

## 论文摘要

作为板形控制理论重要组成部分的轧辊弹性变形理论现在还不完善,其中几个关键问题如辊间压扁计算、辊间压力分布、轧制压力分布、辊缝变化的解析规律等,至今仍未圆满解决。这些问题的彻底解决都有赖于轧辊弹性变形的解析理论。所以,轧辊弹性变形解析理论的研究和应用不仅可以丰富和发展板形控制理论,对于理解和掌握现代轧制技术,改善轧制产品的质量也都具有十分重要的现实意义。

本文首先通过对现有各种辊间压力和压扁计算方法的理论和试验分析,应用弹性理论证明了辊间压力和辊间压扁之间线性关系的精确性。然后应用具有两个广义位移的梁的理论、及较精确的轧辊弹性变形模型,导出了辊间压力压扁的计算公式、及轧制压力和辊间压力的分布函数,并证明 Föppl 等无限长圆柱体或半无限体接触压扁计算公式,以及轧制压力和辊间压力的多项式分布假设与轧辊弹性变形条件相矛盾。

辊间压力和辊间压扁计算公式、及辊间压力和轧制压力分布函数确定之后,本文求出了精确的有载辊缝解析表达式,并基于辊缝解析解,研究出了新型辊型——双曲辊型及其设计方法;提出了广义板凸度概念和板形模式确定方法、建立了较精确的板形控制解析解耦模型。

此外,本文还研究了现有的 CVC 辊型,特别是对 CVC 辊型曲线方程中一个以前难以确定的系数给出了正确的计算公式,得到了完整的 CVC 辊型曲线设计方法。

试验结果证明本文提出的计算方法和公式是非常精确的。

关键词 轧辊 弹性变形 解析理论 辊型设计 板形控制

# **Elastic Deformation Theory of Mill Rolls**

## **And Its Application to Flatness Control**

### **ABSTRACT**

As the main part of flatness control theory, the elastic deformation theory of mill rolls is far from perfect. Some essential points such as roll flattening between work roll and backup roll, pressure distribution between rolls, rolling pressure distribution across the rolling strip and the analytical solution of the shape of roll gaps have not been correctly solved. The solutions of all these problems mainly depend on the development of the elastic deformation theory of mill rolls. Investigation on the elastic deformation theory of mill rolls and its application is not only very important to develop flatness control theory, but also very helpful to understand and grasp modern rolling techniques, and improve the quality of rolling strip.

First, we proved that the linear relationship between roll flattening and pressure is highly accurate through theoretical and practical analysis of current roll flattening calculation theories and methods. Then we derived a new formula for the calculation of roll flattening and formulas that determine the pressure distributions between rolls and between roll and rolling strip by applying extensive beam theory and a more accurate roll deformation model. We also proved that formulas based on infinite long cylinders or half space, such as Föppl formula, and that polynomial pressure distributions are not compatible with the roll deformation conditions.

After the roll flattening and pressure distributions were correctly determined, we derived some accurate formulas to describe the shape of roll gap under rolling pressures. According to these accurate formulas, we developed a new type or original roll camber — hyperbolic camber and a new kind of roll contouring method. We accurately deciphered CVC roll contour and compared it with our hyperbolic roll contour.

Finally, we gave strip crown a new and extensive definition and advanced new strip crown modes and analytical models of flatness control. Methods for the establishing of analytical models of flatness and thickness control were also suggested.

Tests and examples were given to testify the accuracy of our theory.

Chen Jie (Mechanical Engineering)

Directed by Zhong Jue (Professor, Academician of Chinese  
Academy of Engineering)

**Keywords** Mill Roll Elastic Deformation Roll Contouring  
Flatness Control

# 第1章 绪论

## 1.1 轧辊弹性变形解析理论研究的目的和意义

轧辊弹性变形理论,是轧制板形控制理论与技术最重要的理论基础之一。轧辊弹性变形不仅变形量大,而且沿轧件宽度方向不均匀,因此轧辊的弹性变形直接影响辊缝形状,是决定板形的主要因素。许多现代板形控制技术,如液压弯辊、轧辊横移及变形补偿等技术<sup>[1-2]</sup>,都是在轧辊弹性变形理论分析的基础上,把辊缝形状作为轧件的断面形状控制的主要目标,直接或间接地通过轧辊弹性变形实现的。

对于轧辊弹性变形理论,国内外都进行了大量的研究。但变形计算中仍有一些关键问题,如轧制压力分布、辊间压力分布及轧辊压扁等,都还没有得到圆满解决。基于现有弹性变形理论的轧制板带控制理论和技术,仍难以满足人们对轧制板形日益提高的精度要求。轧辊弹性变形理论的研究对于发展板形控制理论和技术、进一步提高板形控制的精度,无疑都具有十分重要的意义。

如何计算轧辊在轧制力和弯辊力作用下的弹性变形,是轧辊弹性变形理论要研究解决的主要问题。计算轧辊弹性变形的方法可分为两大类。一类是离散数值法,另一类是解析法。

离散数值法是人们目前普遍采用的计算轧辊弹性变形的办法。随着计算机技术的高速发展和应用普及,用数值法求解轧辊弹性变形已变得较容易并被人们普遍接受。离散数值法本身虽较完善,但用数值法计算轧辊弹性变形时,需先将轧辊及其所受载荷离散化,然后求得离散的数值解。因此离散数值法计算工作量大,费时费力,数据分析也比较困难,难以得到对轧辊变形的本质规律的认识,不便于建立精确的板形控制模型。而且由于轧辊弹性变形基础理论及板形控制理论中仍有一些问题未得到圆满解决,计算中的一些初始条件和边界条件仍难以精确确定,因而限制了数值法求解精度的提高。

解析法是人们最早采用的计算轧辊弹性变形的有效方法。但进入八十年代以后,很少有人再研究或应用轧辊弹性变形解析理论。人们普遍认为轧制压力和辊间压力等影响轧辊弹性变形的因

素太复杂，其中 Föppl 公式就是一道难以逾越的障碍，精确的轧辊弹性变形解析结果无法得到。因此，到目前为止现有轧辊弹性变形解析理论一般只能用于分析弯辊力的作用或边部减薄等现象，还不能广泛应用于轧辊辊缝计算及板形控制。

然而解析法对研究者仍具有特殊的吸引力。因为用解析法求解轧辊弹性变形，不需对轧辊和载荷进行离散化处理，最后能用解析表达式描述轧辊弹性变形。解析法不仅计算更加简单快捷，而且能得到对辊缝变化规律的本质认识，更适合于在板形控制中应用。此外，解析理论的研究也有助于提高离散数值解的精度。因此，进一步研究轧辊弹性变形的基础理论，并寻求辊缝变化的解析规律，仍然十分必要。

本研究的主要目的，就是要通过分析研究轧制压力分布、辊间压力分布及轧辊压扁等影响轧辊弹性变形计算精度的关键因素，设法从理论上解决这些长期未能圆满解决的问题，提出较精确的计算方法。然后在此基础上给出较精确的计算轧辊弹性变形的解析方法，并基于轧辊弹性变形的解析理论研究辊型设计、板形模式、控制模型等有关板形控制理论基础的一些基本概念和方法，最终建立较为真实反映轧制过程中的辊系弹性行为规律的板形控制解析模型。

## 1.2 轧辊弹性变形解析理论研究和发 展概况<sup>[22~51]</sup>

研究轧辊弹性变形最早是从研究解析法开始的。尽管关于轧辊变形计算的研究资料非常丰富，但许多早期完成的重要基础工作现在已难以找到原始文献了。文献[22~33]恐怕是现在能见到的最早的部分研究轧辊变形计算法文章了。早期许多人把工作辊和支承辊均处理成无限长的圆柱体，或将轧制压力和辊间压力均假设为均匀分布，尽管有人求出了精确的三维解答，但由于力学模型过于简单，所得结果难以实际应用。

苏联学者 Г. Д. Дутов 和 А. Н. Крылов 虽然较早提出了简单的弹性基础梁法<sup>[32, 38]</sup>，但由于其成果不大为世人所知，因而未得到普遍重视和应用。直到六十年代中期 M.D.Stone 和 R.Gray<sup>[30]</sup>再次给出基于弹性基础梁理论的解析解答之后，并经盐崎宏行<sup>[39]</sup>和本

诚恒等人<sup>[40]</sup>的不断改进,解析法才在当时得到普遍应用。世界各国发表的研究轧辊弹性变形解析理论的文章很多,文献[22~52]只是其中反映主要研究成果的一部分。中国学者对轧辊弹性变形解析理论的研究和应用也有重要贡献,提出了许多较精确的轧辊弹性变形计算方法,并导出了应用于板形控制的板形方程<sup>[41~52]</sup>。

梁的弹性变形理论(包括弹性基础梁理论),Hertz的弹性接触变形理论,以及板带轧制理论是轧辊弹性变形解析计算理论的基础。现有的各种轧辊弹性变形解析计算方法虽然经历了数十年的由解析法到数值法的不断发展和完善,但都是在这些理论的基础上建立起来的。

因为轧辊所受的载荷及轧辊本身的结构都十分复杂,所以要精确计算轧辊弹性变形是非常困难的。为了用解析法计算轧辊弹性变形,人们在上述理论和各种假设的基础上提出了许多力学计算模型和计算方法,形成了轧辊弹性变形解析理论的学科领域。

轧辊弹性变形解析理论主要包括轧辊变形模型的建立、轧件与轧辊之间的作用力及压扁的大小和分布、工作辊与支承辊之间的压力和压扁、轧辊在轧制力和弯辊力作用下的弹性变形等内容。

轧辊变形模型有整体简支梁、无限长圆柱体、弹性基础梁、单臂梁及叠层梁等多种模型。计算轧件与轧辊之间及工作辊与支承辊之间的压力和压扁也有许多方法和公式。各种具体的轧辊弹性变形解析法在研究者各自的文章<sup>[22~52]</sup>里都有详细的论述,文献[6, 11]中对各种主要方法也有详细的介绍,已经为大家所熟悉,这里就不再赘述。下面仅概述现有轧辊弹性变形解析算法中的基本理论和方法及其研究和发展现状。

### 1.2.1 轧辊变形模型

根据对轧辊的变形状态的不同假设,及对工作辊和支承辊之间的辊间压力和弹性压扁的不同处理方式,可将轧辊弹性变形解析计算中的轧辊变形模型分为具有代表性的以下几种:

#### 1. 整体简支梁模型<sup>[6, 8, 11]</sup>

忽略工作辊和支承辊之间的变形,将工作辊和支承辊的截面

合成一个截面，从而将它们作为一根整体梁筒支计算，即得到整

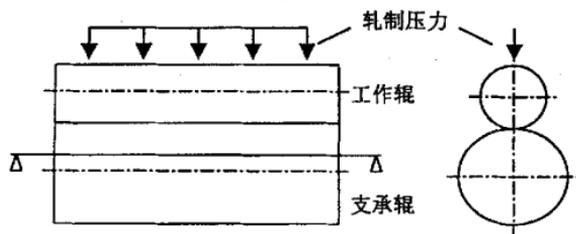


图 1-1 整体简支梁模型

体梁模型（图 1-1）。这种模型虽避开了辊间压力和弹性压扁计算这个难题，计算也较简单。但这样做改变了辊间约束，增加了辊系刚度，因而计算出来的轧辊变形不仅偏小，而且变形状态也有偏差，不能准确描述轧辊弹性变形的真实状态。这种模型一般只用来估算轧辊的弯曲或剪切变形。

## 2. 无限长梁模型<sup>[26-28]</sup>

将工作辊简化成无限长的梁，支承辊简化为作用在工作辊上的均布力，就得到无限长梁模型（图 1-2）。尽管用这种模型可得到弹性力学三维解答，但用均布力代替支承辊的作用及工作辊无限长的假设误差较大，所以这种模型仅曾应用于研究压扁和边部减薄效应。

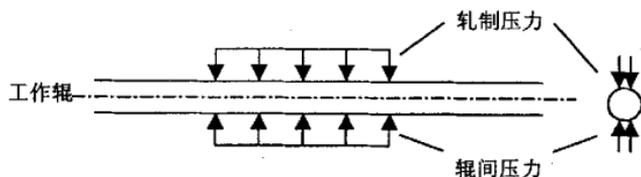


图 1-2 无限长梁模型

## 3. 弹性基础梁模型<sup>[6, 11, 22, 30, 39, 40]</sup>

将支承辊简化为弹性基础，工作辊简化为弹性基础上有限长

的梁，就可得到著名的弹性基础梁模型（图 1-3）。这种模型的计算精度取决于弹性基础及轧件与工作辊之间的弹性系数的确定。不考虑支承辊的挠度是这种模型的一个缺陷。

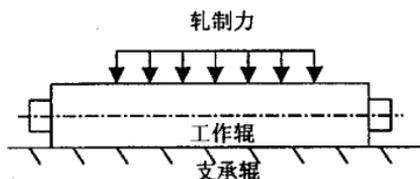


图 1-3 弹性基础梁模型

#### 4. 叠层梁模型<sup>[43, 50]</sup>

将工作辊和支承辊作为叠层梁，并按弹性接触理论考虑辊间压力和弹性压扁，是目前较精确的一种计算模型（图 1-4）。计算支承辊的挠度是这种模型与弹性基础梁模型的一个重要区别。利用这种模型可考虑支承辊的挠度对轧辊弹性弯曲和压扁变形的影响，因而可得到较精确的计算结果。盐崎宏行和本诚恒等人的模型也应归为这一类，但以前都归为弹性基础梁模型。

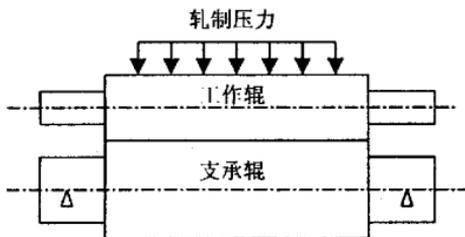


图 1-4 叠层梁模型

#### 5. 悬臂梁模型

利用轧辊的对称性，以轧辊中心对称面为固定端，取轧辊对称的一半作为计算对象，因为可以减少一半的计算工作量，所以

现在大部分人都采用这种模型。前四种模型都可以简化为悬臂梁模型。但这种模型只能计算相对变形，且不利于计算非对称的轧辊。

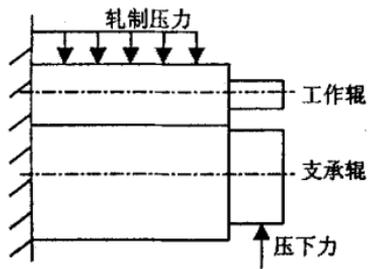


图 1-5 悬臂梁模型

### 1.2.2 轧制压力作用模型

轧制压力即轧件对工作辊的作用也是计算轧辊弹性变形时要解决的关键问题之一。按对轧件的不同处理方式，可将轧制压力分为三种作用模型：

#### 1. 弹簧模型

将轧件化为工作辊间弹性系数为  $k$  的一排弹簧，且在轧制时

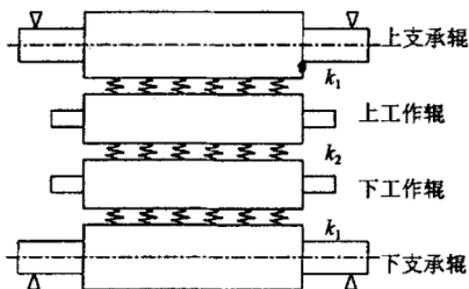


图 1-6 轧制压力和辊间压力的弹簧模型

弹簧一直处于受压状态。弹性系数  $k$  则可由经验确定，也可由轧件的塑性曲线及 Hitchcock 公式导出。这种模型可用于来计算在弯辊力作用下，轧辊轴线的挠度及沿辊面宽度方向单位宽度轧制力的变化量。弹簧模型见图 1-6。

## 2. 压力模型

将轧件的作用简化为作用在工作辊面上的分布轧制压力，压力的大小和分布形式则可由轧制理论确定。这是目前普遍采用的一种模型（见图 1-1~1-5）。

如何确定轧制力的分布形式一直是个难题。有人认为轧制力的分布形式对轧辊弹性变形的影响比较小，而且根据轧制理论，在忽略宽展的情况下，要想轧出平直的轧件，轧制压力沿轧制板宽方向应均匀分布。因而避开轧制力沿轧制板宽方向分布形式的讨论，直接假定轧制力沿板宽方向均匀分布。

然而，理论和实践都证明轧制压力沿轧辊轴向分布是不均匀的。这种不均匀性多数人认为是不能忽略的宽展引起的。因而为了精确计算轧辊变形，许多人都假定轧制力沿轧制板宽方向呈二次抛物线分布，并通过迭代法求解。虽然有人试图通过实验和理论分析证明轧制力应沿轧制板宽方向呈抛物线分布<sup>[15, 53~66]</sup>，但都没能得到精确结果。影响轧制压力分布的因素较多较复杂，目前一般都是用有限元等数值方法模拟并定性地描述轧制压力的分布形式。这个问题还有待进一步研究解决。

## 3. 弹性基础模型

将轧件也简化为弹性基础，并按轧制理论确定弹性系数，这样可得到一种较为复杂的弹性基础模型。这种模型虽类似于弹簧模型，但计算时的初始状态不一样，弹簧模型只能计算挠度和轧制力的变化量，而弹性基础模型则可计算挠度和轧制力的绝对值。该模型较复杂，要由联立方程组求解轧制压力和辊间压力，实际应用还不多见。

### 1.2.3 轧件引起的工作辊弹性压扁<sup>[52~65]</sup>

在轧辊弹性变形解析理论中，主要有以下几种计算轧件引起的工作辊弹性压扁的方法：

### 1. Stone 公式

把轧件与工作辊的接触看成圆柱体与刚性平面的接触，在冷轧薄轧件时忽略轧制区的不对称性及轧件的变形，则由 Hertz 接触理论可求得轧件引起的工作辊弹性压扁

$$u = 2p(1-\nu^2) / \pi E$$

式中

$p$  —— 沿板宽单位长度上的压力；

$\nu$  —— 轧辊材料的泊松比；

$E$  —— 轧辊材料的弹性模量。

### 2. Hitchcock 公式

考虑轧制区的不对称性及轧件的压扁，利用 Hitchcock 导出的压扁后接触区长度公式，并假设轧制压力沿接触弧均匀分布，可得到轧件引起的工作辊的弹性压扁

$$u = \{0.694 + \beta P \ln[2D / (H - h + \beta P)]\} / 8$$

式中

$$\beta = 16(1-\nu^2) / \pi E$$

$P$  —— 总轧制力；

$D$  —— 工作辊直径；

$H$  —— 入口板厚；

$h$  —— 出口板厚；

$\nu$  —— 工作辊材料泊松比；

$E$  —— 工作辊材料弹性模量。

因 0.694 较小，大部分人在计算时将它忽略。

### 3. Föppl 公式

假设轧制压力沿接触弧长为抛物线分布，Föppl 给出的计算轧件引起工作辊压扁的公式为

$$u = 2 \frac{1-\nu^2}{\pi E} p \left[ c + \frac{1}{2} \ln \frac{2D}{H-h+p\beta} \right]$$

式中  $c = 1.026$ 。其余符号的意义与前面相同。

#### 4. 半无限体模型解

将工作辊看作半无限体，应用弹性力学中半无限体受法向力作用的解答，可求出轧件引起的工作辊弹性压扁

$$u(x) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x,y)}{l_d S} d\Omega$$

式中

$\nu$  —— 工作辊材料的泊松比；

$E$  —— 工作辊材料的弹性模量；

$l_d$  —— 压扁宽度（轧制接触区长度）

$\Omega$  —— 压扁区域；

$S$  —— 压扁区域中某一点到轧制出口边上某一压扁点之间的距离；

$p(x, y)$  —— 轧制压力。

根据轧制压力  $p(x, y)$  不同分布形式，可得到不同的压扁计算结果。一般假设  $p(x, y)$  沿轴线  $x$  方向均匀分布，沿  $y$  方向则有圆、椭圆及三角等好几种分布形式。

半无限体模型十分复杂，但计算结果并不比 Hitchcock 公式精确，因为实际板宽与工作辊身长度相比还是比较大的，将工作辊看作半无限体有较大误差。

上述公式除了 Stone 公式外，显然都不适合直接用于轧辊变形的解析计算。直接运用的结果将使计算结果变得十分冗长和复杂<sup>[40, 41]</sup>，而且由于要进行迭代计算还非常费时，难以体现解析解优点。

#### 1.2.4 工作辊与支承辊之间的辊间压力分布

工作辊与支承辊之间辊间压力的大小容易由力学平衡条件确定。而辊间压力的分布形式则是目前仍未解决的难题。为了求轧辊弹性变形的解析解，人们对辊间压力的分布形式作了各种假设和理论分析<sup>[71-84]</sup>。

##### 1. 均匀分布

为了便于计算，人们最初假设辊间压力沿轧辊轴线方向均匀分布。因误差较大，现在已很少被采用。

## 2. 抛物线分布

人们在实验中发现辊间压力分布曲线的形状一般类似于抛物线，于是假定辊间压力按二次抛物线分布。这是现在采用最普遍的一种假设。

## 3. 高次多项式或幂级数分布

二次抛物线分布较简单，但适用条件有限，不能反映更复杂的辊间压力分布状态。人们自然想到用高次多项式或幂级数来描述辊间压力分布状态，以期得到更精确的解答。由于高次多项式和幂级数分布假设增加了求解轧辊弹性变形解析解的难度，所以求解解析解时通常只用到四次多项式。

## 4. Fourier 级数和 Bessel 函数分布

假设辊间压力呈 Fourier 级数或 Bessel 函数分布，经过非常复杂的推导和计算，可求出精确的弹性力学解。这种假设虽然精确，但计算太复杂，很少被人采用。

### 1.2.5 工作辊与支承辊之间的弹性压扁

研究辊间弹性压扁的文章很多<sup>[57-84]</sup>，辊间弹性压扁的精确计算仍是求轧辊弹性变形解析解时的一大难题。为了计算辊间弹性压扁，一般要借助计算圆柱体弹性接触压扁的理论和公式。计算圆柱体弹性接触压扁时一般要作以下假定：

1. 两平行圆柱体的接触区宽度与圆柱体自身的尺寸相比很小；
2. 两圆柱体无限长且各自承受均布正压力；
3. 接触应力沿接触区宽度按半椭圆形分布（也可假设为抛物线分布或均匀分布，计算结果相差不大）。

于是由 Hertz 接触理论可算出由接触区半宽（假设两圆柱体材料相同）：

$$b = \sqrt{\frac{8}{\pi} q \left( \frac{1-\nu^2}{E} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)}$$

式中  $q$  — 圆柱体接触面上沿轴线方向的单位长度接触压力；

$\nu$  — 圆柱体材料的泊松比；

$E$  — 圆柱体材料的弹性模量；

$R_2, R_1$  — 分别指两圆柱体的半径。

两圆柱体接触压扁时轴线的接近量则可由 Föppl 公式确定：

$$\Delta = \frac{2q(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \frac{2}{3} + \ln \frac{4R_1R_2}{b^2} \right]$$

若假定接触压力沿接触区宽度均匀分布或按抛物线分布，也可得到类似的公式。这些公式的精度都差不多，最常用的还是 Föppl 公式。

将轧辊比作圆柱体，就可利用上述公式计算辊间弹性压扁。但由于上述公式中  $\Delta$  与  $q$  之间的关系是非线性的，直接用这些公式很难求得辊缝的解析解。于是必须设法简化上述公式。令

$$\Delta = kq, \quad \theta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}$$

则

$$k = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[ \frac{2}{3} + \ln \frac{4R_1R_2}{b^2} \right] = \theta \left( \frac{2}{3} + \ln \frac{R_1+R_2}{q\theta} \right)$$

人们已经通过计算发现，对于大多数实际使用的轧机而言， $q$  在可能范围内变化时， $k$  几乎不变<sup>[6, 28, 77]</sup>。因而可取  $q$  的平均值  $q_m$  计算  $k$ ，即

$$k = \theta \left( \frac{2}{3} + \ln \frac{R_1+R_2}{q_m\theta} \right)$$

然而，上述轧辊接触压扁计算理论除了假设条件与轧辊的实际情况还有相当大的差距外，还忽略了轧辊弯曲的影响。要想提高辊缝解析的精度，还需对辊间压扁进行更深入的研究<sup>[12]</sup>。

### 1.2.6 轧辊弹性变形的解析

把轧辊视为梁，则根据梁理论，具有弯曲刚度  $EI$  和剪切刚度  $GA$  的轧辊在弯矩  $M(x)$  和剪力  $V(x)$  的作用下，轧辊的挠度  $y(x)$  满足下列微分方程：

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} - \alpha, \frac{V(x)}{GA}$$

其中  $\alpha$  为剪切系数。具体的求解过程和结果则因不同的变形模型及不同的载荷模式而有所不同。

为便于求解，以往都利用轧辊的对称性，先将简支的轧辊转化为沿对称中心固支的悬臂梁，然后利用上述公式计算，因而现有的各种解析法（包括许多数值法）大多数只能求轧辊的相对变形。

总之，现有各种轧辊变形解析法不仅计算过程和计算结果都非常冗长、复杂和费时，而且计算精度和适用性也有限，更重要的是难以得到对轧辊变形本质规律的认识。

### 1.3 板形控制理论基础的基本研究概况<sup>[11~15, 14~18]</sup>

除了轧辊弹性变形理论以外，板形控制理论基础一般还包括板形的定义、板形良好的条件、辊缝模型、板形控制模型、轧制板形误差的判别、辊型设计、板形控制方法和策略等许多内容。这些内容都与辊缝模型的解析有关。

#### 1.3.1 板形的基本概念

板形可包含轧件横截面形状及轧件表面平坦性这两层意思。轧件横截面上厚薄不均就会造成形状误差。表面不平坦就会形成瓢曲或波浪。截面形状的衡量指标是凸度，表面平坦性则用平直度表示。

轧件宽向各处的压下率误差及延伸率误差是造成板形误差的主要原因。从理论上讲，在忽略轧出板带弹性恢复的情况下，可以认为轧出板带断面形状与真实辊缝形状相同。另外，控制辊缝的形状即可以控制沿轧件宽向各点的压下率，从而控制轧件宽向各处沿轧制方向的纵向延伸率。所以板形控制就是真实辊缝形状的控制。但由于真实辊缝形状的求解非常困难，为求精确解答，目前仍普遍采用数值解法，而且在板形控制中多采用多项式拟合辊缝模型，板形或辊缝特征量也借助多项式定义，实际上就是用多项式描述辊缝。因而板形控制中的许多问题变得十分复杂和模

糊，至今仍未合理解决。如果能得到真实辊缝的解析解，板形控制中的许多问题都可以得到简化，有的甚至有可能迎刃而解。

### 1.3.2 辊缝的精确表示

用多项式虽能近似地表示辊缝沿轧辊轴向的厚度分布，但高于二次的多项式并不能有效地提高多项式表示的精度<sup>[16]</sup>。通过辊缝的精确解析还可以证明<sup>[85]</sup>，有限项多项式不能精确表示轧辊的挠度。同时还可证明，若轧辊挠度用多项式表示，则一般不能满足实际轧制时工作辊与支承辊间无间隙这个变形协调关系。实际上，真实辊缝形状可比较精确地用多项式函数和指数函数的复合函数表示，即

$$h(x) = P(x) + \sum_i^n Q_i(x)e^{\lambda_i x}$$

式中， $h(x)$ 为辊缝厚度， $P(x)$ 和 $Q_i(x)$ 为多项式函数， $\lambda_i$ 为常数。因上式中含有指数函数，所以用有限项多项式表示辊缝凸度，会有比较大的误差。关于该解析表达式的证明将在以后论述。

### 1.3.3 板形良好条件

在不计宽展的情况下，轧件沿宽向上延伸率处处相同就可得到良好的板形。由体积不变原理即可推出板形良好的条件为

$$\frac{H(x)}{h(x)} = \text{Const.}$$

其中 $H(x)$ 为来料板厚， $h(x)$ 为轧后板厚。由此还可推出用厚差或凸度表示的板形良好条件表达式。但现在还没有用辊缝模型表达的实用公式。

若宽展不能忽略，则上述条件就变得较粗略。虽然已有一些考虑宽展的板形良好条件被提出来了<sup>[12]</sup>，但表达式不如上式简便易用，应用还不广泛。而且宽展仍是一个值得继续研究的问题。

### 1.3.4 凸度的定义

凸度是板形控制中用以衡量板带或辊缝形状的一个关键指

标。根据轧制理论，若忽略宽展，则当轧制板带断面沿宽度方向各点的压下率相同、从而各点的延伸率相同时，就能获得良好的板形。所以板形控制就是要控制各点的压下率或延伸率。而各点的压下率或延伸率均可通过适当定义的凸度变化量表示，而且板凸度又取决于辊缝凸度，因此板形控制也可归结为辊缝凸度的控制。

凸度的适当定义非常重要，但目前除了中凸度有明确的定义外，反映复杂板形缺陷的所谓“高次凸度”尚无统一明确的定义，凸度与板形缺陷的关系也不十分明确。目前常见的作法是用多项式近似表示辊缝或板带断面形状，由多项式中各次项系数的不同组合来定义反映不同板形缺陷的各种凸度。因多项式中的高次项能在一定程度上反映复杂板形缺陷，故反映复杂板形缺陷的凸度被称为高次凸度。不同的研究者因选取的多项式型式不同，对高次凸度的定义也略有不同<sup>[10]</sup>。这种定义方法的主要缺点是高次凸度与复杂板形缺陷之间的物理关系不明确，也难以定量表示板形缺陷，而且受多项式的限制，所反映的板形缺陷类型也受局限。

### 1.3.5 辊型理论

辊型理论研究适合于板形控制的轧辊辊型。轧辊轴向移位变凸度轧机出现以后，初始辊型作为一种重要的板形控制手段越来越受到人们的重视。文献[9]基于多项式函数提出了一种辊型理论，用于轴向移位变凸度轧辊辊型的设计。但现有的辊型理论现在还不完善，还不能将原始辊型与有载辊型结合起来考虑，如何确定最佳辊型曲线仍有待进一步研究。

### 1.3.6 板形模式识别

轧出的板带经板形仪测量，可得到一组反映板形状况的离散数据。但目前的板形控制系统还不能直接根据这些数据调整板形机构。必须首先确定这些数据与辊缝形状的关系，即判明这些数据反映的板形是何种形状的辊缝造成的，或者说如果有板形缺陷的话，找出对应的缺陷类型或辊缝形状，板形控制系统才能根据辊缝模型按一定的控制策略调整板形机构，改变辊缝形状，消除

板形缺陷。这种建立对应关系的工作就是板形模式识别的主要任务。

在目前普遍采用的多项式辊缝模型的基础上，有许多相应的板形模式识别方法。现在流行的板形模式识别方法主要有以下两类：

1. 多项式拟合或分解法 先根据实测或计算数据，用最小二乘法拟合出与辊缝模型相应的多项式，再由拟合出的多项式判别板形状况。这类方法的主要缺点是无法确定多项式的最佳形式，而且许多板形缺陷并不能用多项式精确表示，所以精度较低。

2. 模糊分类法及人工神经网络法 首先建立一个标准板形模式集合，集合中所有的模式都由按一定形式分布的离散数据组成。然后根据模糊分类原理或人工神经网络判定实测数据属于标准模式中的哪一种。这种方法虽然没有曲线拟合误差，精度有所提高，但标准模式集合很难选定，而且由于现在凸度都是按多项式定义的，仍要靠多项式建立标准模式。所以这类方法与多项式拟合法本质上差别不大。

### 1.3.7 板形控制策略

制定控制策略的目的就是要根据板形状况，确定板形控制机构调整参数，达到设定的板形控制目标。根据板形良好条件，如果板带在从粗到精的所有轧制过程中，所通过的轧机都有形状相似的辊缝，或辊缝的解析解相似，保证轧件中的残余张应力不超过轧件屈曲极限，那么就有可能通过辊缝的调整保证轧出板带的平直度。不同的轧机，由于结构不同，可能无论怎样调整都难以使它们的辊缝相似。

所以，制定控制策略的一个前提，就是在所有轧制道次上辊缝经过调整能与来料断面形状相似，即与上道工序的轧制辊缝相似。但目前由于没有精确的板形控制模型，还不能制定出精确的控制策略，在出现很难解决的控制参数耦合问题时，还无法精确确定各板形控制参数如何调整，难以保证轧出板带的平直度。

求出辊缝的精确解析解，就可以按解析方程判明上述前提条件是否满足，并建立辊缝与各板形控制手段之间、以及辊缝与板

形缺陷之间精确对应关系，各控制参数也可由解析方程确定，耦合问题也较易解决。因此基于辊缝解析解，可望制定出更简捷而精确的控制策略。

### 1.3.8 反馈控制与预设控制

在现有的板形自动控制系统中，反馈控制是板形控制的主要方法，板形调整机构可根据实测轧出板形信息不断进行调整以消除板形误差。

预设控制则是在板带进入辊缝之前，依据生产规范和辊缝模型预先设定各板形调整机构的调整值。板带进入辊缝后，预设控制机构便停止工作。

这种控制系统的一个明显缺点是控制滞后，限制了控制精度的提高。特别是来料板形波动较大时，控制精度更低。虽然近来已经研制出了具有自适应和自学习功能的预设自动控制系统，可以提高预设精度，但由于没有精确的辊缝解析模型，因而只能粗略设定辊缝的中凸度，而且预设控制仍然与反馈控制相互独立，它只在板带进入辊缝前起作用，板带进入辊缝后，仅利用反馈信息修正预设模型，消除模型误差，而不直接对板形调整机构起作用，板形调整仍要靠反馈控制，仍存在滞后问题。

理想的板形控制系统应该将反馈与预设控制相互结合在一起。轧制时由预设机构依据生产规范、来料板廓或上一道次的轧制参数，预设各板形调整机构的调整值，使本道次轧制辊缝与来料板廓或上一道次的辊缝满足某种相似条件，并根据反馈信息不断修正预设模型，这样可以较好地解决控制滞后问题。

## 1.4 需要研究的问题小结

本文要研究解决的有关轧辊弹性变形精确解析、以及板形控制理论基础的一些基本问题可简要地归纳如下。

### 1.4.1 有关轧辊弹性变形解析理论需要研究解决的主要问题：

1. 来料板形变化对轧制压力的影响；
2. 轧制压力分布；
3. 辊间弹性压扁；
4. 辊间压力分布；

5. 轧辊弹性变形的精确解析。

1.4.2 可以借助轧辊弹性变形解析理论研究解决的一些板形控制理论基础问题：

1. 辊型设计；
2. 板凸度的定义及板形模式；
3. 板形良好条件；
4. 板形控制解析模型；
5. 板形控制策略；
6. 板形预设控制模型。

## 第2章 辊间弹性接触压扁与接触压力的关系

将轧辊视为圆柱体，轧件视为平板，则工作辊与支承辊之间的弹性接触可利用两圆柱体弹性接触变形理论进行计算，而轧件与工作辊之间的弹性接触则可利用平板与圆柱体弹性接触变形理论进行计算。

弹性接触变形和接触压力之间存在着复杂的非线性关系。在工程实际应用中目前有两种观点，一种是将复杂的非线性关系简化为线性关系，以便于工程计算，并认为这样做能保证足够的精度，但未给出严格的论证。另一种观点则认为线性关系不适用，但没给出用线性关系代替非线性关系会有多大的误差，也未给出不适用的条件。

本章将通过对现有各种理论和计算方法的分析，以及进一步的理论和试验研究，证明辊间弹性接触压扁和接触压力之间存在着非常良好的线性关系，计算轧辊接触变形时利用线性关系可获得很高的精度。

### 2.1 工作辊与支承辊之间弹性接触压扁与接触压力的关系

下面将根据现有的计算公式和弹性接触理论，分析和研究工作辊与支承辊之间的弹性接触压扁与接触压力之间的关系。

#### 2.1.1 计算工作辊与支承辊之间弹性接触压扁的解析公式

圆柱体弹性接触理论是计算工作辊与支承辊之间弹性压扁的理论基础。常见的计算圆柱体接触变形的各种公式见表 2-1<sup>[25]</sup>：

表 2-1 圆柱体接触压扁计算公式

公式	说明（公式推导条件）
1 $\delta = A \ln(2e^{1/2}/b)$	两个半无限体接触，接触面为无限长矩形，接触压力沿接触面宽度呈半椭圆形分布
2 $\delta = A \ln(2e^{1/2}l/b)$	两个半无限体接触，接触面有限长，压力沿

(续表 2-1)

		接触面宽度呈半椭圆形分布
3	$\delta = A \ln(2e^{1/3} r / b)$	圆柱体径向受压, 接触面为矩形, 接触压力沿接触宽度呈抛物线形分布
4	$\delta = A \ln\left(\frac{4r}{e^{1/2} b}\right)$	无限长圆柱体径向受压, 接触压力沿接触宽度呈半椭圆形分布
5	$\delta = A \ln\left(\frac{4r}{e^{1/2} b_c}\right)$	无限长圆柱体径向受压, 接触压力沿接触宽度呈椭圆形分布, 考虑接触面曲率影响 <sup>[12]</sup>

表中

$l$  = 接触面长度;

$r$  = 圆柱体半径;

$$A = \frac{4(1-\nu^2)P}{E l \pi},$$

其中  $\nu$  — 泊松系数,  $P$  — 压力,  $E$  — 弹性模量;

$$b = \sqrt{2Ar};$$

$$b_c = \sqrt{2Ar\left(\frac{r}{r+p}\right)}$$

假设工作辊与支承辊材料相同, 将表 1 中的公式用于计算工作辊与支承辊之间的接触压扁, 就可相应地得到下列公式:

$$\Delta_1 = A \ln(2e^{1/2} / b) \quad (2-1a)$$

$$\Delta_2 = A \ln(2e^{1/2} l / b) \quad (2-2a)$$

$$\Delta_3 = A \ln(4e^{2/3} R_1 R_2 / b^2) \quad (2-3a)$$

$$\Delta_4 = \Lambda \ln\left(\frac{16R_1R_2}{e b^2}\right) \quad (2-4a)$$

$$\Delta_5 = \Lambda \ln\left(\frac{16R_1R_2}{e b_c^2}\right) \quad (2-5a)$$

式中

$\Delta_i$  = 工作辊与支承辊之间的弹性压扁,  $i = 1 \sim 5$ ;

$$\Lambda = \frac{2(1-\nu^2)P}{lE\pi} = \frac{2(1-\nu^2)}{E\pi} p, \quad p = \frac{P}{l};$$

$R_1, R_2$  = 工作辊, 支承辊半径;

$$b = \sqrt{2\Lambda/(1/R_1 + 1/R_2)}.$$

$$b_c = \sqrt{\frac{2\Lambda/(1/R_1 + 1/R_2)}{[1 + p(1/R_1^2 + 1/R_2^2)/(1/R_1 + 1/R_2)]}}$$

从上述公式可以看出, 若接触压扁宽度  $b$  ( $b_c$ ) 或接触压力  $p$  沿接触长度不变, 则令

$$k = \frac{\Delta}{p}$$

$$p = \frac{P}{l}$$

$$\beta = \frac{2(1-\nu^2)}{E\pi}$$

即可由式 (2-1a) ~ (2-5a) 得到

$$k_1 = \beta \ln(2e^{1/2}/b)$$

$$k_2 = \beta \ln(2e^{1/2}l/b)$$

$$k_3 = \beta \ln(4e^{2/3}R_1R_2/b^2)$$

$$k_4 = \beta \ln\left(\frac{16R_1R_2}{eb^2}\right)$$

$$k_s = \beta \ln\left(\frac{16R_1R_2}{eb_c^2}\right)$$

均为常数，即弹性接触压扁  $\Delta_1$  与接触压力  $p$  成正比，且压扁系数  $k_s$  沿接触长度不变。但对于实际的轧机轧辊而言，接触压扁宽度  $2b$  和接触压力  $p$  沿辊身是变化的，接触压扁与接触压力一般并不成正比。为便于分析，将方程 (2-1a) ~ (2-5a) 改写成接触压力  $p$  的函数如下：

$$\Delta_1 = \frac{p\beta}{2} \ln\left[\frac{e(R_1 + R_2)}{pR_1R_2\beta}\right] \quad (2-1b)$$

$$\Delta_2 = \frac{p\beta}{2} \ln\left[\frac{el(R_1 + R_2)}{pR_1R_2\beta}\right] \quad (2-2b)$$

$$\Delta_3 = p\beta \ln\left[\frac{(R_1 + R_2)e^{2/3}}{p\beta}\right] \quad (2-3b)$$

$$\Delta_4 = p\beta \ln\left[\frac{4(R_1 + R_2)}{pe\beta}\right] \quad (2-4b)$$

$$\Delta_5 = p\beta \ln\left[\frac{4(R_1 + R_2)}{pe\beta} \left(1 + p \frac{1/R_1^2 + 1/R_2^2}{1/R_1 + 1/R_2}\right)\right] \quad (2-5b)$$

对于一般的轧机而言，上述公式中的各个参数的取值范围如下：

$$l = 500 \sim 2000 \text{ mm}$$

$$\beta = 2.63 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kN}$$

$$R_1 = 200 \sim 450 \text{ mm}$$

$$R_2 = (1.2 \sim 3.5) R_1$$

$$p \leq 30 \text{ kN/mm}$$

由方程 (2-1) ~ (2-5) 的函数性质可知，这些参数只会使函数曲线平移或转动，不会改变曲线本身的形状。因此只要在上述范围内适当选取各个参数的数值，作出方程 (2-1) ~ (2-5) 的图形即可判断函数的线性性质。取

$$\begin{aligned}
 l &= 1500 \text{ mm} \\
 R_1 &= 200 \text{ mm} \\
 R_2 &= 400 \text{ mm} \\
 \beta &= 2.63 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{kN} \\
 p &= 1 \sim 30 \text{ kN/mm}
 \end{aligned}$$

求得各方程的图形如下：

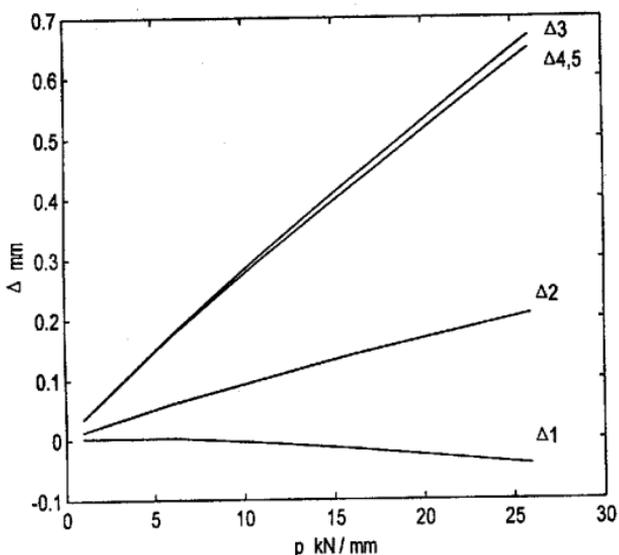


图 2-1 方程 (2-1) ~ (2-5) 的图形

由图可见，方程 (2-1) ~ (2-5) 的图形非常接近直线，即弹性压扁与接触压力之间存在着良好的线性关系。方程 (2-4) 与方程 (2-5) 的曲线在图中重合，说明接触压扁区域的宽度很窄，因而接触区内曲率的影响可忽略不计。方程 (2-3) 就是最常用的 Föppl 公式，它与精确公式 (2-5) 的差别也很小。方程 (2-1) 和 (2-2)

的计算值偏小，显然是因为把圆柱体简化为半无限体所致。

为了证明线性化的精确性，现以最常用的 Föpl 公式 (2-3) 为例计算线性化造成的误差。由公式 (2-3) 可求得压扁系数

$$k_3' = \beta \ln \left[ \frac{(R_1 + R_2) e^{2/3}}{p_m \beta} \right]$$

其中  $p_m$  是接触压力平均值。于是得到计算接触压扁的线性公式

$$\Delta_3' = k_3' p$$

以及计算误差的公式

$$\delta \Delta = \Delta_3 - \Delta_3' = p \beta \ln \frac{p_m}{p} \quad (2-6)$$

$$\delta k = k_3 - k_3' = \beta \ln \frac{p_m}{p} \quad (2-7)$$

可见误差与辊径无关，且当比值  $p_m / p$  接近于 1 时，误差是很小的。若要  $\delta \Delta < \varepsilon_1$ ， $\delta k < \varepsilon_2$ ，只要分别满足

$$\frac{p_m}{p} < e^{\frac{\varepsilon_1}{p \beta}}, \quad \frac{p_m}{p} < e^{\frac{\varepsilon_2}{\beta}}$$

即可。为清楚起见，设接触压力  $p = 10 \sim 30$  kN/mm，取  $p_m = 20$  kN/mm，其余参数仍取与前面相同的数值，则可按式 (2-2) 和 (2-3) 计算出误差并画出图形。

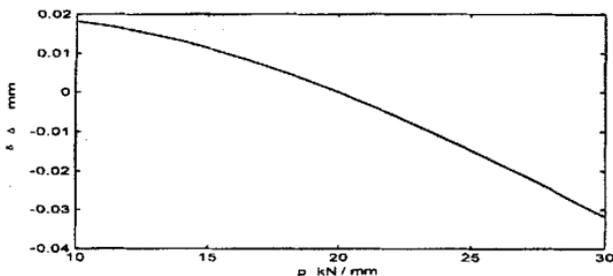
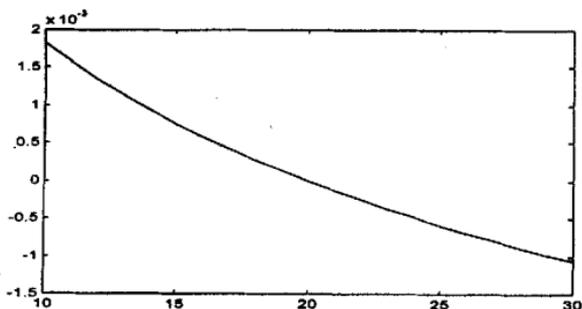


图 2-2 误差函数 (2-6) 的图形

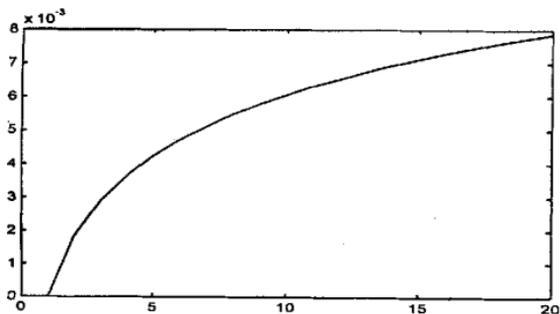
$\delta k$  mm<sup>2</sup>/kN



$p$  kN/mm

图 2-3a 误差函数 (2-7) 的图形 ( $p_m$  为常数)

$\delta k$  mm<sup>2</sup>/kN



$p_m/p$

图 2-3b 误差函数 (2-7) 的图形 ( $p_m/p$  为常数)

### 2.1.2 弹性接触理论的计算结果

若将工作辊与支承辊的弹性接触看作两个任意形状物体的弹性接触, 则按弹性接触理论, 接触区可假设为一狭长的椭圆形, 接触面上的压力成椭球形分布, 接触压力<sup>[86]</sup>

$$p(x, y) = \frac{3P}{2ab\pi} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} \quad (2-8)$$

接触面中心最大压力

$$p_0 = \frac{3P}{2ab\pi} \quad (2-9)$$

接触面周线的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2-10)$$

于是沿接触面长轴单位长度的压力

$$q = \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} p(x, y) dy = q_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad (2-11)$$

其中  $q_0$  为接触中心最大单位压力

$$q_0 = b\pi p_0 / 2 \quad (2-12)$$

因接触面中心最大压扁量

$$\Delta = \frac{3}{2} \beta \frac{P}{a} F(K) = 2\beta F(K) q_0 \quad (2-13)$$

并自然地假设沿接触面长轴的弹性接触变形也按椭圆形分布，则沿接触面长轴的弹性接触变形或弹性压扁为

$$\delta = \Delta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} = 2\beta F(K) q_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (2-14a)$$

或写为

$$\delta = 2\beta F(K) \frac{q}{(1 - x^2/a^2)^{1/2}} \quad (2-14b)$$

上述式中  $F(K)$  为第一类椭圆积分， $a$  为接触椭圆的长半轴（沿轧辊轴线方向）， $b$  为短半轴。其余符号意义与前面相同。因  $a$  与  $P^{1/3}$  成正比，故通常认为弹性压扁与  $P^{2/3}$  成正比。对于圆柱体，由于偏心率  $K = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$  接近于 1， $F(K)$  趋于无穷大，方程 (2-14) 不适用。但我们仍可用它研究圆柱体接触时接触压力与接触压扁之间的关系。

对于圆柱体接触，因  $a = \infty$ ， $(1 - x^2/a^2) \approx 1$ ，故由方程 (2-14)

有

$$\delta \approx 2\beta F(K)q \quad (2-15)$$

另外，对于实际的轧辊而言， $K$ 虽接近于1，但不会等于1，因此  $f(K) \neq \infty$ ，而且  $F(K)$  的变化十分缓慢，其数值不会变得很大，见图 2-4。

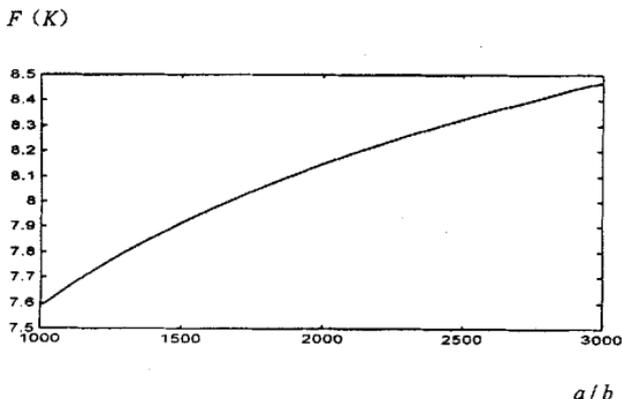


图 2-4 第一类椭圆积分图

由图 2-4 可见，当接触区长轴与短轴之比  $a/b=3000$  时，即偏心率  $K \approx 0.99999995$  时，仍然有  $F(K) < 8.5$ 。于是，我们又得到了接触压扁与接触压力近似成正比的关系，且压扁系数

$$k = \frac{\delta}{q} \approx 2\beta F(K) \quad (2-16)$$

当  $K$  变化时，因  $F(K)$  会保持基本不变，所以假设  $k$  为常数也是非常精确的。

## 2.2 轧件与工作辊之间弹性接触压扁与接触压力的关系

轧件与工作辊之间的弹性接触问题，可简化为平板与圆柱体之间的弹性接触问题来研究。如只计算工作辊的弹性压扁，则可利用公式 (2-3) ~ (2-5) 计算，计算时接触压扁宽度可近似地按

轧制理论确定为轧制变形区长度。若要计算轧件与工作辊相互弹性压扁之和，则除了公式 (2-3) ~ (2-5) 之外，还可利用表 2-2 中的公式进行计算：

表 2-2 平板与圆柱体之间弹性接触压扁计算公式<sup>[102]</sup>

公式	说明
1. $\delta = \frac{\Lambda}{2} \ln \frac{4l}{\Lambda}$	半无限体间滚子受压，接触压力按椭圆形分布
2. $\delta = \frac{\Lambda}{2} \ln(4ze^{\frac{z}{20\Lambda}}/\Lambda)$	接触长度无穷大，滚子上接触压力按椭圆形分布，平板上则按矩形分布，板厚等于滚子半径，点坐标 $z$ 为有限值
3. $\delta = \frac{\Lambda}{2} \ln \left\{ \frac{4l}{\Lambda} \left[ \frac{\sqrt{1+(2z/l)^2} - 1}{\sqrt{1+(2z/l)^2} + 1} \right]^{1/2} \right\}$	滚子处于平面应变状态，参考点坐标 $z$ 为有限值，接触压力按椭圆形分布

表中各个符号的意义与前面相同。值得注意的是，表中所有公式都有相同的函数类型，而且压扁量均与圆柱体的半径无关。因为我们现在只研究压扁与压力之间的关系，将表中的公式统一写成

$$\delta = \frac{\Lambda}{2} \ln(4Q/\Lambda)$$

将  $\Lambda = 2p\beta$  代入公式，得

$$\delta = p\beta \ln \frac{2Q}{p\beta}$$

压扁系数

$$k = \frac{\delta}{p} = \beta \ln \frac{2Q}{p\beta}$$

设  $k' = \beta \ln \frac{2Q}{p_m \beta}$ ,  $\delta' = k' p$ , 则可得到与公式 (2-6) 和 (2-7) 完

全相同的误差公式

$$\delta k = k - k' = \beta \ln \frac{p_m}{p}$$

$$\Delta \delta = p \beta \ln \frac{p_m}{p}$$

轧制压力沿板宽的变化要比工作辊与支承辊之间的接触压力沿辊身的变化小, 所以上述误差比 2.1.1 中计算的误差要更小。因此, 轧件与工作辊之间弹性接触压扁与接触压力成正比的线性关系也是非常精确的。

### 2.3 线性公式与数值计算以及试验结果的比较

在大量研究圆柱体(或轧辊)弹性接触压扁的文献中<sup>[70-85, 113-115, 118-139]</sup>, 可找到许多数值计算和试验结果。有些文献直接从圆柱体受压试验得到弹性接触压扁与接触压力成正比的关系。有些文献虽得到了类似的关系, 但未作线性分析。

表 2-3 圆柱体接触压扁计算和试验结果比较

P (kN)	$\delta_c (\mu\text{m})$	$\delta_h / \epsilon_h$	$\delta_m / \epsilon_m$	$\delta_c / \epsilon_c$	$\delta_l / \epsilon_l$
0.445	0.95	1.41 / 0.46	1.17 / 0.22	0.89 / -0.06	0.76 / -0.19
0.889	1.75	2.58 / 0.83	2.1 / 0.35	1.63 / -0.12	1.51 / -0.24
1.779	3.25	4.67 / 1.42	3.75 / 0.5	2.84 / -0.41	3.02 / -0.23
2.669	4.7	6.62 / 1.92	5.26 / 0.56	3.99 / -0.71	4.54 / -0.16
5.338	8.65	12.0 / 3.35	9.34 / 0.69	6.88 / -1.77	9.07 / 0.42

表 2-3 以文献[129] 中的试验和数据为例, 将试验结果  $\delta_c$  与半无限体模型计算结果  $\delta_h$  和误差  $\epsilon_h$ 、半无限体修正模型计算结果

$\delta_m$  和误差  $\varepsilon_m$ 、无限长圆柱体模型计算结果  $\delta_c$  和误差  $\varepsilon_c$ 、以及线性模型计算结果  $\delta_l$  和误差  $\varepsilon_l$  进行了比较。

表中线性关系是简单地按比例关系取平均值确定的。若经过精确拟合，还可得到更精确的线性公式。但从表 2-3 已可以看出，简单的线性公式的计算结果与实验结果最接近。遗憾的是文献[102]并没有对其试验结果作线性分析。

#### 2.4 小结

本章通过理论分析和试验对比不仅证明按线性关系计算辊间弹性接触压扁与压力是非常精确的，而且更重要的是证明 Föpl 等无限长圆柱体接触压力计算公式并不比线性公式更精确。从而为轧辊弹性变形计算时采用辊间压力与辊间压扁之间的线性关系提供了新的、更严格的理论依据。

### 第3章 辊间压力和轧制压力分布的研究

为了求轧辊弹性变形的解析解，辊间压力和轧制压力的分布以往都以假定的形式给出，而且最常用的假设是多项式分布。由于压力分布的确定涉及许多相互关联耦合的因素，迄今为止还没有适当的理论精确计算辊间压力和轧制压力的分布形式。本章将首先研究多项式压力分布函数，证明其局限性，然后在各种变形条件下，由梁的弹性变形理论直接导出满足轧辊变形协调条件的轧制压力和辊间压力分布函数。

#### 3.1 多项式压力分布函数

根据 Hertz 接触理论，可以假设物体弹性接触面上的压力呈球形分布，接触面的边界线呈椭圆形分布。由此可以导出辊间压力沿辊身按抛物线分布的函数形式<sup>[42]</sup>，并被广泛采用<sup>[11,43,50]</sup>。由均布载荷简支梁弹性变形的弹性力学解<sup>[88,90]</sup>、及辊间压扁与辊间压力呈正比的假定，也可得到辊间压力的抛物线分布函数形式。

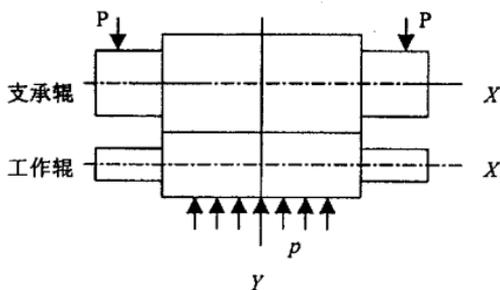


图 3-1 轧辊受力简图

多项式压力分布函数被广泛采用的另一个原因是它便于计算，容易得到轧辊弹性变形的解析解答。但下面将证明由多项式压力分布函数求得的轧辊弹性变形，一般不能满足轧辊的变形协调条件。

根据梁的弯曲理论，由图 3-1 可得到工作辊和支承辊的挠度

程<sup>[95]</sup>

$$y_w^{(4)} = \frac{q-p}{D_w} - \frac{q''-p''}{C_w} \quad (3-1)$$

$$y_b^{(4)} = -\frac{q}{D_b} + \frac{q''}{C_b} \quad (3-2)$$

式中

$y_w, y_b$  : 工作辊, 支承辊的挠度;

$$D_w = \frac{E_w \pi R_w^4}{4}, \quad D_b = \frac{E_b \pi R_b^4}{4} : \text{工作辊、支承辊的弯曲刚度,}$$

$$C_w = \frac{G_w \pi R_w^2}{\alpha_s}, \quad C_b = \frac{G_b \pi R_b^2}{\alpha_s} : \text{工作辊、支承辊的剪切刚度,}$$

其中  $E$  —— 弹性模量

$G$  —— 剪切模量

$R_w$  —— 工作辊半径

$R_b$  —— 支承辊半径

$\alpha_s$  —— 剪切系数;

$q$  : 工作辊与支承辊之间的辊间压力;

$p$  : 作用在工作辊上的轧制压力。

设

$$p = \sum_0^n p_i x^i \quad (3-3)$$

$$q = \sum_0^n q_i x^i \quad (3-4)$$

将 (3-4) 和 (3-4) 式代入 (3-1) 和 (3-2) 式, 积分后得

$$y_w = \frac{1}{D_w} \sum_0^n \frac{(q_i - p_i) x^{i+4}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} - \frac{1}{C_w} \sum_2^n \frac{i(i-1)(q_i - p_i) x^{i+2}}{(i-1)i(i+1)(i+2)} + w_3 x^3 + w_2 x^2 + w_1 x + w_0 \quad (3-5)$$

$$y_b = \frac{-1}{D_w} \sum_0^n \frac{q_i x^{i+4}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} + \frac{1}{C_w} \sum_2^n \frac{i(i-1)q_i x^{i+2}}{(i-1)i(i+1)(i+2)} + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \quad (3-6)$$

因在轧制过程中，工作辊与支承辊辊身之间始终是压紧的，即辊身之间始终保持接触而没有间隙，则工作辊与支承辊应满足的变形协调关系为

$$y_w - y_b - \delta = 0 \quad (3-7)$$

$\delta$  为辊间压扁与各种因素引起的辊间间隙之和。若忽略原始辊缝、轧辊磨损、热变形等因素的影响，将轧辊近似为平辊，则  $\delta$  就等于辊间压扁。将方程 (3-5) 和 (3-6) 代入方程 (3-7) 就会发现，方程 (3-7) 一般只可能有有限个解，也就是说工作辊与支承辊之间只有有限个不连续的接触点。这显然与实际不符。

为进一步讨论方便且不影响讨论结果，将轧辊视为平辊，并且设辊间压扁与辊间压力成正比，即

$$\delta = kq = k \sum_0^n q_i x^i \quad (3-8)$$

其中  $k$  为压扁系数，可假设为常数。将 (3-5)、(3-6) 和 (3-8) 式代入 (3-7) 式，即可看出各次项的系数不可能全为零，因而方程 (3-7) 不可能对所有的  $x$  都成立，而且顶多只可能有  $n+4$  个解。这也就是从理论上说，在这种情况下工作辊与支承辊顶多只可能有  $n+4$  个接触点，这显然与工作辊与支承辊辊身在轧制压力作用下始终保持接触并且没有间隙的情况相矛盾。若还考虑其它因素，则变形协调条件更难满足。

由此可见，由于 Hertz 理论一般只适用于小面积局部弹性接触，对于工作辊与支承辊之间的弹性接触，椭球形压力分布和椭圆形接触线的假设并不完全适用。均布载荷筒支梁的变形也与轧辊变形不同，二者一般不能完全类比。因此为了避免理论和实际上的矛盾，辊间压力一般都不宜假定为多项式分布形式。

### 3.2 辊间压力分布函数的求解

辊间压力分布函数不仅必须满足辊间变形协调条件，还必须

考虑轧辊变形对辊间压力分布的影响，这些条件以往常常被忽略，尤其是没有考虑轧辊挠度对辊间压力分布的影响。下面将根据轧辊变形的简支叠层梁模型和几种不同的变形协调条件，分别求解辊间压力分布函数。

### 3.2.1 简支叠层梁模型

将工作辊与支承辊简化为图 3-2 所示的简支叠层梁。因理论和实践都表明轧制压力沿辊身的变化一般比较小，计算轧辊弹性变形时假设轧制压力为均匀分布不仅计算方便，还可以得到较精确的结果。故在此假设轧压力

$$p = \text{Constant}$$

即轧制压力沿辊身均匀分布，其大小可由总轧制力和弯辊力确定。

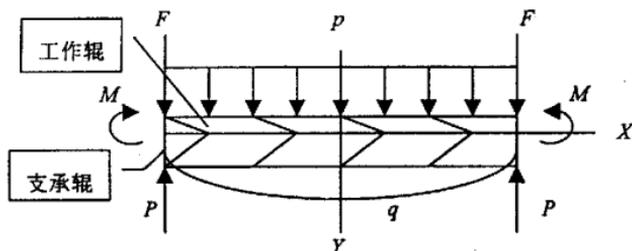


图 3-2 简支叠层梁模型

### 3.2.2 简支叠层梁模型解答

由简支叠层梁模型得到的辊间压力分布函数解答有以下几种：

#### 1. 不考虑辊间压扁时的解答

若不考虑辊间压扁，则变形协调方程 (3-7) 中  $\delta=0$ ，即

$$y_w = y_b \quad (3-9)$$

根据有两个广义位移的梁理论<sup>[94]</sup>，可建立以下挠曲微分方程

$$C_w \left( \frac{d^2 y_w}{dx^2} - \frac{d\varphi_w}{dx} \right) = q - p \quad (3-10)$$

$$D_w \frac{d^2 \varphi_w}{dx^2} + C_w \left( \frac{dy_w}{dx} - \varphi_w \right) = 0 \quad (3-11)$$

$$C_b \left( \frac{d^2 y_b}{dx^2} - \frac{d\varphi_b}{dx} \right) = -q \quad (3-12)$$

$$D_b \frac{d^2 \varphi_b}{dx^2} + C_b \left( \frac{dy_b}{dx} - \varphi_b \right) = 0 \quad (3-13)$$

联立求解方程 (3-9) ~ (3-13) 即可求得辊间压力分布函数

$$q(x) = \frac{pD_b}{D_w + D_b} + C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} \quad (3-14)$$

式中,  $C_1$  和  $C_2$  为由边界条件确定的待定常数, 而

$$\theta = \left[ \frac{C_w C_b (D_w + D_b)}{D_w D_b (C_w + C_b)} \right]^{1/2} \quad (3-15)$$

## 2. 共同曲率解答

计算叠层梁层间接触压力时, 通常采用共同曲率假设<sup>[97 ~ 107]</sup>, 即假设构成叠层梁的各个梁均具有相同的挠曲曲率, 此时的变形协调方程为

$$\frac{dy_w}{dx} = \frac{dy_b}{dx} \quad (3-16a)$$

因此有

$$y_w - y_b = \text{constant} \quad (3-16b)$$

可见这相当于假定在轧制过程中, 工作辊与支承辊的轴心接近量沿轴线方向各处相同, 或辊间压扁沿轧辊轴线方向不变。因此也可把这种假设称为均匀压扁假设。

解联立方程 (3-10) ~ (3-13) 和 (3-16), 得

$$q(x) = \frac{pD_b}{D_w + D_b} + C_3 e^{\alpha x} + C_4 e^{-\alpha x} \quad (3-17)$$

方程 (3-17) 与 (3-14) 除了待定常数不同外, 形式完全一样。

## 3. 压扁量与接触压力成正比时的解答

设  $\delta = kq$ ， $k$  为压扁系数，则变形协调方程 (3-7) 变为

$$y_w - y_b = kq \quad (3-18)$$

将方程 (3-18) 与 (3-10) ~ (3-13) 联立求解，并令

$$J = D_w^2 D_b^2 (C_w + C_b)^2 - 4k C_w^2 C_b^2 D_w D_b (D_w + D_b) \quad (3-19)$$

则得到

①  $J > 0$  时，

$$q(x) = \frac{pD_b}{D_w + D_b} + C_5 e^{\eta x} + C_6 e^{-\eta x} + C_7 e^{\xi x} + C_8 e^{-\xi x} \quad (3-20)$$

式中， $C_5 \sim C_8$  为待定常数，而

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{k} \left( \frac{C_w + C_b}{C_w C_b} + \sqrt{\frac{(C_w + C_b)^2}{C_w^2 C_b^2} - \frac{4k(D_w + D_b)^2}{D_w D_b}} \right)}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{k} \left( \frac{C_w + C_b}{C_w C_b} - \sqrt{\frac{(C_w + C_b)^2}{C_w^2 C_b^2} - \frac{4k(D_w + D_b)^2}{D_w D_b}} \right)}$$

②  $J < 0$  时，

$$q(x) = \frac{pD_b}{D_w + D_b} + e^{\alpha x} (C_5 \cos \beta x + C_6 \sin \beta x) + e^{-\alpha x} (C_7 \cos \beta x + C_8 \sin \beta x) \quad (3-21)$$

式中

$$\alpha = r^{1/2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \beta = r^{1/2} \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$r = \left[ \frac{D_w^2 D_b^2 (C_w + C_b) + J}{4k^2 C_w^2 C_b^2 D_w^2 D_b^2} \right]^{1/2}, \quad \varphi = \arccos \frac{C_w + C_b}{k C_w C_b r}$$

③  $J = 0$  时，

$$q(x) = \frac{pD_b}{D_w + D_b} + (C_5 + C_6 x) e^{\alpha x} + (C_7 + C_8 x) e^{-\alpha x} \quad (3-22)$$

式中

$$a = \left( \frac{C_w + C_b}{2kC_w C_b} \right)^{1/2}$$

上面的结果都是直接从挠曲微分方程和变形协调条件联立求解出来的, 所以很容易验证变形协调条件自然得到满足。

因此, 辊间压力分布函数完全可由轧辊变形微分方程确定, 并一般可用复合指数函数表示。因而不需要以往那样对它作任何假定。若辊型是对称的, 则不难由公式(3-14)、(3-17)和(3-20)~(3-22)看出, 辊间压力分布函数还可表示成双曲函数。

#### 4. 压扁系数的确定

方程(3-20)~(3-22)中的压扁系数  $k$  以往都是由圆柱体弹性接触压扁的弹性力学公式确定, 其中最常用的就是著名的 Föpl 公式。然而, 这样确定的压扁系数不一定能满足轧辊的变形条件。实际上, 压扁系数必须由轧辊的变形方程确定, 我们完全可以由方程(3-10)~(3-13)和(3-17)直接导出压扁系数  $k$ 。由此导出的压扁系数必然能满足计算模型中的所有条件。

先设式(3-19)中的  $J > 0$ 。由方程(3-10)~(3-13)和(3-18)可得到

$$y_w(x) = c_0 + c_5 e^{\eta x} + c_6 e^{-\eta x} + c_7 e^{\xi x} + c_8 e^{-\xi x} \quad (3-23)$$

式中带下标的字母  $c$  是由边界条件确定的常数。将式(3-20)代入式(3-1)然后与式(3-23)的四次微分式比较, 由同类项系数相同可得

$$\eta^4 - \frac{\eta^2}{C_w} + \frac{1}{D_w} = 0 \quad (3-24)$$

或

$$\xi^4 - \frac{\xi^2}{C_w} + \frac{1}{D_w} = 0 \quad (3-25)$$

解方程(3-24)或(3-25)都可以得到

$$k = \frac{1}{C_d} [C_c + (C_b D_w^2 - D_w D_b C_w \pm \sqrt{J})(C_w D_b - C_b D_w)] \quad (3-26)$$

因轧机的工作辊辊径一般总是小于支承辊辊径，从而  $C_w D_w \neq C_b D_b$ 。所以当  $J > 0$  时， $k$  不能取定值。

将式 (3-20) 代入 (3-2) 式，然后与由联立方程 (3-10)~(3-13) 及 (3-18) 求出的  $y_b$  的四次微分表达式比较，也可得到完全相同的结果。

$J < 0$  时，将方程 (3-21) 及  $y_w$  的解代入 (3-1) 式，由恒等条件可得到辊间压力非常数时，即方程 (3-21) 中的待定常数不全为零时，所必须满足的条件：

$$16\beta^8 + \left(\frac{4}{C_w^2} - \frac{8}{D_w}\right)\beta^4 + \frac{1}{D_w^2} = 0 \quad (3-27)$$

因

$$1 - \frac{4C_w^2}{D_w} < 0$$

所以方程 (3-27) 的解

$$\pm \left[ \pm \frac{1}{8C_w^2} \left( \frac{2C_w^2}{D_w} - 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C_w^2}{D_w}} \right) \right]^{1/4}$$

全为复数。但方程 (3-21) 中的  $\beta$  为实数，且辊间压力一般不是均匀分布，所以  $J < 0$  一般不成立。

因此，只有当  $J = 0$  时辊间压力才有非常值解，并且  $k$  才能取定值。于是令  $J = 0$ ，由方程 (3-19) 即可解得到轧机辊间压扁系数

$$k = \frac{D_w D_b (C_w + C_b)^2}{4C_w^2 C_b^2 (D_w + D_b)} \quad (3-28a)$$

将剪切刚度和弯曲刚度的表达式代入式 (3-27)，若工作辊与支承辊材料相同，则可将辊间压扁系数表示为

$$k = \frac{E(R_w^2 + R_b^2)^2 \alpha_s^2}{16G^2 \pi (R_w^4 + R_b^4)} \quad (3-28b)$$

否则

$$k = \frac{E_w E_b (G_w R_w^2 + G_b R_b^2)^2 \alpha_s^2}{16 G_w^2 G_b^2 \pi (E_w R_w^4 + E_b R_b^4)} \quad (3-28c)$$

当  $R_b$  趋于无穷大时上式变为

$$k = \frac{E_w \alpha_s^2}{16 G_w^2 \pi} \quad (3-28d)$$

这相当于工作辊与板带轧件之间的弹性压扁系数。

公式 (3-28) 与 (2-3) 显然不同。所以按 Föppl 公式计算压扁系数必然与轧辊弹性变形微分方程相矛盾。这也是传统解析法求轧辊弹性变形精度不高的原因之一。

### 3.3 辊间压力和轧制压力分布函数的耦合解

关于轧制压力分布函数以往虽作过许多理论和实验研究<sup>[14, 15, 53 ~ 66]</sup>，但一直没有明确的解析解答，实际计算时大多仍采用均布假设或抛物线分布假设。其实，轧制压力与辊间压力之间存在着相互耦合的关系，但在现有的轧辊变形解析模型都无法解这种耦合关系，因此必须寻求新的解析模型及求解方法。

#### 3.3.1 弹性基础上的叠层梁模型

轧制板带时，轧机的上工作辊和上支承辊、与下工作辊和下支承辊对称于板带的水平对称面。因此可将板带视为弹性基础，将工作辊和支承辊视为弹性基础上的叠层梁（图 3-3）。

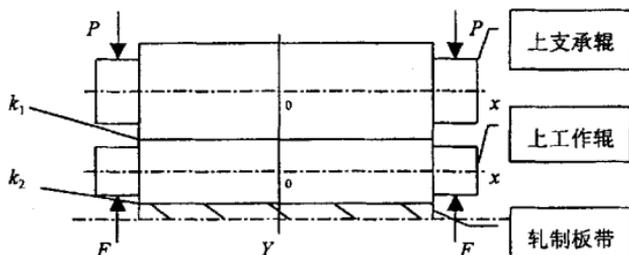


图 3-3 弹性基础上的叠层梁模型

图中  $k_1$ 、 $k_2$  分别是工作辊与支承辊之间、工作辊与轧件之间的弹性压扁系数。在文献[40]中曾介绍过类似的模型，不同的是其中的  $k_1$ 、 $k_2$  表示轧辊挠度与压力之比，而且未作解析分析，只采用分段离散法求数值解。下面将利用图 3-3 所示模型，求解辊间压力和轧制压力之间的耦合关系，导出辊间压力和轧制压力的解析分布函数。因本章只讨论辊间压力和轧制压力的分布函数，暂时不求挠度等其它变量，故模型在这里作了适当的简化。

### 3.3.2 弹性基础叠层梁模型解答

#### 1. 一般解

参照图 3，根据梁的弯曲理论<sup>[95,96]</sup>，可得到轧辊的挠曲微分方程：

$$y_w^{(4)} = \frac{q-p}{D_w} - \frac{q''-p''}{C_w} \quad (3-29)$$

$$y_b^{(4)} = -\frac{q}{D_b} + \frac{q''}{C_w} \quad (3-30)$$

假设辊间弹性压扁与辊间压力成正比，则有

$$y_b - y_w = k_1 q \quad (3-31)$$

其中  $k_1$  为辊间弹性压扁系数。假设轧件与工作辊之间的弹性压扁与轧制压力也成正比，因变形前即未加轧制力时，工作辊轴线至轧件中心面的距离为

$$Ds(x) = R_w(x) + \frac{1}{2} H(x)$$

其中  $R_w(x)$  为工作辊半径， $H(x)$  为入口板厚。在轧制力作用下变形后该距离变为

$$ds(x) = R_w(x) + \frac{1}{2} h(x) - k_2 p$$

于是工作辊的挠度

$$y_w = Ds - ds = \frac{1}{2} \Delta h(x) + k_2 p \quad (3-32)$$

式中,  $\Delta h(x)$ 为压下量。解联立方程 (3-29) ~ (3-32), 得

$$k_2 p^{(4)} - \frac{p'' - q''}{C_w} + \frac{p - q}{D_w} = -\frac{1}{2} \Delta h^{(4)} \quad (3-33)$$

$$k_1 q^{(4)} - \left(\frac{1}{C_w} + \frac{1}{C_b}\right) q'' + \left(\frac{1}{D_w} + \frac{1}{D_b}\right) q + \frac{p''}{C_w} - \frac{p}{D_w} = 0 \quad (3-34)$$

方程 (3-33) 和 (3-34) 经过整理, 又可得到

$$k_1 k_2 q^{(8)} - \left(\frac{k_2}{C_b} + \frac{k_1 + k_2}{C_w}\right) q^{(6)} + \left(\frac{k_2}{D_b} + \frac{1}{C_w C_b} + \frac{k_1 + k_2}{D_w}\right) q^{(4)} - \left(\frac{1}{C_w D_b} + \frac{1}{C_b D_w}\right) q'' + \frac{q}{D_w D_b} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h^{(6)}}{C_w} - \frac{\Delta h^{(4)}}{D_w}\right) \quad (3-35a)$$

$$p^{(4)} = \frac{1}{k_2} \left(-k_1 q^{(4)} + \frac{q''}{C_b} - \frac{q}{D_b} - \frac{1}{2} \Delta h^{(4)}\right) \quad (3-36a)$$

因  $\Delta h(x) = H(x) - h(x)$ , 当宽展可以忽略时板形良好条件为

$$\frac{\Delta h(x)}{H(x)} = \frac{H(x) - h(x)}{H(x)} = C$$

故此时  $\Delta h(x) = CH(x)$ 。将其代入公式 (3-35a) 和 (3-36a), 得到辊间压力和轧制压力与来料板廓形状的关系

$$k_1 k_2 q^{(8)} - \left(\frac{k_2}{C_b} + \frac{k_1 + k_2}{C_w}\right) q^{(6)} + \left(\frac{k_2}{D_b} + \frac{1}{C_w C_b} + \frac{k_1 + k_2}{D_w}\right) q^{(4)} - \left(\frac{1}{C_w D_b} + \frac{1}{C_b D_w}\right) q'' + \frac{q}{D_w D_b} = \frac{C}{2} \left(\frac{H^{(6)}}{C_w} - \frac{H^{(4)}}{D_w}\right) \quad (3-35b)$$

$$p^{(4)} = \frac{1}{k_2} \left(-k_1 q^{(4)} + \frac{q''}{C_b} - \frac{q}{D_b} - \frac{C}{2} H^{(4)}\right) \quad (3-36b)$$

可见计算辊间压力和轧制压力时必须考虑来料板形的影响。

方程 (3-35) 和 (3-36) 是非齐次方程。根据微分方程理论, 方程 (3-35) 的齐次方程的解的形式取决于特征方程

$$\lambda^8 + a_6\lambda^6 + a_4\lambda^4 + a_2\lambda^2 + a_0 = 0 \quad (3-37)$$

的根。其中

$$a_6 = -\frac{1}{k_1 C_b} - \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2 C_w}$$

$$a_4 = \frac{1}{k_1 k_2} \left( \frac{k_2}{D_b} + \frac{1}{C_w C_b} + \frac{k_1 + k_2}{D_w} \right)$$

$$a_2 = -\frac{1}{k_1 k_2} \left( \frac{1}{C_w D_b} + \frac{1}{C_b D_w} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{D_w D_b}$$

设特征方程 (3-37) 的实根为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ , 重数分别是  $n_1, n_2, \dots, n_r$ ; 复根为  $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$ , 重数分别是  $m_1, m_2, \dots, m_s$ ; 且  $n_1 + n_2 + \dots + n_r + m_1 + m_2 + \dots + m_s = 8$ 。于是方程 (3-35) 的齐次方程的解可表示为

$$q_c(x) = C_0 + \sum_{l=1}^r (C_{1+\sum_1^{l-1} n_i} + C_{2+\sum_1^{l-1} n_i} x + \dots + C_{n_l+\sum_1^{l-1} n_i} x^{n_l-1}) e^{\lambda_l x} +$$

$$+ \sum_{j=1}^s e^{\alpha_j x} [(C_{1+2\sum_1^{j-1} m_i} + C_{2+2\sum_1^{j-1} m_i} x + \dots + C_{m_j+2\sum_1^{j-1} m_i} x^{m_j-1}) \cos \beta_j x +$$

$$+ (C_{m_j+1+2\sum_1^{j-1} m_i} + C_{m_j+2+2\sum_1^{j-1} m_i} x + \dots + C_{2m_j+2\sum_1^{j-1} m_i} x^{m_j-1}) \sin \beta_j x]$$

$$(3-38)$$

式中带下标的字母  $C$  均为待定常数。设方程 (3-35) 的特解为  $T(x)$ , 则辊间压力分布函数就可表示成

$$q(x) = q_c + T(x) \quad (3-39)$$

因  $\Delta h$  与  $q(x)$  有关, 故可假设  $\Delta h$  与  $q(x)$  有相同的函数形式。令

$$\begin{aligned}
 t(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta h^{(6)}}{C_w} - \frac{\Delta h^{(4)}}{D_w} \right) \\
 &= P_1(x) + \sum e^{a_j x} P_j(x) + \\
 &\quad + \sum e^{a_i x} [P_i(x) \cos \beta_i x + P_{i+1}(x) \sin \beta_i x] \quad (3-40)
 \end{aligned}$$

其中  $P_i(x)$  为多项式函数,  $a_j$  和  $a_i \pm i\beta_i$  均为特征方程 (3-37) 的根。于是特解的形式可统一表示为

$$\begin{aligned}
 T(x) &= Q_1(x) + \sum e^{a_j x} Q_j(x) + \\
 &\quad + \sum e^{a_i x} [Q_i(x) \cos \beta_i x + Q_{i+1}(x) \sin \beta_i x] \quad (3-41)
 \end{aligned}$$

其中  $Q_i(x)$  是与  $P_n(x)$  同次的多项式函数。将式 (3-39) 和 (3-41) 代入方程 (3-35), 用待定系数法可求出  $T(x)$ 。

## 2. 近似解

从公式 (3-35) ~ (3-41) 可以看出, 因  $\Delta h$  的解析表达式不仅难以确定, 而且一般非常复杂, 所以求解轧制压力和辊间压力分布的精确解析解答十分困难。但在一定的假设下, 还是较易求出近似解答。

因特征方程 (3-37) 为一元八次方程, 其根必然为下列形式的组合

$$\pm a, \pm b, \pm(a \pm i\beta)$$

对大多数轧机而言, 方程 (3-35) 的齐次解的形式为

$$\begin{aligned}
 q_c &= c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3 e^{bx} + c_4 e^{-bx} + e^{ax} (c_5 \cos \beta x + c_6 \sin \beta x) + \\
 &\quad + e^{-ax} (c_7 \cos \beta x + c_8 \sin \beta x) \quad (3-42)
 \end{aligned}$$

式中  $c_{1-8}$  均为常数。因比, 若假定  $\Delta h$  是不高于四次的多项式, 则可令

$$t(x) = C_v \quad (\text{常数}) \quad (3-43)$$

于是特解

$$T(x) = \frac{C_s}{a_0} \quad (3-44)$$

解微分方程 (3-43)，得

$$\begin{aligned} \Delta h = & \frac{C_{h1}}{r^4} e^{2x} + \frac{C_{h2}}{r^4} e^{-2x} - \frac{C_s D_w}{12} x^4 + \\ & + C_{h3} x^3 + C_{h4} x^2 + C_{h5} x + C_{h6} \end{aligned} \quad (3-45)$$

式中  $C_{h1-6}$  为待定常数。而

$$\lambda = \sqrt{\frac{C_w}{D_w}}$$

将式 (3-39)、(3-42) 和 (3-45) 代入 (3-36)，即可解得轧制压力分布函数

$$\begin{aligned} p(x) = & \frac{1}{k_2} \left\{ \left( \frac{1}{a^2 C_b} - \frac{1}{a^4 D_b} - k_1 \right) (C_{p1} e^{\alpha x} + C_{p2} e^{-\alpha x}) + \right. \\ & + \left( \frac{1}{b^2 C_b} - \frac{1}{b^4 D_b} - k_1 \right) (C_{p3} e^{\beta x} + C_{p4} e^{-\beta x}) + \\ & + \left[ \frac{2\alpha\beta}{C_b(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{4(\alpha^3\beta - \alpha\beta^3)}{D_b(\alpha^2 + \beta^2)^4} \right] (C_{p5} e^{\alpha x} - C_{p6} e^{-\alpha x}) \sin \beta x + \\ & + \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{C_b(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{\alpha^4 - 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4}{D_b(\alpha^2 + \beta^2)^4} \right] (C_{p7} e^{\alpha x} + C_{p8} e^{-\alpha x}) \cos \beta x - \\ & \left. - \frac{1}{2r^4} (C_{h1} e^{2x} + C_{h2} e^{-2x}) + C_{p9} x^3 + C_{p10} x^2 + C_{p11} x + C_{p12} \right\} \quad (3-46) \end{aligned}$$

式中  $C_{p1-12}$  为待定常数。

在假设  $\Delta h$  为其它简单函数的情况下，也可按相同的方法导出轧制压力和辊间压力分布的近似表达式。在理想的情况下，若入口和出口板带都能保持平直，即  $\Delta h$  为常数， $t(x)=0$ ，则方程 (3-35) 和 (3-36) 的齐次方程的解就是理想情况下的轧制压力和辊间压力分布函数。

### 3. 轧制压力均匀分布时的辊间压力解答

假设轧制压力均匀分布, 即  $p$  等于常数, 则由方程 (3-34) 得

$$k_1 q^{(4)} - \left(\frac{1}{C_w} + \frac{1}{C_b}\right) q'' + \left(\frac{1}{D_w} + \frac{1}{D_b}\right) q = \frac{p}{D_w} \quad (3-47)$$

这个方程也可由方程 (3-10) ~ (3-13) 和 (3-18) 得到, 因此其解答与式 (3-20) ~ (3-22) 完全相同。

方程 (3-33) 中轧制压力为常数时, 还有

$$\Delta h^{(4)} = 2\left(\frac{q-p}{D_w} - \frac{q''}{C_w}\right) \quad (3-48)$$

将式 (3-22) 代入上式, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta h^{(4)} &= ae^{\alpha x} \left( \frac{C_5 + C_6 x}{aD_w} - \frac{C_5 + C_6 x + 2C_6}{C_w} \right) + \\ &+ ae^{-\alpha x} \left( \frac{C_7 + C_8 x}{aD_w} - \frac{C_7 + C_8 x - 2C_8}{C_w} \right) - \frac{p}{D_w + D_b} \end{aligned} \quad (3-49)$$

积分 (3-49) 式, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta h &= \frac{e^{\alpha x}}{a^5} [(C_5 + C_6 x)(a + a^3) - C_6(4 + 2a^2)] + \\ &+ \frac{e^{-\alpha x}}{a^5} [(C_7 + C_8 x)(a + a^3) + C_8(4 + 2a)] - \\ &- \frac{pD_w}{24(D_w + D_b)} x^4 + C_9 x^3 + C_{10} x^2 + C_{11} x + C_{12} \end{aligned} \quad (3-50)$$

因此, 若要使轧制压力均匀分布, 压下量分布函数应是指数函数与多项式函数的复合函数。

#### 3.4 辊间压力计算实例

辊间压力和轧制压力的实测非常困难。下面以文献[8]或[71]中介绍的试验为例, 比较计算和试验结果。试验轧机受力简图如

下(图3-4)

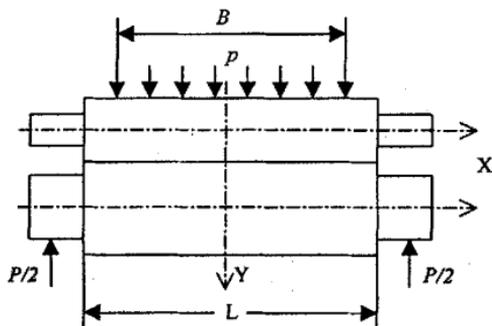


图 3-4 试验轧机受力简图

图中有关试验轧机的以知数据如下:

工作辊半径  $R_w = 45 \text{ mm}$ ;

支承辊半径  $R_b = 100 \text{ mm}$ ;

轧制力作用宽度  $B = 250 \text{ mm}$ ;

辊身长度  $L = 300 \text{ mm}$ ;

轧制力  $P = 100, 200, 300 \text{ kN}$  (沿辊身均匀分布)。

根据边界条件和平衡条件,按公式(22)求得辊间压力的表达式为:

$$q(x) = q_0 + C_1 \operatorname{ch}(ax) + C_2 x \operatorname{sinh}(ax), \quad -\frac{B}{2} \leq x \leq \frac{B}{2}$$

$$q(x) = C_3 \operatorname{cosh}(ax) + C_4 x \operatorname{sinh}(ax), \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq -\frac{B}{2}, \frac{B}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$$

式中  $a = 0.0343$ , 其余常数分别为

①  $P = 100 \text{ kN}$  时:

$$C_1 = -54.2436, \quad C_2 = 0.478, \quad C_3 = 89.551,$$

$$C_4 = -0.5894, \quad q_0 = 384.2436$$

②  $P = 200 \text{ kN}$  时:

$$C_1 = -108.4872, \quad C_2 = 0.9560, \quad C_3 = 179.1021,$$

$$C_4 = -1.1788, \quad q_0 = 768.4872$$

③  $P = 300 \text{ kN}$  时:

$$C_1 = -152.7308, C_2 = 1.3361, C_3 = 250.6455,$$

$$C_4 = -1.6420, q_0 = 1152.7308$$

计算结果与试验结果见图 3-5。图中绘出了三种载荷情况下辊间压力分布的计算结果和试验结果。辊身中部凸起的曲线是按公式 (3-22) 绘制的曲线, 试验曲线在辊身中部较平坦。

从图 3-5 可以看出, 计算曲线与试验曲线沿辊身的整体变化趋势基本相同。不同的是计算曲线在辊身中部的变化趋势与常规计算方法得到的结果相同。试验曲线在辊身中部偏低, 显然有试验误差。因为计算曲线能精确满足平衡条件

$$\int_{-L}^L q(x) dx = P$$

而计算曲线在辊身中部偏高则是没有考虑轧辊的细部结构所致。总之计算曲线与试验曲线非常吻合, 能比较精确地反映实际情况。

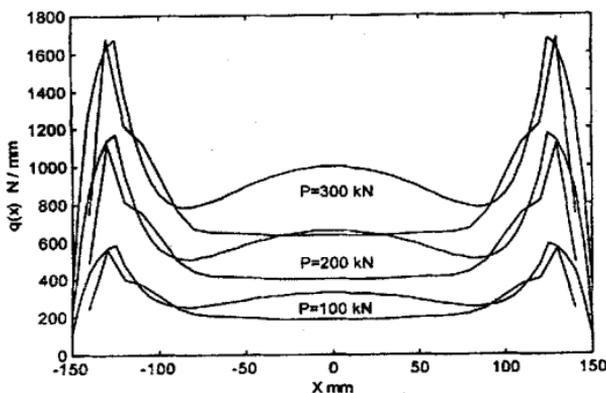


图 3-5 辊间压力分布计算结果与试验结果对比

若不计算辊间压扁 (即令  $k_f = 0$ ), 则可按公式 (3-17) 计算辊间压力分布。此时的计算公式为

$$q(x) = \begin{cases} q_0 + c_1 \cosh(\theta x), & -\frac{B}{2} \leq x \leq \frac{B}{2} \\ c_2 \cosh(\theta x), & -\frac{L}{2} \leq x \leq -\frac{B}{2}, \frac{B}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

式中  $q_0$ 、 $c_1$ 、 $c_2$  和  $\theta$  均为由已知条件导出的常数。

不计辊间压扁时辊间压力计算曲线与试验曲线的对比见图 3-6。从图中可明显看出二者相差较大，特别是在辊身两端二者的变化不一致。因此精确计算时必须考虑辊间压扁。

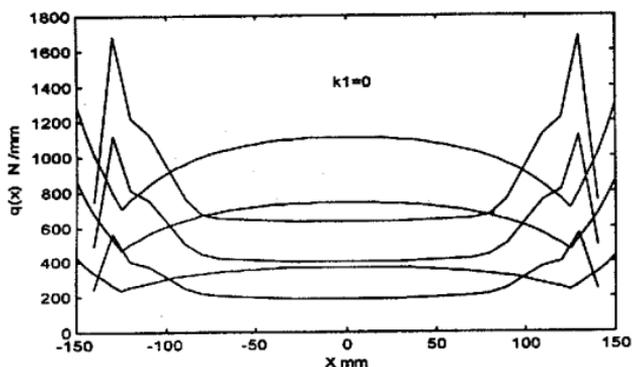


图 3-6 不计辊间压扁时辊间压力计算结果与试验结果的对比

### 3.5 轧制压力与辊间压力解耦计算实例

轧制压力与辊间压力之间的耦合关系十分复杂，所以轧制压力和辊间压力一般都是分别独立开来研究的，将它们联系起来研究的很少。文献[177]中虽给出了轧件三维塑性变形模型与辊系弹性变形模型联立求解的数值计算和实验结果，但对轧制压力和辊间压力分布仍只能作定性分析。下面就以文献[177]中第 7 机架轧机为例，计算轧制压力和辊间压力分布。

根据已知条件，解方程 (3-35) 和 (3-36) 得辊间压力

$$q(x) = c_1 + c_2 x^2 + c_3 \cosh(\lambda_1 x) + c_4 \cosh(\lambda_2 x)$$

轧制压力

$$p(x) = d_1 + d_2 x^2 + d_3 x^4 + d_4 x^6 + d_5 \cosh(\lambda_1 x) + d_6 \cosh(\lambda_2 x)$$

式中  $c_{1-4}$  和  $d_{1-6}$  均为常数，易用计算机程序求出。式中还忽略了高阶微量，并将  $\Delta h$  简化为常数。 $p(x)$  和  $q(x)$  的图形见图 3-7。

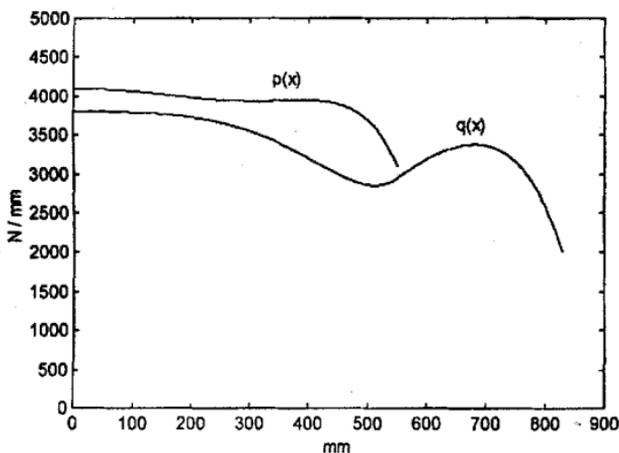


图 3-7 轧制压力和辊间压力分布计算结果

图 3-7 中轧制压力分布曲线与文献[177]中的非常相似。但辊间压力分布与文献中的相比仅在辊身中部相同，在辊身边部相差较大。文献中的辊间压力分布曲线在辊端没有图 3-7 所示的峰值变化。然而这种差异正是辊间压力传统算法与本章中算法的区别造成的。实测结果也说明辊间压力在辊身边部应有峰值变化（参见图 3-5）。另外，图 3-7 与文献[70]和[73]中的轧制压力和辊间压力实测分布曲线也很相符。由此可见，计算结果非常精确。

### 3.6 小结

本章首先证明辊间压力和轧制压力多项式分布假设与轧辊弹性变形条件不符。然后由叠层梁模型首次导出了满足轧辊变形协调条件的辊间压力的分布形式、及辊间压扁系数计算公式。最后又通过一个新的较精确的力学模型——弹性基础上的叠层梁模

型，直接由轧辊弹性变形方程求出了长期困扰人们的辊间压力和轧制压力分布函数的一般形式。并以试验结果证明了计算公式的精确性。为精确计算轧辊弹性变形奠定了理论基础。

## 第4章 四辊轧机有载辊缝的解析计算方法

影响轧机有载辊缝的因素有轧辊的弹性变形、原始辊缝、温度和磨损等多种因素。其中轧辊弹性变形是最主要的因素。其它因素在计算有载辊缝时既可在变形协调方程中考虑，也可简单地用叠加计算。因考虑其它次要因素时有载辊缝的计算方法基本相同，所以下面计算有载辊缝时只考虑轧辊弹性变形。

轧辊弹性变形是由轧制压力和辊间压力确定的。在上一章中，我们已经导出了轧制压力和辊间压力的分布函数，利用这些函数求出轧辊弹性变形后，便可直接得到轧机的有载辊缝。

### 4.1 工作辊挠度的精确解析

辊缝最终是取决于工作辊的变形，所以为求辊缝只需求工作辊的弹性变形。为进行比较，下面按两种方法分别计算工作辊的挠度。轧辊卸载简图见图 4-1。图中  $F_w$ 、 $F_b$  分别为工作辊、支承辊弯辊力， $P$  为压下力。

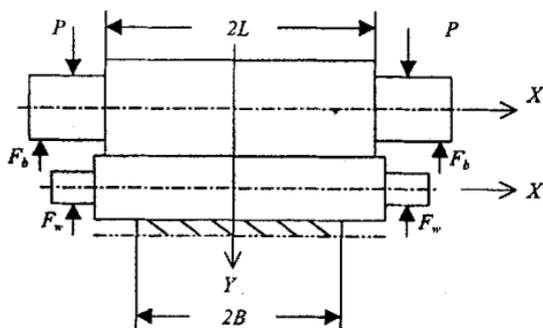


图 4-1 轧辊卸载简图

#### 4.1.1 轧制压力均布时工作辊挠度的计算

轧制压力均布的假设目前仍是一个普遍采用的假设。根据第 3 章的结论，将辊间压力函数表达式 (3-22) 代入工作辊挠度微分方程 (3-29) 就可得到工作辊的挠度

$$y_w = \left[ \left( \frac{1}{a^4 D_w} - \frac{1}{a^2 C_w} \right) C_1 + \left( \frac{ax-4}{a^4 D_w} - \frac{ax-2}{a^3 C_w} \right) C_2 \right] e^{ax} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( \frac{1}{a^4 D_w} - \frac{1}{a^2 C_w} \right) C_3 + \left( \frac{ax+4}{a^3 D_w} - \frac{ax+2}{a^3 C_w} \right) C_4 \right] e^{-ax} + \\
& + \frac{q_0 - P}{24 D_w} x^4 - \frac{q_0 - P}{2 C_w} x^2 + C_5 x^3 + C_6 x^2 + C_7 x + C_8 \quad (4-1)
\end{aligned}$$

式中  $C_{1-8}$  为待定常数，易由平衡条件、变形协调条件和边界条件确定。而

$$\begin{aligned}
q_0 &= \frac{p D_b}{D_w + D_b} \\
a &= \left[ \frac{2 C_w C_b (D_w + D_b)}{D_w D_b (C_w + C_b)} \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

其余符号意义与前面相同。式 (4-1) 与一般的工作辊挠度表达式的不同之处在于增加了指数函数项。

#### 4.1.2 工作辊挠度的通解

在第 3 章中，我们通过解耦计算得到了辊间压力和轧制压力分布函数一般表达式 (3-36) 和 (3-39)，利用这些表达式即可导出工作辊挠度的通解。将公式 (3-36) 代入 (3-29)，得

$$\begin{aligned}
y_w &= w_1 \iiint \iiint \iiint q(x) dx^9 + w_2 \iiint \iiint q(x) dx^6 + w_3 \iiint q(x) dx^4 + \\
&+ w_4 \iint q(x) dx^2 + w_5 \iiint \Delta h(x) dx^4 + w_6 \iint \Delta h(x) dx^2 \quad (4-2)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{D_b D_w k_2} \\
w_2 &= -\frac{1}{k_2 D_w C_b} - \frac{1}{k_2 C_w D_b} \\
w_3 &= \frac{1}{D_w} + \frac{1}{k_2 C_w C_b} + \frac{k_1}{k_2 D_w}
\end{aligned}$$

$$w_4 = -\frac{1}{C_w} - \frac{k_1}{k_2 C_w}$$

$$w_5 = \frac{1}{2k_2 D_w}$$

$$w_6 = -\frac{1}{2k_2 C_w}$$

由此可见，辊间压力和压下量确定之后，工作辊的挠度也就确定了。

对于一般的轧机来说，辊间压力和轧制压力可分别由式(3-42)和(3-46)确定。联立求解(3-29)、(3-42)和(3-46)，并经过一番整理后，可以得到

$$y_w = \sum_{i=0}^4 c_i x^i + \sum_{j=1}^n d_j e^{\lambda_j x} + \sum_{l=1}^m e^{\alpha_l x} (A_l \cos \beta_l x + B_l \sin \beta_l x) \quad (4-3)$$

式中带下标的系数均为待定常数，可由平衡方程、变形协调条件及边界条件确定。 $m$ 和 $n$ 则由方程(3-37)的根的重数确定。其余符号意义与第3章中的相同。

在解方程(3-29)、(3-42)和(3-46)时，若忽略高阶微量，则有辊间压力

$$q(x) = \sum_{i=1}^3 c_i \cosh \lambda_i x \quad (4-4)$$

轧制压力

$$p(x) = \sum_{i=1}^3 c_i \left( \frac{1}{C_b \lambda_i^2} - \frac{1}{D_b \lambda_i^4} - k_1 \right) \cosh \lambda_i x + c_5 x^2 + c_6 \quad (4-5)$$

于是可将工作辊挠度简写成

$$y_w = \sum_{i=1}^3 c_i \left( \sum_{j=1}^4 \frac{w_j}{\lambda_j^{10-2j}} \right) \cosh \lambda_i x + c_4 x^2 + c_0 \quad (4-6)$$

式(4-4)~(4-6)中 $\pm \lambda_i$ 是方程(3-37)的根。 $c_i$ 由平衡条件和边界条件确定为

$$c_i = \eta_i P + \zeta_i F_w + \varepsilon_i F_b, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4-7)$$

其中  $\eta_i$ 、 $\zeta_i$ 、 $\varepsilon_i$  ( $i = 1 \sim 6$ ) 均由轧辊的尺寸确定, 对于确定的轧机来说, 它们都是常数。其余符号意义与前面相同。

#### 4.2 有载辊缝的精确解析

设来料厚度为  $H_0$ , 则有载辊缝为

$$h(x) = H_0 - 2(y_w - kp) \quad (4-8)$$

式中

$$k = 2 \frac{1 - \nu^2}{\pi E}$$

影响有载辊缝的其它因素也可在方程 (4-8) 内同时考虑进去, 但此处从略。将式 (4-1) 代入 (4-8); 就得到轧制压力均布时的有载辊缝

$$\begin{aligned} h(x) = H_0 - 2 \left\{ \left[ \left( \frac{1}{a^4 D_w} - \frac{1}{a^2 C_w} \right) C_1 + \left( \frac{ax-4}{a^5 D_w} - \frac{ax-2}{a^3 C_w} \right) C_2 \right] e^{ax} + \right. \\ \left. + \left[ \left( \frac{1}{a^4 D_w} - \frac{1}{a^2 C_w} \right) C_3 + \left( \frac{ax+4}{a^5 D_w} - \frac{ax+2}{a^3 C_w} \right) C_4 \right] e^{-ax} + \right. \\ \left. + \frac{q_0 - p}{24 D_w} x^4 - \frac{q_0 - p}{2 C_w} x^2 + C_5 x^3 + C_6 x^2 + C_7 x + C_8 \right\} + 2kp \end{aligned} \quad (4-9)$$

将 (4-2) 代入 (4-8) 可得到有载辊缝的一般积分表达式

$$\begin{aligned} h = H - 2w_1 \iiint \iiint q(x) dx^8 - 2w_2 \iiint \iiint q(x) dx^6 - \\ - 2\left(w_3 + \frac{k_1}{k_2 D_b}\right) \iiint \iiint q(x) dx^4 - 2\left(w_4 - \frac{k_1}{k_2 C_b}\right) \iiint \iiint q(x) dx^2 - \\ - \frac{2kk_1}{k_2} q(x) - 2w_5 \iiint \iiint \Delta h(x) dx^4 - 2w_6 \iiint \iiint \Delta h(x) dx^2 - \frac{k}{k_2} \Delta h(x) \end{aligned} \quad (4-10)$$

将式 (3-39) 代入 (4-10), 或者将式 (4-3) 和 (3-46) 代

入(4-8)，整理后则得到有载辊缝的通解

$$h(x) = H_0 - 2 \left\{ \sum_{i=0}^4 c_i x^i + \sum_{j=1}^n d_j e^{\lambda_j x} + \sum_{l=1}^m e^{\alpha_l x} (A_l \cos \beta_l x + B_l \sin \beta_l x) \right\} + 2k \left\{ \sum_{i=0}^3 f_i x^i + \sum_{j=1}^n g_j e^{\lambda_j x} + \sum_{l=1}^m e^{\alpha_l x} (U_l \cos \beta_l x + V_l \sin \beta_l x) \right\} \quad (4-11)$$

式中带下标的系数仍为由已知条件确定的待定常数。

将式(4-6)代入(4-8)，则有辊缝的一般简化表达式

$$h(x) = H_0 - 2 \sum_{i=1}^3 (C_{yi} - kC_{pi}) C_i \cosh \lambda_i x + C_4 x^2 + C_0 \quad (4-12)$$

式中

$$C_{yi} = \sum_{j=1}^4 \frac{W_j}{\lambda_i^{10-2j}}, \quad i=1,2,3$$

$$C_{pi} = \frac{1}{C_b \lambda_i^2} - \frac{1}{D_w \lambda_i^4} - k_1, \quad i=1,2,3$$

#### 4.3 有载辊缝计算实例

为验证公式(4-9)和(4-12)的正确性，应将计算结果与测试结果进行比较。计算和测试条件如下：

工作辊尺寸 / mm	
直径	80
辊身长	350
凸度	0
支承辊尺寸 / mm	
直径	205
辊身长	350
凸度	0
接触段长	350
轧制板带宽度 / mm	200
压下螺丝中心距 / mm	620

液压弯辊力 / N	0
轧制力 / N	
工况 I	263900
工况 II	315200
工况 III	333500

#### 4.3.1 按轧制压力均布计算

经一系列推导和计算，由式 (4-9) 得到当假设轧制压力均布时辊缝厚度为

$$h(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 (d_1 x \sinh \lambda x + d_2 \cosh \lambda x) + c_3 x^2 + c_4 x^4 + c_0$$

式中  $\lambda$  和  $d_{1,2}$  为常数， $c_{0-4}$  则随工况而变。计算结果见图 4-2。

从图 4-2 易看出，按轧制压力均布假设计算的结果与实测结果有明显的误差<sup>[6, 178]</sup>，特别是在辊身边部误差较大。因此，在一般情况下，按轧制压力均布假设计算轧辊弹性变形易在辊身边部产生较大误差。

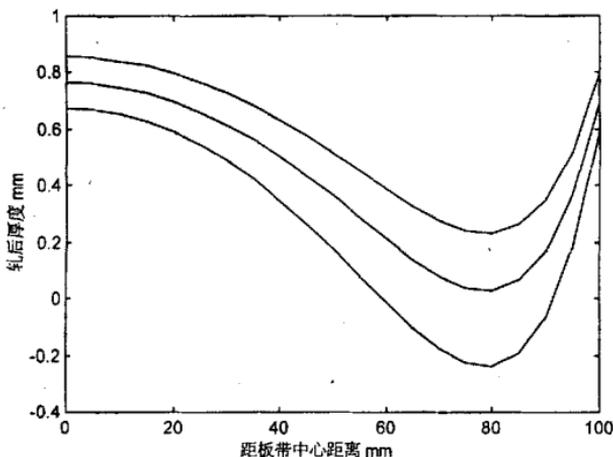


图 4-2 轧制压力均布时轧出板带厚度分布

### 4.3.2 按一般解的简化方程计算

按解耦算法由公式 (4-12) 得到的辊缝厚度表达式为

$$h(x) = C_0 + C_1 \cosh \lambda_1 x + C_2 \cosh \lambda_2 x + C_3 \cosh \lambda_3 x + C_4$$

式中  $\lambda_{1-3}$  为常数,  $C_{0-4}$  则随工况而定。计算和测试结果见图 4-3 ~ 4-5。

图 4-3 ~ 图 4-5 中的计算结果与实测结果十分吻合<sup>[6, 178]</sup>。特别是在辊身边部的吻合情况是按传统算法难以得到的。

按公式 (4-12) 计算轧辊弹性变形时, 由于精确地确定了轧制压力和辊间压力分布函数, 因而不仅可以得到非常精确的、与实际情况十分吻合的结果, 而且由于不需迭代运算, 计算非常简单快捷。

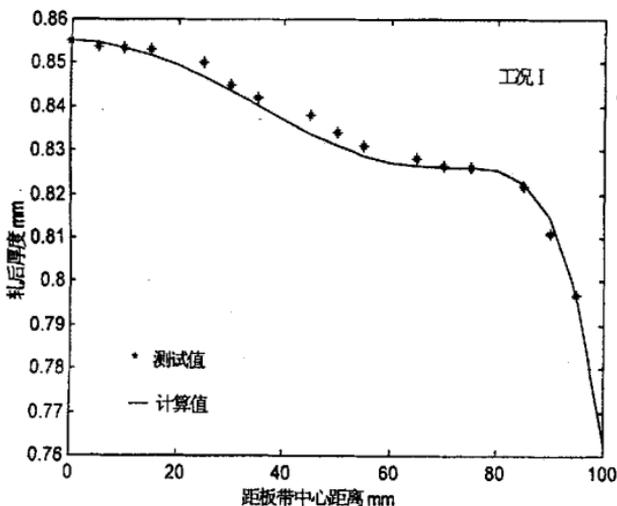


图 4-3 轧出板带厚度计算值与测试值比较 (I)

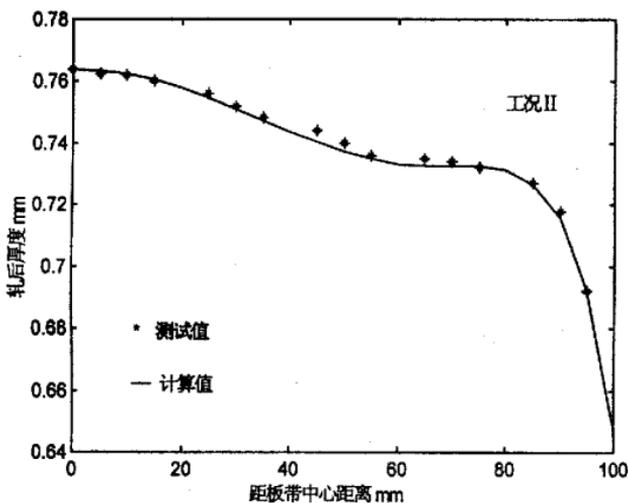


图 4-4 轧出板带厚度计算值与测试值比较 (II)

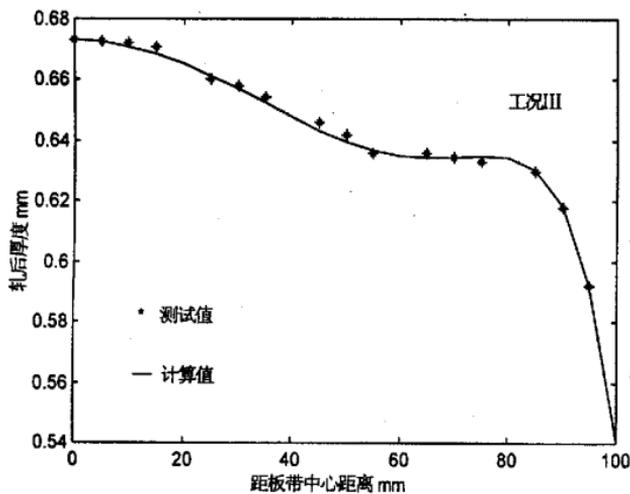


图 4-5 轧出板带厚度计算值与测试值比较 (III)

#### 4.4 有载辊缝的多项式表示

在特征方程 (3-37) 中, 系数  $a_6$ 、 $a_4$ 、 $a_2$ 、 $a_0$  对于实际的轧机来说均远小于 1, 并且当轧辊的刚度  $C_w$ 、 $D_w$ 、 $C_b$  和  $D_b$  趋于无穷大时, 这些系数都趋于零。若将它们忽略, 则解方程 (3-35) 可近似地得到辊间压力的多项式表达式

$$q(x) = \sum_{i=0}^7 c_i x^i \quad (4-13)$$

代入 (4-2) 及 (4-10) 即可推得用多项式表示的工作辊挠度及有载辊缝。若考虑对称性, 则有载辊缝可表示成六次多项式。所以, 我们通常用抛物线或较精确的时候用四次多项式表示辊缝, 就可看作这种多项式表示法的一种特例, 也是有载辊缝精确表示的一种特例。这种多项式表示法显然误差较大。因此, 传统的解析法很难得到轧辊弹性变形的精确解答。而且轧辊的刚度  $C_w$ 、 $D_w$ 、 $C_b$  和  $D_b$  越小, 多项式表示法的误差越大。

#### 4.5 小结

精确求解轧辊弹性变形的关键是要正确确定辊间压力和轧制压力。我们已经在第 3 章中证明, 辊间压力和压扁成正比的关系确定之后, 辊间压力也就确定了。过去由于抛不开 Föppl 公式的束缚, 这一点一直被人们所忽略。其实在辊间压力和压扁的关系确定之后, 再应用 Föppl 公式, 并再对辊间压力和轧制压力的分布形式作不正确的假设, 必然导致轧辊变形条件与 Föppl 公式及各假设之间的相互矛盾, 因而难以得到正确的结果。

本章提出了一套新的轧辊弹性变形解析计算方法, 这套新方法不需要 Föppl 公式, 也不需要辊间压力或轧制压力的分布形式作多余的假设, 而是按第 3 章给出的精确结果确定轧辊所受的载荷, 从而不仅克服了 Föppl 等无限长圆柱体接触压扁计算公式带来的误差, 还避免了轧辊变形条件与多余假设之间的矛盾。所以本章给出的轧辊弹性变形解析计算方法不仅比传统的各种解析法都要更加精确, 能较真实地反映轧辊弹性变形的内在规律; 而

且由于不需要进行迭代运算，计算过程也要比以往的各种方法简单快捷。

本章最后还指出，用多项式表示辊缝只是本章提出的精确表示法的一种特例。从理论上讲，只有当轧辊的刚度趋于无穷大时，才能较精确地用多项式表示辊缝。

## 第5章 四辊轧机工作辊原始辊型设计

原始辊型设计的目的是为了消除轧辊弹性变形、温度和磨损等因素的影响,使辊缝在轧制时保持平直。对于四辊轧机来说,弹性变形是最主要的影响因素。本章将应用前面几章得到的轧辊弹性变形的精确解析法,研究消除轧辊弹性变形影响的工作辊原始辊型设计方法。

目前工作辊原始辊型设计有不变凸度和可变凸度两种设计方法,下面将分别进行研究,并根据轧辊弹性变形精确解析理论提出一种新的辊型及其设计方法。

### 5.1 不变凸度辊型设计法

所谓“不变凸度”是指轧辊磨削好之后辊缝的原始凸度在工作时不可变。下面以两个工作辊均磨成凸形,两支承辊均为圆柱形的设计方式为例,讨论不变凸度辊型设计方法。

按以往的辊型设计原则,也有两种做法。一种是使工作辊的磨削凸度应等于工作辊挠度的两倍<sup>[41]</sup>。另一种做法则考虑工作辊与支承辊之间压扁的影响,使工作辊的磨削凸度等于工作辊挠度<sup>[164]</sup>。但这两种做法都是静止地考虑工作辊磨削凸度与工作辊挠度的关系,在估计出工作辊挠度之后,得到的只是中凸度,而且只能近似地按抛物线或正弦曲线磨制辊型,与真实情况误差较大。

其实,工作辊磨削凸度、或辊缝的原始凸度与工作辊挠度是相互影响的,它们之间存在相互耦合的关系。现按第3章给出的理论和方法,求解工作辊的原始辊型曲线。

原始辊型曲线可用工作辊的半径沿轴向的变化曲线表示(见图5-1)。设工作辊挠度为 $y_w(x)$ ,工作辊原始辊型曲线为 $r(x)$ ,则按辊型设计原理有

$$r(x) - r(L) = y_w(x) - y_w(L) \quad (5-1)$$

设支承辊挠度为 $y_b(x)$ ,则轧辊弹性变形协调条件为

$$y_w - y_b = k_1 q(x) + s(x) \quad (5-2)$$

其中  $k_i$  为辊间压扁系数,  $q(x)$  为辊间压力, 辊间间隙

$$s(x) = r(0) - r(x) \quad (5-3)$$

因通过辊型设计可使板形保持良好, 故可设轧制压力  $p$  在轧制时

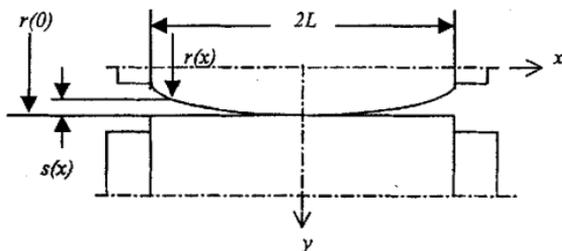


图 5-1 辊间间隙示意图

保持均布。因此, 利用第 3 章中的简支叠层梁模型, 联解方程 (3-10) ~ (3-13) 及 (5-1) ~ (5-3), 得

$$r(x) = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{D_w a_i^4} - \frac{1}{C_w a_i^2} \right) c_i (\cosh a_i x - \cosh a_i L) + \frac{p}{24D_w} (L^4 - x^4) + r(L) \quad (5-4)$$

这便是考虑辊型曲线与工作辊挠度耦合关系后, 通过精确的轧辊变形解析得到的工作辊原始辊型曲线表达式。式中

$$a_1 = \left[ \frac{1}{2k_1} \left( \frac{1}{C_b} + \sqrt{\frac{1}{C_b^2} - \frac{4k_1}{D_b}} \right) \right]^{1/2}$$

$$a_2 = \left[ \frac{1}{2k_1} \left( \frac{1}{C_b} + \sqrt{\frac{1}{C_b^2} + \frac{4k_1}{D_b}} \right) \right]^{1/2}$$

$c_{1,2}$  是待定常数, 可由平衡条件及边界条件确定。 $r(L)$  则由工作辊尺寸确定。

显然, 按式 (5-4) 确定的工作辊原始辊型曲线不仅能满足中

凸度要求，而且由于辊型曲线与工作辊挠度曲线相吻合，因而也能满足高次凸度的要求。若要考虑温度、磨损等其它因素，也不难按同样的方法求出类似于式(5-4)的工作辊原始辊型曲线。但这已超出了本章的研究范围。

若不考虑辊型曲线与工作辊挠度的耦合关系，即在方程(5-2)中不考虑第二项辊间间隙  $s(x)$ ，则由方程(3-10)~(3-13)、(3-18)及(5-1)求得的工作辊原始辊型曲线为

$$\begin{aligned}
 r(x) = & \left( \frac{1}{D_w a^4} - \frac{1}{C_w a^2} \right) C_1 (\cosh ax - \cosh aL) + \\
 & + C_2 \left[ \left( \frac{1}{D_w a^4} - \frac{1}{C_w a^2} \right) (x \sinh ax - L \sinh aL) - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{4}{D_w a^5} - \frac{2}{C_w a^3} \right) (\cosh ax - \cosh aL) \right] + \\
 & + \frac{q_0 - p}{24 D_w} (x^4 - L^4) + C_3 (x^2 - L^2) + C_4 + r(L) \quad (5-5)
 \end{aligned}$$

式中  $q_0$  和  $C_{1-4}$  为待定常数，由变形条件确定。而

$$a = \sqrt{\frac{2C_w C_b (D_w + D_b)}{D_w D_b (C_w + C_b)}}$$

比较式(5-5)于(5-4)易看出二者明显不同。

若要求得更精确的辊型曲线，可应用方程(3-19)、3-20)、(3-35)和(3-36)，因具体求法与上面相同，故此略。

## 5.2 可变凸度辊型设计法

可变凸度原始辊型是近年来出现的一种新式辊型。这种辊型能通过工作辊的轴向移动改变辊缝的原始凸度，因而提高了轧辊的板形控制能力。其中最典型的可变凸度辊型就是 CVC(连续可变凸度)辊型。国内外研究和介绍可变凸度辊型的文献很多<sup>[9, 10, 143-166, 168]</sup>，文献[9]中还基于多项式函数提出了一种辊型理论。但由于没有精确的轧辊弹性变形解析理论的支持，现有的各种理论

和方法都还不能结合实际轧辊挠度曲线设计原始辊型。下面先给出一种完整而简便的 CVC 辊型曲线设计方法,然后再运用第 3 和第 4 章中的轧辊弹性变形解析理论和方法,导出一种与工作辊变形一致的新型连续可变凸度原始辊型曲线。

### 5.2.1 CVC 原始辊型曲线设计

如何确定 CVC 四辊轧机工作辊辊型曲线是 CVC 轧机的一项关键技术。国内外研究和介绍 CVC 轧机的文章虽然不少,但都没给出具体设计和计算公式。文献[9, 162, 166, 168]虽然给出了一些 CVC 辊型曲线的计算公式,有的还给出了推导过程,但推导过程较烦琐。而且我们在实践中还发现,公式中个别参数的确定方法并不十分完善,按文献中给出的公式计算所得到的结果与外商提供的 CVC 曲线数据还有较大差距。文献[161]虽精确地破译了 CVC 曲线,但未给出破译方法。现根据 CVC 轧机的工作原理及板带的轧制要求,直接推导出与外商提供的 CVC 轧机工作辊辊型曲线完全吻合的计算公式。

#### 5.2.1.1 CVC 辊型曲线设计的基本原理

所谓辊型曲线,就是形成轧辊表面的母线。实际轧制时,一般要求轧出板带断面厚度沿宽度方向分布均匀或对称于机架中心线。反对称形状的工作辊则不仅能满足均匀性和对称性这一基本要求,还可通过工作辊的轴向移动改变辊缝形状和凸度,并且保持厚度的均匀性和对称性。这就是 CVC 轧机板形控制的基本工作原理。根据这一基本原理,凡是反对称的函数曲线均可用作 CVC 工作辊的辊型曲线。立方抛物线是最简单的一种反对称曲线,故现有的 CVC 轧机大都采用立方抛物线作为 CVC 轧机工作辊的辊型曲线。

辊型曲线一般用工作辊的半径表示。立方抛物线工作辊型可表示为:

$$R(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

其中  $R(x)$  为工作辊半径,  $x$  为沿工作辊轴线的坐标,

$a_0, a_1, a_2, a_3$  均为待定常数。

### 5.2.1.2 辊型曲线的推导

如图 5-2 所示, 上工作辊辊型曲线可表示为

$$R_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (5-6)$$

由反对称性可得到下辊曲线

$$R_2(x) = R_1(B_0 - x) \quad (5-7)$$

其中  $B_0$  为工作辊有效工作长度, 它等于轧机最大轧制板宽加上工作辊的抽辊距离。于是原始辊缝厚度可用辊缝函数表示为

$$\begin{aligned} G(x, s) &= D - R_1(x + s) - R_2(x - s) \\ &= D - R_1(x + s) - R_1(B_0 - x + s) \end{aligned} \quad (5-8a)$$

将式 (5-6) 和 (5-7) 代入后, 得

$$\begin{aligned} G(x, s) &= D - 2a_0 - a_1(B_0 + 2s) - \\ &\quad - a_2(B_0^2 + 2s + s^2) - a_3[(B_0 + s)^3 + s^3] + \\ &\quad + [2a_2 + 3a_3(2B_0s + B_0^2)]x - [a_2 + 3a_3(B_0 + 2s)]x^2 \end{aligned} \quad (5-8b)$$

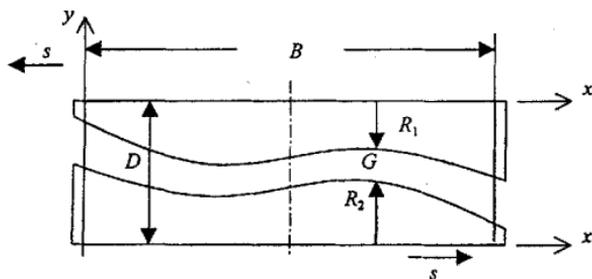


图 5-2 CVC 轧机工作辊和辊缝示意图

其中  $D$  为两工作辊轴心线之间的距离,  $s$  为抽辊距离, 以图示方向为正。当板宽为  $B$  时, 按中凸度的定义可得到原始中凸度的表

达式

$$C(B, s) = G\left(\frac{B_0}{2}, s\right) - G\left(\frac{B_0 - B}{2}, s\right) = \frac{B^2}{2} \left[ a_2 + 3\left(s + \frac{B_0}{2}\right) a_3 \right] \quad (5-9)$$

由(5-9)式可看出, 传统的二次抛物线工作辊型 ( $a_3 = 0$ ) 不能通过工作辊轴向移动改变辊缝凸度。

下面来求待定系数  $a_0, a_1, a_2, a_3$ 。首先, 根据抽辊距离的限制, 有限制条件

$$-s_m \leq s \leq +s_m$$

$s_m$  为最大移辊距离。再根据凸度控制范围的设计要求

$$C_n \leq C(B, s) \leq C_m$$

还可得到条件方程

$$C(B_0, -s_m) = C_n$$

$$C(B_0, +s_m) = C_m$$

即

$$\begin{aligned} \frac{B_0^2}{2} [a_2 - 3a_3 \left(\frac{B_0}{2} + s_m\right)] &= C_m \\ \frac{B_0^2}{2} [a_2 - 3a_3 \left(\frac{B_0}{2} - s_m\right)] &= C_n \end{aligned} \quad (5-10)$$

解方程组(5-10), 即求得

$$a_2 = \frac{1}{B_0^2} [(C_m + C_n) - \frac{B_0}{2s_m} (C_m - C_n)] \quad (5-11)$$

$$a_3 = \frac{1}{3B_0^2 s_m} (C_m - C_n) \quad (5-12)$$

关于  $a_1$  的求解, 以前的文献都认为要由使辊径差最小的极值条件来确定, 并且要求(5-6)和(5-7)式的极值。但如何由极值条件确定  $a_1$  却没给出十分明确的算法, 且按所给公式算出的  $a_1$

值误差相当大。下面介绍一种确定  $a_1$  的简便方法，能得到与外商提供的 CVC 曲线完全一致的结果。

其实，辊径差应由轧制工艺条件和技术要求确定，而不是由 CVC 曲线确定。而且由立方抛物线的性质可知，由辊型曲线造成的最大辊径差可能在曲线两端，也可在与曲线的极值点相应的地

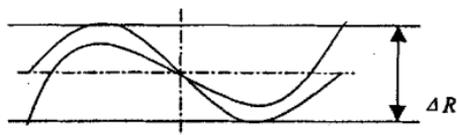


图 5-3 辊径差示意图

方。图 5-3 中的两条曲线是同一条曲线旋转而成的，由此可以看出，在辊径差  $\Delta R$  一定的条件下，由曲线两端确定最大允许辊径差，得到的辊面中部较平滑。边部虽较陡，但板带轧制一般都在辊身中部，边部还可通过修形进行改善。在我们见到的 CVC 轧机上实际也正是这样处理的，这一点在 CVC 轧辊设计图纸及实物上都得到了证实。

因此，若已知最大允许辊径差为  $\Delta R$ ，则由上述讨论可令

$$\Delta R = R_1(B_0) - R_1(0) = B_0(a_1 + a_2 B_0 + a_3 B_0^2)$$

由此解得

$$a_1 = \frac{1}{B_0}(\Delta R - a_2 B_0^2 - a_3 B_0^3) \quad (5-13)$$

至于  $a_0$  则可由工作辊辊径的设计要求确定。事实上

$$a_0 = R_1(0) \quad (5-14)$$

我们根据以上公式 (5-11) ~ (5-14) 对某厂引进的 CVC 轧机的工作辊进行了实际计算，计算结果与外商提供的原始数据完全一致（见下表）。

表 5-1

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
外商提供值	$0.934444 \times 10^{-3}$	$0.99405 \times 10^{-6}$	$0.317271 \times 10^{-9}$
破译值	$3927 / 2050^2$	$21 / 21012500$	$1 / 3151875000$

因破译值与外商提供的值完全相同，故表中破译值给出的是分数表达式。

## 5.2.2 双曲线原始辊型设计

### 5.2.2.1 基本原理

由原始辊型设计原则及式(5-8)和(5-9)可知，CVC 辊型曲线是在假定辊缝或工作辊挠度曲线为二次抛物线的基础上设计的，其原始辊缝和凸度都可用抛物线表示。然而我们已经在第 4 章中证明，工作辊挠度或辊缝都难以用多项式精确表达，而应该用双曲函数精确表示，因此我们可根据移辊式可变凸度原始辊型设计原理，按双曲函数设计原始辊型，从而得到一种新型可变凸度原始辊型曲线。

### 5.2.2.2 辊型曲线的推导

根据式(4-12)，设已知有载辊缝为

$$h(x) = H_0 - 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} C_i \cosh \lambda_i x + C_4 x^2 + C_0 \quad (5-15)$$

按照移辊式可变凸度工作辊原始辊型设计原理，反对称曲线一般均可用作可变凸度辊型曲线。因双曲正弦函数就是一种反对称函数，而且辊型函数可用工作辊半径表示，于是设上工作辊半径(参见图 5-4)

$$r_1(x) = \sum_{i=1}^3 C_{hi} c_i \sinh \lambda_i (x + s + s_0) + r_0 + ax^2 \quad (5-16)$$

从前面几章中轧辊弹性变形解析过程可知，式(5-15)和(5-16)中  $C_{hi}$  和  $\lambda_i$  都是只与轧辊刚度有关的固有常数， $r_0$  可由工作辊的设计尺寸确定。所以下面只需讨论  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )、 $a$  和  $s_0$  (辊型曲线的反对称中心线与机架中心线或辊缝对称中心纵坐标之间

的距离) 的确定方法。

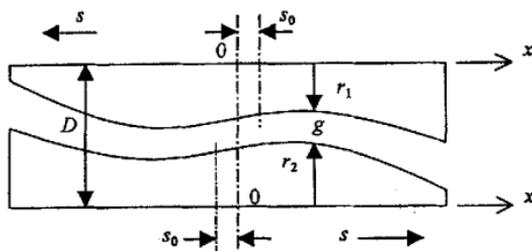


图 5-4 工作辊辊型曲线示意图

下工作辊辊型曲线应与上工作辊的反对称, 所以

$$r_2(x) = r_1(-x) \quad (5-17)$$

于是当工作辊移动量为  $s$  时, 原始辊缝为

$$g(x, s) = D - [r_1(x) + r_2(x)] = D - [r_1(x) + r_1(-x)] \quad (5-18)$$

将式 (5-16) 代入, 整理后得

$$g(x, s) = D - 2r_0 - 2ax^2 - 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} c_i \sinh \lambda_i (s + s_0) \cosh \lambda_i x \quad (5-19)$$

原始辊缝中凸度为

$$\begin{aligned} Cr(s) &= g(0, s) - g(B, s) \\ &= 2aB^2 + 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} c_i \sinh[\lambda_i (s + s_0)] [\cosh(\lambda_i B) - 1] \end{aligned} \quad (5-20)$$

为使原始辊缝能抵消轧辊弹性变形, 必须有

$$h(x) + g(x, s) = Const \quad (5-21)$$

于是由方程 (5-15)、(5-19) 和 (5-21) 解得

$$a = \frac{C_4}{2}$$

$$c_i = -\frac{C_i}{\sinh \lambda_i (s + s_0)}, \quad i = 1, 2, 3$$

若工作辊移动量  $s = 0$  时要求原始辊缝中凸度为  $Cr_0$ ，移动量为最大值  $s_m$  和最小值  $s_n$  时中凸度分别为  $Cr_m$  和  $Cr_n$ ，则可得到下列三个方程

$$Cr(0) = Cr_0, \quad Cr(s_m) = Cr_m, \quad Cr(s_n) = Cr_n \quad (5-22)$$

联立求解这三个方程，就可求出  $s_0$  的值。

### 5.2.2.3 双曲辊型的变型与简化

根据第 3、4 章中轧辊弹性变形的精确解析理论，有载辊缝的解析解依照具体情况有好几种形式。若求得的轧辊弹性变形方程与 (5-15) 不同，仍可按上述方法求解工作辊的原始辊型曲线。在特殊情况下还可获得简化的辊型曲线。比如，令轧制压力均布，或干脆就设

$$r_1(x) = r_0 + \sum_{i=1}^3 \sinh \lambda_i (x + s + s_0) \quad (5-23)$$

这样虽然简单，但板形控制效果要差一些，控制方法也会有所不同。

此外，将双曲辊型与立方抛物线辊型叠加，还能得到一种复合辊型。因推导方法相同，故此处从略。

## 5.3 双曲线原始辊型的几个特点

- ① 因双曲线辊型是按有载辊缝的精确解析解设计的，所以容易获得较平直的辊缝。
- ② 可变凸度双曲辊型能根据工作辊弹性变形进行调整，故容易控制各种板形缺陷。
- ③ 双曲线辊型及其参数的确定较灵活，而且参数的确定与轧辊的尺寸和轧机的工艺参数有关，故可满足各种不同的板形控制要求。
- ④ 由双曲线的特性可知，较小的移辊量就可获得较大的凸度变化，而且双曲线的拐点处比较平滑，有利于磨辊。

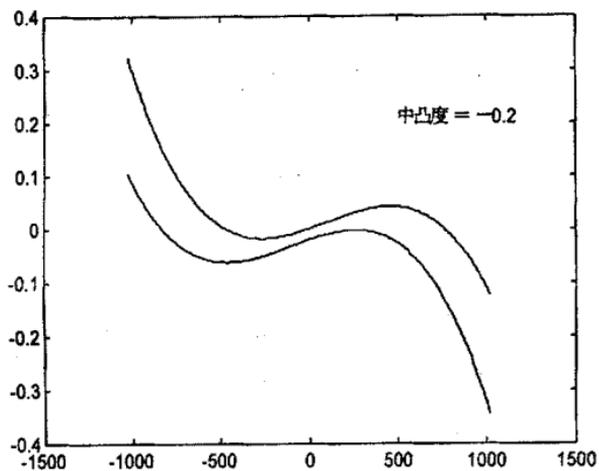


图 5-5a CVC 立方抛物线辊缝 (移辊量为 0)

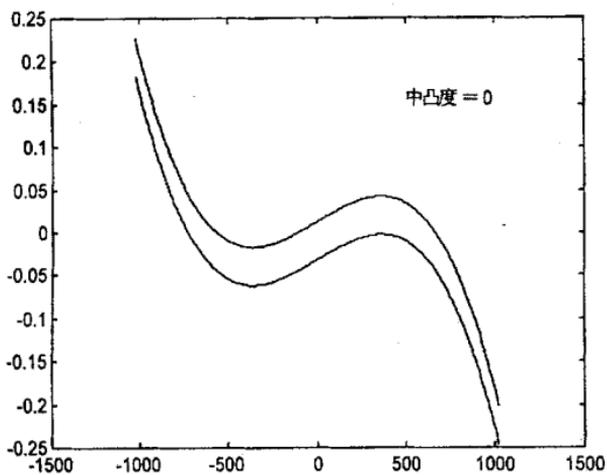


图 5-5b CVC 立方抛物线辊缝 (移辊量为 100)

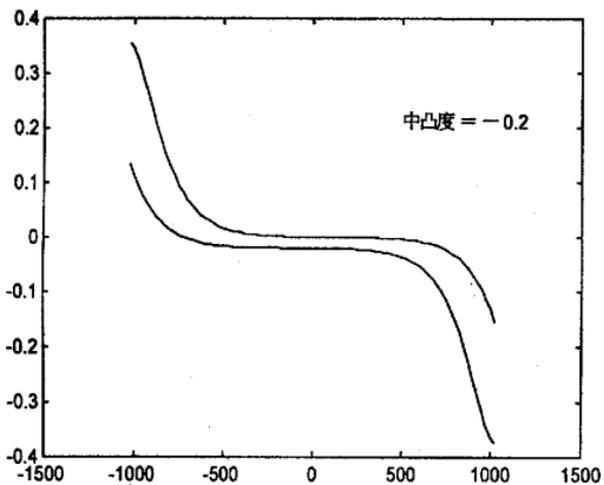


图 5-6a 双曲辊缝 (移辊量为 0)

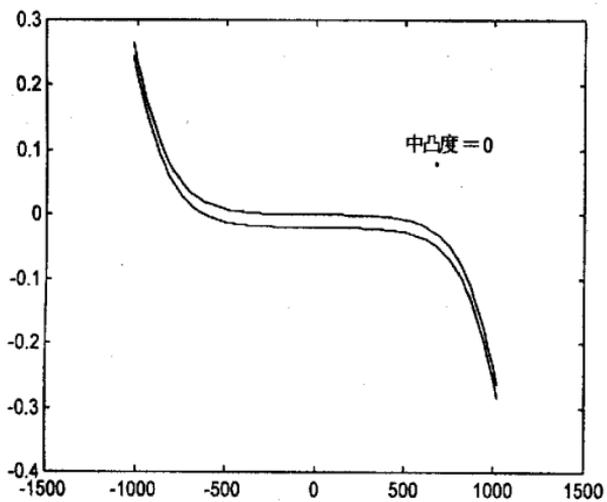


图 5-6b 双曲辊缝 (移辊量为 100)

图 5-5 和图 5-6 分别是 CVC 立方抛物线辊型形成的立方抛物线辊缝及双曲辊型形成的双曲辊缝。它们是为同一台轧机设计的、按不同辊型绘制的原始辊缝图。两种辊型的移辊范围、凸度控制范围及移辊量为零时的凸度都相同。从图中即可以看出双曲辊型的上述特点。

关于双曲线原始辊型的板形控制特性，还将在下一章详细研究。

#### 5.4 小结

本章根据第 2 章 ~ 第 4 章中新提出的轧辊弹性变形解析理论，研究出了一种新式辊型——双曲辊型及其设计方法。并且完整地破译了 CVC 辊型曲线，完善了现有 CVC 辊型的设计方法。最后将双曲辊型与 CVC 辊型比较，说明了双曲辊型的优越特性。

这种新型辊型——双曲辊型正在申请专利。

## 第6章 板形控制解析模型

轧出板带的形状取决于辊缝的形状，所以控制辊缝就能控制板形。但以前由于没有精确的辊缝解析模型，只能在数值计算和经验的基础上假定辊缝的形状。尽管人们早已发现多项式不能精确地描述辊缝<sup>[16]</sup>，但多项式目前仍是人们最常用的辊缝模型，并在此基础上定义和控制板形。近年来虽然提出了许多精确的数值计算方法和控制方法，但因多项式辊缝模型本身不精确，所以控制效果仍不十分理想。

为了得到更精确的板形控制模型，本章将应用第4章中求出的辊缝精确解析解，建立以往难以得到的板形控制解析模型；并在解析模型的基础上，定义新的板凸度概念，研究新的、更精确的板形控制方法。

### 6.1 广义板凸度概念及板形模式

板形控制需要板形的量化指标，所以在研究板形控制方法之前必须首先研究板形的概念。板形含有板带断面形状和表面平整度这两层意思。断面形状一般用凸度衡量，平整度则用延伸率差或残余应力表示。断面形状和平整度之间、或压下率于延伸率之间是相互联系的，通过辊缝控制控制压下率或断面形状就可以控制延伸率或平整度。因此实践中常通过辊缝凸度控制板形。

凸度就是板带断面的厚差或辊缝开度差，它也可转换为断面延伸率差。利用辊缝的解析解表示板带的厚度，我们可以将凸度和延伸率的位置对应起来，以板带边部为基准，把板带上某一点

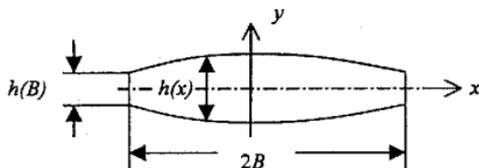


图 6-1 板凸度示意图

的凸度统一定义为该点的厚度与板带边部厚度之差(参见图 6-1), 即

$$Cr(x) = h(x) - h(B) \quad (6-1)$$

按照上述定义, 就可建立某一点的延伸率差与凸度之间对应关系, 非常便于板形控制。在式(6-1)中令  $x = 0$ , 就得到了中凸度, 所以新定义包含了原有的定义。

前面已经证明, 对于不同的轧机  $h(x)$  的解析式可能不同。以式(4-12)为例代入式(6-1), 可得到凸度的具体表达式

$$Cr(x) = 2 \sum_{i=1}^3 (C_{\gamma_i} - kC_{\rho_i}) C_i (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_4 B^2 \quad (6-2a)$$

或简写为

$$Cr(x) = 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} C_i (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_4 B^2 \quad (6-2b)$$

式中,  $C_{hi} = C_{\gamma_i} - C_{\rho_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ )。若再考虑双曲辊型, 则

$$Cr(x) = 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} [C_i + C_{i+3} \sinh \lambda_i (S + S_0)] (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_4 x^2 \quad (6-2c)$$

按(6-1)式定义的凸度能反映板带横断面上所有点的凸度值, 它的意义比以前更广, 不需要象以往那样再定义高次凸度。而且按(6-2)式将凸度定义具体化之后, 能描述各种板形模式。从而一举解决了高次凸度和板形模式两个问题。本章后面还要详细研究在这种定义下的板形控制方法。

## 6.2 板形良好条件的解析表达式

实际中常用的板形良好条件是板带沿宽度上各点的压下率相等。其表达式为

$$\frac{\Delta h(x)}{H(x)} = Const \quad \text{或} \quad \frac{Cr(x)}{cr(x)} = Const \quad (6-3)$$

其中  $H(x)$  为来料厚度,  $Cr(x)$ 、 $cr(x)$  分别为轧制前、后板带凸度。若考虑宽展, 则板形良好条件的表达式会变得十分复杂<sup>[12]</sup>, 不便于应用。大量的实验与理论计算证明, 在薄板轧制过程中, 金属的横向流动对改善板形有良好的作用<sup>[13]</sup>, (6-3) 式只要近似地满足就可获得良好的板形。按 (6-3) 式控制板形一般能够满足实际生产的要求。

设来料凸度为 (6-2) 式, 轧后凸度为

$$cr(x) = 2 \sum_{i=1}^3 c_{hi} c_i (\cosh \gamma_i B - \cosh \gamma_i x) + c_4 B^2 \quad (6-4)$$

将式 (6-2) 和 (6-4) 代入 (6-3), 即可得到用轧辊尺寸及轧制工艺参数表示的板形良好条件:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} C_i (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_4 B^2 \\ & = C \left[ 2 \sum_{i=1}^3 c_{hi} c_i (\cosh \gamma_i B - \cosh \gamma_i x) + c_4 B^2 \right] \quad (6-5) \end{aligned}$$

其中  $C$  为常数。若将工作辊磨削成双曲辊型, 则利用式 (5-19) 还可将板形良好条件表示为

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} [C_i + C_{i+3} \sinh \lambda_i (S + S_0)] (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_7 x^2 \\ & = C \left[ 2 \sum_{i=1}^3 c_{hi} [c_i + c_{i+3} \sinh \gamma_i (s + s_0)] (\cosh \gamma_i B - \cosh \gamma_i x) + c_7 x^2 \right] \quad (6-6) \end{aligned}$$

式中  $C, S, S_0, s, s_0, C_i, c_i (i=1, 2, 3, \dots)$  都是工艺参数或可由工艺参数调节的常数;  $\gamma_i, \lambda_i, C_{hi}, c_{hi} (i=1, 2, 3)$  则是由轧机刚度确定的固有常数。从式 (6-5) 和 (6-6) 可以看出, 如果轧制前后两台轧机的刚度相同, 或者是在同一台轧机上轧制, 则比较容易通过工艺参数的调节获得良好的板形。

### 6.3 板形控制解析模型

根据不同的凸度概念，可得到不同的板形控制模型。因 CVC 轧机是一种典型的轴向移动式可变凸度轧机，所以下面先以 CVC 轧机为例，按传统的凸度概念求解其板形控制模型，然后按 (6-1) 式定义的广义凸度概念，研究新的板形控制方法和解析模型。

#### 6.3.1 CVC 轧机板形控制解析解耦模型

由于工作辊抽动与弯辊作用之间的复杂关系，使得 CVC 轧机辊缝的精确控制变得特别复杂。抽辊和弯辊相互耦合作用能扩大板带平直度控制范围，却增加了控制的难度。CVC 四辊轧机工作辊抽动与工作辊弯辊之间相互作用关系的解耦，对实现理想的板带平直度控制是十分重要的。下面通过对辊缝形状的解析分析，边波和中波的组合。CVC 工作辊抽动主要改变二次板形误差。按传统凸度定义建立一个明确表示工作辊抽动和弯辊作用的解析解耦模型。该模型可用于 CVC 四辊轧机板厚板形在线综合控制。

CVC 轧机板形常用四次多项式表示。四次多项式中的二次项和四次项的系数分别表示二次和四次凸度。CVC 工作辊弯辊影响二次项板形误差（边波和中波）以及四次项误差（四分之一波或为了精确控制辊缝，必须解决由工作辊抽动和弯辊相互耦合作用于辊缝造成的板形控制难题。

##### 6.3.1.1 CVC 辊缝模型

如图 6-2 所示，假设轧制压力均匀分布，即

$$p = (P - F) / B \quad (6-7)$$

式中

$P$  = 轧制力，

$F$  = 作用在工作辊上的弯辊力，

$B$  = 板带宽度。

将力辊缝 (4-9) 式与原始辊缝 (5-8) 式叠加并整理后得到 CVC 辊缝方程

$$h(x) = c_0 + c_1 \cosh \lambda x + c_2 (d_1 x \sinh \lambda x + d_2 \cosh \lambda x) + c_3 x^2 + c_4 x^4 + f_1(S) + x^2 f_2(S) \quad (6-8)$$

其中  $f_1(S)$  和  $f_2(S)$  易由 (5-8) 式知均为 CVC 辊移动距离  $S$  的函数。

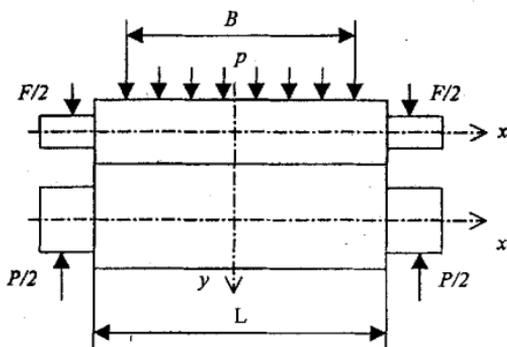


图 6-2 CVC 轧机辊缝计算力学模型示意图

### 6.3.1.2 板形误差模型<sup>[9, 10, 161]</sup>

二次和四次板形误差可分别用二次和四次板凸度表示。二次凸度

$$C_2 = h(0) - h(0.5B) \quad (6-9)$$

四次凸度

$$C_4 = h(0.25B) - 0.75h(0) - 0.25h(0.5B) \quad (6-10)$$

由方程 (4-7)、(6-7)~(6-9)，我们可以最终得到

$$C_2 = a_0 + a_1 S + a_2 F + a_3 P \quad (6-11)$$

$$C_4 = b_0 + b_1 S + b_2 F + b_3 P \quad (6-12)$$

其中,  $a_{0-3}$  和  $b_{0-3}$  为轧机结构常数。式中所表达的凸度与抽辊量、弯辊力及轧制力之间的解析关系与实验及理论回归结果完全吻合<sup>[165]</sup>。

### 6.3.1.3 板形控制模型

联立求解方程 (6-7)、(6-11) 和 (6-12), 即可得到板厚板形综合控制模型

$$F = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{D} - \frac{b_1}{D} C_2 + \frac{a_1}{D} C_4 - \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{D} Bp \quad (6-13)$$

$$P = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{D} - \frac{b_1}{D} C_2 + \frac{a_1}{D} C_4 + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{D} Bp \quad (6-14)$$

$$S = \frac{a_1 b_0 (a_1 + a_2) - a_0 [a_1 (b_2 + b_3) + b_1 (a_1 - a_3)]}{a_1 D} + \\ + \frac{a_1 (b_2 + b_3) + b_1 (a_1 - a_3)}{a_1 D} C_2 - \frac{a_1 + a_2}{D} C_4 + \\ + \frac{a_1 b_3 (a_1 + a_2) - a_3 [a_1 (b_2 + b_3) + b_1 (a_1 - a_3)]}{a_1 D} Bp \quad (6-15)$$

其中

$$D = a_1 (b_2 + b_3) - b_1 (a_2 + a_3)$$

因此, 如果已知要求达到的二次凸度  $C_2$ 、四次凸度  $C_4$  及轧制分布压力  $p$  (或要求的板带厚度), 就可利用上述解析解耦模型, 设定轧制力  $P$ , 抽辊量  $S$  和弯辊力  $F$ 。

若力辊缝取其它形式, 仍可按上述方法求得相似的结果。

### 6.3.2 求解板形控制解析模型的一般方法

通常板形仪检测到的是板带横向  $n$  个点的张应力  $\sigma(x_1) \sim \sigma(x_n)$ 。将各测点张应力与设定值  $\sigma_s(x_1) \sim \sigma_s(x_n)$  比较, 即得到相应的调节偏差  $\Delta \sigma_1 \sim \Delta \sigma_n$ 。根据轧制理论求出某点凸度与张应力的关系, 确定与各点张应力偏差对应的凸度偏差, 就可由板形控制系统按凸度控制模型消除板形偏差。

板形控制模型可由凸度模型得到。因为已经有了辊缝和凸度的解析表达式, 所以我们现在不需借助多项式就可以直接由式 (6-2) 建立板形控制解析模型。

设由板形仪测得的  $n$  个凸度值为  $Cr(x_1) \sim Cr(x_n)$ , 按式 (6-2b) 和 (6-2c) 进行曲线拟合后分别得到

$$Cr(x) = 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} C_i (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_4 B^2 \quad (6-16a)$$

$$Cr(x) = 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} [C_i + C_{i+3} \sinh \lambda_i (S + S_0)] (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_7 x^2 \quad (6-16b)$$

按要求设定的标准凸度偏差分别为

$$Cr_s(x) = 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} C_{s_i} (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_4 B^2 \quad (6-17a)$$

$$Cr_s(x) = 2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} [C_{s_i} + C_{s_{i+3}} \sinh \lambda_i (S + S_0)] (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + C_7 x^2 \quad (6-17b)$$

令凸度偏差为零, 则有  $Cr(x) - Cr_s(x) = 0$ , 即

$$2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} (C_i - C_{s_i}) (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + (C_4 - C_{s_4}) B^2 = 0 \quad (6-18a)$$

以及

$$2 \sum_{i=1}^3 C_{hi} [(C_i - C_{s_i}) + (C_{i+3} - C_{s_{i+3}}) \sinh \lambda_i (S + S_0)] \times \\ \times (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x) + (C_7 - C_{s_7}) x^2 = 0 \quad (6-18b)$$

当然, 如果辊缝解析函数、原始辊型及板形控制机构不同, 方程(6-18)可采取不同的形式。

由辊缝的解析过程或方程(4-7)可知, 方程(6-18)中的系数  $C_i$  都是板形控制机构控制变量及所有对板形有影响的变量的函数。设

$$C_i = f_i(P_l, P_r, F_{wl}, F_{wr}, F_{bl}, F_{br}, \dots), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6-19)$$

括号内符号的意义依次为左、右压力, 左、右工作辊弯辊力, 左、右支承辊弯辊力。这些变量的选择可视具体情况而定。于是, 根据轧机导出式(6-19)的具体表达式后, 就可由(6-18)和(6-19)

式得到确定板形控制变量的板形控制解析模型

$$f_i(P_i, P_r, F_{wi}, F_{wr}, F_{bi}, F_{br}, \dots) = C s_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6-20)$$

将式(6-20)与确定轧制压力和板厚的方程联立, 则可得到板形板厚综合控制模型。因这种模型是根据反馈信号调节的, 所以属于反馈模型。

如果在式(6-19)中还考虑移辊量, 控制模型(6-20)就会变得比较复杂。而且一般在轧制前按要求设定好移辊量后, 轧辊在轧制时就不再移动。这样不仅可以减小磨损, 还可减小轧辊轴承的轴向力。所以, 一般不考虑在轧制过程中调节移辊量。

#### 6.4 板形控制策略及预设定模型

由于上面求得的板形控制解析模型都是解耦模型, 板形控制变量一般都可以确定地解出来。因此, 除了在确定凸度方程(6-2)及求解方程(6-20)时需要一些方法或策略外, 一般不需要专门的控制策略。

板形预设定控制模型易由板形良好条件或式(6-5)和(6-6)导出。根据式(6-5)有

$$c_i = \frac{C_{hi} C_i (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x)}{C c_{hi} (\cosh \gamma_i B - \cosh \gamma_i x)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6-21a)$$

$$C_4 = C c_4 \quad (6-21b)$$

根据式(6-6), 有

$$\begin{aligned} c_i + c_{i+3} \sinh \gamma_i (s + s_0) \\ = \frac{C_{hi} [C_i - C_{i+3} \sinh \lambda_i (S + S_0)] (\cosh \lambda_i B - \cosh \lambda_i x)}{C c_{hi} (\cosh \gamma_i B - \cosh \gamma_i x)}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6-22a)$$

$$C_7 = C c_7 \quad (6-22b)$$

从式(6-21)和(6-22)可以看出, 当前后两道次的轧机轧辊刚度相同时, 即  $C_{hi} = c_{hi}$ ,  $\lambda_i = \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 时,  $c_i$  ( $i =$

1, 2, 3, ...) 有确定的解, 板形良好条件始终能得到满足, 并且可以由方程 (6-19) 解出各个板形控制变量的预设值。

当前后两个道次的轧机轧辊刚度不相同, 板形良好条件虽难以完全得到满足, 但仍可近似满足。此时可选择一组需要控制的关键点  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , 代入方程 (6-21) 和 (6-22), 解出系数  $c_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  后, 再由方程 (6-19) 求得板形控制变量的预设近似值。因此, 只要将方程 (6-19)、(6-21) 及 (6-22) 联立, 就构成板形控制预设模型。将方程 (6-19)、(6-21) 及 (6-22) 再与轧制压力或板厚方程联立, 还能构成板形板厚预设综合控制模型。预设模型和反馈模型一起则构成更完整的控制模型。

以上讨论的是预设模型的建立方法, 模型的具体形式将依具体的轧机而定。

## 6.5 小结

本章前面几章新提出的轧辊弹性变形解析理论上, 首先扩展了板凸度的概念, 简化了板形模式的判别方法, 然后按广义凸度的概念给出了板形良好条件的具体解析表达式。最后给出了包括预设解析模型在内的板形控制解析解耦模型, 提出了建立板形板厚综合控制解析解耦模型的方法。

## 结 束 语

辊间压力和压扁的计算可以说是轧辊弹性变形理论的核心。它是区别各种不同轧辊弹性变形理论和方法的一个重要标志，是决定轧辊弹性变形计算精度的关键因素。但由于受传统计算方法和公式的束缚，这个问题一直未能圆满解决，它仍是阻止人们提高板形控制模型精度的一个难以逾越的障碍。我们以攻克这个多年来挡在我们面前的难关为突破口，解决了一系列与此有关的难题，得到了一些新的、有意义的结果。总结前面各章的工作，可将我们的主要创新成果归纳如下：

1. 创立了一个更精确的轧辊弹性变形解析理论，并通过试验证明了其精确性。该理论包括下列最新结果：

- (1) 辊间压扁系数计算公式；
- (2) 辊间压力分布函数解析表达式；
- (3) 轧制压力分布函数解析表达式；
- (4) 轧辊弹性变形精确解解析法及解析公式；

并从理论和试验上证明：

- (1) 辊间压力和辊间压扁之间存在着精确的线性关系；
- (2) Föpl 等计算辊间压力和压扁的传统公式和方法不仅不比线性公式更精确，而且还与轧辊弹性变形条件相矛盾；
- (3) 用多项式表示轧制压力、辊间压力及辊缝不仅误差较大，而且也会与轧辊弹性变形条件相矛盾。

2. 应用新的轧辊弹性变形解析理论于板形控制，提出了以下新的概念、模型和方法：

- (1) 双曲辊型及其设计方法；
- (2) 广义板凸度概念；
- (3) 与辊缝解析表达式相应的板形模式；
- (4) 可用于板形模式判别的板形良好条件的具体解析表达式；
- (5) 板形控制解析解耦模型及其建立方法。

3. 完整的 CVC 轧机辊型设计方法。该方法可精确确定辊型曲线中的各个系数。

## 参考文献

- 1 陈先霖. 新一代高技术薄带冷轧机的发展趋向. 上海金属, 1995. 17 (4) : 1~8
- 2 金元德. 板形板凸度控制技术的发展(一). 国外钢铁, 1997. 8 : 39~46
- 3 金元德. 板形板凸度控制技术的发展(二). 国外钢铁, 1997. 9 : 11: 225~289
- 4 [日本]星野, 郁弥. 铝轧制技术的发展与课题. 轻合金加工技术, 1992, Vol.20, No1: 29~37
- 5 [日本]铃木 弘. 板带轧制的凸度控制和板形控制技术. 铜加工, 1982 (板形控制专辑)
- 6 王国栋. 板形控制和板形理论. 北京: 冶金工业出版社, 1986
- 7 肖跃发, 钟掘. 轧机变形控制技术的发展. 中南矿冶学院学报, 1989.6 (增) : 100~119
- 8 于秋林. 四辊轧机辊系弹性变形的理论与实验研究. 东北重型机械学院工学博士学位论文, 1990.5
- 9 张杰. CVC 轧机辊形与板形的研究, 北京科技大学博士学位论文, 1990.11: 60~
- 10 张清东. 宽带钢冷轧机板形自动控制系统的研究, 北京科技大学博士学位论文, 1994.5: 91~
- 11 邹家祥. 轧钢机现代设计理论. 北京: 冶金工业出版社, 1991: 80~99
- 12 连家创, 刘宏民. 板厚板形控制. 北京: 兵器工业出版社, 1996.4: 41~98
- 13 刘立文, 韩静涛, 贺毓辛. 冷轧板形控制理论的发展. 钢铁研究学报, 1997.12 : 51~54
- 14 日本钢铁协会. 板带轧制理论与实践. 中国铁道出版社, 1990.12
- 15 板带轧制科学与技术. 第四届国际轧钢会议论文集. 冶金工业出版社, 1990.7

16. William L. Roberts. Cold rolling of steel. Macel Dekker, Inc. New York, 1978: 461
17. J. W. Turly. Extracts from behavior of rolls in four-high rolling mills. Iron and Steel Engineer, October 1973: 61 ~ 65
18. Vladimir B. Ginzburg. Strip Profile Control with Flexible Edge Backup Rolls. Iron and Steel Engineer, July 1987, p 23 - 34
19. Masanori Kitahama, Ikuo Yarita, Hideo Abe, Hiroshi Awazuhara. Profile Control of hot Rolled Strip by Work Roll Shifting (K-WRS) Mill. Iron and Steel Engineer, November 1987, p 34 - 43
20. Toshiki Hiruta, Naoki Nakata, Masanori Kitahama, Ikuo Yarita. Influence of Rolling Mill Type on Rigidity Characteristics in Hot and Cold Strip Rolling. Iron and Steel Engineer, March 1996, p 32 - 37
21. Vladimir B. Ginzburg, Mario Azzam. Selection of Optimum Strip Profile and Flatness Technology for Rolling Mills. Iron and Steel Engineer, July 1997, p 30 - 38
22. Г. Д. Дутов, Расчет балок на упругом основании, Л., Издатльство. КУБУЧ, 1929
23. E. C. Lark. The rolling of strip, sheet & plate. The Macmillan Company, New York , 1957
24. D. Jortner. Doctoral dissertation. CIT, Pittsburg - mars 1958
25. C. F. Zorowski, A. S. Weistein. An analysis of the stress and deformation in work rolls. Iron and Steel Engineering, 38(1961): 99 ~
26. P. Chiu. Doctoral Dissertation. Carnegie Institute of technology. Pittsburg. Pa. July 1962
27. Y. P. Chiu, A. S. Weistein and O/. F. Zorowski. The stress, deformation and bending of a simply supported cylinder subjected to a symmetric normal surface loading. Int J Mech Sci, 1963, v5,119 ~ 136

28. Y. P. Chiu, A. S. Weistein, C. F. Zorowski. Elestic behaviour of a cylinder subjected to a biaxially symmetric normal surface loading. Quart J Mech and Applied Math, Vol xvii, Pt.2, 1964.2: 199 ~ 215
29. E. C. Lark. The rolling of strip, sheet and plate. Chapman and Hall Ltd, London, 1963: 71 ~ 113
30. M. D. Stone, R. Gray. Theory and practical aspects in crown controll. Iron and Steel Engr, August 1965
31. A. I. Tslikov, V. V. Smirnov. Rolling mills. Pergamon Press, London, 1965
32. Расчты на лрочность В машиностроении. Т. 2. М., Машгиз, 1956. 680 с. Авт.: С. Д. Пономарев, В. А. Биндерман, В. М. Макушин и др.
33. В. П. Полухин. Совместнос Влияние Диаметра Рабочего Валка и Щирины Прокатызаемой Полосы иа Распределение Межвалкового Давления и Прогиь Валков Станов Кварто. Сталь, 1964; (2)
34. А. В. Третьяков, Э. А. Гарьер. Расчет и Иссллования Валков Холодной Прокатки. Металлургиздат, Москва, 1966
35. А. В. Третьяков, и др. Прогиь Опорных Валков Четырех Валкового Стана. Сталь, 1972;(7)
36. Б. Н. Поляков, А. Ф. Трусов, В. М. Юбенкова. Теоретические Исследования Напряженно-деформированного Состояния Валковой Системы Стана Кварто ЧЕРНАЯ МЕТАЛЛУРГИЯ, 1983.12: 116 ~ 119
37. [苏联]П. И. 波卢欣 等著. 多辊轧机轧制. 郭鸿运, 王克智, 陈瑜 译. 北京: 冶金工业出版社, 1987.2:190 ~ 195
38. [苏联]А. И. 采利科夫 等著. 轧制原理手册. 王克智, 欧光辉, 张维静 译, 北京: 冶金工业出版社, 1989.7
39. 盐崎宏行ほか. 塑性と加工, 9 (1968), №88, 315
40. 本诚恒. 石川岛播磨技报, 13 (1973), №1, 41

41. 连家创. 四辊轧机的辊形设计及辊形调整. 重型机械, 1974.9: 22~24
42. 杨宗孟. 四辊轧机轧辊的接触问题及其挠度计算. 重型机械, 1977.5: 1~9
43. 连家创. 板形控制的理论基础. 冶金设备, 1980, 专(2): 71~89
44. 欧光辉. 四辊轧机支承辊变形的精确计算. 冶金设备, 1981.6: 39~45
45. 王国栋, 张树堂. 板形方程及其应用. 钢铁, 1981.10: 11~17
46. 孟宪源. 四辊轧机辊系挠度和液压弯辊力的合理确定. 冶金设备, 1983.5: 1~10
47. 钟春生, 李显忠. 四辊冷轧机最佳弯辊力的研究. 重型机械, 1983.9: 1~8
48. 苏逢西, 白家驹, 将金梅, 李同成, 高嵩. 板形方程与辊系刚度的研究. 北京钢铁学院报, 1984.4: 26~41
49. 肖跃发, 钟掘. 辊缝模型. 中南矿冶学院学报, 1989.6(增): 90~99
50. 施东成, 邹家祥. 轧钢机械理论与结构设计. 北京: 冶金工业出版社, 1993.4: 127~134
51. 娄燕雄. 轧制板形控制技术. 长沙: 中南工业大学出版社, 1993
52. 魏立群, 陆济民, 卢冬华. 板带宽度对板凸度的影响. 上海金属, 1994.9(5): 33~39
53. 石川孝司, 中村雅勇, 加藤憲明, 戸澤康壽, 加藤 隆. 各種圧延条件のもとにおける圧延圧力分布. 塑性と加工, vol.22, no.247(1981-8): 816~822
54. 幅方向の変形を考慮した板形状クラウンの計算方法. 松本紘美, 中島浩衛, 菊間敏夫, 上堀雄司. 塑性と加工. vol.23, no. 263(1982-12): 1201~1208
55. 戸澤康壽, 石川孝司, 岩田德利. 薄板圧延の3次元変形に対する改良した解析. 塑性と加工, vol.23 no.263

(1982-12) : 1181~1187

56. 西 英俊, 芳村泰嗣, 吉本健一, 二瓶充雄. 板形状特性の解析法と従来型圧延機の制御能. 塑性と加工, vol.23 no.263 (1982-12) : 1209~1215
57. 坂本信夫, 西村邦雄, 岩崎 守, 御園生 一 長. 極薄鋼板の冷間圧延における形状解析. 塑性と加工, vol.23 no.263 (1982-12) : 1230~1237
58. 水野高爾, 金藤秀司. ロールと薄板との間の接触幾何測定. 塑性と加工, vol.22 no.240 (1981-1) : 35~41
59. 水野高爾, 金藤秀司. 圧延圧力分布とロールの扁平変形の計算. 塑性と加工, vol.22 no.242 (1981-3) : 239~244
60. 水野高爾. ロールの接触変位と板の形状. 塑性と加工, vol.22 no.243 (1981-4) : 370~377
61. 戸澤康壽, 中村雅勇, 加藤 隆, 石川孝司, 伊藤泰成. 薄板圧延のロール入口上流における応力分布. 塑性と加工, vol.22 no.249 (1981-10) : 1030~1034
62. 湯川伸樹, 石川孝司, 戸澤康壽. 圧延板の残留応力に対する理論解析. 塑性と加工, Vol. 28 no. 312 (1987-1) : 28~33
63. 野本敏治, 安澤幸隆, 荻澤亘保. 耳波・中伸びの発生機構に関する解析的研究. 塑性と加工, Vol. 28 no. 312 (1987-1) : 58~66
64. G. P. Burnsmann. Lateral Material Flow During Cold Rolling of Strip. Iron and Steel Engineer, March 1972 : 67 - 71
65. Robert E. Johnson. Shape Forming and Lateral Spread in Sheet Rolling. Int. J. Mech. Sci. Vol.33, No. 6, pp. 449 - 469, 1991
66. T. L. Zaharoff, R. E. Johnson and M. E. Karabin. Spread in Sheet Rolling: A Comparison Using Experiments, Analytical Solutions and Numerical Techniques. Int. J. Mech. Sci. Vol.34, No. 6, pp. 435 - 442, 1992
67. 周順新, 钟掘. 板材轧制轧辊弹性压扁计算与计算方法研

- 究. 中南工业大学学报, 1995.5 (增): 47~52
68. 赵永和, 孙铁铠. 工作辊移动四辊轧机最佳板形控制参数的研究. 钢铁, 1992.8: 40~44
69. 邹家祥, 黄华清, 杨大可, 王开梓, 刘须柱, 邱美甘, 于光洋. 冷连轧机板形控制因素的实测及计算. 钢铁, 1985.4: 1~8
70. 乔端, 陈肖梅, 刘宝珩. 冷轧薄板的板形调整. 北京钢铁学院学报, 1982 (4): 101~112
71. 于秋林, 连家创. 四辊轧机轧辊应力及辊间接触压力分布光弹实验研究. 重型机械, 1991 (6): 11~14, 17
72. 倪守纪. 轧辊弹性压扁及最佳弯辊力的讨论. 重型机械, 19889 (11): 57~61
73. 邹家祥, 康贵信, 黄华清, 施东城, 罗达文. 四辊轧机的轧辊应力及辊间压力. 重型机械, 1983.8: 6~15
74. 瞿志豪, 彭惠红. 轧辊接触应力的混合法. 金属学报, 1992.5: 192~198
75. 刘慰俭, 彭惠红. 多辊轧机轧辊弹性压扁和辊间压力研究. 重型机械, 1993 (2): 26~31
76. Н. И. Мухелишвили. Некоторые Основные Задачи Математической Теории Упругости. Издательство Академии Наук СССР, Москва 1949 Ленинград: 301 - 308
77. И. Я. Штаерман. Контактная Задача Теории Упругости. Государственнре Издательство Технико-Теоретической Литературы, Москва 1949 Ленинград : 93 - 114
78. П. И. Грудев. Сб. Обработка Металлов Давлением. вып. 2. Металлургиздат, 1953, с. 200 -223
79. П. И. Грудев. Сб. Обработка Металлов Давлением. вып. 2. Металлургиздат, 1953, с. 224 -235
80. В. А. Никлаев, А. И. Безверхий. Изв. вуз. Черная Металлургия, 1979, No. 5, с. 76 - 79
81. В. А. Никлаев, А. И. Безверхий. Изв. вуз. Черная Металлургия, 1979, No. 7, с. 85 - 90

82. Л. А. Кузнецов, В. А. Пидменов. Изв. вуз. Черная  
Металлургия, 1981, No. 4, с. 78 - 80
83. С. Ф. Клейков. Изв. вуз. Черная Metallургия, 1981, No.  
4, с. 152 - 156
84. С. Ф. Клейков. Изв. вуз. Черная Metallургия, 1981, No.  
6, с. 139 - 144
85. 陈杰, 钟掘, 周鸿章, 谭大贵. CVC 四辊轧机有载辊缝解  
析模型. 重型机械, 1998.6: 42 ~ 44
86. 杜庆华. 弹性理论. 北京: 科学出版社, 1986
87. 铁摩辛柯, 古地尔著, 徐芝纶译. 弹性理论. 北京: 高等教  
育出版社, 1990
88. 王龙甫. 弹性理论. 北京: 科学出版社, 1979
89. 徐芝纶. 弹性力学. 北京: 人民教育出版社, 1979
90. 武际可, 王敏中. 弹性力学引论. 北京: 北京大学出版  
社, 1981
91. 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学. 北京: 科学出版社, 1956
92. 徐秉业, 黄炎, 刘信声, 孙学伟. 弹性力学及其应用. 北京:  
机械工业出版社, 1984
93. G. M. L. Gladwell 著, 范天佑译. 经典弹性理论中的接触  
问题. 北京: 北京理工大学出版社, 1991
94. 胡海昌. 弹性力学变分原理及其应用. 北京: 科学出版社,  
1981
95. [美]S. 铁摩辛柯, J. 盖尔 著. 胡人礼 译. 材料力学. 北京:  
科学出版社, 1978
96. [美]S. 铁摩辛柯 著. 汪一麟 译. 材料力学 (高等理论及  
问题). 北京: 科学出版社, 1979
97. 罗开彬. 考虑剪切变形时叠层梁层间接触压力分析. 力学  
与实践, 1987 (2): 34 ~ 38
98. 黄文彬, 彭卡平, 曾国平. 弹性梁间接触压力规律的研究.  
力学与实践, 1989 (1): 49 ~ 69
99. 罗建辉, 郑建龙. 考虑横向剪切变形影响非均匀变截面梁  
的弯曲问题. 湖南大学学报, 1989, Vol.16, No.2

100. 黄文彬, 曾国平. 对称截面梁在弯扭时的弹性接触分析. 力学学报, 1991.3: 173~180
101. 黄文彬, 曾国平, 彭卡平. 具有集中弯矩作用时弹性梁接触规律研究. 力学与实践, 1991(5): 13~16
102. 罗建辉, 钟正华, 韩军营. 考虑剪切变形影响的叠层梁层间接触应力研究. 力学与实践, 1991(5): 23~26
103. 朱宝安. 直梁横弯问题精确微分方程数学规划解. 力学与实践, 1993(2): 31~34
104. 黄文彬. 剪切变形在梁接触问题中的应用. 力学与实践, 1993(4): 43~46
105. 舒小平. 考虑摩擦时梁的接触应力研究. 力学与实践, 1993(5): 32~35
106. 舒小平. 摩擦对梁的接触问题的影响. 力学与实践, 1994(6): 33~35
107. 李辛, 黄文彬. 考虑摩擦作用是对具有集中弯矩作用下梁接触规律的研究. 力学与实践, 1995(3): 25~27
108. 黄传清, 连家创. 轴线交叉的两圆柱体的接触. 力学与实践, 1996(2): 27~29
109. 黄传清, 陈英杰. 表面粗糙层对两圆柱体接触的影响. 力学与实践, 1997(4): 29~31
110. 云天铨. 论 Hertz 接触问题解的不唯一性. 应用力学学报, 1990.9: 86~89
111. 云天铨. Hertz 接触问题的精确的积分方程. 应用数学和力学, 1991.2: 165~169
112. 李显方. Hertz 接触问题的解的唯一性条件. 应用力学学报, 1994.3: 114~117
113. 刘章俊, 余俊. 有限长凸形圆柱体的最佳接触轮廓. 机械工程学报, 1986.12: 1~10
114. 符晶, 王慧, 温诗铸. 任意弹性表面接触问题的数值解法及对滚子修缘的分析. 轴承, 1990(1): 6~12
115. 吴立言, 陈国定, 王步瀛, 李建华, 周鸿. 圆柱体接触问题中弹性趋近量的计算. 机械强度, 1992.6: 21~22, 30

116. M. Braun 著, 张鸿林 译. 微分方程及其应用. 北京: 人民教育出版社, 1980
117. J. Э. 艾利斯哥尔兹 著, 南开大学数学系编译中队 译, 崔士英 校. 北京: 人民教育出版社, 1959
118. W. Flugge. Handbook of Engineering Mechanics. McGraw - Hill Book Co., Inc., NY 1962
119. R. D. Mindlin. Compliance of Elastic Bodies in Contact. Journal of Applied Mechanics, September 1949 / 259
120. H. Poritsky. Stresses and Deflections of Cylindrical Bodies in Contact With Application to Contact of gears and of Locomotive Wheels. Journal of Applied Mechanics, June 1950 / 191
121. Tsu-Tao Loo, N. Y. Troy. Effect of Curvature on the Hertz Theory for Two Circular Cylinders in Contact. Journal of Applied Mechanics, March 1958 / 122
122. C. F. Wang. Elastic Contact of a Strip Between Two Cylinders. Journal of Applied Mechanics, June 1968 279 ~ 284
123. J. J. Kalker. A Minimum Principle for the Law of Dry Friction, with Application to Elastic Cylinders in Rolling Contact (Part 1 and Part 2). Journal of Applied Mechanics, December 1971: 875 ~ 887
124. J. J. Kalker. On Elastic Line Contact. Journal of Applied Mechanics, December, 1972 / 1125
125. M. R. Hoeprich, H. Zantopoulos. Line Contact Deformation: A Cylinder Between Two Flat Plates. Journal of Lubrication Technology, January 1981, Vol: 103 / 21
126. H. McCALLION, N. TRUONG. The Deformation of Rough Cylinders Compressed Between Flat Surfaces of Hard Blocks. Wear, 79 (1982) 347- 361
127. B. J. Hamrock, D. Brewe. Simplified Solution for Stresses and Deformation. Journal of Lubrication Technology, April 1983,

Vol. 105 / 171

128. J. A. Greenwood. Formulas for Moderately Elliptical Hertzian Contacts. *Journal of Tribology*, October 1985, Vol. 107 / 501
129. J. M. de Mul, J. J. Kalker, B. Fredriksson. The Contact Between Arbitrarily Curved Bodies of Finite Dimensions. *Transactions of the ASME*, 140 / Vol. 108, January 1986
130. John R. Dryden. Contact Between Two Beams of Finite Length. *Transactions of the CSME*, Vol. 11, No. 1, 1987
131. Y. P. Chiu, M. J. Hartnett. A Numerical Solution for the Contact Problem Involving Bodies With Cylindrical Surface Considering Cylinder Effect. *Journal of Tribology*, July 1987, Vol. 109 / 479
132. P. H. Markho. Highly Accurate Formulas for Rapid Calculation of the Key Geometrical Parameters of Elliptic Hertzian Contacts. *Transactions of the ASME*, 640 / Vol. 109, October 1987
133. J. M. De Mul, H. van Engelenburg. The Line Contact Between Two Cylinders — Some Experiments and Theoretical Predictions. *Journal of Tribology*, April 1988, Vol. 110 / 285
134. H. Zantopules. An Alternate Solution of the Deformation of a Cylinder Between Two Flat Plates. *Journal of Tribology*, October 1988, Vol. 110 / 727
135. Yoichi Tatara. Extensive Theory of Force Approach Relations of Elastic Spheres in Compression and in Impact. *Journal of Engineering Materials and Technology*, April 1989, Vol. 111 / 163
136. V. I. Fabrikant. Frictionless Elastic Contact Problem for a Curved Rigid Punch of Arbitrary Shape. *Acta Mechanica* 67, 1 – 25 (1987)
137. James M. Hill, Antoinette Tordesillas. The Pressure

- Distribution for Symmetrical Contact of Circular Elastic Cylinders. *Q. Jl Mech. appl. Math.*, Vol.42, Pt. 4, (1989) 582 - 604
138. James M. Hill, Antoinette A. Tordesillas. The Symmetrical Adhesive Contact Problem for Circular Elastic Cylinders. *Journal of Elasticity* 27: 1 – 36, 1992
139. G. M. L. Gladwell. On Some Singular Integral Equations Appearing in Contact Problems for the Elastic Cylinder. *Journal of Elasticity* 28: 97 – 109, 1992
140. Bernd Berger, Oskar Paweiski, Düsseldorf, und Paul Funke, Clausthal. Die elastische Verformung der Walzen von Vierwalzengerüsten. *Arch. Eisenhüttenwes.* 47 (1976) Nr6 Juni : 351 ~ 356
141. Karl-Heinz Weber, Hans-Georg Recke und Wolfgang Bormann, Freiberg. Elastische Formänderung des Walzspaltquerschnitts beim Kaltwalzen – Vergleich zwischen Bechnung und Versuch. *Neue Hütte.* 27. Jahrgang. Heft 6. Juni 1982: 212 - 215
142. Stanislaw Nowak und Tadeusz Knych. Kinematische Bedingungen der Bandwellen beim Walzen. *Bänder Bleche Rohre* 3 – 1984:59 – 62
143. Klaus Klamma. CVC-Technologie im Kaltwalzwerk. *Stahl u. Eisen* 104 (1984) Nr.22:1167 – 1170
144. Walter Wilms, Lothar Vogtmann, Jürgen Klöckner, Gerd Beisemann und Wolfgang Rohde. Steuerung von Profil und Planheit in Warmbreitbandstraßen. *Stahl u. Eisen* 105 (1985) Nr. 22 : 1181 – 1188
145. Wilhelm Bolte. CVC- Technologie, ein neues Kaltwalzverfahren zur Erzeugung planer Stahlbänder. *Stahl u. Eisen* 106 (1986) Nr. 9: 439 – 445
146. Bernd Berger, Gert Mücke und Eberhard Neuschütz. Veränderung des Banddickenprofils beim Kaltwalzen. *Stahl u.*

Eisen 106 (1986) Nr. 10 : 561 - 565

147. P. J. G. Huggins. Roll Indentation: Its Relation to Limiting Reduction and Limiting Thickness in Cold Rolling. Journal of the Institute of Metals, 1966 Vol.11: 238 ~ 244
148. K. N. Shohet and N. A. Townsend. Roll Bending Methods of Crown Control in Four-High Plate Mills. Journal of The Iron and Steel Institute, November 1968: 1088 ~ 1098
149. J. G. Wistreich. Control of Strip Shape During Cold Rolling. Journal of The Iron and Steel Institute, December 1968: 1203 ~ 1206
150. Oskar Pawełski, Wolfgang Rasp and Holger Teutsch. A Mathematical Model with a Combined Analytical and Numerical Approach for Predicting the Thickness Profile of a Cold-Rolled Strip. Steel Research 56 (1985) No. 6: 327 ~ 331
151. W. Bald, G. Beisemann, H. Feldmann, T. Schultes. Continuously Variable Crown (CVC) Rolling. Iron and Steel Engineer, March 1987, p 32 - 41
152. Remn-Min Guo. Cascade Effect of Crown and Shape Control Devices in Tandem Rolling Mills. Iron and Steel Engineer, July 1988, p 29 - 38
153. Remn-Min Guo. Characteristics of Rolling Mills With Roll Shifting. Iron and Steel Engineer, December 1988, p 45 - 54
154. Pekka Mantyla, Lassi Myllykoski, Mils-Goran Jonsson. Rolling Wide Thin Plates Using the Profile and Shape Vector Method. Iron and Steel Engineer, November 1989, p 48 - 54
155. Anders G. Carlstedt, Olov Keijser. Modern Approach to Flatness Measurement and Control in Cold Rolling. Iron and Steel Engineer, April 1991, p 34 - 37
156. Frans Hollander, Ton Hurkmans. Flatness and Profile from Slab to Sheet. Iron and Steel Engineer, September 1991, p 9 - 15

157. Ross B. Cresdee, W. John Edwards, Peter J. Thomas. An Advance Model for Flatness and Profile Prediction in Hot Rolling. *Iron and Steel Engineer*, October 1991, p 41 - 51
158. Sean J. Egan, Christopher A. Fryer, Peter J. Reeve. Flatness Modeling and Control for a Continuous Tandem Cold Mill. *Iron and Steel Engineer*, March 1996, p 38 - 41
159. James J. Robinson, Gerhard van Steden, Frederik ter Lingen. Effect of Back-up Roll Wear on Operation and Strip Shape of a CVC Cold Mill. *Iron and Steel Engineer*, June 1996, p 15 - 19
160. Claire Nappez, Serge Boulot, Richard C. McDermott. Control of Strip Flatness in Cold Rolling: A Global Approach. *Iron and Steel Engineer*, April 1997, p 42 - 45
161. 黄明辉, 陈杰, 钟掘. 1850CVC 轧机辊型几何空间特性的研究. *中南工业大学学报*, 1995 (增刊): 125 ~ 130
162. 娄燕雄. 辊凸度连续可调(CVC)轧机的轧辊辊面曲线. *中南工业大学学报*, 1995.6: 357 ~ 361
163. 袁建光, 马文忠, 肖承香. CVC 板形控制技术在宝钢热轧厂的应用. *上海金属*, 1991.11: 45 ~ 50
164. 华建新. 冷轧带钢工作辊弯辊和 CVC 位置的联合控制. *钢铁*, 1992.9: 33 ~ 37
165. 姜正连, 朱伏先, 王国栋, 张强, 言果成, 母青山, 韩力, 吴国良. CVC 轧机板形控制特性的实验研究. *钢铁*, 1991.5: 31 ~ 35
166. 张杰, 陈先霖, 徐耀寰, 杨美顺. 四辊轧机轴向移位变凸度辊型的研究. *钢铁研究学报*, 1993.7: 25 ~ 30
167. 周旭东, 李连诗, 王先进, 傅作宝. 自适应神经网络板形板厚综合控制. *北京科技大学学报*, 1994.8: 340 ~ 345
168. 张杰, 陈先霖, 徐耀寰, 张勇. 轴向移位变凸度四辊轧机的辊型设计. *北京科技大学学报*, 1994.11: 98 ~ 101
169. 宝钢冶金装备新技术文集. 宝钢(集团)公司, 1995.11: 1 ~ 6

170. 宝钢冶金装备新技术文集. 宝钢(集团)公司, 1995.11: 28~34
171. 张清东, 陈先霖, 徐金梧. 板形模式识别的模糊分类法. 北京科技大学学报, 1995.2: 68~71
172. 杨荃, 陈先霖. 冷轧机的板形控制目标模型. 北京科技大学学报, 1995.6: 254~258
173. 张清东, 陈先霖. CVC 四辊冷轧机板形控制策略. 北京科技大学学报, 1996.8: 347~351
174. 林振波, 张波, 连家创, 段振勇. 冷轧带材板形判别模型的分析与讨论. 钢铁, 1995.8: 39~43
175. 邸洪双, 张晓峰, 刘相华, 王国栋. 冷轧薄带板形检测信号正交多项式分解及数学模型. 钢铁, 1995.9: 33~36
176. 李元, 刘文仲, 孙一康. 钢铁, 1996.1: 54~57, 39
177. 刘宏民, F. Sanfilippo, F. Dolci, 郇时建. 热带钢连轧机板形设定控制数学模型. 钢铁, 1996.10: 30~34, 10
178. 王国栋, 张树堂. 四辊轧机轧辊弹性变形的矩阵算法. 重型机械, 1982.8: 9~18
179. 周顺新, 黄明辉. CVC 冷轧机辊缝在线控制模型. 中南工业大学学报, 1997, 28(3): 266
180. 周旭东, 王国栋. 冷轧板形正交多项式分解模型. 钢铁, 1997.8: 46~47, 69
181. 张清东, 陈先霖, 徐乐江, 华建新, 徐耀寰, 陈华昶. CVC 四辊冷轧机板形预设定控制研究. 钢铁, 1997.10: 29~33
182. 王宏旭, 连家创, 刘宏民. 四辊冷轧机轧制过程中带材的板形和断面形状的模拟. 冶金设备, 1996.6: 11~13, 20
183. 张进之. 板带轧制过程板形测量和控制的数学模型. 冶金设备 1997.12: 1~5, 45
184. 傅祖铸. 有色金属板带材生产. 长沙: 中南工业大学出版社, 1992
185. 王海文. 轧钢机械设计. 北京: 机械工业出版社, 1983
186. 曹鸿得. 塑性变形力学基础与轧制原理. 北京: 机械工业出版社, 1981

## 志 谢

我的导师钟掘教授治学严谨，思维敏锐，能迅速抓住事物的本质和核心，善于从个别现象中抽象出普遍的规律，她过人的工作精力也给我留下了非常深刻的印象。有幸成为钟老师的学生，并在她的精心培养和指导下走过我漫长的求学生涯中最难忘和最有收获的研究生之路，使我获益匪浅。在此渗透着钟老师辛勤汗水的论文完成之际，谨向钟老师表示衷心的感谢！

本文的研究工作得到了西南铝加工厂总工程师周鸿章教授的支持、帮助及具体指导。机电学院冶金机械研究所所长黄明辉教授、以及研究所的各位老师也为本文的研究工作给予了热心的指导和帮助，并提供各种工作便利，使本文的工作能够顺利进行。在此特向他们表示衷心的感谢！

远在北京铁道部专业设计院的刘英新先生不远千里、不厌其烦地为我查找本地难得的重要参考文献，给了我慷慨的帮助，在此谨向他致以诚挚的谢意！

我要感谢我原工作单位的刘广生先生及各位老同事、老朋友，感谢他们的理解、关心和支持，是他们给了我重返校园深造的难得机会。

我还要感谢从精神和物质上支持我读研究生的所有亲人，感谢他们为我所作出的无私奉献和牺牲。