条纹图 2-4(a)、(b) 分别经过灰度反转及细化处理，得到亮条纹中心，即图 2-7(a)、(b) 中黑条纹，反转仅为显示方便。

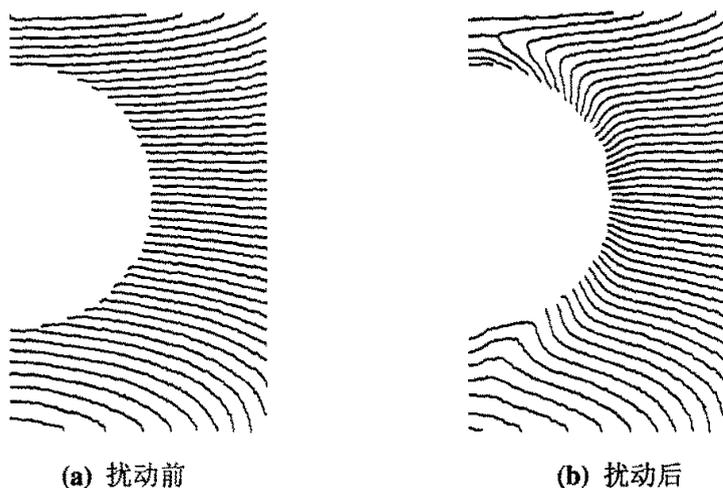


图 2-7 灰度反转、细化条纹图

### 7. 断点或短枝处理

细化处理的条纹可能会存在某些断点或短枝，如图 2-8 所示。为此，需要进行进一步的人工处理，以消除断点或短枝，如图 2-9 所示。

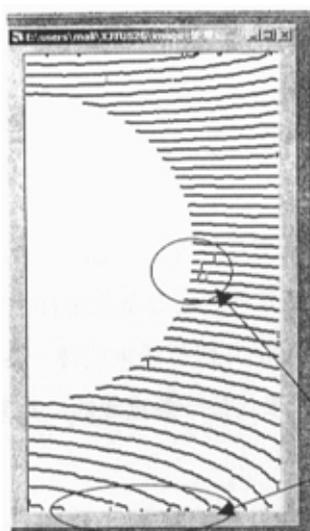
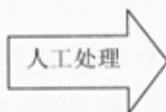


图 2-8 细化条纹



短枝和断点



图 2-9 消除短枝与断点

图 2-10 是扰动后差分干涉条纹图，经过一系列预处理之后的结果。

### § 2.3.3 条纹图的高级处理

载波条纹图的高级处理步骤如下：

#### 1. 条纹识别

对于经过预处理、细化的条纹，进行条纹识别，条纹识别的算法借鉴了图像分析中经典的区域标号算法，识别的结果是将不同条纹赋予不同的标记值。同时记录了每条条纹所占的像素面积，对于面积小于某个给定值的条纹，可认为是噪声而去除。所以对于图 2-8 中出现的短枝，若不经人工处理，也可在条纹识别过程中自动剔除。

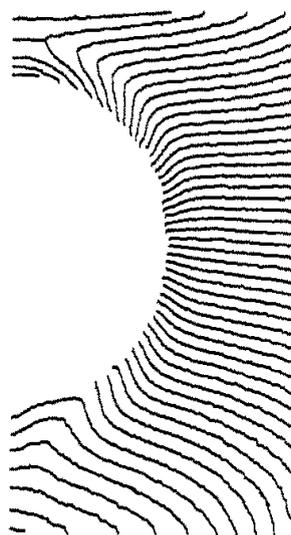


图 2-10 扰动后条纹图  
预处理结果

#### 2. 条纹定级

条纹定级的本质是对已识别的条纹按某个指定方向进行排序。

### 1>读数起点及升级方向的设定

在条纹定级时，需要一定的人工干预，事先确定一个条纹读数起点，并设定一个共同的条纹升级方向。如图 2-11 所示，事先设定条纹图最上端的亮条纹为条纹读数起点；设定由上向下是条纹的升级方向。

在进行指定条纹升级方向操作时，提供了人机交互的方式，允许用户通过鼠标拖曳一条贯穿所有条纹的直线，程序追踪直线的延伸方向对条纹进行排序，如无法用一条直线横穿所有条纹时，可以用首、尾相联的几段折线来代替一条直线，用于指明条纹升级方向。图 2-11 就是用几段折线来代替一条直线的，几段相联的折线之间的折点可自由选取。

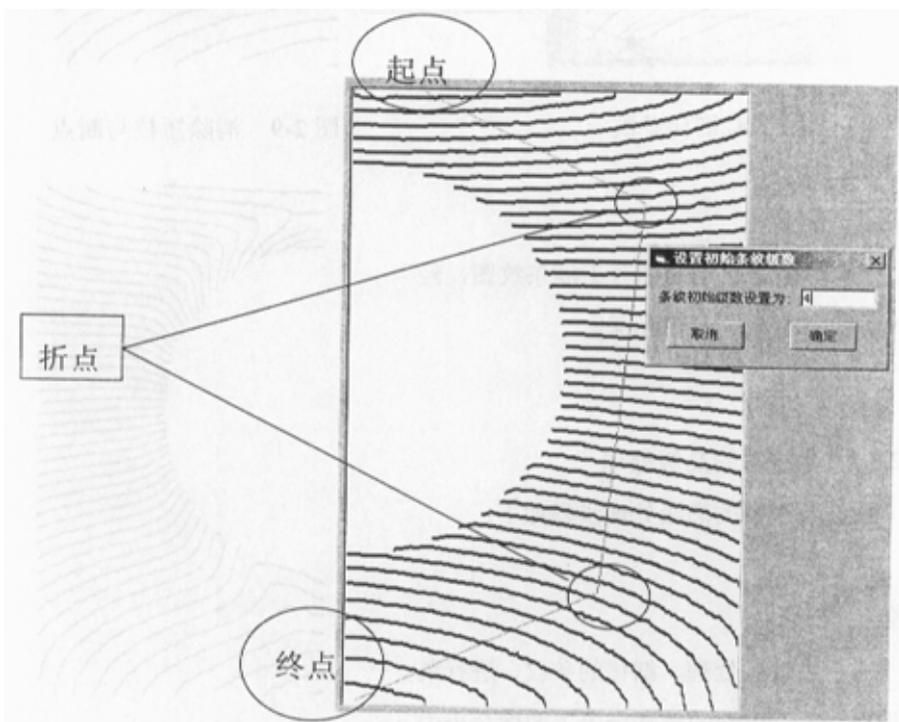


图 2-11 指定条纹升级方向

### 2>初始级数的指定

初始级数的设置，要根据扰动前后条纹图的比较而设定，扰动前、后图中相同条纹的级数必须相等。

如图 2-12 所示，扰动前条纹图中最低级数与扰动后条纹图中的第 4 级条纹是相同条纹。这里，在确定扰动后条纹图的条纹级数时，需要应用到光学条纹的

定级知识。

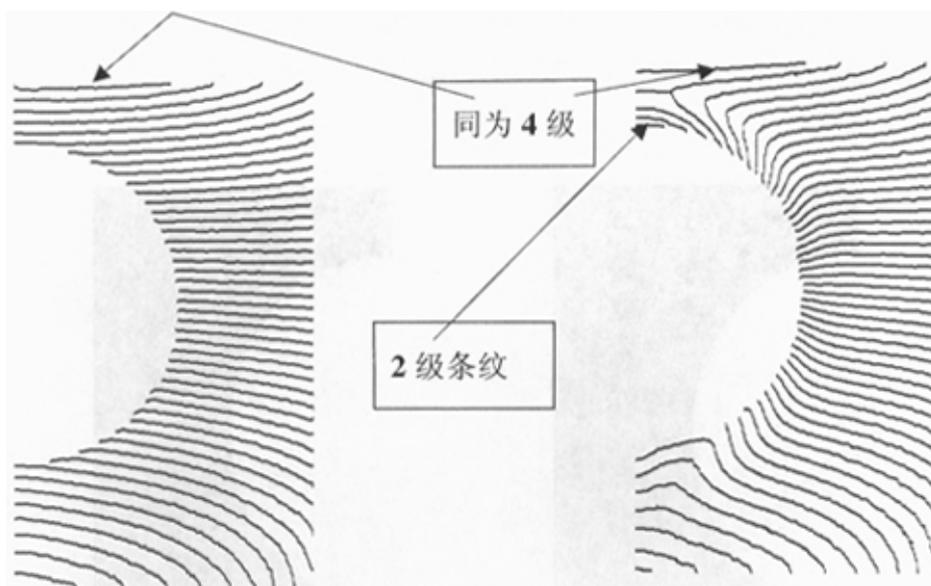
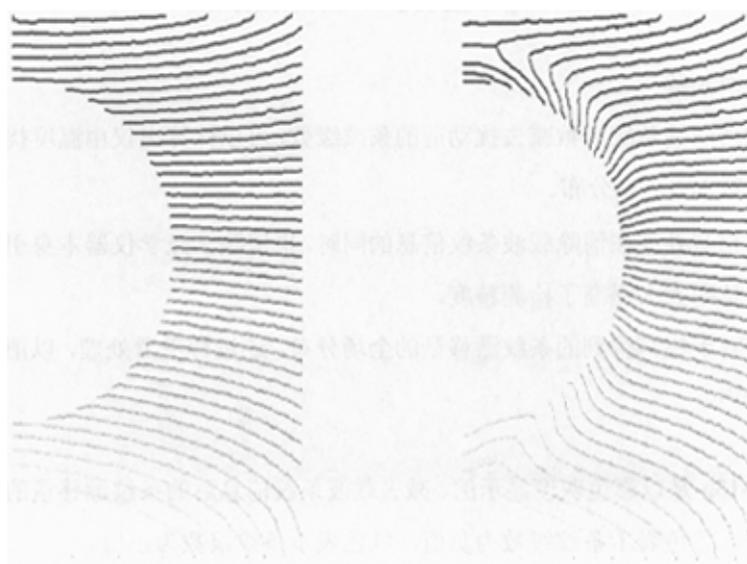


图 2-12 指定初始级数

完成条纹定级后，以灰度显示条纹整数级数的分布，灰度越高表明级数越高，见图 2-13。



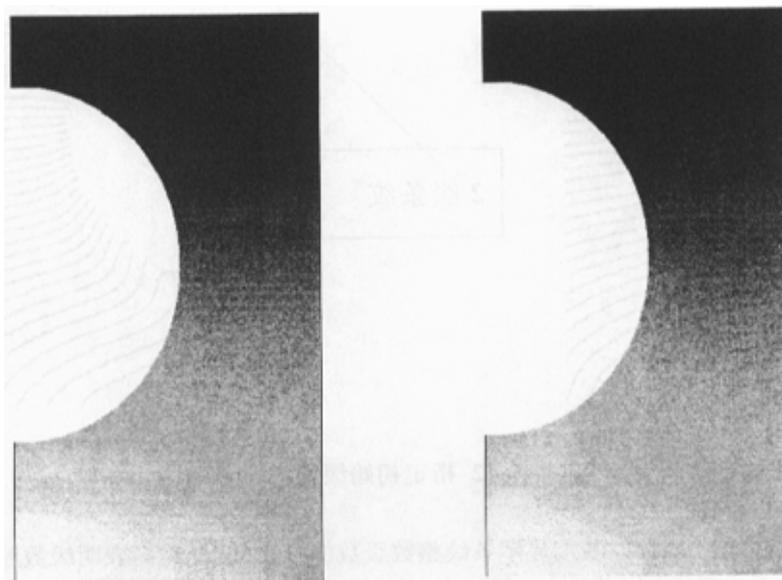
(a) 扰动前

(b) 扰动后

图 2-13 以灰度表示的整数级条纹分布

### 3. 条纹级数拟合

利用条纹整数级分布数据，通过全场二维拟合，得到全场每个像素上的条纹级数分布。曲面拟合完成后，得到以灰度显示的、全场每个像素点上的条纹级数分布，见图 2-14。



(a) 扰动前

(b) 扰动后

图 2-14 以灰度表示的条纹级数分布

### 4. 载波条纹消除

将扰动后的条纹级数减去扰动前的条纹级数，可以计算出仅由温度扰动引起的条纹级数  $\Delta N(x, y)$  分布。

这种相减处理在消除载波条纹信息的同时，也消除了光学仪器本身引起的条纹畸变，从而大大提高了检测精度。

文中对于相减得到的条纹漂移量的全场分布，还进行平滑处理，以消除光学或电子噪声。

图 2-15a 是以彩色灰度显示的、减去载波条纹信息后的条纹漂移量的全场分布。图中，蓝色表示条纹级数为负值，红色表示条纹级数为正值。

图 2-15b 是条纹级数等值线分布图。

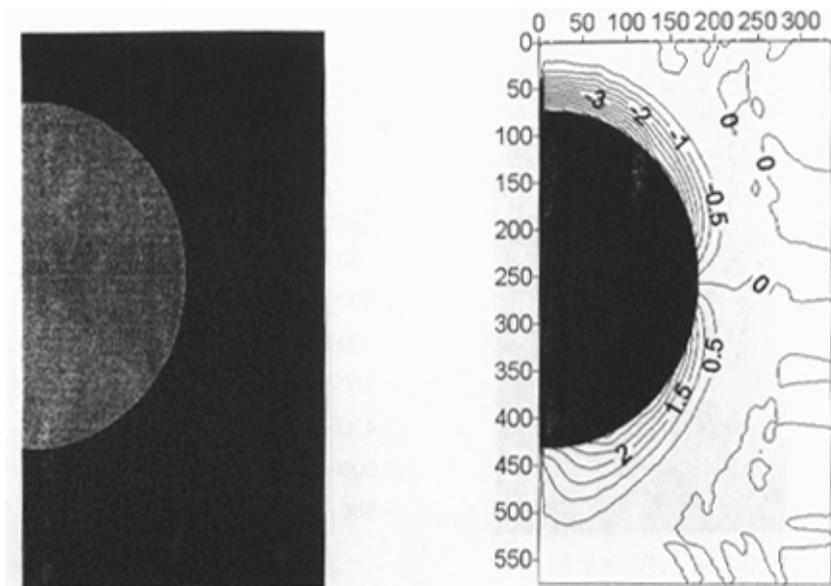


图 2-15a 彩色灰度表示的条纹级数

图 2-15b 条纹级数等值线分布

### § 2.3.4 条纹图的后处理

条纹图的后处理按如下步骤进行：

#### 1. 折射率梯度计算

在得到条纹漂移量  $\Delta N(x, y)$  的全场分布(图 2-15a 所表示的数据)以后, 利用公式(2-3), 计算出全场的折射率梯度分布。

#### 2. 密度梯度计算

利用公式(2-5), 计算出全场的密度梯度分布。

折射率梯度及密度梯度的分布形式均与图 2-15a 所示的条纹漂移量  $\Delta N(x, y)$  的分布形式一致, 只不过相差一个常数。

#### 3. 密度场 $\rho(x, y)$ 计算

利用公式(2-8), 计算出全场的密度  $\rho(x, y)$  的分布。

图 2-16a 是用灰度表示的全场的密度  $\rho(x, y)$  的分布; 图 2-16b 是密度  $\rho(x, y)$  的等值线分布图。

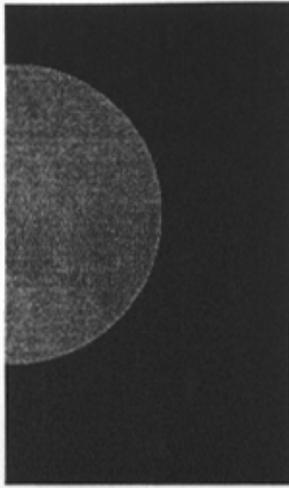


图 2-16a 灰度表示的  
密度  $\rho(x, y)$

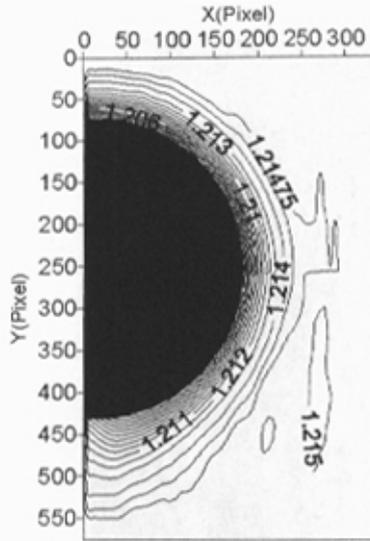
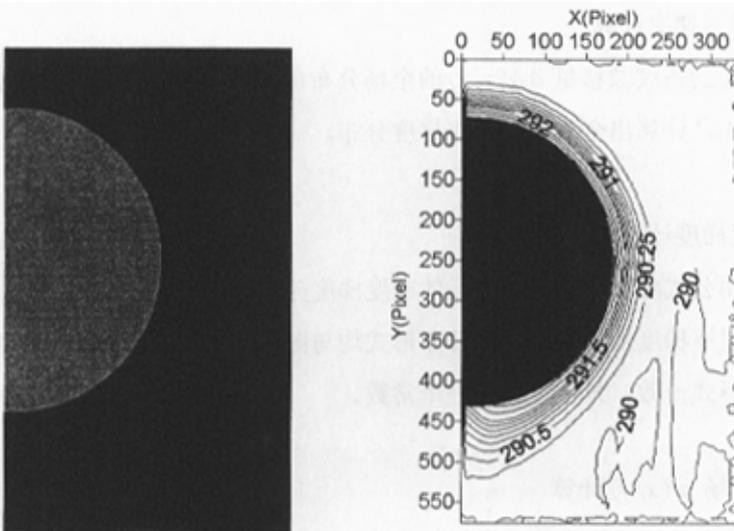


图 2-16b 密度  $\rho(x, y)$   
等值线分布

#### 4. 温度场的计算

利用公式(2-9)，计算出全场的温度场分布。

图 2-17a 是用灰度表示的全场的温度分布；图 2-17b 是全场温度的等值线分布图。



(a) 灰度表示的  
温度场分布

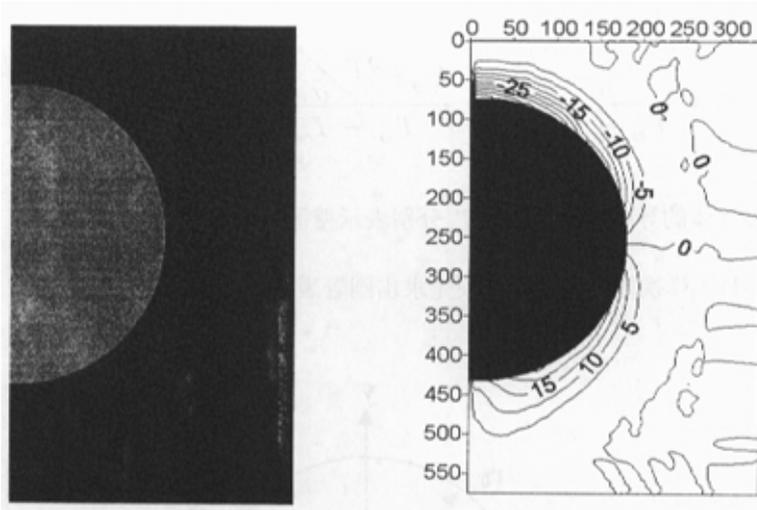
(b) 温度场等  
值线分布

图 2-17 温度场分布

### 5. 温度梯度场的计算

利用公式(2-10)，计算出全场的温度梯度分布。

图 2-18a 是用灰度表示的全场的温度梯度分布；图 2-18b 是全场温度梯度的等值线分布图。



(a)灰度表示的温度  
梯度场分布

(b)温度梯度场等  
值线分布

图 2-18 温度梯度场分布

### 第三章 水平热管壁面换热系数的测量

#### § 3.1 换热系数 $h$ 计算公式

对于圆管表面，欲计算换热系数  $h$ ，需利用下式：

$$h = \frac{q}{T_w - T_\infty} = - \frac{k_w (\partial T / \partial r)_w}{T_w - T_\infty} \quad (3-1)$$

式中， $k_w$  为气体的导热系数， $T_w$ 、 $T_\infty$  分别表示壁面温度与环境温度。

按照公式(3-1)计算换热系数  $h$ ，必须先求出圆管表面的温度梯度  $(\partial T / \partial r)_w$ 。

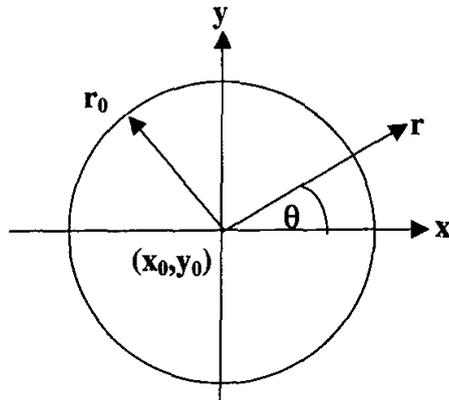


图 3-1 圆管横截面坐标系

#### § 3.2 圆管表面温度梯度 $(\partial T / \partial r)_w$ 的计算

圆管表面温度梯度  $(\partial T / \partial r)_w$  的计算，远比平板表面温度梯度的计算复杂得多。由于差分剪切作用，已经无法从条纹图中准确确定原圆表面所在位置，因而也就无法确定真正的  $r_0$ 。经过研究，本文提出一套处理和分析方法。

处理和分析步骤如下：

- 1> 在  $\theta$  从  $-\pi/2$  到  $\pi/2$  的范围内，每隔一度(即  $\pi/180$ )将圆管外表面划分成 180 分，并将每一度的  $\theta$  角表示成：

$$\theta^j \quad (j=-90\sim 90)$$

- 2> 确定圆管中心坐标  $(x_0, y_0)$  和圆管半径  $r_0$ 。由于差分剪切作用，已经无法从条纹图中确定出原圆表面所在位置  $r_0$ 。为此，文中对  $r_0$  进行了重新定义。重新定义的  $r_0$  的含义是在  $r_0$  处温度值最大，大于  $r_0$  温度下降，小于  $r_0$  温度取零(因为没有条纹)。这样，对于每一个  $\theta^j$  方向，必须确定出相应的  $r_0$ 。为此，可按下式计算  $\theta^j$  方向的一系列温度值，直到找到温度最大值处的  $r_0$ ：

$$T_{r_s+ip}^j = T \Big|_{\substack{x=x_0+(r_s+ip)\cos\left(\frac{j\pi}{180}\right) \\ y=y_0+(r_s+ip)\sin\left(\frac{j\pi}{180}\right)}} \quad (i=0,1,2,\dots) \quad (3-2)$$

式中， $i$  是整数； $r_s$  是略小  $r_0$  的一个初始半径； $p$  是象素。

该式的计算可采用逐步推进的方法，起始的  $r_s$  要略小  $r_0$ ，以保证起始计算点  $r_s$  处的温度是零；然后逐级计算、首先找到温度不为零的点；由于处于边界上，即使找到温度不为零的点也不一定是  $r_0$  处，还要继续计算、继续比较，直到找到最大值点( $r$  大于该点时，温度下降)。

- 3> 按下式求温度  $T$  沿  $r$  方向的分布：

$$T_{r_0+i\Delta r}^j = T \Big|_{\substack{x=x_0+(r_0+i\Delta r)\cos\left(\frac{j\pi}{180}\right) \\ y=y_0+(r_0+i\Delta r)\sin\left(\frac{j\pi}{180}\right)}} \quad (i=0,1) \quad (3-3)$$

式中， $i$  是整数； $\Delta r$  是预先设定的一个常量，尽量小一些。

- 4> 对于圆管外表面  $\theta^j$  处的温度梯度可以用  $(\partial T / \partial r)^j$  来表示，并由下式计算：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_w^j \approx \frac{\Delta T^j}{\Delta r} \approx \frac{(T_{r_0+\Delta r}^j - T_{r_0}^j)}{\Delta r} \quad (3-4)$$

这样,在求出圆管外表面  $\theta^j$  处的温度梯度  $(\frac{\partial T}{\partial r})_w^j$  以后,就可以按公式(3-1) 求出圆管外表面  $\theta^j$  处的换热系数  $h_j$ 。

### § 3.3 圆管外表面的换热系数计算

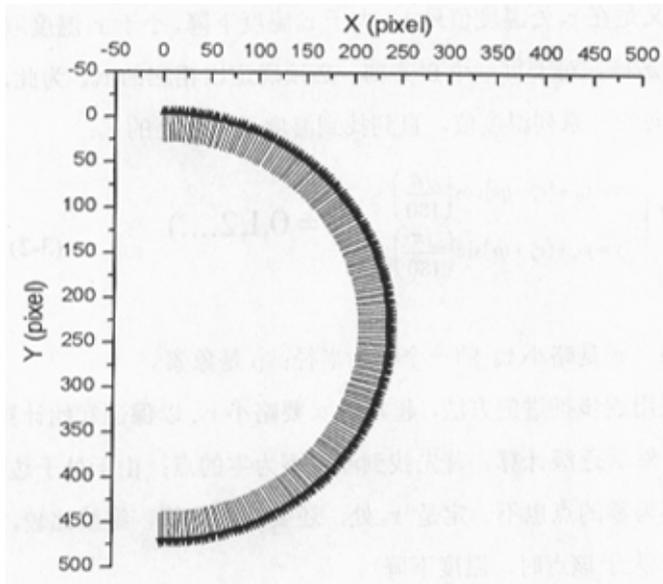


图 3-2 圆管外表面的换热系数

图 3-2 所示就是以矢量形式表示的圆管外表面的换热系数。该换热系数是利用所得差分干涉条纹图,经过上述各步骤的一系列处理、分析和计算得到的。

## 第四章 结论和讨论

### § 4.1 结论和讨论

利用光学干涉技术进行流体温度场检测，必须分析和处理大量的干涉条纹图，最理想的方法当然是利用相移检测技术。但由于流场的不稳定，通常的相移检测系统很难利用，而实时相移系统不仅复杂，而且价格昂贵。利用 FFT 技术处理、分析载波条纹图，也是最为理想的技术。但在实际应用中，常常遇到热表面附近干涉条纹过密的情况。对于全场条纹图的处理，在顾及到全场条纹信息的前提下，热表面附近的局部区域往往因条纹太密，用位相方法处理空间分辨率不够。

针对这样的背景，直接对以光强分布为基础的载波条纹图进行处理、分析，并编制相应的处理、分析软件的研究工作是很要意义的。

研究工作表明，应用本文提出的载波条纹处理方法，也即首先将扰动前、后的载波条纹图分别经过中值滤波、二值化、灰度反转、条纹细化、抽取中心、级数编码、全场曲线拟合等处理，再将扰动前后条纹图的数据进行对应相减，以求仅由温度扰动引起的条纹漂移量全场分布的处理方法基本上是可行的。

实际操作运行表明，自行编制的处理、分析软件运行可靠。

由于差分干涉仪的准直及会聚光学元件使用的是透镜，加上加工质量不高，使得差分干涉条纹质量比较差，尤其是引进了相当大的误差信息，使得载波条纹弯曲、且间隔发生变化。本文提出的这种差分干涉条纹图的处理方法，还可以基本上消除差分干涉系统本身引进的实验误差。

在条纹图的处理过程中发现，若条纹图的质量太差、噪声太大，会影响条纹图的自动处理。因为，大噪声点的存在会使后续点的数据出错。比如，大噪声点的存在使得细化条纹的中心出现断点时，会使得条纹整级数的自动定级出错。对于细化条纹中心的断点，适当的人工处理是必要的。

在对条纹图进行滤波、细化等处理时，势必会造成条纹中心的偏差；在利用细化条纹中心得到的条纹整数级数数据进行全场条纹级数的曲面拟合时，也必然会引进一定的误差。尤其是在边界处，条纹级数的曲面拟合最容易出现误差。

这些误差的出现实际上是条纹强度处理、分析技术本身所固有的，但是对于工程应用，还是能满足一定的精度要求。

## § 4.2 对结果的简单验证

为了考核本文提出的条纹细化、抽取中心、级数编码、全场拟合、扰动前后数据对应相减等载波条纹图的处理方法，文中按常规的逐点扫描法，处理了第二章 § 2.3.2 节图 2-4(b)原始差分干涉条纹图中两个典型水平剖面上的条纹漂移量的分布。并将常规的逐点扫描结果与全场条纹图的自动处理和分析结果进行了比较，比较结果见图 4-1。

由图示的结果比较可以发现，除了在 0 级条纹附近，两者的结果符合得相当好。在 0 级条纹附近偏差较大，这种偏差主要是由逐点扫描法引入的。

图 4-1 两种条纹分析方法结果比较表明，本文提出的差分干涉载波条纹图的处理和分析方法，是能保证足够的检测精度的。但是误差也是客观存在的，这是直接处理和分析强度条纹图的方法本身所固有的，除非利用位相技术来处理和分析条纹图。

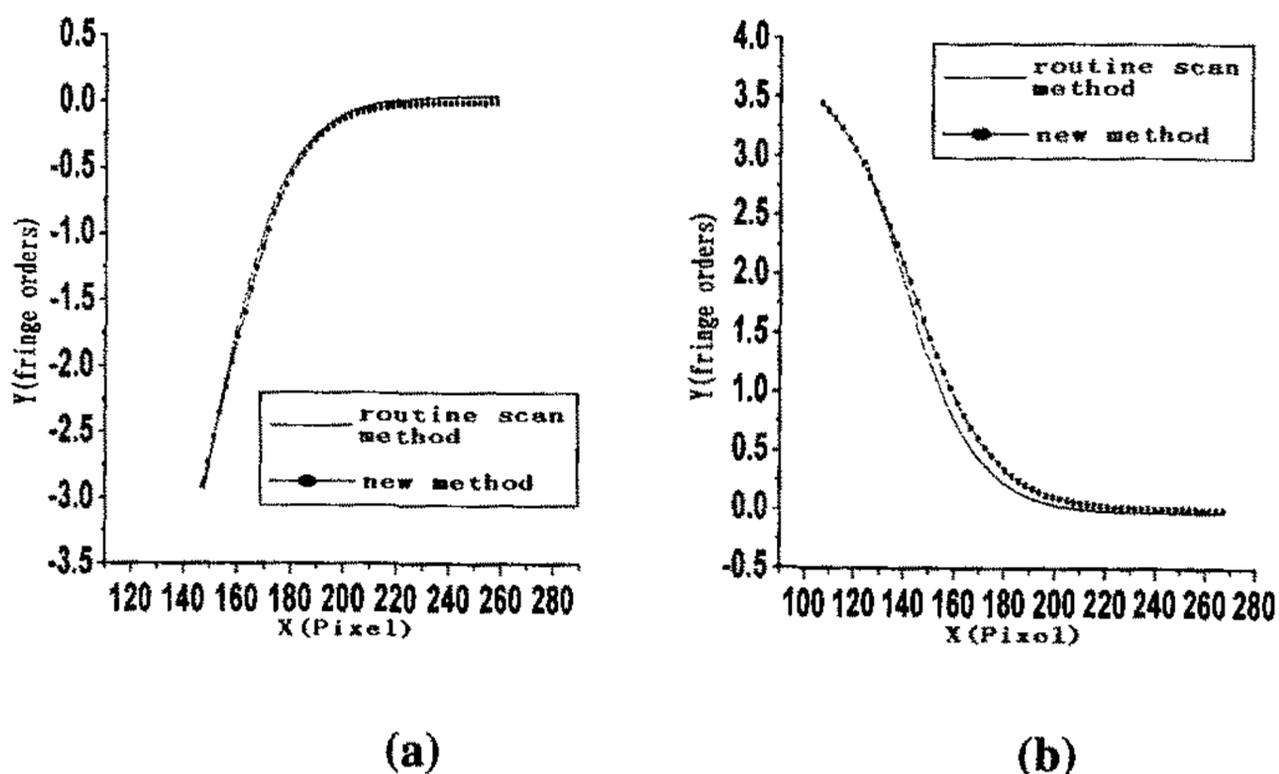


图 4-1 两种不同方法的结果比较

## § 4.3 第一部分工作小结

光学流动显示技术在工程热物理及有关领域中有着重要的应用，差分干涉仪借助光学剪切元件(如沃拉斯顿棱镜)，使在像平面内形成差分干涉条纹。该干涉条纹反映了折射率梯度分布，由此可以求出密度或密度梯度、温度或温度梯度、壁面换热系数等物理参数的分布。差分干涉仪不需要参考光束，光学系统紧凑，

对防震要求也比较低，因此应用较为便利。

应用差分干涉仪进行流体温度场检测，必须分析和处理大量的干涉条纹图，最理想的方法是利用相移法或 FFT 等位相检测技术。但由于流场的不稳定或热边界层的条纹过密等因素，通常的位相检测技术有时难以利用。

针对这样的应用背景，本文提出了一套对差分载波条纹图进行处理、分析的方法，并编制了一套相应的处理、分析软件程序。具体内容如下：

- (1) 独立地提出了一套载波条纹图的处理分析方法，即首先将扰动前、后的载波条纹图分别经过中值滤波、二值化、灰度反转、条纹细化、骨架提取、整数级条纹定级、分数级全场二维曲线拟合(给出每个像素点的分数级条纹级数)等处理，再将扰动前后条纹图的数据进行对应相减，以求得仅由温度扰动引起的条纹漂移量的全场分布。
- (2) 在进行圆管表面温度梯度 $\theta_s$ 及换热系数 $h_s$ 的计算中，由于差分剪切作用，已经无法从条纹图中准确确定原圆表面所在位置，因而也就无法确定真正的半径 $r_0$ 。本文创造性地提出了一套处理分析方法，重新定义了半径 $r_0$ ，推导出了几个运算公式，成功地解决了从条纹图的处理分析开始，到折射率梯度计算、密度梯度及密度计算、温度梯度及温度计算、壁面换热系数计算等全过程的自动或半自动处理分析。
- (3) 由于差分干涉仪的透镜质量较差，使得载波条纹弯曲、且间隔不等，致使差分干涉条纹图无法用于来进行定量分析。本文提出的这种差分干涉条纹图的处理方法，可以基本上消除差分干涉系统本身引进的实验误差，提高了仪器检测精度。
- (4) 编制了一整套从条纹图的处理分析开始、到各种物理量的计算分析，以及各种物理量的显示的全过程自动或半自动处理分析软件。

当然，目前的检测精度比位相检测技术要差，但是满足工程应用还是可行的。

## 第二部分：接触应力的混合求解法探索

### 第五章：绪论

#### § 5.1 研究背景

飞机发动机是飞机的关键部件，是飞机的“心脏”！飞机发动机在飞机飞行过程中如果发生事故，将会发生机毁人亡的重大事故。飞机发动机叶片是飞机发动机的易损零件之一，尤其是叶片的根部，常常会产生疲劳裂纹，成为飞机发动机的危险部位之一。

发动机叶片通过根部榫头与轮盘上榫槽装配在一起。飞机发动机工作时，由于发动机轮盘的高速旋转，安装在轮盘上的发动机叶片也随着高速旋转。高速旋转产生的离心力作用，致使叶片根部榫头与轮盘榫槽之间的接触面上形成了未知的接触应力分布。

由于叶片根部应力分布复杂，而接触面上的接触应力分布又未知，使得发动机叶片的应力分析成为一个难题。在传统的发动机叶片的受力分析中，通常将叶片根部榫头部分作为刚体来处理，只进行其余部分的应力、应变分析。但在叶片根部榫头部分又常常出现裂纹，从而使叶片根部榫头部分成为飞机发动机叶片设计的死角。

受沈阳飞机发动机设计研究所的委托，本文对叶片根部的应力测试分析进行了研究，试图探索一种叶片根部榫头与榫槽之间接触应力分布的测试分析方法。

通常的应变或应力检测方法，都是相对于未承载状态进行测量的。但对于接触应力或装配应力的检测，通常情况下很难同时提供形成接触应力或装配应力的前、后两种状态，用于接触面上应变或应力的检测，这就给检测带来困难。

此外，现有常用的应变或应力检测技术，在测量过程中都必须在接触面或装配面上进行。而对于接触应力或装配应力的检测，又往往无法提供用于测量的接触面或装配面。因此，很难应用现有常规的检测技术来测量接触应力或装配应力分布。

基于这个背景，本文试图探索一种新的、将实验检测技术与数值计算方法相结合的接触应力或装配应力的混合求解法。

近年来，计算机的硬、软件技术有了突飞猛进的发展，数值计算方法的功能也越来越强。但是，对于模型的建立、边界条件的确定，单靠理论分析是不够的，还需要实验应力分析技术提供相应的实验参数。同样，实验分析应力技术在近年来也有了很大的发展，但由于实验应力分析技术本身的局限性，多数实验方法只能对非接触表面进行变形检测，而对于真实试件的内部变形或接触表面上的变形，进行检测是非常困难的。

为此，我们提出的混合求解法的基本思路是：发挥数值计算方法的特长，计算试件在外载荷及接触应力共同作用下的应力、应变分布，但接触应力是含有待定常数的未知外力。当然，计算出的试件内部或表面的应力、应变分布也是含未知数的。同时，发挥实验检测技术的长处，应用实验方法检测接触面周围附近若干点上的应变。这些点的应变应该与计算结果一致，以此来确定接触应力中的待定常数，从而确定出接触应力分布。

针对叶片根部榫头与榫槽之间接触应力分布的测试研究，文中将三维光弹性技术和有限元法相结合，提出了一套完整的接触应力混合求解法。具体的做法是：

- 1> 按照三维光弹性理论及技术，制作飞机发动机光弹性模型，包括叶片、轮盘等所有零部件的弹性模型。
- 2> 按照相似理论，使发动机光弹性模型作相应的旋转，模拟真实发动机的高速旋转。
- 3> 在发动机光弹性模型旋转的状态下，冻结发动机光弹性模型的受力状态。冻结的叶片模型，已经将发动机叶片在高速旋转状态下应力分布冻结在模型内。这种应力既包括离心力的作用，也包括叶片根部榫头与榫槽之间接触应力对叶片的作用力，尤其是对叶片根部产生的应力。
- 4> 利用三维光弹性技术，提取叶片根部榫头部分若干剖面内的次主应力差。
- 5> 应用有限元法计算叶片在离心力以及接触面上接触应力共同作用下的应力分布。但是，接触面上的接触应力仅仅是一个含有待定常数的分布载荷，计算出的应力分布当然也是含有待定常数的结果。
- 6> 利用计算的应力分布，同样可以求出根部榫头部分对应剖面内的次主应

力差，令该计算值等于三维光弹性技术提取的实验值，就可以求得接触应力分布中的待定常数，从而求得到接触应力的分布。

为了验证混合求解法的可靠性，本文同时设计了一个典型的装配应力试件，运用混合解法测试、计算出了这个典型模拟试件的装配应力分布。

本文的研究方法，同样适用于装配应力或残余应力分布的检测。

## § 5.2 有限元法简介

### 1. 前言

有限元法是在五十年代末出现的用于处理固体力学问题的一种数值方法。由于电子计算机的迅速发展，加上有限元法不受计算对象在几何和物理上的限制，有限元法发展快、应用广和效能高，在各个学科领域里已经被广泛地采用。这是其他许多数值方法无法比拟的。

有限元法作为一种数值方法在理论上已经比较完备了，现在人们主要是从事于拓展应用领域研究。有限元法在航空、航天、造船、建筑等方面已经得到广泛的应用，在化工、机械、水利、核能、地质、生物等方面也开始得到应用。从力学领域来说，有限元法除了用来求解一般的线性静力问题外，正向求解动力、非线性和各种场问题方面发展。

离散化是许多新的近似计算方法的基本着眼点。早在十八世纪，Euler 就已经提出不从整体能量变分求解的想法，他建议通过离散化方法找出整体的近似能量，再通过变分把问题转化成解一个代数方程组的问题，但是因为当时计算工具有困难而未能实现。因此从变分原理来说，有限元法只是在今天的计算条件下重现了十八世纪 Euler 的想法。有限元法的实质就是变分原理和能量原理相综合的产物。

有限元的离散求解主要分以下几步进行：

第一步，划分单元

第二步，分片插值

第三步，求泛函极值

## 2. 一些基本概念

### (1) 单元

常用单元有自然单元和分割单元两类。

自然单元——许多工程结构本来就是由一些简单构件组合而成，分析时无须再分割，这些构件叫做自然单元。

分割单元——将整体结构和连续体分成许多小单元的组合，这种单元叫做分割单元。分割单元又分两种，即自然分割单元和任意分割单元。

从理论上讲，单元分割是任意的，不过在实际计算中必须根据研究对象的特点，使单元分割既满足力学分析要求，又能使计算简便。

### (2) 节点

有限元法中，把单元和单元之间设置的相互连接点称为节点。

在有限元法中引进节点概念是至关重要的。有了节点，才可将实际连续体看成是仅在节点处互相连接的单元群组成的离散型结构，从而可以使研究的对象转化成可以使用电子计算机计算的数学模型。

实际上，两个相邻的单元在整个交界处(包括节点)都是互相连接、互相作用的，而有限元法假定除节点外，都不互相连接和作用，这一点是不符合实际的。但是，在有限元分析中将要求两相邻单元在公共交界处变形协调，并将两单元在公共交界处互相作用的内力按静力等效原则移置到节点上，这种假定实践证明是合理的，它可使复杂问题大为简化。

### (3) 节点力

通过节点的相互作用力，称为节点力。

### (4) 节点载荷

作用在节点上的外载荷称为节点载荷。在有限元法中，节点载荷分成两部分：原来作用在节点上的外力与作用在单元上的分布按静力等效原则移至到节点上的节点载荷。

### (5) 静力等效原则

在理论力学中已经介绍过已知力系向一点简化的法则。

对于刚体来说,所谓静力等效原则就是单元上的原有外载荷和将外载荷向各节点移置所得的节点载荷,两者向同一点简化时应具有相同的主矢和主矩。

对于弹性体来说,所谓静力等效原则是指单元上的外力系和将该力系向各节点处移置成的节点载荷,两者在虚位移上的虚功相等,也即外力作用在单元上所引起的变形能和移置后的节点载荷在单元上引起的变形能相等。在一定的位移模式下这种移置是唯一的,在线性位移模式下,弹性体和刚体按静力等效原则的移置结果一致。

根据 St. Venant 原理可知,按静力等效原则移置的节点载荷所引起的应力误差只是局部的,不会影响到整体,即物体内部距实际载荷作用处相当远的各点处的应力,与其载荷的具体分布情况关系很小。

### (6) 载荷移置法

#### 1) 分配移置法

在工程计算中,为了简便直观,常采用分配移置法,即把单元体看作刚体,按配给区域用静力等效原则移置载荷。对于集中力,一般是将力的作用点选为节点;对分布载荷,则按配给区域移置到节点上而成为节点载荷,成为聚缩载荷。

#### 2) 虚功移置法

虚功移置法将单元看作是弹性体,根据移置前后的虚功相等原则来确定节点载荷。

### (7) 位移函数

连续体或结构物被离散成单元后,每个单元的物理量,例如位移、应变等,在单元中的变化,有可能用一些近似函数来描述。

在有限元位移中,用以表示单元内的位移或位移场的近似函数,成为位移函数。一般说来,都是选取多项式作为位移函数,原因是多项式的数学运算(包括微分、积分)比较容易,而且在一个单元内适当选取多项式,可以得到与真实解较为接近的近似解。正因为如此,所以通常采用选取法而不用构造法。

选取方法一般有广义坐标法和插值函数法。

以上述方法为基础的有限元法解，是否满足平衡条件，一般说来，具有以下三种情况：

- 1> 单元内部的平衡条件不能满足，对于非线性元，位移函数常常不满足以位移为未知量的平衡微分方程；对线性元，由于位移函数是线性的，可以满足单元内部平衡条件。但不能由此得出结论，线性元比非线性元优越，因为非线性元即使不满足平衡条件，却往往能够得出更加精确的结果。
- 2> 单元之间的平衡条件常常得不到满足，线性元的应力在单元内是常数，两相邻线性元的应力值不同，因而线性元在公共边界上明显地不满足平衡条件。
- 3> 节点力的平衡条件是满足的，有限元方程  $\{P\} = [K] \{u\}$  是一组节点的平衡方程，所以由此得出的解  $\{u\}$  一定使作用在每个节点上的合力(广义力)为零。但由解  $\{u\}$  计算出的应力  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\}$  则不一定满足单元之间的平衡条件或应力的连续性。

事实上，在一个“真正”的有限元解中，当用来模拟给定的连续体的单元的组合数量越来越多时，任何破坏连续性和平衡条件的情况都会逐渐地趋于缓和或消失。

#### (8) 收敛准则

为了便于检查收敛性，将上述两个连续条件转化成以下三点判别准则：

- 1> 单元的位移函数在单元内部连续，在相邻单元的公共边界上必须协调。后者表示相邻单元在变形时既不重叠也不分离。对于梁单元和板壳单元还要求通过公共边界时，斜率不能发生突变。
- 2> 单元的位移函数应包括常应变状态。
- 3> 单元的位移函数能反应刚体运动，当单元作刚体运动时，单元应变必须为零，因而节点力也必须为零。

### § 5.3 ANSYS 简介

ANSYS 公司成立于 1970 年，总部位于美国宾夕法尼亚州的匹兹堡，目前是世界上 CAE 行业最大的公司。ANSYS 软件是融结构、热、流体、电磁、声学于一体的大型通用有限元分析软件，可以广泛应用于核工业、铁道、石油化工、航空

航天、机械制造、能源、汽车交通、国防军工、电子、土木工程、造船、生物医学、轻工等一般工业及科学研究。

### 1. ANSYS 的主要技术特点：

- 1> 唯一实现多场及多场耦合分析的软件；
- 2> 唯一实现前后处理、求解及多场分析统一数据库的一体化大型 FEA 软件；
- 3> 唯一具有多物理场优化功能的 FEA 软件；
- 4> 唯一具有中文接口的大型通用有限元软件；
- 5> 强大的非线性分析功能；
- 6> 多种求解器分别适用于不同的问题及不同的硬件配置；
- 7> 支持异种、异构平台的网络浮动，在异种、异构平台上用户接口统一；
- 8> 数据文件全部兼容；
- 9> 强大的并行计算功能：支持分析式并行及共享内存式并行；
- 10> 多种自动网格划分技术；
- 11> 好的用户开发系统。

### 2. 分析过程

ANSYS 软件含有多种有限元分析的能力，包括从简单线性静态分析到复杂非线性动态分析。一个典型的 ANSYS 分析过程可以分为以下三个步骤：

- 1> 创建有限元模型；
- 2> 施加载荷进行求解；
- 3> 查看分析结果。

### 3. 模块功能

在有限元分析过程中，程序通常使用以下三个部分：前处理模块，分析求解模块和后处理模块。下面对这些模块的功能作一些简单的介绍：

#### 1>前处理模块

主要实现三种功能：参数定义、实体建模和网格划分。

#### 2>求解模块

求解模块是程序用来完成对已经生成的有限元模型进行力学分析和有限元

求解的。在此阶段，用户可以定义分析类型、分析选项、载荷数据和载荷步选项。

### 3>后处理模块

当完成计算后，可以通过后处理器查看结果。ANSYS 程序的后处理包含两个部分：通用后处理模块和时间历程后处理模块。通过程序的菜单操作，可以很方便地获得求解的计算结果。

## § 5.4 光弹性技术简介

### § 5.4.1 应力光律

#### 1. 折射率椭球的描述

大卫·布儒斯特(Brewster)于 1816 年发现，一些原本是光学各向同性的非晶体透明材料(环氧树脂、聚碳酸酯等)受力后会变成光学各向异性，当应力解除之后材料恢复为各向同性，对此我们称之为产生暂时双折射或人工双折射。

由弹性力学可知，承受复杂应力物体内的每一点均可以找到三个相互正交的主应力轴，以此三个轴为主轴可画出一个应力椭球，椭球的三个半径正比于三个主应力  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ ，其方程为：

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (5-1)$$

类似地，过双折射晶体内每一点可画出一个折射率椭球，它的三个半径正比于三个主折射率  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$  方程为：

$$\frac{x^2}{N_1^2} + \frac{y^2}{N_2^2} + \frac{z^2}{N_3^2} = 1 \quad (5-2)$$

## 2. 应力光律

麦克斯韦(Maxwell)1852年建立了用以表达暂时双折射材料主折射率和主应力定量关系的光力定律。他指出,产生人工双折射的试件内每一点的应力椭圆的主轴与折射率椭圆主轴重合。主折射率与主应力成线性关系。

$$\begin{cases} N_1 - N_0 = A\sigma_1 + B(\sigma_2 + \sigma_3) \\ N_2 - N_0 = A\sigma_2 + B(\sigma_3 + \sigma_1) \\ N_3 - N_0 = A\sigma_3 + B(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \quad (5-3)$$

式中  $N_0$  为材料未受力时的折射率。A 和 B 为材料的应力光学常数。(5-3)式也可以写成:

$$\begin{cases} N_1 - N_2 = C(\sigma_1 - \sigma_2) \\ N_2 - N_3 = C(\sigma_2 - \sigma_3) \\ N_3 - N_1 = C(\sigma_3 - \sigma_1) \end{cases} \quad (5-4)$$

其中  $C=A-B$ , 称为相对应力光学常数。公式(5-3)和(5-4)就称为应力光律。由它可以看出产生人工双折射后材料折射率的变化与相应的主应力差成正比。

### § 5.4.2 平面光弹性

本节讨论平面光弹性原理。平面光弹性处理的对象是承受平面应力的光弹材料模型;由物理光学可知,当一束偏振光沿某一光轴射入双轴双折射晶体后,将分解成二束偏振方向分别沿另外两个光轴方向的平面偏振光。承受平面应力的光弹材料模型产生人工双折射后,显然模型表面法线方向是某一主应力方向,也是一光轴方向。因此,当偏振光沿表面法线方向射入试件后,将分解成二束偏振方向分别沿另外主应力方向的平面偏振光。由于这两束光线穿过模型的光程不同因此出射后必将产生位相差。如果能够测量出上述两束偏振光的方向和位相差,就可以得到全场主应力方向和主应力差的分布。这就是平面光弹性的原理。我们首

先讨论光通过暂时双折射试件后的位相变化。

### 1. 位相计算

对于弹性力学的平面问题，着重讨论公式(5-4)中的第一公式，因为对这类问题有兴趣的是  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ 。现在研究当光垂直通过透明平板模型时，由应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  所造成的人工双折射效应，因  $N_1$ 、 $N_2$  和  $N_0$  不同而引的两束光的位相相对滞后和绝对滞后。设模型厚度为  $d$ ，受力后的模型厚度  $d'$ 。

#### (1) 位相的绝对滞后

模型不受力时引起的位相滞后

$$\alpha_0 = \frac{2\pi}{\lambda}(N_0 - 1)d$$

模型受力后，由  $N_1$  引起的位相滞后

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(N_1 - 1)d'$$

模型受力后，由  $N_2$  引起的位相滞后

$$\alpha_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(N_2 - 1)d'$$

#### (2) 受力前后的位相变化

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} [N_1 d' - (N_0 d + d' - d)]$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} [N_2 d' - (N_0 d + d' - d)]$$

#### (3) 二束出射光位相的相对滞后 $\delta_1 - \delta_2$

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(N_1 - N_2)d' \approx \frac{2\pi}{\lambda}(N_1 - N_2)d \quad (5-5)$$

上式中的近似仅引起千分之几的误差。另一个感兴趣的量是  $\delta_1 + \delta_2$ ，它将在全息光弹中用到。

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} [(N_1 - N_0)d' + (N_2 - N_0)d' + 2(N_0 - 1)d' - 2(N_0 - 1)d] \quad (5-6)$$

利用应力光律(5-3)(5-4)和广义虎克定律，可以把(5-5)(5-6)式整理改写为

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} C(\sigma_1 - \sigma_2)d \quad (5-7)$$

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} C'(\sigma_1 + \sigma_2)d \quad (5-8)$$

式中

$$C' = (A + B) - \frac{2\nu}{E}(N_0 - 1) \quad (5-9)$$

## 2. 平面光弹仪光路

测量光程差的最好方法是干涉。但每一点的两束出射光是相互正交的平面偏振光，不可能直接干涉。为此我们设计了专门的仪器来测量。

如图 5-1 所示，光弹仪是用来做平面光弹分析的设备，它由光源、准直透镜、起偏器，四分之一波片（二片）、分析器 P 和成像系统构成，模型 M 放在中间。

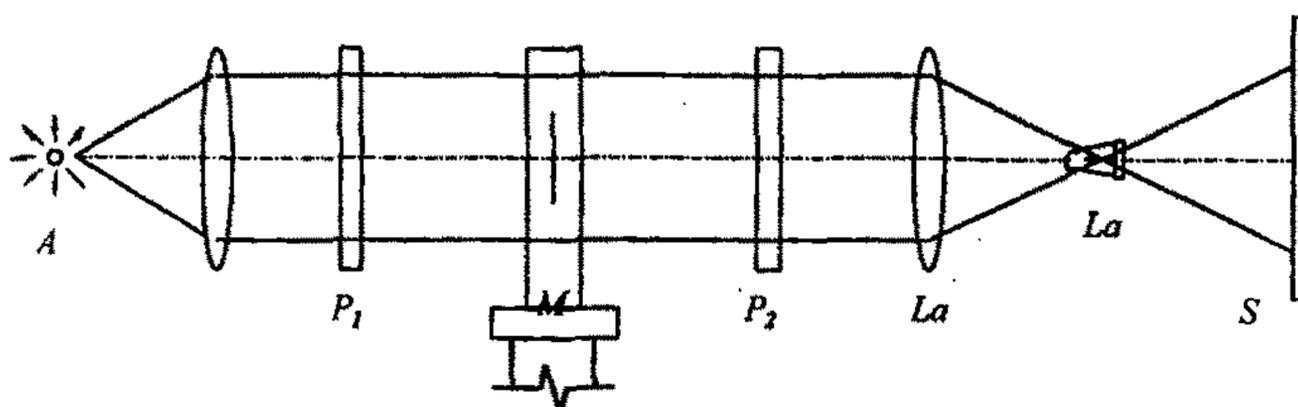


图 5-1a 平面光弹仪光路(平面偏振光入射)

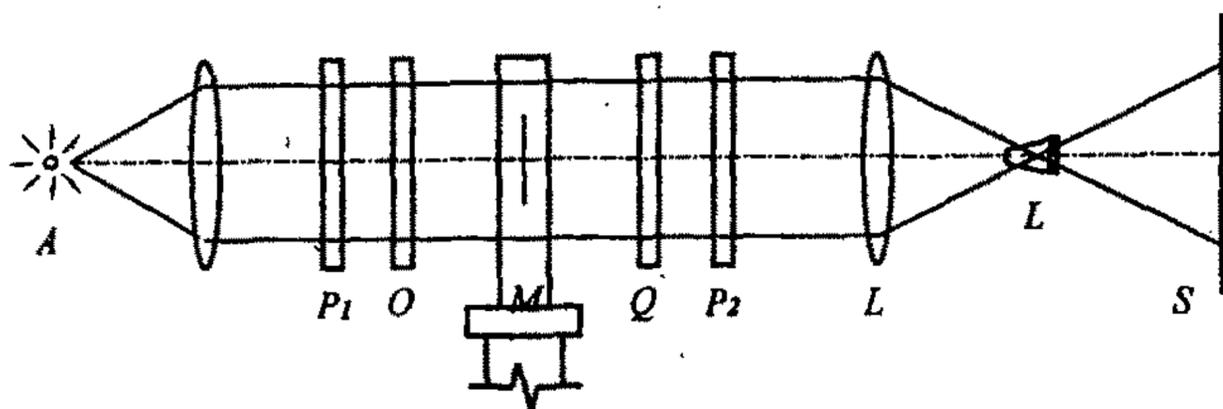


图 5-1b 平面光弹仪光路(圆偏振光入射)

设初始起偏器轴沿  $x$  轴方向。平面光弹光路根据模型不受力时光路系统出射光的光强可分：明(亮)场光路和暗场光路。

根据光路系统出射光的偏振态可分为平面偏振光路和圆偏振光路，这二者的区别在于后者加了两个四分之一波片。

(1)用平面偏振光通过模型(图 5-1a)：这时不需要四分之一波片，当  $P_1$  与  $P_2$  的偏振轴方向一致时，称明场；当  $P_1$  与  $P_2$  的偏振轴互相垂直时，称暗场。

(2)用圆偏振光通过模型(图 5-1b)，四分之一波片快慢轴与偏振器成 45 度角。因四分之一波片快慢轴有不同摆法，可有下列四种组合：

- 1> 两偏振片的轴一致，两四分之一波片的快轴与快轴重合，暗场。
- 2> 两偏振片的轴一致，两四分之一波片的快轴与慢轴重合，明场。
- 3> 两偏振片的轴垂直，两四分之一波片的快轴与慢轴重合，暗场。
- 4> 两偏振片的轴垂直，两四分之一波片的快轴与快轴重合，明场。

将模型放在光路中，当模型受力，我们在成像系统的屏上，可看到干涉条纹。

### 3. 平面光弹仪出射光强

#### (1)平面偏振光通过模型

经过数学推导，可以得到如下结果：

##### 1>明场

对于明场，干涉条纹的光强分布为：

$$I_{\text{明}} = 1 - \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \quad (5-10)$$

式中， $\theta$  为  $\sigma_1$  轴与  $X$  轴夹角。明场条纹难以观察，应用较少。

## 2>暗场

对于暗场，干涉条纹的光强分布为：

$$I_{\text{暗}} = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \quad (5-11)$$

代入公式(1-7)，上式变为：

$$I_{\text{暗}} = \sin^2(2\theta) \sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda} Cd(\sigma_1 - \sigma_2)\right] \quad (5-12)$$

由条纹的强度分布可知，平面偏振光的暗场条纹是由两种条纹混合在一起的，它们分别与主应力的方向(称等倾线)及主应力差值(称等差线)有关。

等倾线：当  $\theta = 0$ ，或  $\theta = 90^\circ$ ，即主应力  $\sigma_1$  的方向与  $x$ 、 $y$

轴一致时，光强为零，是黑条纹。

如果同步旋转起偏器和检偏器，等倾线将发生变化；如果此时起偏器和检偏器旋转了  $\theta$  度，我们称得到的等倾线为  $\theta$  度等倾线。

等差线：当  $\delta_1 - \delta_2 = 2n\pi$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )，光强为零，是黑条纹。

由该条纹可以得到：

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n\lambda}{cd} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5-13)$$

这些黑条纹是主应力差等值线的点的轨迹， $n$  称条纹阶数。条纹的阶数确定以后，根据(5-13)式可将条纹上各点的主应力差求出。

但二族条纹交织在一起，使得条纹分析有困难。因此，平面偏振光光场，常常仅用于分析等倾线，求主应力方向。

对于等差线的分析，人们常用圆偏振光光路。

## (2) 圆偏振光通过模型

经过数学推导，可以得到如下结果：

## 1&gt; 明场

对于明场，干涉条纹的光强分布为：

$$I_{\text{明}} = \cos^2\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \quad (5-14)$$

a) 当  $\delta_1 - \delta_2 = 2m\pi$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )，光强为极大值，是亮条纹。

b) 当  $\delta_1 - \delta_2 = (m+1/2)\pi$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )，光强为零，是暗条纹。

## 2&gt; 暗场

对于暗场，干涉条纹的光强分布为：

$$I_{\text{暗}} = \sin^2\left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \quad (5-15)$$

a) 当  $\delta_1 - \delta_2 = (m+1/2)\pi$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )，光强为极大值，是亮条纹。

b) 当  $\delta_1 - \delta_2 = 2m\pi$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )，光强为零，是暗条纹。

从这一结果可以看出，等倾线不再出现；明场与暗场的条纹明暗互换。

## 4. 白光下的等差线—等色线

等倾线是因为主应力方向与坐标轴一致而消光，与光波长无关，因而在暗场中(以下除特别指出外我们一般是讨论暗场条纹)总是黑条纹。然而等差线却要复杂得多，不论平面偏振光或圆偏振光通过模型，都是因为主应力之差满足(5-12)式而消光，与光波长有关。当所用的光源只有一种波长时，则(5-12)式表示的是一族黑白相间的条纹。当所用的光源是白光时，等差线就成为一系列的彩色条纹，这是一种二向色性。此时，光源包含有各种波长，如主应力之差与某个波长构成了(5-12)式的关系，这种波长的光就被消光，而其他颜色的光在透过模型时，不同波长的光也将受到不同程度的消光，总的效果构成一种颜色，称为被消光颜色的补色。所以等差线以补色的彩色条纹来显示，此时，等差线又称等色线，

主应力差为零，各波长的光都被消光，干涉条纹为黑色。主应力差增加时，

最先消失的是紫光，它的补色是黄色。随着主应力差的继续增加，颜色按光谱的次序，由紫、兰、绿、黄、橙、红逐个消失，所表示出来的补色的次序是淡黄、橙黄、深红、紫、深蓝、兰绿，后又变到接近白色，这就是颜色的一次循环。以后的循环表现出来的补色就复杂一些了。因为有消光重迭现象，即凡是光程差等于两种或几种光波长的整数倍时，这些颜色要被同时消光。由于补色基本按一定的色序变化，因而彩色条纹可以指出条纹级数递增的方向，可以帮助确定等差线的条纹级数。

### §5.4.3 光弹条纹的观察和判读

在光弹实验中，等差线及等倾线是最基本的两种实验资料。

#### 1. 整数级等差线的观测

首先，应当确定等差线的阶数。考虑到弹性力学关于主应力顺序的规定，等差线的阶数必定为非负数。根据应力连续性原则，条纹阶数是连续变化的。因此只要找出零级条纹，再找出条纹阶数的极值点，就可以得到全场条纹阶数分布。

第一步需要找出零阶条纹，属于零阶等差线有下列两种情况：

- 1) 各向同性点：模型内部  $\sigma_1 = \sigma_2$  的点，特点是在模型内部围绕各向同性点周围的条纹形成封闭曲线。
- 2) 奇点：是  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  的点。显然，奇点也是各向同性点，其两测应力必为异号。

各向同性点和奇点是永久性黑点，载荷变化或波长变化时，这些黑点都不发生变化。

需要加以区别的黑点是暂时性黑点，它们是条纹的发源点(源点)和隐没点(汇点)。当载荷变化时，条纹从发源点(源点)“冒出”，在隐没点(汇点)被“吞没”。显然，它们位于主应力差的局部极大点和局部极小点处。

对可以连续加载的模型，可利用各向同性点和奇点的特征，找出零阶条纹。然后，按照由隐没点到发源点条纹阶数是增加的这一趋势，确定各条纹的阶数。对于不能采用连续加载的模型，可以利用白光光源得到的等色线，来判读条纹阶数。

## 2. 等倾线的观测

等倾线是主应力方向与起偏器及分析器的偏振轴一致的点的轨迹. 在等倾线上, 主应力的大小, 以及主应力差的大小, 都是变化的, 只是主应力的方向相同. 归纳起来, 等倾线有以下特征:

1) 在自由边上: 边界的切线和法线方向为主方向. 因此, 如果起偏器的轴与  $x$  轴成  $\theta$  角, 则边界切线或法线与  $x$  轴成  $\theta$  角的地方, 必出现等倾线. 当自由边是直线, 则整条边都是等倾线.

2) 在集中力作用点上: 根据弹性力学知识可以知道, 在集中力作用点的周围, 只有径向主应力存在, 即在集中力作用点, 主应力方向向四周辐射, 各种角度的等倾线都通过集中力作用点.

3) 在对称轴上: 作为模型几何形状和载荷分布的对称轴, 是等倾线

4) 在各向同性点和奇点: 过该点的任何方向都是主方向. 因此, 一切等倾线都过各向同性点或奇点. 对于某个各向同性点, 如果通过它的等倾线参数是按逆时针方向增加的, 称为正各向同性点; 反之, 为负各向同性点. 两相邻的各向同性点, 必为一正一负; 两同方向各向同性点之间, 一定存在一个反向各向同性点.

5) 相邻等倾线参数必是连续变化的: 除各向同性点、奇点、集中力作用点之外, 等倾线不能相交.

根据这些特征, 就可以将等倾线描绘出来. 等倾线的质量一般不大好. 为了提高等倾线的清晰度, 可以采用:

a) 变载荷法: 变载荷等差线变化、等倾线不变, 据此可区分二者.

b) 减少等差线法: 加小载荷或采用双折射不灵敏材料, 此时等差线很少而等倾线清晰.

## § 5.5 三维光弹性冻结切片法简介

针对工程中大量存在的三维应力分析问题，光弹性技术也发展了三维光弹性方法。三维光弹性通常采用冻结切片法进行应力分析，是目前处理三维问题相对来说比较成功的技术。

### 1. 应力条纹冻结效应

光弹性材料在室温下呈暂时二向色性，即卸载后模型就不再具有双折射性质，在光弹仪上与应力分布有关的干涉花样也将消失。但如将受载模型的温度升高到某一临界温度(称为冻结温度)，恒温一定时间，再缓慢降至室温，卸去载荷。此时材料的二向色性被永久地被保存下来。如将模型放到光弹仪上观察时，能看到等差线，等倾线等干涉花样。且对已冻结好的模型再进行任何机械加工，被冻结的双折射效应也不受影响。

### 2. 三维光弹性的应力光律

为减少由光线传播过程中积分效应所引起的误差，通常将已冻结好的三维光弹模型切成薄片(一般厚 3mm 左右)，再放到光弹仪中观察。但此时看到的应力条纹并不反映真实的主应力差或主应力方向，而是与次主应力有关。

所谓次主应力是假定模型材料处于二维应力状态，这二维应力系统的作用平面与光线照明方向垂直。对这二维应力系统可求得相应的二个主应力即为次主应力。

### 3. 三维光弹性分析法

目前，三维光弹性分析法主要有两大类：

#### (1) 三次正射法：

1>切丁法：将主切片用正入射的照明光线分析出相应的次主应力的

等差线和等倾线后，对该切片再先后沿相互正交的二个方向切割，并分析得到的相应的次主应力分布。根据所获得的光弹资料可得到关于六个应力分量的六个方程(其中只有五个是相互独立的)，与平衡方程(或其它有关的方程)相联立可求得该点的应力张量。

2>三模型法：也有人制作三个全同的模型在相同的载荷下冻结应力条纹，然后将三个模型分别沿三个相互正交的方向切片再对每组切片做与上类似的分析。

以上二种技术都归入三次正射法。

(2)斜射法：

对切片进行一次正射入，二次斜射入，将获得的资料联立，可求得应力张量的分布，此法操作简单，成本较低，但斜射照明必然会引入误差。为避免光线斜射通过模型发生折射造成对测试精度的影响，一般需将切片置于折射率与模型材料一样的浸没液中。

三次正射法的优点在于由于是正入射，可避免斜射所带来的误差，但切丁法需反复切片，工艺要求很高，且很小的切丁在光弹仪中很难分析。二模型法要求制作三个全同模型，且要控制同样的冻结条件，这在实验上不易做到，且也不经济。

## 第六章 混合求解法的数值模拟

### § 6.1 前言

针对飞机发动机叶片根部榫头与榫槽之间接触应力的检测难题,本文拟将三维光弹性技术和有限元法相结合,研究一套完整的接触应力的混合求解法。我们的基本思路是:

发挥数值计算方法的特长,计算试件在外载荷及接触载荷共同作用下的应力、应变分布,但接触载荷是含有待定常数的未知外力。当然,计算出的试件内部或表面的应力、应变分布也是含未知数的。同时发挥实验检测技术的长处,应用实验方法检测接触面周围附近若干点上的应力或应变。这些点的应力或应变应该与计算结果一致,以此来确定接触应力中的待定常数,从而进一步确定出接触应力分布。

为了验证本文提出的混合求解法的可靠性,本文专门设计了一个典型的装配应力试件,并利用数值模拟法验证了本文提出的混合求解法可靠性。

数值模拟验证混合求解法可靠性的具体做法如下:

### § 6.2 模拟试件

模拟试件如图 6-1 所示,由 A、B 两个部分构成,材料常数相同。A 是一个中心带孔的正方形板,正方形边长为  $48\text{mm} \times 48\text{mm}$ ;板厚  $10\text{mm}$ ;中心开有圆孔,圆孔直径为  $\Phi 38\text{mm}$ ;B 原是一个圆柱销钉,圆柱直径为  $\Phi 38.03\text{mm}$ ;长  $15\text{mm}$ ;二者之间的过盈量为  $0.03\text{mm}$ 。该过盈量是在有限元法试算的基础上给出的,它保证了 A、B 试件的装配应力处于弹性变形的范围内。

同时,对 A 的后表面施加离面位移为 0 的位移约束。

我们的问题是研究 A、B 由过盈配合而产生的接触应力分布。

计算中采用的材料常数为:

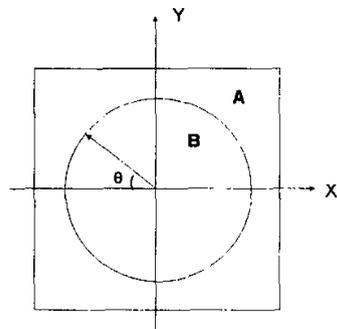


图 6-1 模拟试件示意图

$$E=200\text{Gpa}$$

$$\sigma_s=353\text{Mpa}$$

$$\mu =0.3$$

### § 6.3 基于过盈量的数值计算

本文选择有限元法作为模拟试件的数值计算方法，并使用性能及功能都极强的 ANSYS 软件作为数值计算的软件工具。

装配应力的计算是以设计的过盈量为初始条件，施加一定的边界条件，根据 ANSYS 提供的接触问题解法进行计算。由于试件的对称性，仅取试件 A、B 的 1/4 部分进行计算，得到装配在一起的两个试件块中各个节点上的应力、应变和位移值。

图 6-2 是  $\sigma_r$  应力分布计算结果；图 6-3 是  $\sigma_z$  应力分布计算结果。

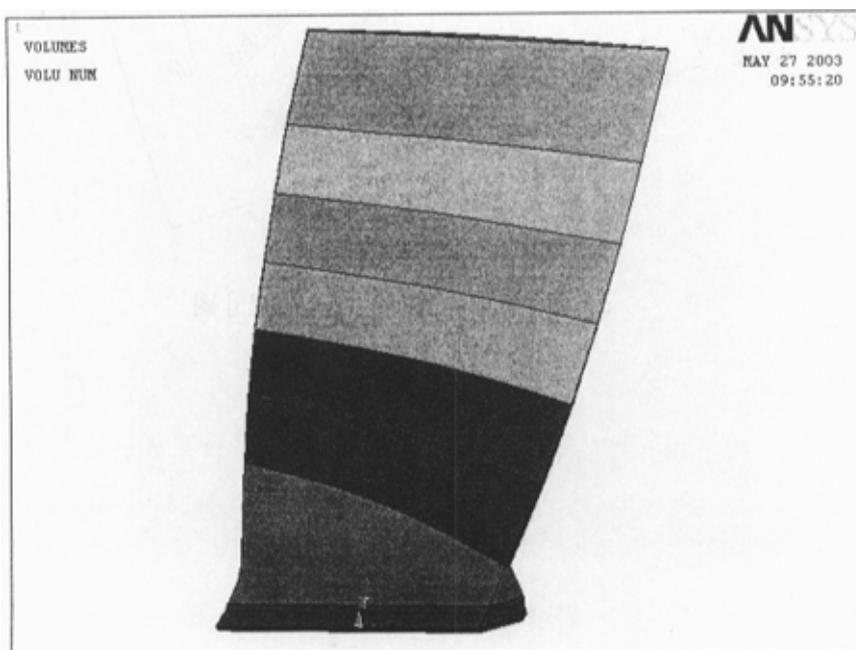


图 6-2 应力分量  $\sigma_r$  分布  
(边长：48mm；中心孔径：38mm；过盈量：0.03mm)

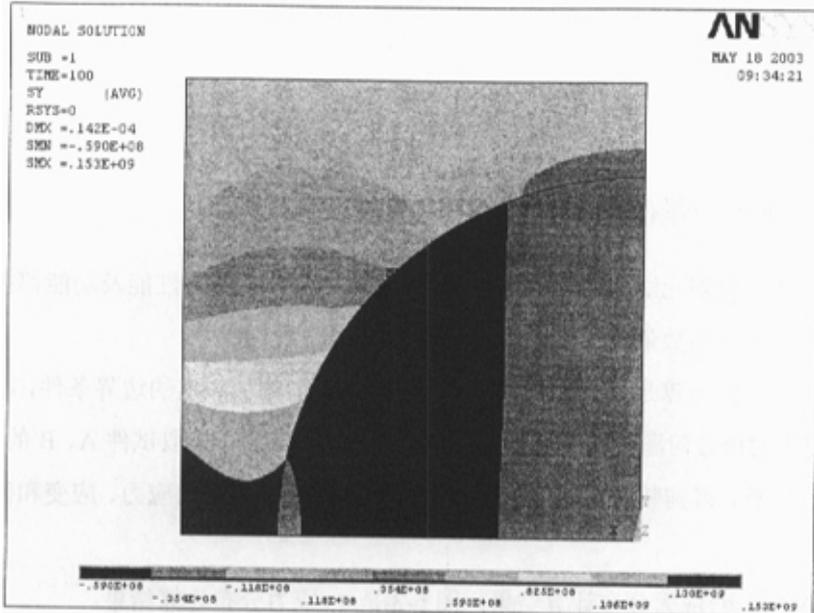


图 6-3 应力分量  $\sigma_y$  分布  
(边长: 48mm; 中心孔径: 38mm; 过盈量: 0.03mm)

综合  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  的应力分布，我们可以得到接触面上的径向应力分布  

$$\sigma_r = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}。$$

图 6-4 曲线给出了接触面圆周上的径向应力分布。

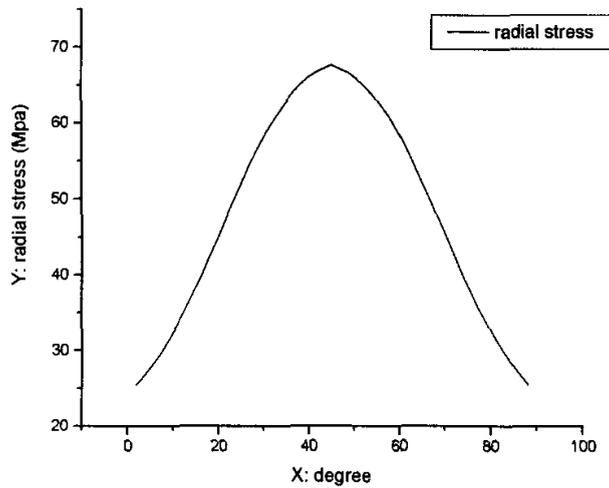


图 6-4 接触面径向应力分布图  
(边长: 48mm; 中心孔径: 38mm; 过盈量: 0.03mm)

## § 6.4 混合求解原理

混合求解法的基本步骤如下：

### 1. 检测点的确定原则

为了利用实验检测与数值计算相结合的混合解法，来求解装配应力分布，需要在试件表面确定若干个检测点。检测点的确定，将严重地影响检测精度。其考虑原则应如下：

- 1>检测点至少等于待定常数的个数。最好多选择一些点，利用最小二乘法确定待定常数更为精确。
- 2>检测点应该尽量选择在装配接触面附近，或者受装配载荷影响最大的点上，这样可以提高检测精度。
- 3>在选择检测点时，还要兼顾实验检测情况，能否便于提取实验检测结果。

### 2. 实验模拟值的获得——利用基于过盈量的数值计算结果

检测点的实验值可以是应变、应力或应力的组合值，这应根据实验值提供的方便程度而确定。

但在我们的数值模拟中，是用不同的数值计算方法获得的计算值代替实验值进行混合求解的。

为了获得检测点的实验模拟值，我们按照前面 § 6.3 数值计算中的计算方法，也就是以设计的过盈量为初始条件，施加一定的边界条件进行计算，以得到实验模拟应力场。

在该应力场中我们选择试件块 A 装配面附近表面上的 20 个检测点上的应力值，并且表示如下：

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_{20}$$

### 3. 基于载荷的数值算法——提供检测点的计算应变值

欲进行混合求解，需要利用基于载荷的数值算法求解全场的应变或应力分布。但是装配面上的装配载荷分布是未知的，要想利用装配面上的装配载荷分布来进行全场应力分布，首先需解决两个问题：

第一，选用什么样的装配载荷的分布形式？

载荷的函数形式既要尽量简单，又必须符合试件外形的特点。这种载荷应该和哪些参数有关？经过反复探讨，文中决定利用角度  $\theta$  的多项式来模拟装配面内的载荷分布。

但是，多项式的最高次数应该选多大比较合适呢？次数太高，带来不必要的计算量；次数太低，不能很好地反应变化规律。

经过反复尝试，最后发现选用角度  $\theta$  的 19 次多项式来模拟接触面内的载荷分布比较合适，更高的幂对提高计算精度没有更明显的贡献：

$$f(\theta)=a_0+a_1 \theta+a_2 \theta^2+a_3 \theta^3+\dots+a_{19} \theta^{19}$$

第二，如何把含待定参数的载荷施加到接触面上？

因为所加载荷中有待定常数，我们采取了分步加载、然后把结果进行线性叠加的处理方法，该方法通过基于 ANSYS 的 APDL 语言编程实现，也即：

1> 首先分别计算试件在  $\theta^0$ 、 $\theta^1$ 、 $\theta^2$ 、 $\theta^3$ ..... $\theta^j$  等分量载荷作用下、试件表面上任一点  $i$  的应力分量  $S_{i,j}$  ( $j=0,1,2,3,\dots,19$ )；

2> 按下式进行叠加，就可以求出试件表面任一点  $i$  在装配载荷作用下的应力  $S_i$ ：

$$S_i=a_0S_{i,0}+a_1 S_{i,1}+a_2 S_{i,2}+a_3 S_{i,3}+\dots+a_i S_{i,19} \quad (6-1)$$

在确定了装配载荷形式及处理方法之后，并给予与 § 6.3 中相同的边界条件，计算出每个载荷项作用于试件块 A 而引起的应力场  $S_{i,j}$ 。

可以从这些应力场中提取出试件表面上 20 个相应检测点的应力值，并按方程(6-1)形式进行线性叠加，得到相应检测点的总应力：

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, 20) \quad (6-2)$$

式中，每一个应力值都是由方程(6-1)所表示的、含有待定常数的多项式所确定的。

这里，我们根据检测点的确定原则最少选取 20 个点，当然若选取多于 20 个的点将会提高计算精度。

#### 4. 混合求解的基本原理

同一个检测点上的应力值应该相同，也就是在同一个检测点上，由实验和计算得到的应力值相等。

在这里，由两种不同计算方法获得的、同一点的应力值应该相同。

将由不同计算方法获得的、用于代替实验值的模拟实验值： $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{20}$ ，代入方程(6-1)的左边，可以建立如下方程组：

$$\begin{pmatrix} S_{1,0} & S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} & \dots & \dots & S_{1,19} \\ S_{2,0} & S_{2,1} & S_{2,2} & S_{2,3} & \dots & \dots & S_{2,19} \\ S_{3,0} & S_{3,1} & S_{3,2} & S_{3,3} & \dots & \dots & S_{3,19} \\ S_{4,0} & S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & \dots & \dots & S_{4,19} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{20,0} & S_{20,1} & S_{20,2} & S_{20,3} & \dots & \dots & S_{20,19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ S_{20} \end{pmatrix} \quad (6-3)$$

求解方程组(6-3)，可以得到装配载荷中的待定系数，从而求得装配接触面上的载荷分布。

### § 6.5 混合求解法的模拟结果

表 6-1 给出了方程组 6-3 的一组解，该解对应于图 6-5 中的曲线 1。

$P_A = \sum_{j=0}^{19} a_j \theta^j$									
$a_0$	1.0825e9	$a_1$	-4.8632e8	$a_2$	6.5864e7	$a_3$	-4.5149e6	$a_4$	1.79310e5
$a_5$	-4072.9	$a_6$	44.63	$a_7$	-0.12156	$a_8$	-1.8377e-3	$a_9$	8.3007e-5
$a_{10}$	-1.1994e-6	$a_{11}$	-7.2932e-10	$a_{12}$	-1.2648e-10	$a_{13}$	1.6765e-12	$a_{14}$	3.2868e-14
$a_{15}$	-6.9514e-17	$a_{16}$	-2.9228e-18	$a_{17}$	4.9466e-20	$a_{18}$	-1.3741e-21	$a_{19}$	9.4143e-24

图 6-5 是利用混合求解法获得的装配载荷分布与基于过盈量数值计算结果的比较。曲线 1、2 是利用两组不同检测点的数据，经过混合求解法获得的、试件装配面上的归一化载荷分布  $P_A$  (单位面积上的载荷)；实曲线载荷分布是利用基

于过盈量数值计算法获得的、装配面上径向应力分布。

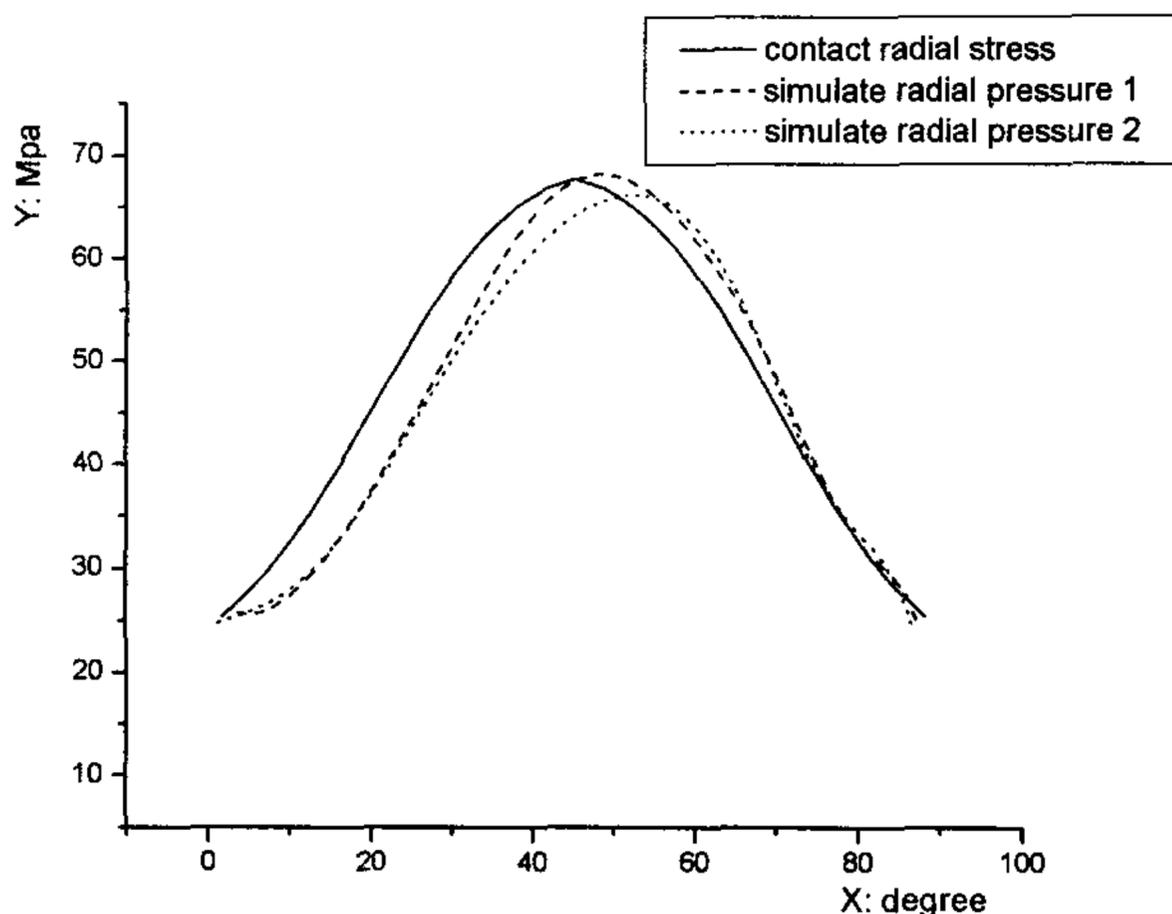


图 6-5 混合求解法装配载荷分布（归一化）与基于过盈量数值计算装配面径向应力分布的比较

为了验证我们提出的实验技术与数值计算相结合的混合法求解法的可靠性，直接依靠实验数据来验证有一定的困难。如果出现问题，难以判断是混合法引进的问题？还是实验数据不准确引进的问题？

为此，我们完全依靠数值计算方法来检验混合法求解法的可靠性。有限元计算软件提供了一种以过盈量为初始条件的装配应力的计算软件，只要指定一定的过盈量，就可以通过计算得到互相装配的两个试件块各个节点上的应力、应变等数值。本文以这种基于过盈量的数值计算结果作为标准值，一方面提供若干点的计算应力值代替实验应力值，进行混合求解。另一方面，提供计算出的装配面上的径向应力分布，用于与混合求解法获得的归一化装配载荷分布进行比较，以检验混合求解法的可靠性。

图 6-5 所示结果表明，混合法求解装配应力问题的思路可行，该方法同样适用于接触应力、残余应力问题。

模拟研究还表明，实验检测值应以装配面或接触面附近的数据为好，这些靠近装配面或接触面的实验数据将会提高混合求解法的检测精度。

## 第七章 飞机发动机叶片光弹模型

## § 7.1 前言

为了分析研究飞机发动机叶片根部榫头与榫槽之间的接触应力分布，我们拟将三维光弹性技术和有限元法相结合，提出一套完整的解决接触应力分布的混合求解法。

为此，我们的协作单位按照三维光弹性理论及技术，制作了飞机发动机光弹性模型，包括叶片、轮盘等所有零部件的光弹性模型。

在实验时，按照相似理论，使发动机光弹性模型作相应的旋转，模拟真实发动机的高速旋转。在发动机光弹性模型旋转的状态下，加温冻结发动机光弹性模型的受力状态。冻结的叶片模型，已经将发动机叶片在高速旋转状态下应力分布冻结在模型内。这种应力既包括离心力的作用，也包括叶片根部榫头与榫槽之间接触应力对叶片的作用力，尤其是对叶片根部产生的应力。利用三维光弹切片技术，可以获得叶片中的主应力差及主应力方向等信息。

## § 7.2 叶片模型与工况

本文以飞机发动机的一级压气机转子叶片为模型(FWP14)。图 7-1 是该叶片模型的俯视图。

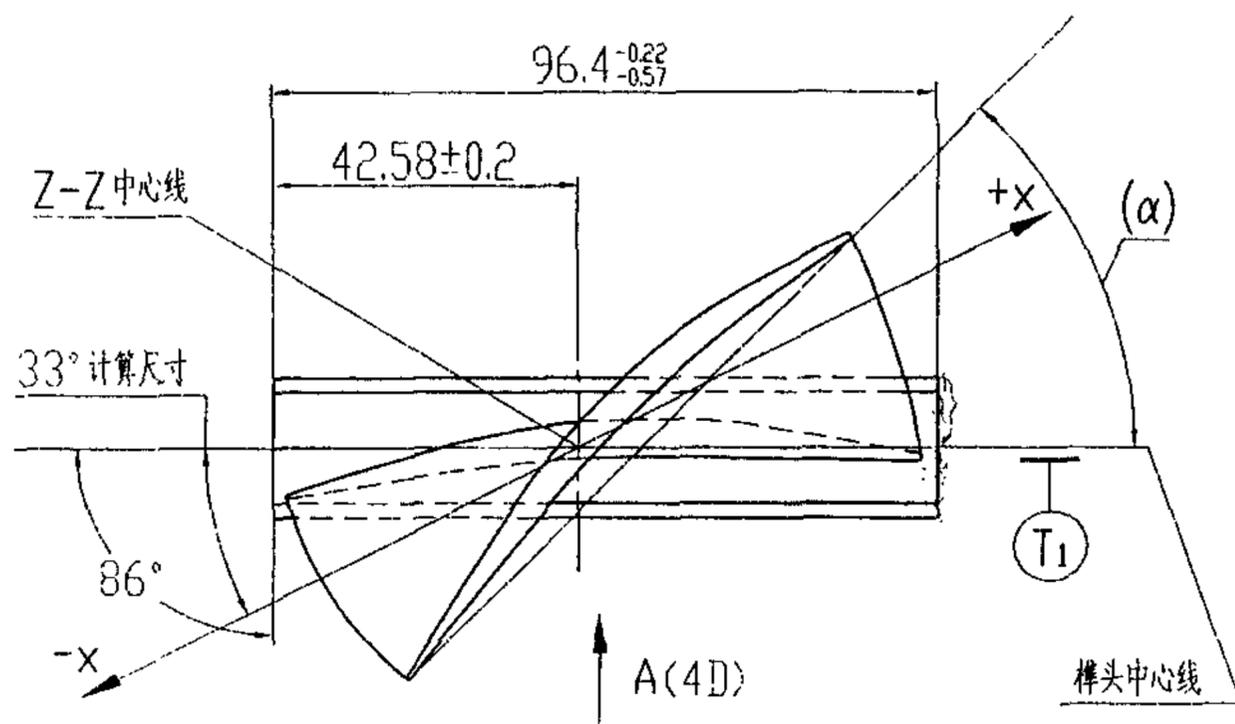


图 7-1 叶片模型俯视图

图 7-2 是该叶片模型的正视图(A 方向)。

图 7-3 是该叶片模型的俯视截面图。

图 7-4 是发动机一级压气机转子轮盘图，叶片通过榫头与榫槽的配合，同时通过榫头底部的销钉固定在轮盘上。

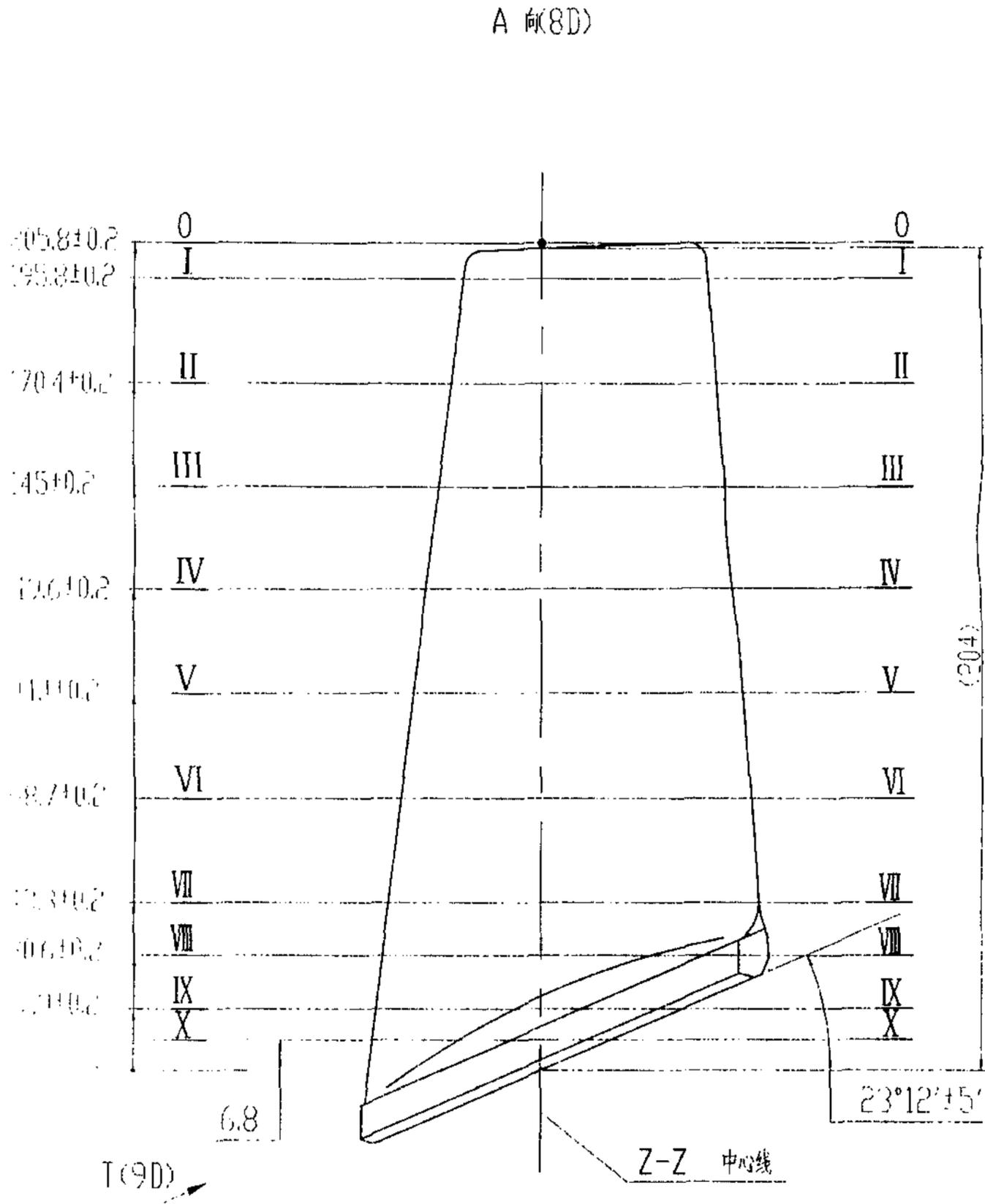


图 7-2 叶片模型正视图(A 方向)



图 7-5 是叶片模型的装配尺寸图。

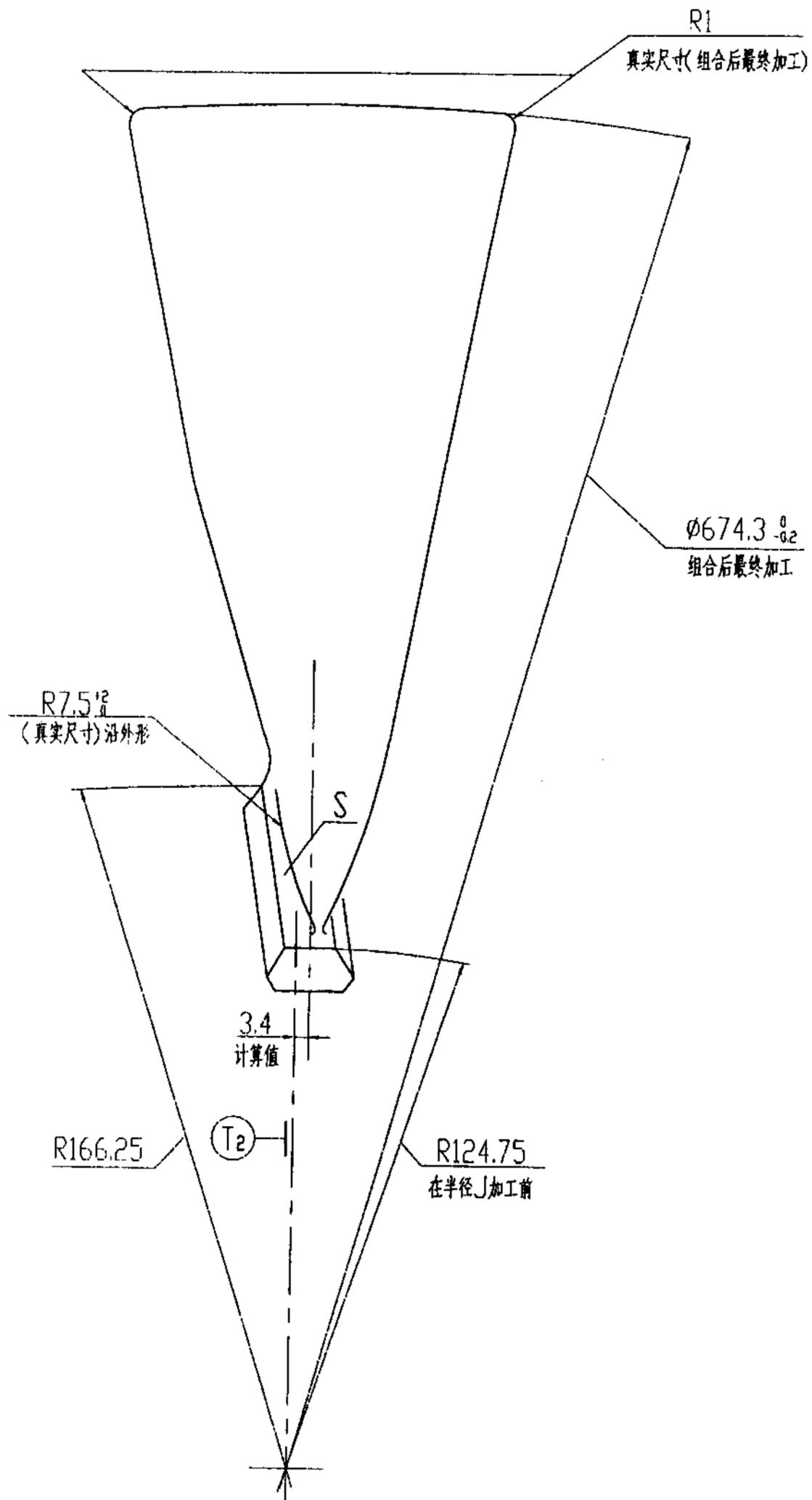


图 7-5 叶片模型的装配尺寸图

图 7-6 是叶片模型榫头的截面尺寸图。

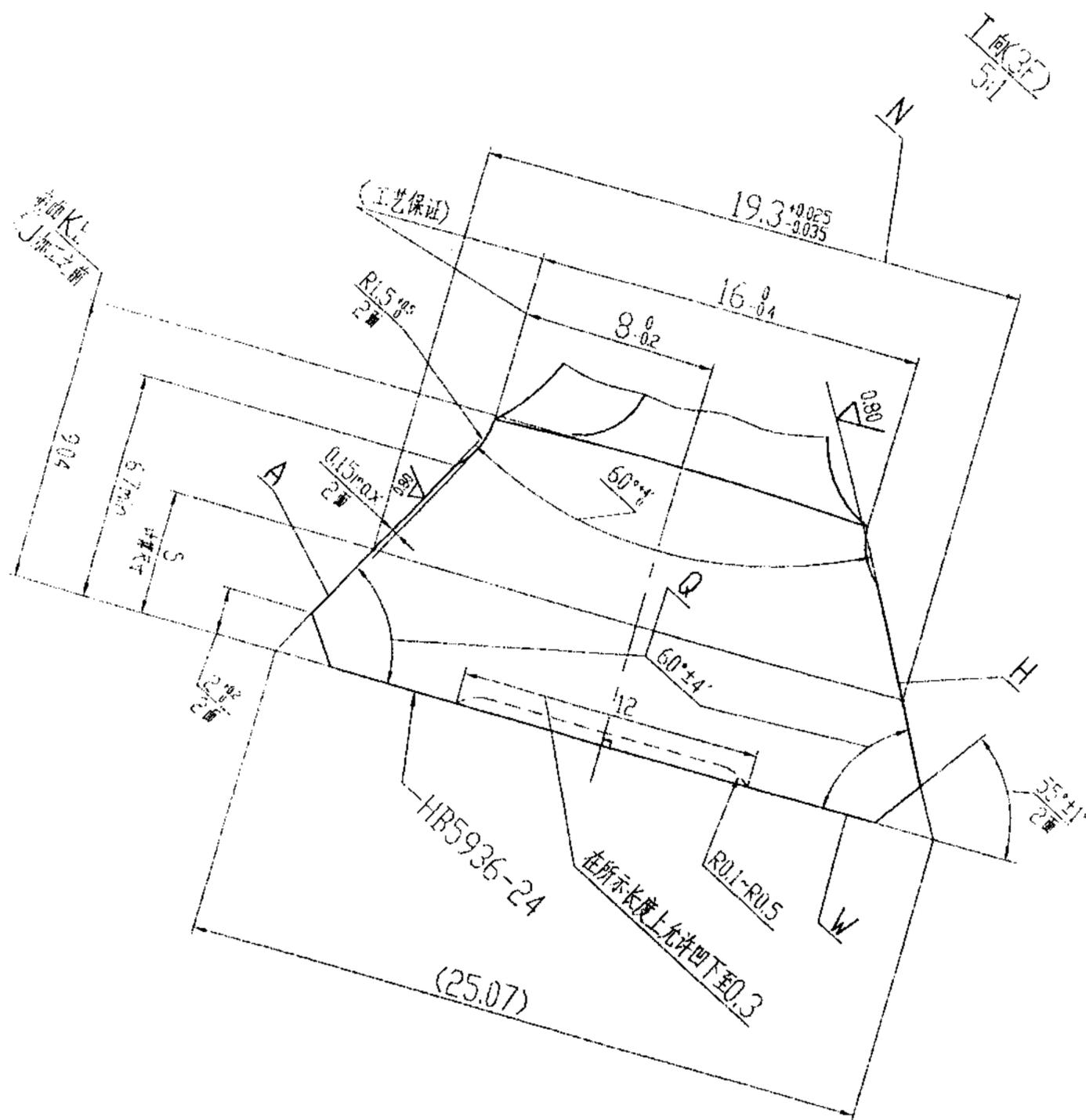


图 7-6 叶片模型榫头的截面尺寸图

## 第八章：发动机叶片光弹模型应力计算

### § 8.1 有限元模型的建立

#### 1. 模型的建立与划分

根据 § 7.2 中图 7-1~图 7-6 提供的形状尺寸，在 ANSYS 中建立飞机发动机叶片的有限元计算模型。计算中所涉及的各项参数如下：

$$E=300\text{Mpa}$$

$$\rho =1.25 \times 10^3 \text{Kg/m}^3$$

$$\omega =478\text{r/min}$$

$$\mu =0.46$$

叶片在 Z 方向较长，在 Y 方向较薄，不同方向尺度不均匀。如图 8-1 所示，我们将整个叶片模型分成八块，每一块作为一个单独体进行网格划分，不同模块之间通过公共面粘结在一起。

这种处理方法将给划分网格带来方便，避免因尺度不均匀而带来分网的困难。

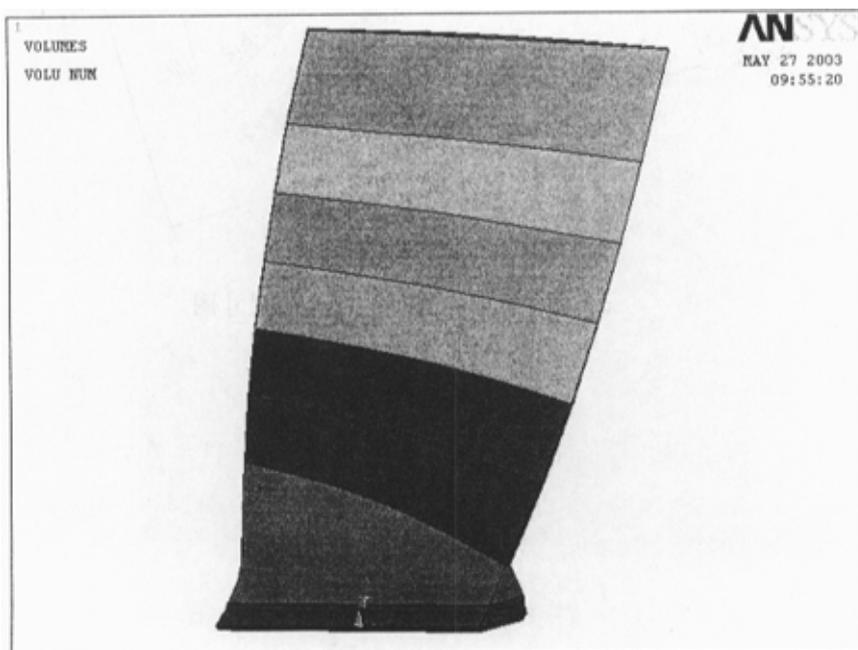


图 8-1 叶片有限元模型

## 2. 有限元网格的划分

本次计算采用 ANSYS 提供的 SOLID95 单元类型。SOLID95 单元类型是一种 3 维 20 节点的实体单元，该单元的每个节点都具有 3 个自由度，允许沿 X、Y、Z 方向平移。

在保证足够准确性的同时，SOLID95 单元可以允许不规则的形状退化，如图 8-2 所示。这些退化的单元，在形状上有很强的适应性，尤其对于形状变化较为剧烈的模型。因此，SOLID95 单元及其退化单元，特别适用于曲线(面)边界。

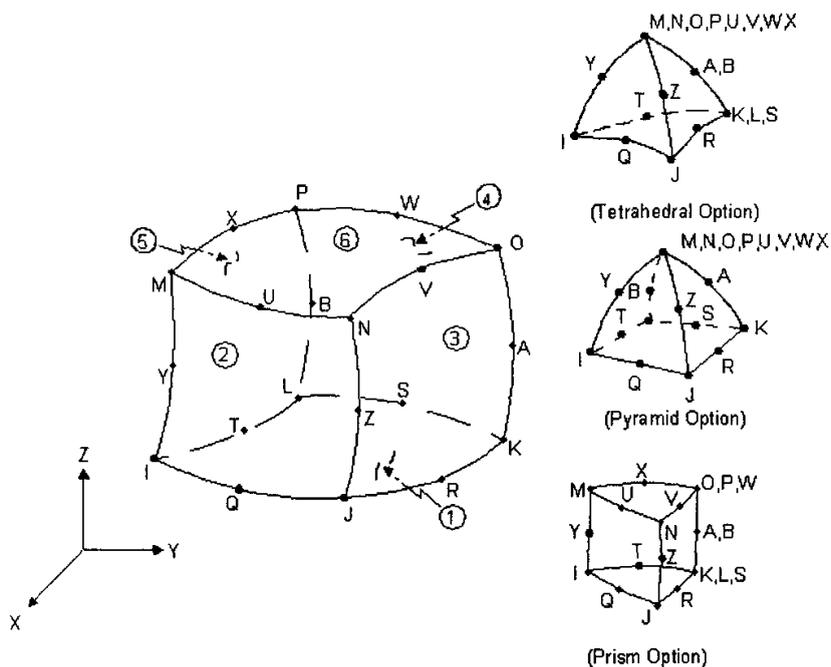


图 8-2 SOLID95 单元及单元退化

由于叶片形状不规则，所以采取不同的网格划分控制。榫头与叶身分别采用 **sweep** 网格和 **map** 网格进行划分，而过渡段采用自由网格。图 8-3 是叶片整体的网格划分情况；图 8-4 是过渡段网格的划分情况。

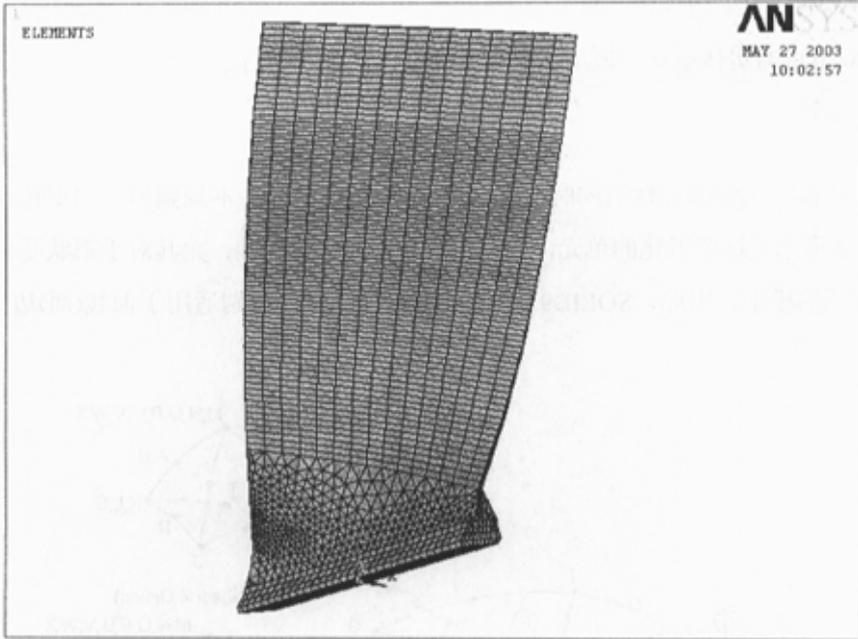


图 8-3 叶片整体的网格划分情况

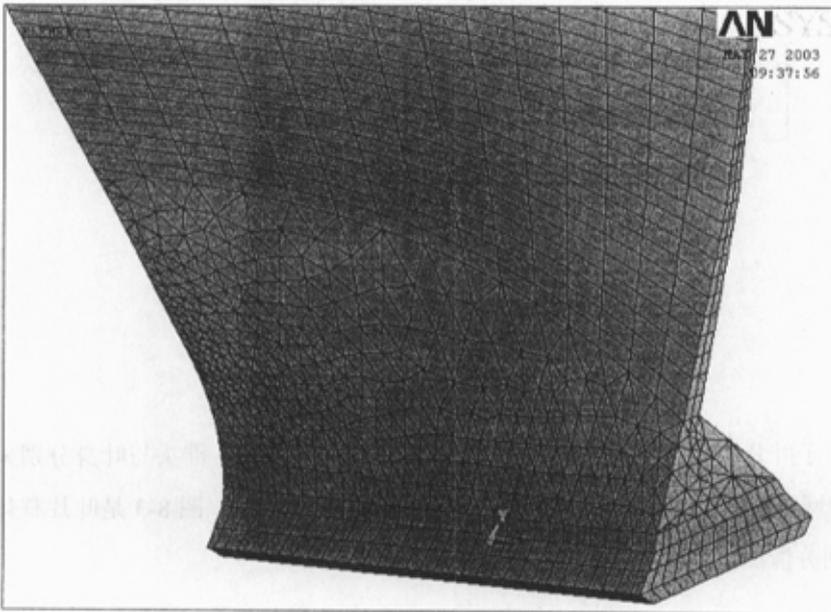


图 8-4 叶片过渡段的网格划分情况

### 3. 载荷与约束条件

实际工作中，叶片绕  $z = -143$  (mm) 轴旋转，角速度为  $478\text{r/min}$ 。

(见 § 7.2 图 7-4、7-5)，所以叶片上各点的离心力可由式 (8-1) 确定。

$$F = m\omega^2(R_0 + R_1) \quad (8-1)$$

式中， $R_0 = 143\text{mm}$ ，是叶片上 X 轴到发动机旋转轴中心的距离； $R_1$  是叶片上各点到 X 轴的距离。

式(8-1)第一项是作为惯性力施加到叶片上，加速度为  $a = \omega^2 R_0$ 。

在以往的计算中，通常把叶片根部作为刚体处理，而主要分析叶身的应力分布。但实际上，根部榫头处往往首先产生疲劳裂纹，因此，有必要考察根部榫头的应力分布。

为了了解接触面约束对叶片应力分布的影响，我们采用了两组不同的边界条件分别进行计算。

I. 普通约束：认为榫槽是刚体，则两个接触面分别施加法向位移约束，底部由销钉限制其面内位移。

II. 加强约束：相对于普通约束而言，令两接触面法向位移和面内旋转为 0；且底面面内位移和面外旋转设置为 0。

## § 8.2 计算结果及分析

按照两组不同的约束条件进行计算，并给出了一些有意义的计算结果包括：

**von mises** 当量（等效）应力——当构件的该当量应力达到与材料性质有关的某一极限值时，材料就发生屈服。适合通常以屈服的形式失效的材料。

在 Z 方向的拉应力  $\sigma_z$ ——由于叶片受离心载荷作用，该向应力是十分显著的。

剪应力  $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{xy}$ ——它们在叶片根部较为显著。

### 8.2.1. 按第一类约束时的解：

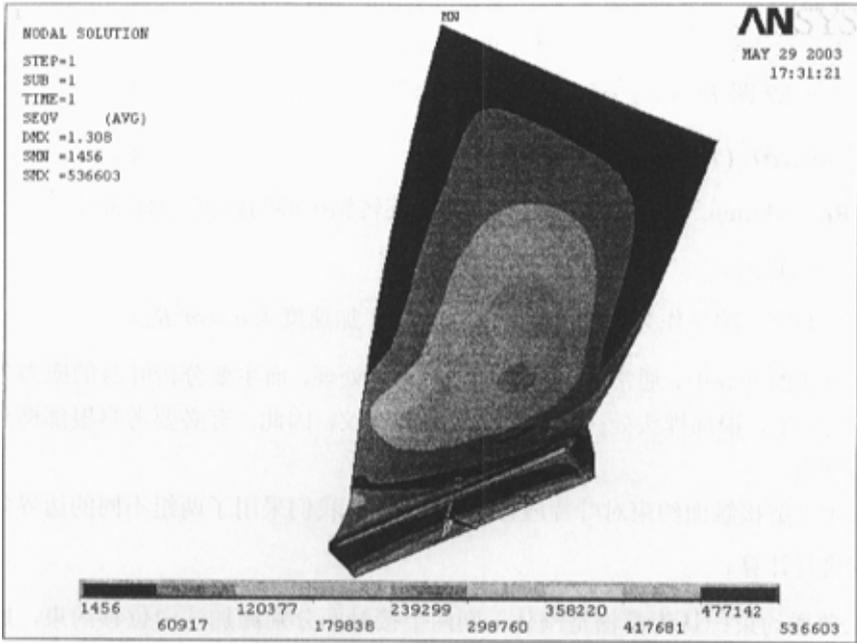


图 8-5 叶盆侧 von mises 等效应力分布(I)

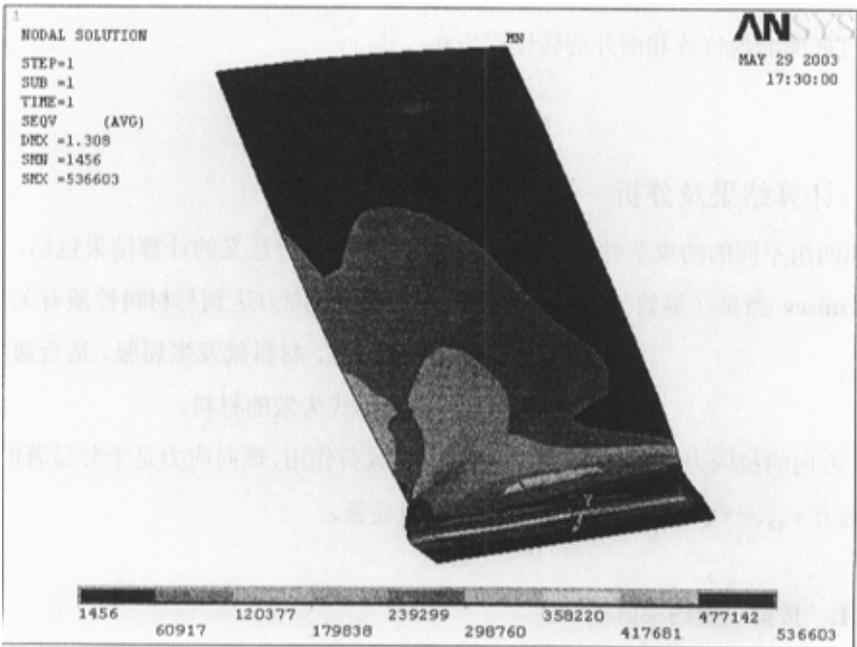


图 8-6 叶背侧 von mises 等效应力分布(I)

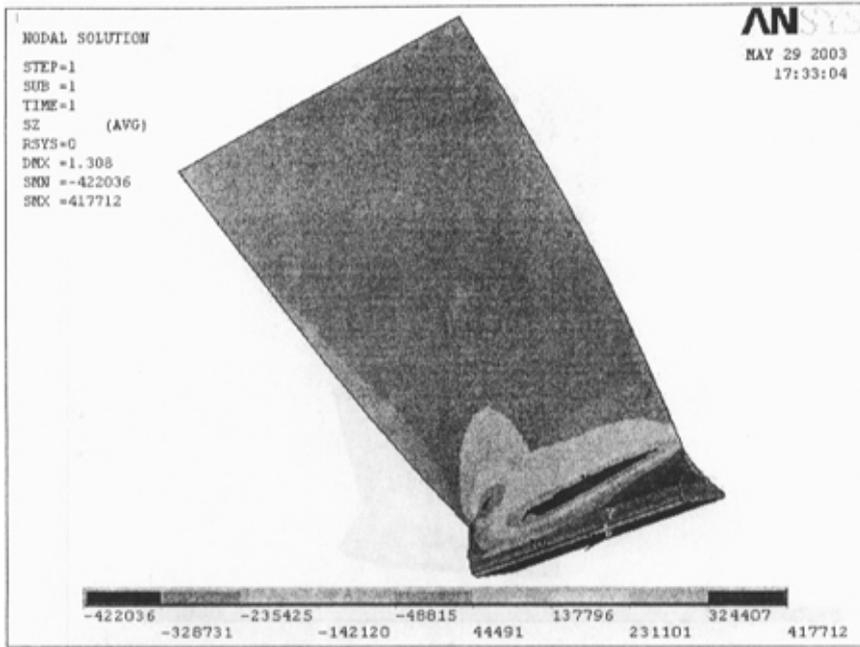


图 8-7 叶背侧  $\sigma_z$  应力分布(I)

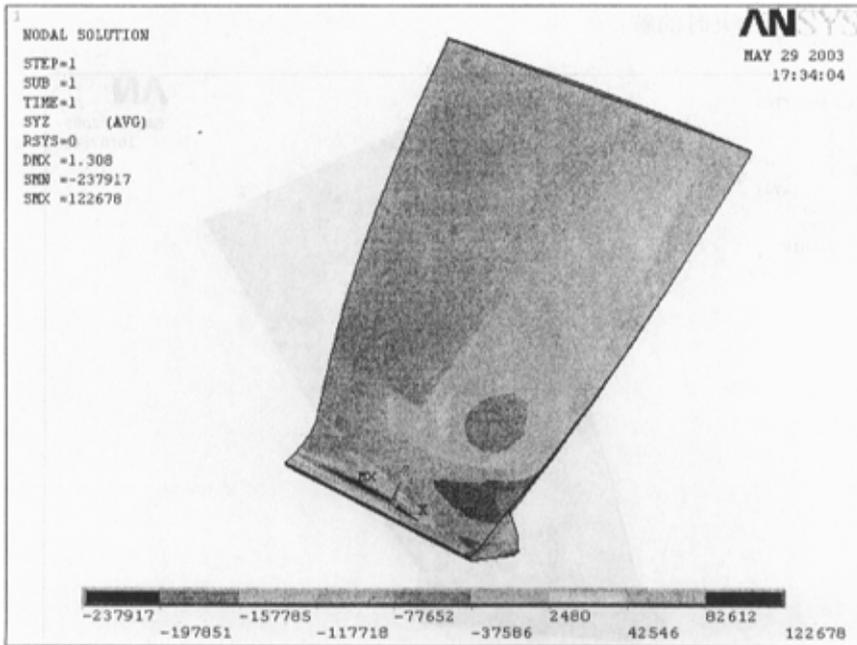


图 8-8 叶盆侧  $\tau_{yz}$  应力分布(I)

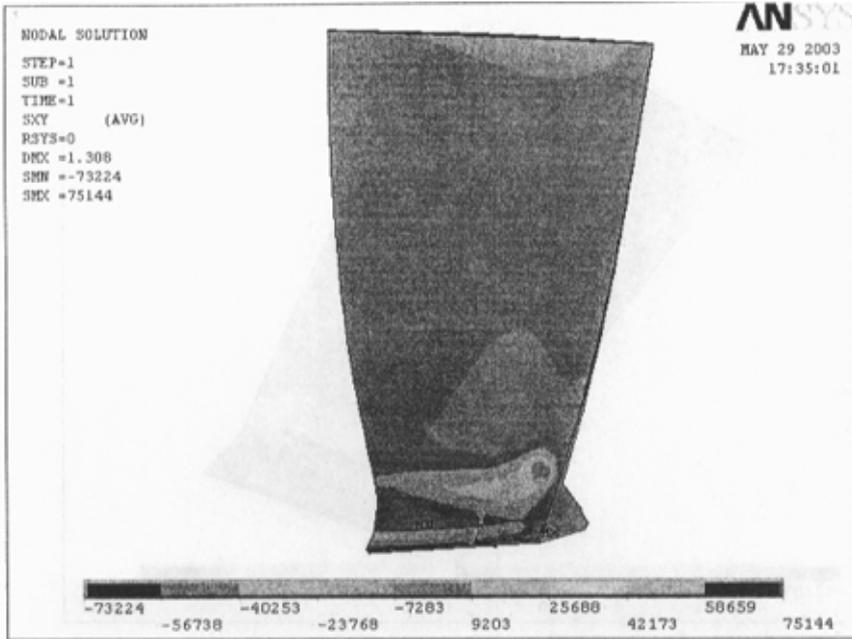


图 8-9 叶盆侧  $\tau_{xy}$  应力分布(I)

8.2.2 按第二类约束时的解：

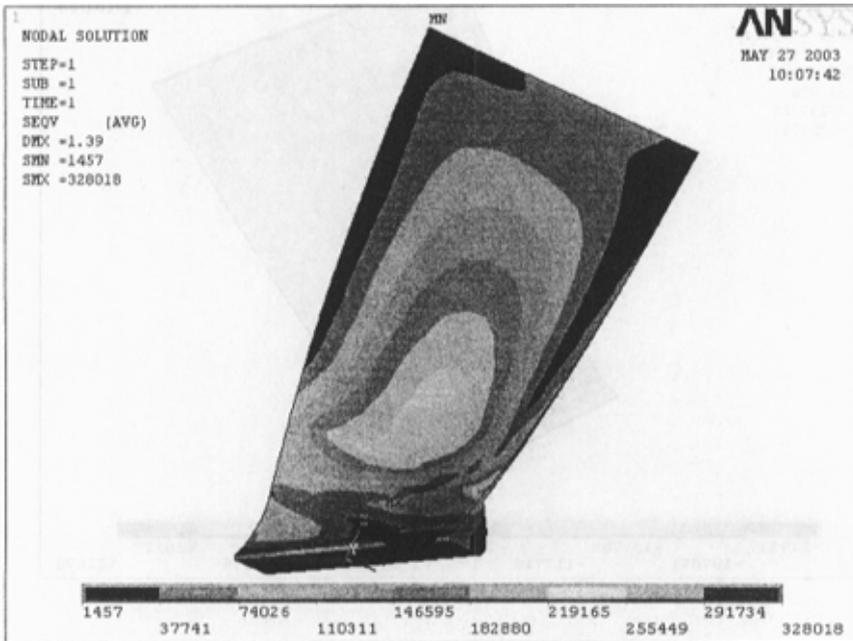


图 8-10 叶盆侧 von mises 等效应力分布(II)

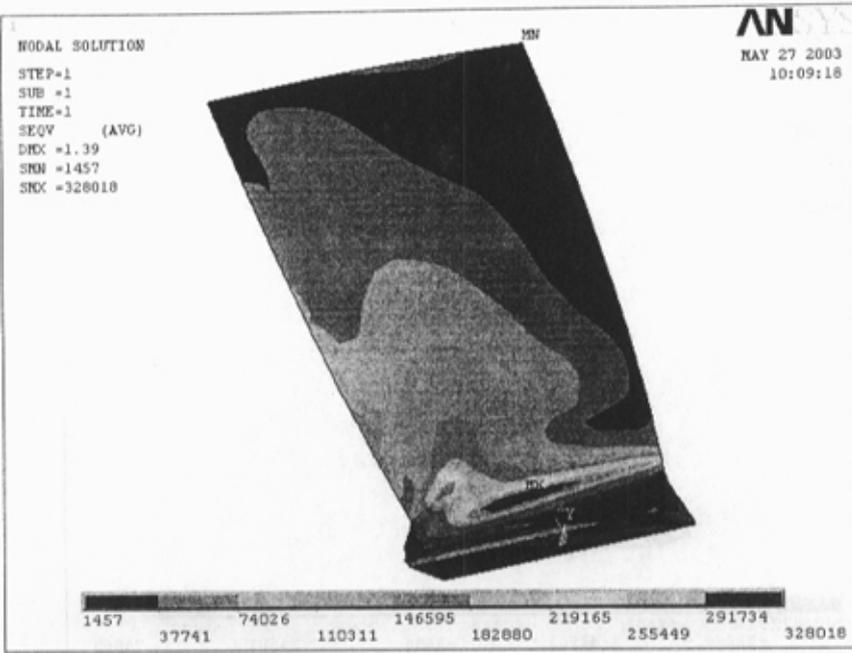


图 8-11 叶背侧 von mises 等效应力分布(II)

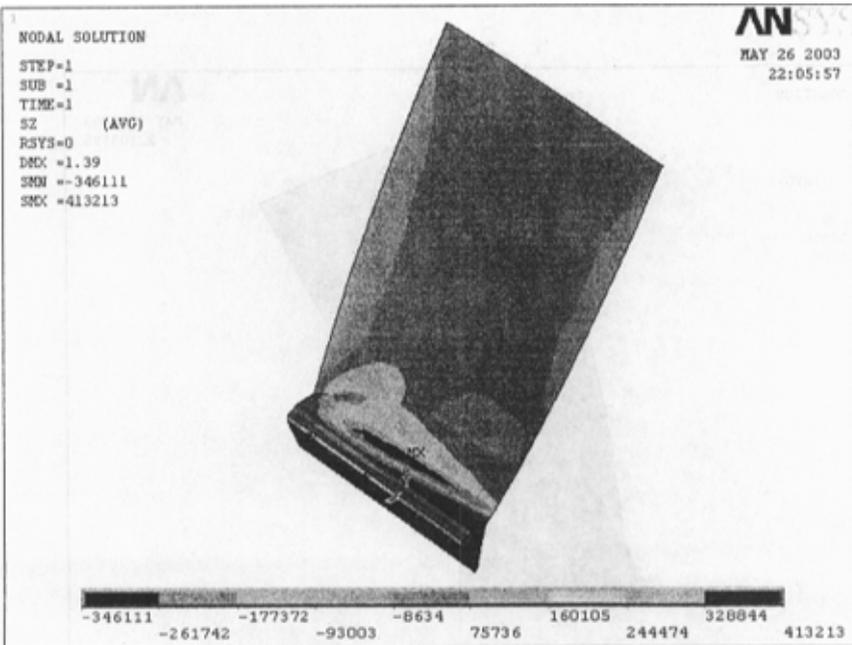


图 8-12 叶背侧  $\sigma_z$  应力分布(II)

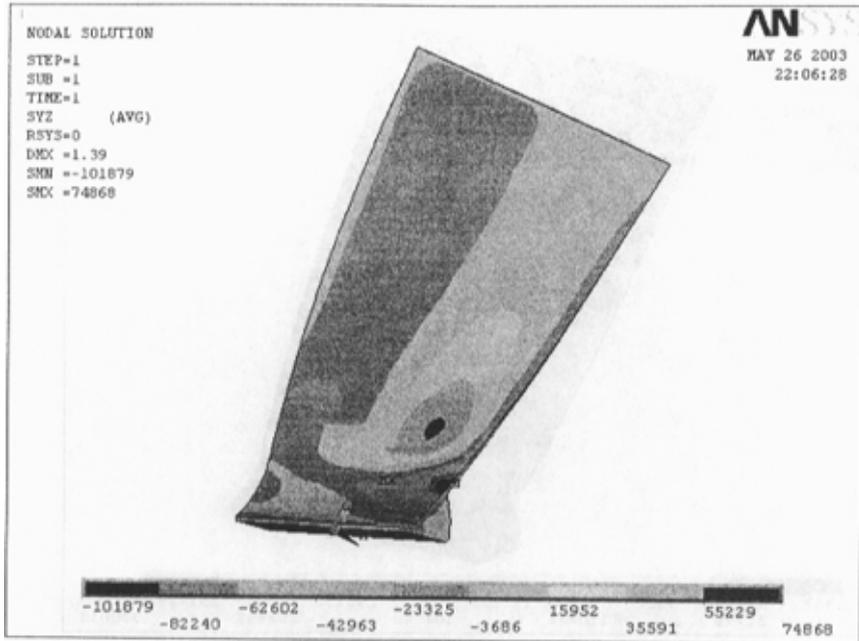


图 8-13 叶盆侧  $\tau_{yz}$  应力分布(II)

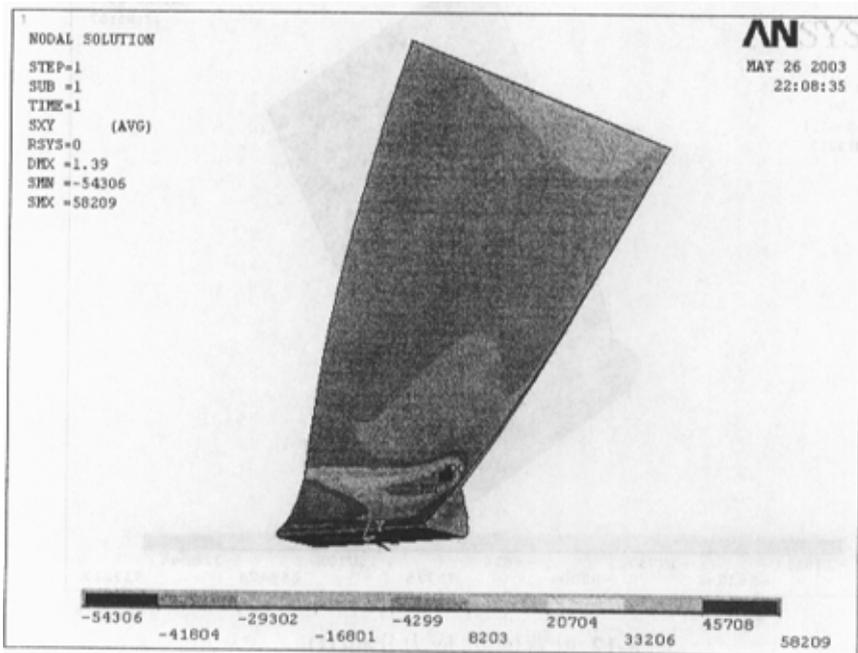


图 8-14 叶盆侧  $\tau_{xy}$  应力分布 (II)

### 8.2.3 结果分析：

1. 按第一类约束条件计算，**von mises** 等效应力最大值出现在叶背侧榫头接触面处。其次，在榫头与叶片的过渡段，其他各项应力  $\sigma_z$ 、 $\tau_{xy}$  等也出现最大值。计算出的最大应力区域，与真实发动机叶片受力的薄弱部位相一致。
2. 按第二类加强的约束计算结果表明：加强的约束较为接近使榫头刚体化，导致榫头对应力的敏感性降低，所以各项应力最大值均出现在榫头与叶片的过渡段处，这是由于此处构件形状发生急剧变化而导致的应力集中。
3. 比较两次计算结果，说明接触载荷对叶片的应力分布具有一定影响，尤其在根部局部区域影响较大。远场的应力分布形式在两种约束条件下比较接近，因此以往的将榫头作为刚体而进行的计算在远场虽然可行，但在根部关键部位是不够精确的。
4. 两次计算得到的应力分布图较为光滑，说明计算所采取的网格划分是可行的。

## 第九章：叶片榫头接触应力混合求解探索

针对叶片根部榫头与榫槽之间接触应力分布的测试研究，本文探索了接触应力的混合求解法，拟将三维光弹技术和有限元法相结合，用于混合求解叶片根部榫头接触面上的接触应力分布。

由于时间关系，混合求解的全部工作还需继续进行。现就我们提出的接触应力混合求解法的基本原理及步骤介绍如下：

### § 9.1 混合求解的基本思路

混合求解法的基本思路如下：

#### 1. 检测点及实验值确定

检测点尽量接近所求的接触应力附近，且检测点数量尽量多，这可提高混合求解法的检测精度。检测点的实验值可以通过各种实验方法获得，本文是利用三维光弹性技术提供检测点上的次主应力差值。

#### 2. 混合求解模型的建立

考虑到离心力载荷及接触载荷的不同特点，叶片的计算模型采用了叶片整体计算模型与叶片根部局部计算模型相结合的方式。而叶片模型的载荷共有两类：离心力载荷及欲求的接触载荷，接触载荷拟用含有待定常数的多项式表示。

#### 3. 对构件进行数值计算

数值计算拟用有限元法、并使用 ANSYS 软件作计算工具，计算叶片在离心力以及接触面上接触应力共同作用下的应力分布。因为接触应力是含有待定常数的分布载荷，计算出的应力分布也是含有待定常数的结果。根据数值计算结果，同样给出检测点上的次主应力差值。

#### 4. 混合法求解接触应力

令计算获得的检测点上的计算值，也即计算得到的次主应力差值，等于三维光弹测量联立方程组，并求解，就可以求得接触应力分布中的待定常数，从而求得接触应力分布。

上述混合求解法的基本步骤及原理同样适应于装配应力、残余应力的测试研

究。

现就上述混合求解法的基本思路，逐项进行比较详细的介绍。

## § 9.2 检测点及实验值确定

### 1. 三维光弹实验

本文利用三维光弹性技术提供检测点上的次主应力差值。实验步骤可简述如下：

- 1> 按照三维光弹性理论及技术，制作飞机发动机光弹性模型，包括叶片、轮盘等所有零部件的弹性模型。
- 2> 按照相似理论，使发动机光弹性模型作相应的旋转，模拟真实发动机的高速旋转。
- 3> 在发动机光弹性模型旋转的状态下，冻结发动机光弹性模型的受力状态。冻结的叶片模型，已经将发动机叶片在高速旋转状态下的应力分布冻结在模型内。这种应力既包括离心力的作用，也包括叶片根部榫头与榫槽之间接触应力对叶片的作用力，尤其是对叶片根部产生的应力。
- 4> 利用三维光弹性技术，提取叶片根部榫头部分若干剖面内的次主应力差。

注：飞机发动机三维光弹模型的制作、三维光弹模型的实验、三维光弹模型在旋转状态下的冻结、冻结叶片模型的切片以及叶片根部若干剖面内次主应力差值的提取等工作，均由沈阳 606 飞机发动机研究所完成，实验数据也由他们提供。

### 2. 检测点的确定

为了求解叶片根部榫头接触面上的接触应力，我们将检测点选在叶片根部榫头中的若干剖面内，提供的检测点的实验值是次主应力差值。这些检测点很接近接触面，检测点数量也很多，考虑计算工作量，最后仅选用了 60 个实验值。

图 9-1 是对叶片榫头冻结模型进行切片应力分析的剖面位置图。

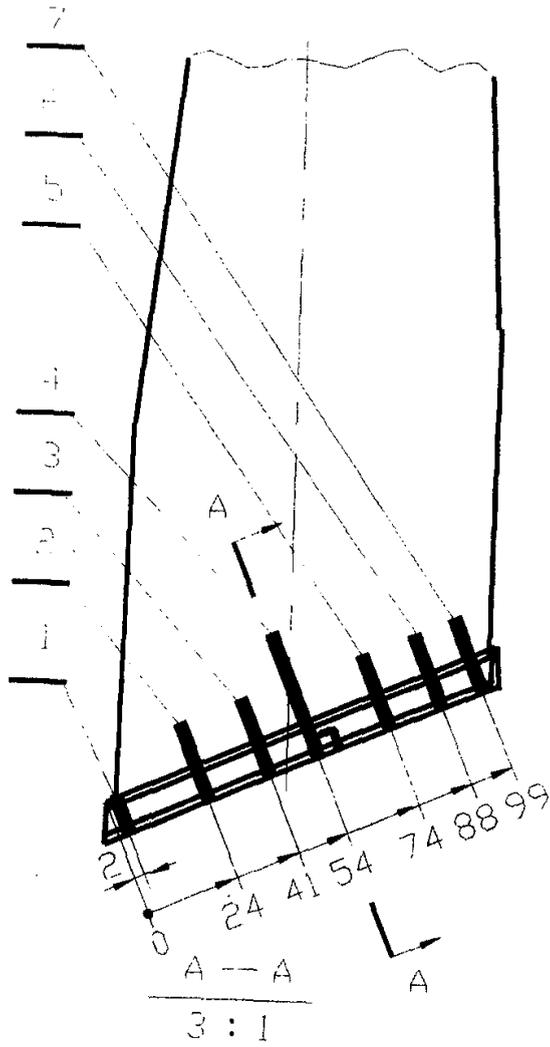


图 9-1 叶片模型榫头应力分析剖面位置图

### 3. 检测点的实验值

图 9-2 和图 9-3 分别是叶片模型根部榫头第二、三、四和第五、六、七剖面的六幅光弹切片的光弹性干涉条纹图。

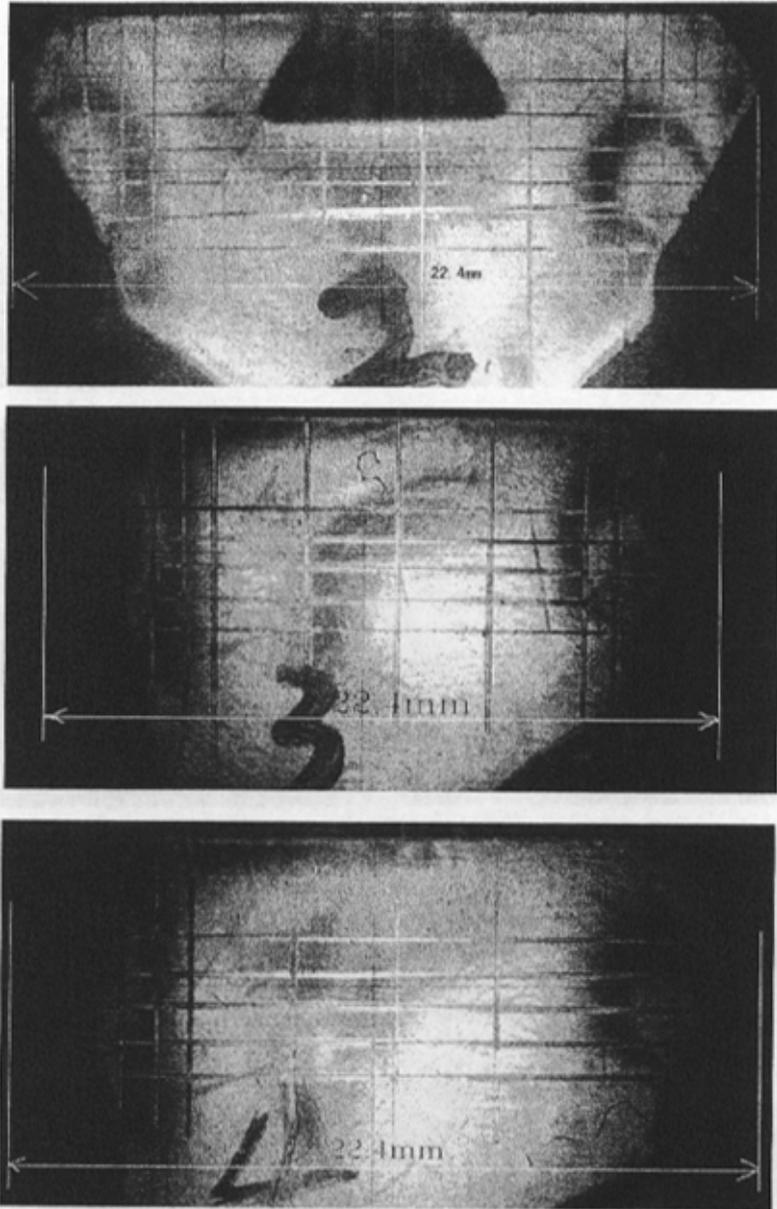


图 9-2 叶片模型榫头冻结切片正射光弹干涉条纹图  
(第二、三、四剖面)

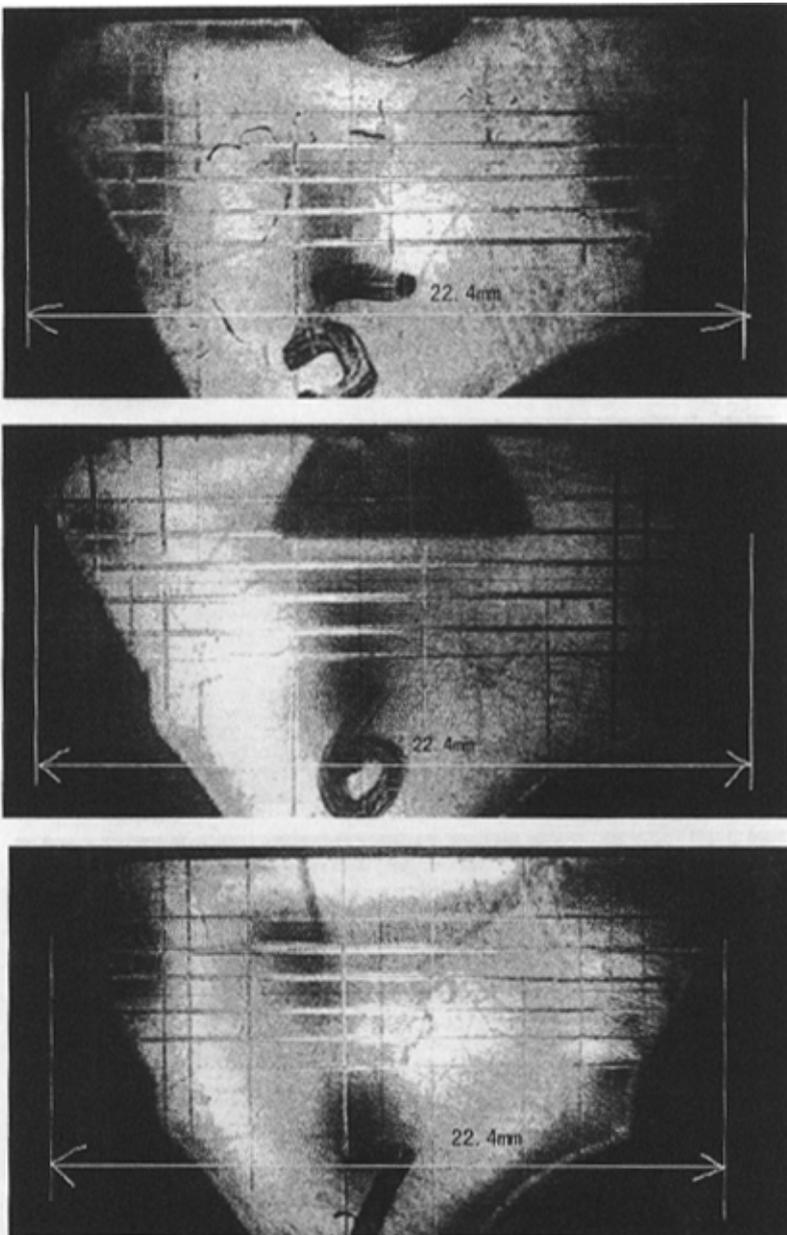


图 9-3 叶片模型榫头冻结切片正射光弹干涉条纹图  
(第五、六、七剖面)

表 9-1: 剪应力极大值  $\tau_{\max}$ (Mpa)

No.	x	y	z	$\tau_{\max}$	No.	x	y	z	$\tau_{\max}$
1	-22.33	8.43	6	95	31	7.67	-8.77	5	87
2	-22.33	-7.79	6	52	32	7.67	9.62	4	42
3	-22.33	8.53	5	75	33	7.67	7.71	4	52
4	-22.33	-8.85	5	73	34	7.67	-6.66	4	43
5	-22.33	7.36	5	60	35	7.67	-10.14	4	96
6	-22.33	-7.79	4	57	36	7.67	8.56	3	40
7	-22.33	7.36	4	55	37	7.67	-8.77	3	86
8	-22.33	-4.8	4	21	38	27.67	3.28	6	17
9	-22.33	8.43	3	24	39	27.67	8.26	6	69
10	-22.33	-9.71	3	78	40	27.67	-6.9	6	36
11	-22.33	8.37	6	72	41	27.67	-8.71	6	52
12	-5.33	-5.89	6	57	42	27.67	9.16	5	44
13	-5.33	-8.25	6	87	43	27.67	6.34	5	32
14	-5.33	7.55	5	50	44	27.67	-6.9	5	40
15	-5.33	-6.96	5	63	45	27.67	8.26	4	48
16	-5.33	8.37	5	84	46	27.67	-6.9	4	40
17	-5.33	-7.78	4	102	47	27.67	-10.07	4	51
18	-5.33	-8.84	5	100	48	27.67	7.35	3	36
19	-5.33	10.37	4	34	49	27.67	-7.81	3	51
20	-5.33	8.37	4	68	50	27.67	-8.82	3	68
21	-5.33	-6.96	4	70	51	41.67	6.9	6	20
22	-5.33	-7.78	5	90	52	41.67	-7.13	6	36
23	-5.33	10.37	3	31	53	41.67	-3.05	6	14
24	-5.33	8.37	5	84	54	41.67	7.92	5	33
25	7.67	6.66	6	53	55	41.67	-7.13	4	24
26	7.67	8.66	6	85	56	41.67	-8.26	3	55
27	7.67	-6.66	6	37	57	52.67	8.67	6	36
28	7.67	-8.66	6	85	58	52.67	7.59	5	29
29	7.67	7.71	5	58	59	52.67	-7.47	4	33
30	7.67	-9.62	5	91	60	52.67	-9.51	3	65

表 9-1 是根据图 9-2 和图 9-3 的叶片模型榫头冻结切片正射光弹干涉条纹图测取的 60 个点上的剪应力极大值。这些实验数据将提供用于混合求解叶片根部榫头接触面上的接触应力分布。

为了计算方便，这 60 个实验值用下式表示：

$$\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_i^0 \dots, \tau_{60}^0 \quad (9-1)$$

### § 9.3 混合求解模型的建立

#### 1. 整体与局部模型相结合

混合求解法的目的是为了求解叶片根部榫头接触面上的接触载荷分布，而这种接触载荷也仅仅影响叶片根部及附近部位的应力状态，不会影响叶片其余部分的应力状态。因此，在混合求解接触面上接触载荷分布时，本文仅仅利用叶片根部若干剖面内的三维光弹性实验数据；而对叶片应力分布的数值计算也主要集中于叶片根部附近。

由于叶片结构及几何形状十分复杂、接触载荷分布中的待定常数又太多，完全按叶片整体进行数值计算工作量太大，也没有必要。为此，我们将数值计算分成两种计算模型：

##### (1) 叶片整体计算模型

叶片整体计算模型仅用于计算离心力的作用，如第八章中图 8-2 所示，对叶片整体进行网格划分。并计算叶片单独在离心力载荷作用下的全场应力分布。

##### (2) 叶片局部计算模型

按图 9-4 所示，仅取叶片根部(榫头及附近部分)，用于进行接触载荷作用下的叶片根部的应力计算。如图 9-5 所示，接触面上网格的划分较其他更密，这是为保证施加由多项式组成的载荷时有足够的精度。由于多项式载荷的特殊性，无法采取 ANSYS 通常的 GUI 加载方式，因此必须事先将载荷离散化到每个节点，然后通过 APDL 编程实现重复加载。所以这里的网格疏密直接决定了加载的精确程度。

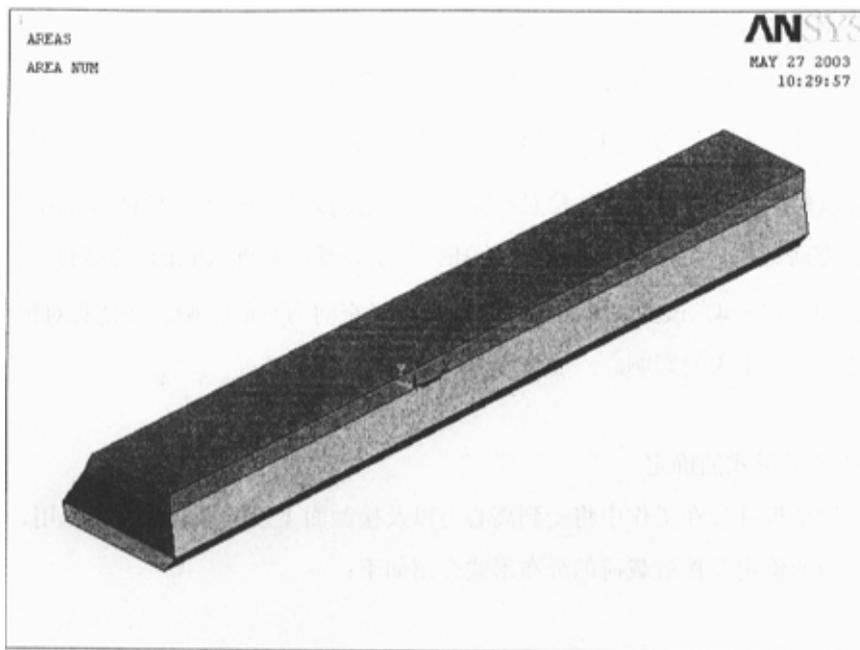


图 9-4 叶片榫头局部计算模型

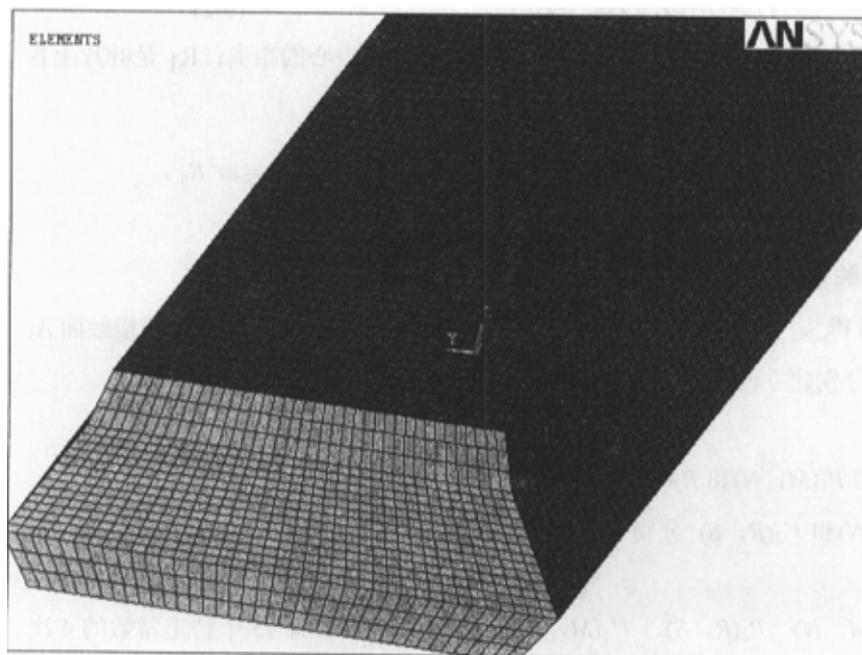


图 9-5 叶片榫头部网格划分

## 2. 边界条件的建立

叶片整体计算模型与叶片根部局部计算模型应采用相同的边界条件：首先，叶片根部底面由于销钉的作用可令  $u_x|_{z=0}=0$ 、 $u_y|_{z=0}=0$ ；其次，由于去除了接触边界条件，而代之以未定的接触载荷，为了限制计算模型的空间刚体位移，必须在 Z 方向施加一定的约束。这里简单的令  $u_z|_p=0$ ，p 是榫头底面销钉圆心位置，见 § 7.2 图 7-4。该约束的意义在于既保证了空间力系的平衡，又使其对榫头应力分布不产生大的影响。

## 3. 载荷或载荷形式的确定

飞机发动机叶片在工作中将受到离心力以及接触面上接触载荷的共同作用。现将离心力的确定及接触载荷的分布形式介绍如下：

### (1) 离心力载荷分布的确定

叶片表面上各点所受到的离心力可由下式求得：

$$F = m\omega^2(R_0 + R_1) \quad (9-2)$$

式中， $R_0=143\text{mm}$ ，是叶片上 X 轴到发动机旋转轴中心的距离； $R_1$  是叶片上各点到 X 轴的距离。

式(9-1)第一项是作为惯性力施加到叶片上，加速度为  $a = \omega^2 R_0$ 。

### (2) 接触载荷分布的表示

叶片榫头与榫槽之间有两个接触面，分别用  $A_1$ 、 $A_2$  表示。现在两接触面  $A_1$  及  $A_2$  内分别建立两个相对坐标系  $(O_1-M,N)$  和  $(O_2-R,S)$ 。

现用  $P_1(M, N)$  和  $P_2(R, S)$  分别表示两个接触面内的正压力；用  $\Gamma_1(M, N)$  和  $\Gamma_2(R, S)$  分别表示两个接触面内的剪切载荷。

$P_1(M, N)$ 、 $P_2(R, S)$ 、 $\Gamma_1(M, N)$  和  $\Gamma_2(R, S)$  是各含 15 个待定常数的 4 次完全多项式，可分别表示如下：

$$P_1(M, N) = \sum_{q, r \in \Lambda} a_{q, r}^{p1} M^q N^r \quad (9-3)$$

$$P_2(R, S) = \sum_{q, r \in \Lambda} a_{q, r}^{p2} R^q S^r \quad (9-4)$$

$$\Gamma_1(M, N) = \sum_{q, r \in \Lambda} a_{q, r}^{\Gamma1} M^q N^r \quad (9-5)$$

$$\Gamma_2(R, S) = \sum_{q, r \in \Lambda} a_{q, r}^{\Gamma2} R^q S^r \quad (9-6)$$

$\Lambda$  表示  $(q, r)$  的集合，如表 9-2:

0,0				
1,0		0,1		
2,0	1,1	0,2		
3,0	2,1	1,2	0,3	
4,0	3,1	2,2	1,3	0,4

表 9-2 集合  $\Lambda$

之所以采取 4 次完备多项式是受检测点个数的限制，更高的次数引起待定常数的增加，而使下面的混合求解方程成为静不定。

### § 9.4 对构件的分步加载

在建立了叶片的计算模型、确定了叶片的载荷或载荷分布形式及边界条件以后，利用 ANSYS 软件对叶片的应力分布进行计算。

通过计算，可以得到叶片根部榫头部分在  $P_1(M, N)$ 、 $P_2(R, S)$ 、 $\Gamma_1(M, N)$  和  $\Gamma_2(R, S)$  4 个含待定常数的载荷作用下的全场应力分布。从这些计算结果中，分别给出 60 个与实验检测点相对应的、由数值计算得到的最大剪应力  $\tau_{\max}$  值，并分别表示为：

$$\tau_1^s, \tau_2^s, \dots, \tau_i^s \dots \tau_{60}^s \quad (\text{由离心载荷产生})$$

$$\tau_1^{p1}, \tau_2^{p1}, \dots, \tau_i^{p1} \dots \tau_{60}^{p1} \quad (\text{由 } P_1(M, N) \text{ 产生})$$

$$\tau_1^{p2}, \tau_2^{p2}, \dots, \tau_i^{p2} \dots \tau_{60}^{p2} \quad (\text{由 } P_2(R, S) \text{ 产生})$$

$$\tau_1^{\Gamma1}, \tau_2^{\Gamma1}, \dots, \tau_i^{\Gamma1} \dots \tau_{60}^{\Gamma1} \quad (\text{由 } \Gamma_1(M, N) \text{ 产生})$$

$$\tau_1^{\Gamma2}, \tau_2^{\Gamma2}, \dots, \tau_i^{\Gamma2} \dots \tau_{60}^{\Gamma2} \quad (\text{由 } \Gamma_2(R, S) \text{ 产生})$$

这里， $\tau_i^s$  表示离心载荷单独作用下检测点  $i$  处的  $\tau_{\max}$  值。

$\tau_i^{p1}$  表示载荷  $P_1(M, N)$  单独作用下检测点  $i$  处的  $\tau_{\max}$  值，并由下面方程表示的多项式来描述：

$$\tau_i^{p1} = \sum_{q,r \in \Lambda} a_{q,r}^{p1} M_{q,r,i}^{p1} \quad (9-7)$$

式中， $M_{q,r,i}^{p1}$  表示载荷  $P_1(M, N)$  中第  $(q, r)$  项压力分量单独作用时，在第  $i$  个检测点处的  $\tau_{\max}$  分量值，共有  $15 \times 60$  项。

其余依次类推，同样可以得到：

$$\tau_i^{p2} = \sum_{q,r \in \Lambda} a_{q,r}^{p2} M_{q,r,i}^{p2} \quad (9-8)$$

$$\tau_i^{\Gamma1} = \sum_{q,r \in \Lambda} a_{q,r}^{\Gamma1} M_{q,r,i}^{\Gamma1} \quad (9-9)$$

$$\tau_i^{\Gamma2} = \sum_{q,r \in \Lambda} a_{q,r}^{\Gamma2} M_{q,r,i}^{\Gamma2} \quad (9-10)$$

图 9-6~图 9-8 是通过数值计算得到的、在离心力作用下，叶片全场的  $\sigma_z$ 、 $\sigma_y$  及剪应力  $\tau_{y,z}$  等。

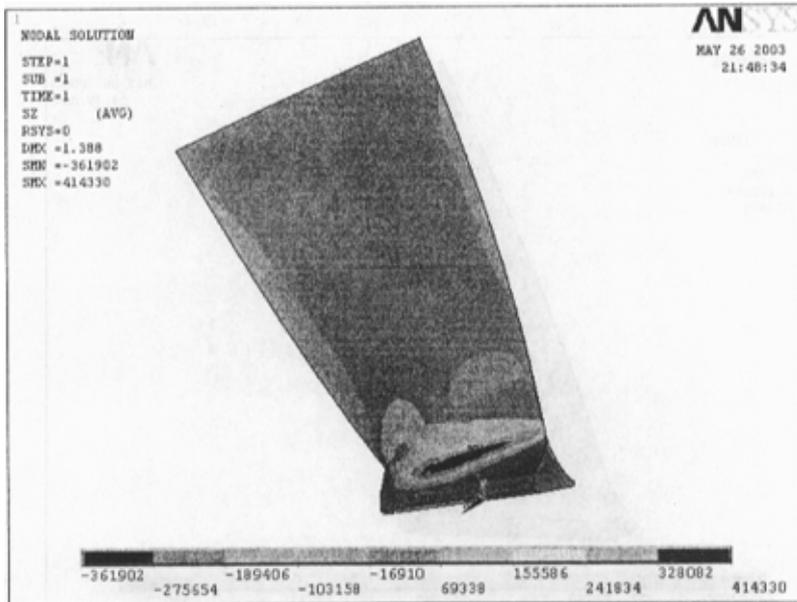


图 9-6  $\sigma_z$  应力分布  
(离心力载荷作用)

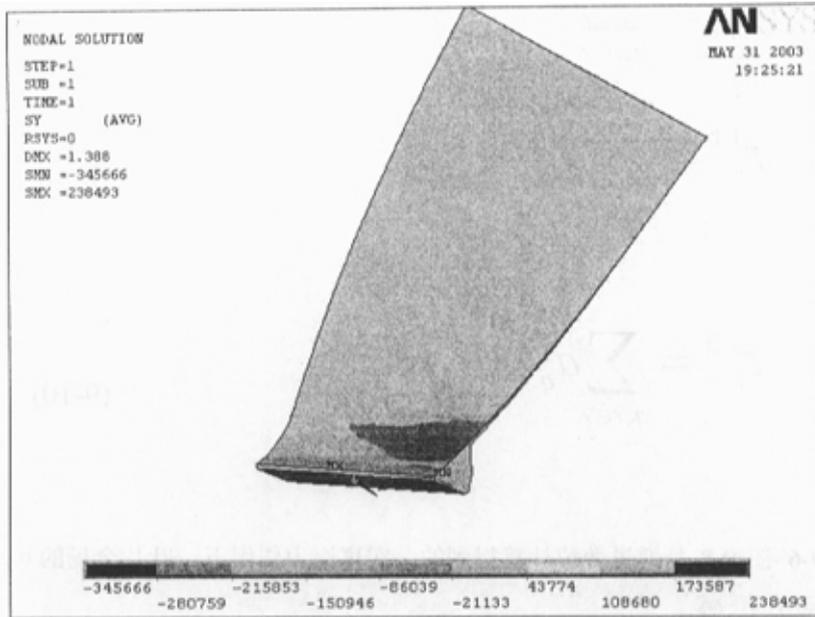


图 9-7  $\sigma_y$  应力分布  
(离心力载荷作用)

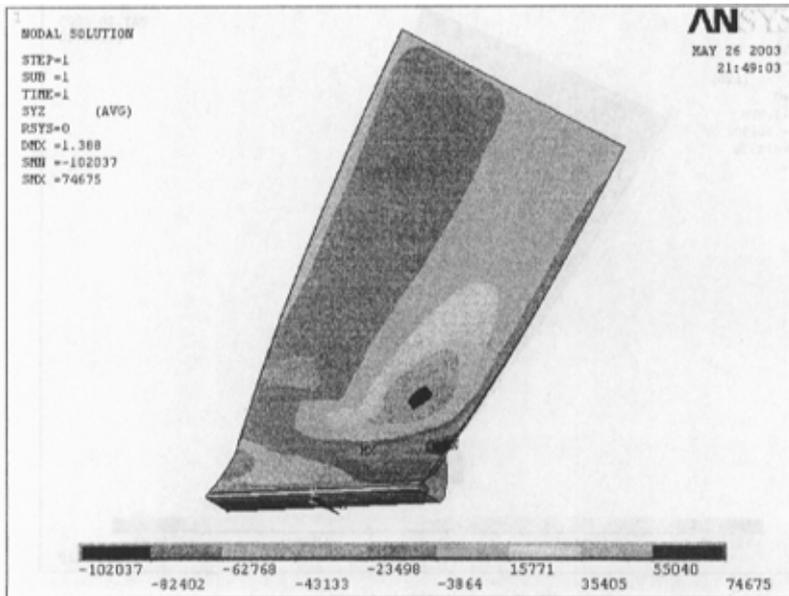


图 9-8 剪应力  $\tau_{yz}$  分布  
(离心力载荷作用)

由这些计算结果，根据  $\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}$  可以给出叶片根部检测点处  
 仅由离心载荷引起的次主应力差值：

$$\tau_1^s, \tau_2^s, \dots \tau_i^s \dots \tau_{60}^s$$

### § 9.5 混合法求解接触应力

至此，对于每一个检测点，都分别由数值计算以及三维光弹实验给出了两个次主应力差值。由两种不同方法获得的、同一点的次主应力差值应该相等，即：

$$\tau_i^s + \tau_i^{p1} + \tau_i^{p2} + \tau_i^{\Gamma1} + \tau_i^{\Gamma2} = \tau_i^0 \quad (9-11)$$

方程中， $\tau_i^s$  是离心力载荷作用时的次主应力差值，其与方程右边的光弹实验检测值  $\tau_i^0$  均是具体数值，而方程中的其余 4 项实为由公式(9-7)~(9-10)表示的多项式。为简单表述起见，将  $\tau_i^s$  移到方程右边：

$$\tau_i^{p1} + \tau_i^{p2} + \tau_i^{\Gamma1} + \tau_i^{\Gamma2} = \tau_i^0 - \tau_i^s \quad (9-12)$$

若用矩阵表示，方程(9-12)可以表示如下：

$$[M][K]=[S] \quad (9-13)$$

方程中，[M]是  $60 \times 60$  的影响系数矩阵；[K]是  $60 \times 1$  的欲求的待定常数矩阵；[S]是  $60 \times 1$  的实验值与离心力作用时的计算值之差。

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{0,0,1}^{p1} & M_{1,0,1}^{p1} \cdots M_{0,0,1}^{p2} \cdots M_{0,0,1}^{\Gamma1} \cdots M_{1,3,1}^{\Gamma2} & M_{0,4,1}^{\Gamma2} \\ M_{0,0,2}^{p1} & M_{1,0,2}^{p1} \cdots M_{0,0,2}^{p2} \cdots M_{0,0,2}^{\Gamma1} \cdots M_{1,3,2}^{\Gamma2} & M_{0,4,2}^{\Gamma2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{0,0,i}^{p1} & M_{1,0,i}^{p1} \cdots M_{0,0,i}^{p2} \cdots M_{0,0,i}^{\Gamma1} \cdots M_{1,3,i}^{\Gamma2} & M_{0,4,i}^{\Gamma2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{0,0,60}^{p1} & M_{1,0,60}^{p1} \cdots M_{0,0,60}^{p2} \cdots M_{0,0,60}^{\Gamma1} \cdots M_{1,3,60}^{\Gamma2} & M_{0,4,60}^{\Gamma2} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{0,0}^{p1} \\ a_{1,0}^{p1} \\ \cdots \\ a_{q,r}^{p2} \\ \cdots \\ a_{q,r}^{\Gamma1} \\ \cdots \\ a_{1,3}^{\Gamma2} \\ a_{0,4}^{\Gamma2} \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} \tau_1^0 - \tau_1^s \\ \tau_2^0 - \tau_2^s \\ \cdots \\ \tau_{-i}^0 - \tau_{-i}^s \\ \tau_i^0 - \tau_i^s \\ \cdots \\ \tau_{59}^0 - \tau_{59}^s \\ \tau_{60}^0 - \tau_{60}^s \end{bmatrix}$$

求解方程(9-13)，可以获得接触载荷的所有待定常数：

$$[K] = [M]^{-1} [S] \quad (9-14)$$

## § 9.6 第二部分工作小结

飞机发动机是飞机的关键部件，而发动机叶片又是发动机的关键所在。尤其是叶片的根部，常常会产生疲劳裂纹，成为飞机发动机的危险部位之一。发动机叶片通过根部榫头与轮盘上榫槽装配在一起。发动机高速旋转产生的离心力，使叶片根部榫头与榫槽间的接触面上产生较大的未知的接触应力。

由于叶片根部应力分布复杂，而接触面上的接触应力分布又未知，使得发动机叶片的应力分析成为一个难题。在传统的发动机叶片的受力分析中，通常将叶片根部榫头部分作为刚体来处理，只进行其余部分的应力、应变分析。但在叶片根部榫头部分又常常出现裂纹，从而使叶片根部榫头成为飞机发动机叶片设计中的死角。

通常的应变或应力检测方法，都是相对于未承载状态进行测量的。但对于接触应力或装配应力的检测，通常情况下很难同时提供形成接触应力或装配应力的前、后两种状态，用于接触面上应变或应力的检测，这是接触应力检测困难的一个方面。此外，现有常用的检测技术，往往需在接触面进行直接检测，而对于接触应力问题又无法提供用于测量的接触面。因此，很难应用现有常规的检测技术来测量接触应力或装配应力分布。

受相关单位委托，本文对叶片根部的应力检测技术进行了研究，试图探索一种接触应力的混合求解方法，具体研究内容如下：

- (1) 本文提出一种新的、将实验检测技术与数值计算方法相结合的接触应力或装配应力的混合求解法：应用数值计算方法计算试件在外载荷及含有待定常数的接触应力共同作用下的应力、应变分布(含有待定常数)；应用实验方法测量接触面周围若干检测点上的应力、应变或相应量；用这些检测点的应力、应变或相应量代替由计算方法获得的相同检测点的计算值，以确

定接触应力分布中的待定常数，从而确定出接触应力分布。

- (2) 为检验本文提出的接触应力混合求解法的可行性，文中设计了一个装配应力混合求解法的数值模拟实验：先用基于已知过盈量作为初始条件的数值计算法，提供若干检测点的计算应力值代替实验应力值；再用基于已知装配载荷(实际含有待定常数)作为初始条件的数值计算法，提供相应检测点的计算应力值(同样含有待定常数)；联立方程求出待定常数，进而确定装配应力分布。该应力分布与基于已知过盈量作为初始条件的数值计算结果一致，表明本文提出的混合求解法完全可行。
- (3) 本文针对发动机叶片传统数值计算中，将叶片根部榫头作为刚体处理存在的问题，重新建立了发动机叶片的计算模型、改进了边界约束条件，对整个叶片的应力分布进行了数值计算分析。这种计算分析能给出叶片根部榫头区域的应力分布细节，从而为叶片根部榫头的设计及应力分析提供一种有力的依据；也可以为将来进行发动机叶片根部榫头接触应力的混合求解提供一种相互比较的手段。

由于发动机叶片外形、特别是叶片根部外形十分复杂，整个计算分析的工作量很大，尤其是计算数据的分析、处理工作量很大。另外，委托方提供实验数据非常晚，加上时间紧张，叶片根部榫头接触应力的混合求解最终结果，未能进行完毕。

## 第十章：全文总结

本文工作主要包括<差分干涉条纹图处理>和<接触应力的混合求解法探索>两部分，其研究背景分别针对两个委托研究项目。

### 1. 差分干涉条纹图的处理

光学流动显示技术在工程热物理及有关领域中有着重要的应用,差分干涉仪借助光学剪切元件(如沃拉斯顿棱镜),使在像平面内形成差分干涉条纹。该干涉条纹反映了折射率梯度分布,由此可以求出密度或密度梯度、温度或温度梯度、壁面换热系数等物理参数的分布。差分干涉仪无须外加参考光束,光学系统紧凑,对防震要求也比较低,因此应用较为便利。

应用差分干涉仪进行流体温度场检测,必须分析和处理大量的干涉条纹图,最理想的方法是利用相移法或 FFT 等位相检测技术。但由于流场的不稳定或热边界层的条纹过密等因素,通常的位相检测技术有时难以利用。

受相关单位委托,本文研究并提出了一套对差分载波条纹图进行处理、分析的方法,并编制了一套相应的处理、分析软件程序。具体内容如下:

- (1) 独立地提出了一套载波条纹图的处理分析方法,即首先将扰动前、后的载波条纹图分别经过中值滤波、二值化、灰度反转、条纹细化、条纹识别、整数级条纹定级、分数级全场二维曲面拟合(给出每个像素点的分数级条纹级数)等处理,再将扰动前后条纹图的数据进行对应相减,以求得仅由温度扰动引起的条纹漂移量的全场分布。
- (2) 在进行圆管表面温度梯度( $\frac{\partial T}{\partial r}$ )、及换热系数  $h_j$  的计算中,由于差分剪切作用,已经无法从条纹图中准确确定原圆表面所在位置,因而也就无法确定真正的半径  $r_0$ 。本文创造性地提出了一套处理分析方法,重新定义了半径  $r_0$ ,推导出了几个运算公式,成功地解决了从条纹图的处理分析开始,到折射率梯度计算、密度梯度及密度计算、温度梯度及温度计算、壁面换热系数计算等全过程的自动或半自动处理分析。
- (3) 由于差分干涉仪的透镜质量较差,使得载波条纹弯曲、且间隔不等,致使差分干涉条纹图无法用来进行定量分析。本文提出的这种差分干涉条纹图

的处理方法，可以基本上消除差分干涉系统本身引进的实验误差，提高了仪器检测精度。

(4) 编制了一整套从条纹图处理分析、到各种物理量的计算分析，及各种物理量显示全过程的自动或半自动处理分析软件。

这种基于干涉条纹强度分布的条纹图的分析、处理技术，无论从检测精度，还是从自动化的程度上讲，都比相移法、FFT 法等位相检测技术要差。但是由于流场的不稳定，实时相移器又很贵，应用相移法有一定难度。此外，热边界附近的条纹往往过密，也给条纹图的全场 FFT 处理带来困难(空间分辨率不够)，除非对条纹过密区域作局部的放大处理。

从工程应用角度讲，本文提出的差分载波条纹图的处理、分析及数据显示方法有一定的实际意义；自行编制的全套处理、分析软件程序运行可靠，受到用户好评。

## 2. 接触应力的混合求解法研究

飞机发动机是飞机的关键部件，而发动机叶片又是发动机的关键所在。尤其是叶片的根部，常常会产生疲劳裂纹，成为飞机发动机的危险部位之一。发动机叶片通过根部榫头与轮盘上榫槽装配在一起。发动机高速旋转产生的离心力，使叶片根部榫头与榫槽间的接触面上产生较大的未知的接触应力。

由于叶片根部应力分布复杂，而接触面上的接触应力分布又未知，使得发动机叶片的应力分析成为一个难题。在传统的发动机叶片的受力分析中，通常将叶片根部榫头部分作为刚体来处理，只进行其余部分的应力、应变分析。但在叶片根部榫头部分又常常出现裂纹，从而使叶片根部榫头成为飞机发动机叶片设计中的死角。

通常的应变或应力检测方法，都是相对于未承载状态进行测量的。但对于接触应力或装配应力的检测，通常情况下很难同时提供形成接触应力或装配应力的前、后两种状态，用于接触面上应变或应力的检测，这是接触应力检测困难的一个方面。此外，现有常用的检测技术，往往需在接触面进行直接检测，而对于接触应力问题又无法提供用于测量的接触面。因此，很难应用现有常规的检测技术来测量接触应力或装配应力分布。

受相关单位委托，本文对叶片根部的应力检测技术进行了研究，试图探索一种接触应力的混合求解方法，具体研究内容如下：

- (1) 本文提出一种新的、将实验检测技术与数值计算方法相结合的接触应力或装配应力的混合求解法：应用数值计算方法计算试件在外载荷及含有待定常数的接触应力共同作用下的应力、应变分布(含有待定常数)；应用实验方法测量接触面周围若干检测点上的应力、应变或相应量；用这些检测点的应力、应变或相应量代替由计算方法获得的相同检测点的计算值，以确定接触应力分布中的待定常数，从而确定出接触应力分布。
- (2) 为检验本文提出的接触应力混合求解法的可行性，文中设计了一个装配应力混合求解法的数值模拟实验：先用基于已知过盈量作为初始条件的数值计算法，提供若干检测点的计算应力值代替实验应力值；再用基于已知装配载荷(实际含有待定常数)作为初始条件的数值计算法，提供相应检测点的计算应力值(同样含有待定常数)；联立方程求出待定常数，进而确定装配应力分布。该应力分布与基于已知过盈量作为初始条件的数值计算结果一致，表明本文提出的混合求解法完全可行。
- (3) 本文针对发动机叶片传统数值计算中，将叶片根部榫头作为刚体处理存在的问题，重新建立了发动机叶片的计算模型、改进了边界约束条件，对整个叶片的应力分布进行了数值计算分析。这种计算分析能给出叶片根部榫头区域的应力分布细节，从而为叶片根部榫头的设计及应力分析提供一种有力的计算工具；也可以为将来进行发动机叶片根部榫头接触应力的混合求解提供一种相互比较的手段。

由于发动机叶片外形、特别是叶片根部外形复杂，整个计算分析的工作量很大，尤其是计算数据的分析、处理工作量很大。另外，委托方提供实验数据非常晚，加上时间紧张，叶片根部榫头接触应力的混合求解法结果未能全部完毕。

### 3. 工作展望

由于时间关系，〈接触应力的混合求解法研究〉还有部分工作尚需继续进行：  
(1) 进一步完善全叶片的应力分析数值计算方法研究，并与实验检测结果进行

比较。

- (2) 进一步完成并完善将实验检测技术与数值计算方法相结合的混合求解法研究，并将混合求解法结果与实验检测结果及数值模拟计算结果进行比较分析，进一步研究混合求解法的精度。

## 参考文献

- [1] Shu jizu, Merzkirch W, "ANALYSIS OF MEASURING SENSITIVITY FOR THE WOLLASTON PRISM INTERFEROMETER" Flow Visualization III [D]. Proceedings of the Third International Symposium on Flow Visualization. 1985 Hemisphere Publ Corp p134-139
- [2] Frank. P. Incropera, David. P. Dewitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer [M]*. New York, wiley, 1985
- [3] K.S. Ball, B. Farouk, An Experimental Study of Heat Transfer in Vertical Annulus With a Heating Inner Cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.32, pp.1517-1527, 1989
- [4] 过增元, 热流体学, 清华大学出版社, 1992
- [5] N. Seki, S. Fukusako, A Criterion of Onset of Free Convection in a Horizontal Layer with Free Surface, *ASME, Journal of Heat Transfer*, Vol. 99, pp. 92-98, 1977
- [6] 何世平, 流场显示技术, 中国科技大学
- [7] Xu, Liming, Tippur, Hareesh, V., Measurement of Contact Stress Using Real-time Shearing Interferometry, *Optical Engineering* v38, n11 Nov 1999. p1932-1937
- [8] O. Miyatake, Natural convective Heat Transfer between Vertical Parallel Plates, *Heat transfer-Japanese Research*, Vol. 4, 1973, pp.25
- [9] K.A. Stetson., *The problems of Holographic Interferometry[J]*. *Experimental Mechanics*, 1999, 39(4):249-254.
- [10] 何世平, 高等固体力学实验, 中国科技大学
- [11] 吴健康, 数字图像处理[M]. 合肥:中国科技大学出版社, 1989.
- [12] 章毓晋, 图像处理和分析, 清华大学出版社 1999,
- [13] 孙家广, 杨长贵, 计算机图形学, 清华大学出版社, 1995.
- [14] 欧阳联渊, 计算机数值计算方法, 国防工业出版社, 1997
- [15] 邓建中等, 计算方法, 西安交通大学出版社, 1985
- [16] 何光渝, Visual Basic 常用数值算法集, 科学出版社, 2002
- [17] 季寿元, 王德滋, 晶体光学, 人民教育出版社, 1961
- [18] M.M. Leven, Epoxy Resin for Photoelastic Use, *Proc. Int. Symp. at I.I.T.*, 1961
- [19] 冯登泰, 接触力学的发展概况 [J] *力学进展* 1987
- [20] Lerman, L.B., Approximate Determination of the Dynamic and Static Contact Stress On A Rigid Internal Support, *International Applied Mechanics* v32 n9 Mar 1997 p717-718
- [21] Zhang, F., Kassab, A.J., Boundary Element Solution Of An Inverse Elasticity Problem And Applications To Determining Residual And Contact Stress. *International Journal of Solids*

- and Structures v34 n16 Jun 1997 p2073-2086
- [22] 贾有权, 张继平, 杂交法浅议, 第七届实验力学会议论文集, 1992
- [23] 赵秋玲, 接触问题应力分析的混合解法, 力学与实践, 98年03期
- [24] Berghaus, D. G, Combining Photo Elasticity And Finite-Element Methods For Stress Analysis Using Least Squares, SEM, Cambridge MA on May 28-June 1, 1989
- [25] C.E. Free, L. Gee A multilevel treatment of moiré fringe data using finite element, Experimental Mechanics, Vol.39, No.4, December 1999
- [26] S.Prabhu, J.Lambros, A combination Optical Method Of Lateral Shearing Interferometer And Caustics, Experimental Mechanics, Vol.40, No.4, December 2000
- [27] F.Sienkiewicz, A.Shukla, M.Sadd, A Combined Experimental And Numerical Scheme For The Determination Of Contact Loads Between Cemented Particles, Mechanics of Materials 22(1996) 43-50
- [28] Zhang F., Kassab, A.J., A boundary element inverse approach for determining residual stress and contact pressure. In Boundary Element XVII (eds C.A. Brebbia et al.) pp.331-338, Computational Mechanics Publications. Boston, 1995
- [29] Maniatty, A., Zabarab, N. and Stelson, K. Finite Element Analysis Of Some Inverse Elastic Problem. Journal of Engineering Mechanics 115, 1303-1317, 1989
- [30] 王勖成, 邵敏, 有限单元法基本原理和数值方法, 清华大学出版社, 1997
- [31] ANSYS 建模与分网指南, ANSYS 中国, 2000
- [32] ANSYS 基本过程手册, ANSYS 中国, 2000

作者读硕士期间发表的文章：

1. 马利, 王 铷, 何世平, 载波条纹图的处理及应用, 实验力学, 2002, Vol 17, No.3  
p260-266
2. Ma Li, Han Yun, Wang Ru, He Shiping, Image Processing For Shearing  
Interferometry Fringe Patterns, SPIE/Beijing 2002。
3. Han Yun , Ma Li , He Shiping , Parameters Calibration in Topography  
Measurement, Proc. SPIE, 2001, Vol.4537, P297~300。(EI02357063269)
4. 韩耘 , 马利, 何世平, 刘 浪, 回转体三维形状检测, 中国科学技术大学学报,  
2003, 33 卷 (3)
5. 王铷, 马金宇, 马利, 何世平, 双频自动网格法研究, 实验力学, 2003,
6. HE Shiping, FENG Chuanyu, HAN Yun, Ma Li, An improved automated grid  
method, Proc. SPIE, 2001, Vol.4537, P305~308。 (EI02357063271).

## 致 谢

本文是在我的导师何世平教授的悉心指导下完成的。在三年的研究生生涯期间，导师渊博的知识、精辟的见解、严谨的治学态度和孜孜不倦的敬业精神是作者学习的典范。他对作者的谆谆教导和无微不至的关怀一直是我完成这些研究课题的动力源泉。他对物理概念的精确把握和对力学现象的本质认识给作者以极大的启发。在此，向何世平教授表示崇高的敬意和衷心的感谢！

本文同时还得益于王秀喜教授的亲切关怀和指导，尤其在有限元计算和数值模拟方面，王秀喜教授适时的给予了建设性的指导意见，使得作者能不断的顺利进入下一个研究环节。

感谢本实验室的伍小平院士、续伯钦教授、张青川教授、胡小方副教授和缪泓老师对作者在光测力学实验室学习期间提供的各种指导和帮助，作者也从他们的讲课、讲座中获益良多。

感谢计算力学实验室的孙泽辉博士为作者提供的有关 ANSYS 计算方面的有价值的建议。

感谢本实验室的韩耘、蒋震宇、段志辉、王铷、方垒等同学，他们与作者在完成本文工作期间进行了诸多有益的探讨，并提供了有效可行的建议。尤其是方垒同学参与了本文的部分工作，他与作者之间的愉快合作是完成本文的一个重要因素。

同时还要感谢西安交通大学能动学院的罗来勤教授对本文的第一部分工作的大力支持和帮助，以及沈阳 606 所的董本涵研究员和霍成民硕士为本文第二部分工作提供的光弹模型和实验数据。

还有我的父母、家人和朋友为作者求学期间的所做的一切，没有你们的鼓励和支持，我是不可能取得今天的成绩的，深深的感谢你们！