摘 要

在保险实务中，保险公司面临着诸多现实存在和潜在的各种风险。尽管无法预测或完全防范风险的发生，但可以通过购买再保险来转移和分散风险。同时，也可以通过在金融市场上投资来增加自己的财富，但投资是有风险的，再保险也需要分一部分保费给再保险公司。因此，研究最优投资和最优再保险问题，对保险公司来说，具有很重要的现实意义。

本论文主要研究随机控制在风险理论中的应用，通过建立动态规划模型来解决最优投资和再保险问题。首先对扩散风险模型中的红利分配引入投资和再保险，在边界分红方式下，得到使得期望红利最大的最优投资和比例再保险策略，以及最大期望红利的显示表达式；并通过数值计算给出了投资和再保险对期望红利的影响。其次，对跳-扩散风险模型，在盈余投资于风险资产和无风险资产，以及索赔进行比例再保险的策略下，分别在含交易费用和风险资产价格服从几何Levy 过程下，研究使得保险公司期望效用最大的最优投资和比例再保险策略。得到最优投资和比例再保险策略，以及最大期望效用函数的显示表达式。最后通过数值分析找到最优投资和再保险策略与各参数之间的关系。

关键词 投资；再保险；随机控制；红利；效用函数；Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程

ABSTRACT

In insurance practice, the insurance company faces many reality risks and potential risks. Although impossible to predict or completely prevent the occurrence of risks, but they can divert and diverge their risks by purchasing reinsurance. At the same time, the insurance company can also be invested in the financial markets to increase wealth. Apparently, risky investment can be dangerous and reinsurance also need to diverge part of the premiums to the reinsurance company. Therefore, it is very important practical significance for the insurance company to study the problem of optimal investment and optimal reinsurance policy.

In this paper, we study the application of stochastic optimal control theory on the risk theory. We solve the problems of optimal investment and reinsurance policies by the establishment of dynamic programming model. Firstly , we introduce investment and reinsurance for diffusion risk model with dividends. Under barrier dividend strategy, the close form expressions for maximal expected discount dividend and the optimal investment and reinsurance policies are obtained. The impact of investment and reinsurance on dividend are also given by numerical calculation. Secondly, the surplus process is assumed to follow a jump-diffusion risk process. The insurance company has the possibility to invest in a risk-free asset and a risky asset and to purchase porportional reinsurance for claims. We study the optimal investment and porportional reinsurance policies which maximizing the expected utility of insurance company under the risky asset following Geometric Levy process and transaction cost, respectively. Explicit expressions for the maximal expected exponential utility and the corresponding optimal policies are obtained. Finally, the relationships between optimal investment and reinsurance policies and some parameters are given by numerical calculation.

KEYWORDS investment; reinsurance; stochastic control; dividend; utility function; Hamilton-Jacobi-Bellman equation

第一章 绪论

1.1 选题意义和背景

在日益繁荣的现代社会，人类生活面临着诸多现实存在和潜在的各种风险。尽管人们无法预测或完全防范风险的发生，但可以通过购买保险来转移和分散风险。保险公司就是以承担风险、调节风险为主要业务的金融企业，其本身具有高风险特征。风险对保险公司而言，是一把双刃剑，处理的得当就意味着滚滚利润；一旦失控，公司将陷入破产的深渊。为了能够持续盈利，为了永久生存，保险公司通过提高风险管理能力，来避免灾难性的损失；同时保险司公还要承担更多的风险，拓展业务。因此，保险公司作为给他人提供保险保障的专业机构，通过各种措施减少自身的风险，同时增加自身的收入，提高偿付能力，对保险公司的财务稳定和长远发展有着极其重要的意义[56, 58]。

由于在保险实务中，竞争激烈，保险公司增加盈余的主要方法是投资，但投资是存在风险的，如资产贬值、利率风险等。另外，保险公司把过多的资金投资到风险资产上，资金的利用比例太高则资金的流动性差，不能满足索赔波动带来的赔付需要；投资项目的失败，比如投资到不熟悉的领域、高风险领域等。投资风险的暴露必然降低保险公司的投资收益，保费收入没有得到有效利用将降低保险公司的效率，总盈余也会下降。这不仅将严重威胁保险公司的盈利，而且长期内会影响到保险公司的存亡。因此，研究最优投资问题具有很大的现实意义[60]。

保险公司减少风险的方法之一就是采取再保险。再保险的有效安排给保险公司提供了规避巨灾的良好手段。没有再保险，保险公司就不能承保超出公司赔偿能力的项目。而且，一旦发生了较大的赔偿额时，保险公司就算是倾其所有也无力赔付。这将给保险公司的生存和社会安定带来巨大的影响。保险公司有效的利用再保险，就可以联合承保一些较大的项目。但是再保险是要分出一部分保费的。因此，保险公司选择最优的再保险方式，以及确定最优再保险额度，使自身的风险最小、利益最大是个十分重要的问题[59]。

因此，研究最优投资和最优再保险问题，可以指引保险公司是否进行投资和再保险，如何进行投资和再保险，帮助保险公司制定决策，减少保险公司的风险；

目前，保险公司的最优投资和再保险问题已成为金融数学的研究热点问题之一。它的理论不仅丰富和发展了现代金融，而且也沟通了数学分支与金融学、保险学之间的联系，对数学的发展起了推动作用。

1.2 国内外研究现状

风险理论的早期研究可以上溯到 Lundberg[33]的结果，他的工作奠定了风险理论的基础。如今，已经有大量的论文和专著对 Lundberg[33]的结果做了各种形式的推广和深入研究。其中一个方面是模型的推广，如更新风险模型、复合泊松风险模型、扩散模型、跳-扩散模型等。另外一个方面的推广是随机控制理论和风险理论研究的结合，如讨论破产概率、红利分配、再保险、投资、新险种开发等领域的应用[6-9, 11, 12, 21, 25, 27, 28, 42, 48]。

有大量的文献对保险公司的破产概率和破产相关函数进行了系统研究，其主要著作有 Gerber[18]，Grandell[20]，Schmidli [44], Dickson[13,14]，Yang and Zhang[54]等。

近年来，越来越多的人们关注最优投资和再保险问题（即投资组合问题），将随机控制的方法应用到保险相关问题的研究中去。这是由于保险公司可以投资于股票市场，可以采取再保险策略。利用随机控制工具来研究保险问题，已成为当今保险学研究的重要方向。Karl Borch 1967 在伦敦皇家统计学会上说："控制过程的理论看上去就是为保险精算师的问题特殊研究的，而保险精算师为解决这些问题已经奋斗了一个多世纪。如果 50 年前保险精算师和数学家们能知道他们其实是在研究同一问题，并且能够联合起来，那么考虑这个问题就会有趣和有用的多。" 由此可见，随机控制在保险问题研究中的重要作用。随机控制工具主要用来研究保险中的破产概率、红利、期望效用等问题[61]。

Browne[3]首先研究这个问题，对扩散风险模型，在盈余投资于价格服从由经典的Black-Scholes模型的风险资产的条件下，得到了使得破产概率最小的最优投资策略，以及最小破产概率的显示解。Hipp和Plum[26]对传统风险模型，在盈余投资于风险资产和无风险资产的条件下，研究了使得破产概率最小的最优投资策略，得到最小破产概率所满足的Bellman方程，并且证明了解的存在性。Maritina和Gilber [39]对同样的模型，不仅得到了最小破产概率所满足的HJB方程，以及证

明了方程的解的存在性、唯一性及最优性等问题，而且还给出了具体的数值解算法。Hipp[27]对索赔为复合的Cox过程的风险模型，也考虑了该问题。Yang和Zhang[54]考虑了跳-扩散风险模型的最优投资问题，在理赔额为指数分布、Gamma分布、Pareto分布时给出了破产概率的数值计算方法，并讨论了一些参数对破产概率的影响。

Schmidli[43]研究了扩散风险模型和传统风险模型，研究了使得破产概率最小的最优比例再保险策略，得到了最小破产概率所满足的Bellman方程，并证明了Bellman方程的解的存在性、唯一性及最优性。Hipp和Vogt[28]对传统风险模型，研究了使得保险公司的破产概率最小，得到超额损失再保险策略，得到了最小破产概率Bellman方程，并证明了方程的解的存在性、唯一性及最优性，最后还给出了当索赔大小分别为指数分布、移位指数分布和Pareto分布的数值解。Schmidli[44]对传统风险模型，在盈余进行投资和索赔进行比例再保险条件下，研究了使得破产概率最小的最优投资和比例再保险策略，得到最小破产概率所满足Bellman方程和一个适应性的最优策略，给出该方程的数值解的计算过程。最后证明了这个方程存在一个递增解，并给出了两个数值解算例。

为了在保险组合中反应更真实的现金流，De Finetti[10]首次提出具有分红策略的保险风险模型，发现最优的分红策略是边界分红。Gerber[16,17]，Bühlmann[2]，Lin et al[35]，Gerber 和 Shiu[19]，Li[38]等系统的研究了边界分红策略。Jeanblanc-Picque 和 Shiryaew[32]，Asmussen 和 Taksar[1]提出了一个有界的分红率，也就是单位时间红利支付不能超过一个上界，证明最优分红策略是一种更一般的边界分红，称为阀值分红。Lin 和 Pavlova[36]研究了复合泊松风险模型的阀值分红策略，得到 Gerber-Shiu 折现罚金函数满足的积分-微分方程，给出了最终破产概率、破产时间、破产前盈余分布。Wan[52]把上述结果推广到了跳-扩散模型，也得到了Lin 和 Pavlova[36]相似的结果。近年来越来越多的学者研究具有多个阀值的分红策略。Lin 和 Pavlova[37]研究了复合泊松风险模型具有多层阀值的分红策略，得到 Gerber-Shiu 折现罚金函数满足的积分-微分方程，通过解这个方程，给出了Gerber-Shiu 折现罚金函数的计算方法，以及最终破产概率的显示表达。

Asmussen 和 Tasksar[1]研究了扩散风险模型下保险公司的最优红利分配。Højgaard 和 Taksar[24]研究了扩散模型下的最优再保险和红利分配问题，在分红额

有限制和分红额无限制两种情形下，得到了最优再保险策略和最优红利，且通过数值计算讨论了再保险对红利的影响。

杨步清和叶中行[62]研究了经典保险风险模型下的最优再保险和红利问题。他们考虑的再保险方式为比例再保险，应用动态规划原理得到了红利满足的HJB方程。由于这个方程的显示解难以得到，他们采用近似的方法，将模型在时间和状态空间上分别离散化。再将得到的离散最优控制问题的解作为连续模型的近似。最后的结果表明：最优回报函数是严格递增的凸函数。Taksar et. al.[50]研究了经典保险风险模型下最优红利和再保险问题。他们考虑的再保险方式为超额损失再保险。他们讨论了分红有上限和没有上限两种情况，得到了最优解，并且在文中证明了超额损失再保险优于比例再保险。得到的主要结果如下：1）分红没有上限时：此时问题变为一个混合的单一正规扩散过程控制问题。它的解析解是一个边界自由的线性二阶微分方程。当盈余低于x_1时不进行任何分红，而当盈余高于x_1时，则将现有的资本全部用于分红。2）分红有上限时：设上限为$M>0$，此时问题为一个正规的控制问题。最优的分红策略是当盈余低于x_1时不进行任何分红，而当盈余高于x_1时，则将按照最大上限M进行分红。在这种情况下，超额损失再保险业务依据发生索赔的分布以及最大上限M的大小来决定是否需要停止。但是在所有的情况中，保持水平会一直保持不变，直到现有盈余超过x_1。同样，这里的转折点x_1依赖于初始资本。

近年来，效用函数的研究已为保险数学的研究热点之一。Yang 和 Zhang [54]对跳-扩散风险模型，研究了使得财富期望指数效用最大的最优投资策略，得到了值函数和最优投资策略的显示表达式。Guo 和 Bai[22]对扩散风险模型，研究了使得财富的期望指数效用最大的最优投资和比例再保险策略，得到最优投资和比例再保险策略，以及值函数的显示表达式。梁志彬[57]对跳-扩散风险模型，在仅投资于风险资产的条件下，研究了使得财富的期望指数效用最大的最优投资和比例再保险策略，得到最优投资和比例再保险策略，以及值函数的显示表达式，并给出最优策略和值函数与参数之间的关系。Irgens 和 Paulsen[31]对跳-扩散风险模型，在风险资产价格含跳的条件下，研究了使得财富的期望效用最大的最优投资

和再保险策略。

我们知道在保险实务中，有许多不确定性的因素，如通货膨胀、自然灾害、战争、金融危机等等。由于上述一些原因，进行投资时考虑无风险资产含有随机利率或风险资产含有随机利率和随机变差更有意义。Li 和 Wu[34]考虑了随机利率，以及风险资产的价格为随机变差的情形，给出了检验定理的证明，在幂效用函数下，他们获得了最优的值函数和最优的投资策略。上述研究在买卖风险资产时，都不考虑交易费用，而在实际中，买卖股票都有交易费用。Zhang et.al.[55]对扩散风险模型，考虑了含交易费用的使得财富的期望指数效用最大的最优投资和再保险策略，得到了最优的值函数和最优的投资和再保险策略的显示表达式。

然而，目前还没有文献同时考虑投资和再保险对红利的影响。大部分文献在研究最优投资和再保险策略时，一般都假设风险资产服从几何布朗运动，很少文献考虑风险资产服从跳-扩散过程。在跳-扩散风险模型的最优投资和再保险策略中，还没有文献考虑买卖风险资产的交易费用。因此对上述问题进行研究，无论在理论上，还是在保险实务中，都具有非常重要的意义。

1.3 本文的结构和研究方法

本学位论文，共六章。

第一章为绪论，介绍了选题的背景和意义，国内外研究现状，以及本文结构。

第二章为预备知识，介绍了风险理论中的一些基本概念，如保费、再保险、效用函数等，以及随机控制的基本理论。

第三章研究扩散风险模型的边界分红策略，得到使得期望边界红利最大的最优投资和再保险策略，以及期望红利的显示表达式，并通过数值计算得到投资和再保险对期望红利的影响。

第四章研究带交易费用的跳-扩散风险模型的最优投资和再保险策略，得到使得财富期望指数效用最大的最优投资和比例再保险策略，以及最大期望指数效用的显示表达式。

第五章研究跳-扩散风险模型的最优投资和再保险策略，在风险资产价格服从跳-扩散过程条件下，得到使得财富期望指数效用最大的最优投资和比例再保险策略，以及最大期望指数效用的显示表达式。并通过数值计算得到参数对投资

和再保险策略的影响。

第六章为总结和展望。

本学位论文的研究方法是：通过建立动态数学模型，解决再保险、投资之间的合理分配，以期达到期望效用或红利最大，同时通过数值计算讨论参数对最优投资和再保险策略的影响。采用的方法为随机控制理论和随机分析的理论，通过求解控制问题对应的HJB方程，得到具有反馈形式的最优决策过程。

第二章 预备知识

本章首先介绍了风险理论的一些基本概念，如保费计算方式、再保险策略、效用函数，以及基本的保险风险模型——扩散风险模型、复合泊松风险模型、跳-扩散风险模型，然后介绍了随机控制的理论。

2.1 基本概念[20,45,59,62]

2.1.1 保费计算基本原理

假设 S 为理赔额，p 为保费收入，下面给出一些保费计算基本原理。

（1）净保费原理：$p=E(S)$

（2）期望值原理：$p=(1+\theta)E(S)$，$\theta>0$ 是安全负载。

（3）方差原理：　$p=E(S)+\alpha Var(s)$，$\alpha>0$ 为一常数。

（4）修正的方差原理：$p=E(S)+\alpha Var(s)/E(S)$，$\alpha>0$ 为一常数。

（5）标准差原理：$p=E(S)+\alpha\sqrt{Var(s)}$，$\alpha>0$ 为一常数。

（6）指数原理：$p=\alpha^{-1}\log E\left[\exp(\alpha S)\right]$，$\alpha>0$ 为一常数。

（7）零效用原理：$u(x)$ 是效用函数，保费 p 是下面方程的解 $u(w)=E\left[u(w+p-S)\right]$，$w$ 为初始盈余。

（8）风险调节原理：记 S 的分布函数为 $F(x)$，$p=\int_0^\infty\left[1-F(x)\right]^\theta dx$，$\theta\in(0,1)$。

2.1.2 再保险方式

下面给出两种常见的再保险类型。

（1）比例再保险（proportional reinsurance）：假设理赔额为 Y，则原保险公司的理赔额为 $X=pY$，其中 $p(0\le p\le 1)$ 为约定保险金额的分割比例，再保险公司的理赔额为 $Z=(1-p)Y$。

（2）超额损失再保险（excess-loss reinsurance）：假设理赔额为Y，则原保险公司的赔付额为$X=\min\{Y,b\}$，其中b为一常数，再保险公司的赔付额为$Z=\max\{Y-b,0\}$。

2.1.3 效用函数

下面给出常用的四种效用函数。

（1）指数效用函数(CARA):

$$U(x)=-\frac{1}{\beta}e^{-\beta x}, \tag{2-1}$$

其中$\beta>0$是常数，该效用函数的绝对风险厌恶系数为β。指数效用函数是在零效用原理下，唯一一个得出独立于保险公司盈余水平的公平保费的函数，因此它在保险数学和精算应用中有着重要地位。

（2）二次效用函数：

$$U(x)=x-\beta x^2,\ x<\frac{1}{2\beta} \tag{2-2}$$

其中$\beta>0$是常数，该效用函数的绝对风险厌恶系数为$r(x)=\frac{-U''(x)}{U'(x)}=\frac{2\beta}{1-2\beta x}$。

（3）对数效用函数：

$$U(x)=\beta\log x,\ x>0 \tag{2-3}$$

其中$\beta>0$是常数，该效用函数的相对风险厌恶系数为1。

（4）幂效用函数：

$$U(x)=x^{\beta},\ x>0 \tag{2-4}$$

其中$0<\beta<1$为常数，该效用函数的相对风险厌恶系数为$1-\beta$。

2.1.4 保险风险模型

（1）经典风险模型

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_k \tag{2-5}$$

其中 $x \geq 0$ 表示保险公司的初始盈余， $c > 0$ 是保险公司单位时间的保费收入；$\{Y_k, k = 1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布的(严格)正值随机变量，其共同分布为 $G(y)$，$G(0) = 0$，期望为 $\mu = E(Y_1)$，Y_k 表示第 k 次赔付的大小；$\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程，表示到时刻 t 为止的总的索赔发生次数。此外，假设 $\{Y_k, k = 1,2,\cdots\}$ 和 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是相互独立的。$X(t)$ 表示保险公司在时刻 t 的盈余，由于未来时刻的盈余是未知的，$\{X(t), t \geq 0\}$ 便是一个连续时间的随机过程。

（2）扩散风险模型

$$X_t = x + ct + \sigma W_t \tag{2-6}$$

其中 x 为保险公司的初始盈余，c 为保费收取比率，W_t 为一标准布朗运动，σ 为一常数。X_t 为 t 时刻保险公司的盈余。

（3）跳-扩散风险模型

$$X(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k + \beta W_t = x + ct - S(t) + \beta W_t \tag{2-7}$$

其中 $x \geq 0$ 表示保险公司的初始盈余； $c > 0$ 是保险公司单位时间的保费收入；$\{Y_k, k = 1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布的(严格)正值随机变量，其共同分布为 $G(y)$，$G(0) = 0$，期望值为 $\mu = E(Y_1)$，Y_k 表示第 k 次赔付的大小；$\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程，表示到时刻 t 为止的总的索赔发生次数；$\{W_t, t \geq 0\}$ 是标准的布朗运动，$\beta \geq 0$ 是常数，表示扩散变差参数。此外，假设 $\{Y_k, k = 1,2,\cdots\}$，$\{N(t), t \geq 0\}$ 和 $\{W_t, t \geq 0\}$ 之间相互独立。$X(t)$ 表示保险公司在时刻 t 的盈余。

2.2 随机控制理论[15,45]

随机最优控制已广泛用于管理，金融等领域，其主要依托 Bellman 动态规划原理（The Theory of Dynamic Programming）。下面介绍连续时间随机控制的基本

理论，更多的内容可参 Flemming 和 Soner[15]。

考虑集族 $F(x,t), x\in X, t\in[t_0,T]$ 和下面的控制问题

$$I(t,x,u)=\int_t^T L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+g(x(T))\to \max \tag{2-8}$$

满足

$$\dot{x}(\tau)=f(x(\tau),u(\tau),\tau) \tag{2-9}$$

边界条件为 $x(t)=x$。

状态 $x(t)$ 属于 R^n 中的开集 X，控制 $u(t)$ 是一个取值于 R^m 中闭子集 U 的有界可测函数。函数 $f:X\times U\times R_+\to R^n$，$g:X\to R$ 和 $L:X\times U\times R_+\to R$ 关于状态变量是连续的。

一个控制序列 $(x(t),u(t)), t\le\tau\le T$ 关于 $F(x,t)$ 是可行的，如果 $x(\cdot,t,x,u)$ 关于控制 $u(\tau)$，$t\le\tau\le T$ 是（2-9）的解并且积分（2-8）的值有定义，所有可行的控制策略我们记为 $\Omega(t,x,u)$。相应的 Bellman 值函数 $V:X\times R_+\to R$ 定义为

$$V(x,t)=\sup\left\{\int_t^T L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+g(x(T)):(x(\cdot),u(\cdot))\in\Omega(t,x)\right\} \tag{2-10}$$

引理 2.1 对于每个 $x\in X$ 和每个 $t_0\le t\le s\le T$ 满足

（i）对于每个可行策略 $(x(\cdot),u(\cdot))\in\Omega(t,x)$，

$$V(x,t)\ge\int_t^s L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+V(s,x(s,t,x,u))$$

（ii）如果存在可行策略 $(x^*(t),u^*(t)), t\le\tau\le T$ 使得 $V(t,x)=I(t,x,u^*)$，则有

$$V(x,t)=\int_t^s L(x^*(\tau),u^*(\tau),\tau)d\tau+V(x^*(s,t,x,u^*),s)$$

引理 2.2 设 $\hat{V}:[t_0,T]\times X$ 对于每个 $x\in X$ 和每个 $t_0\le t\le s\le T$ 满足下面的条件

（i）对于每个可行策略 $(x(\cdot),u(\cdot))\in\Omega(t,x,s)$

$$\hat{V}(x,t)\ge\int_t^s L(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau+\hat{V}(s,x(s,t,x,u))$$

（ii）存在一个可行策略 $(x^*(\cdot),u^*(\cdot))\in\Omega(t,x,s)\cdot$ 使得

$$\hat{V}(x,t)=\int_t^s L(x^*(\tau),u^*(\tau),\tau)d\tau+\hat{V}(s,x^*(s,t,x,u^*))$$

（iii）对于所有的$x\in X$，边界条件$\hat{V}(t,x)=g(x)$成立。

则存在可行策略$\left(x^*(t),u^*(t)\right),t\le\tau\le T$使得$V(t,x)=I\left(t,x,u^*\right)$，且$V=\hat{V}$。

定义 2.3 如果下面的性质成立

(i) Bellman 函数V关于(t,x)在$[t_0,T]\times X$是连续可微的；

(ii) 对于每个$(t,x)\in[t_0,T]\times X$，存在一个可行策略$\left(x^*(t),u^*(t)\right),t\le\tau\le T$，使得$u^*(\cdot)$连续且$V(t,x)=I\left(t,x,u^*\right)$.

则称V是最优问题（2-8）和（2-9）在$[t_0,T]\times X$上的光滑解.

定理 2.4 假设最优问题（2-8）和（2-9）在$[t_0,T]\times X$上的一个光滑解存在，也就是对于所有的$(t,x)\in[t_0,T]\times X$，值函数$V(t,x)$获得，则

(i) Bellman 函数V对于所有的$(t,x)\in[t_0,T]\times X$满足下面的 HJB 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)+\max_{u\in U}\left\{L(x,u,t)+\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)f(x,u,t)\right\}=0$$

和

$$V(t,x)=g(x)$$

(ii) 如果存在一个可行策略$\left(x^*(t),u^*(t)\right),t\le\tau\le T$使得$u^*(\cdot)$连续且$V(t,x)=I\left(t,x,u^*\right)$，则对于所有的$\left(t,x^*(t)\right),t\in[t_0,T]$，HJB 方程在$u^*(t)$获得最小值。

第三章 扩散风险模型下再保险和投资对红利的影响

在保险实务中，由于竞争激烈，当保险公司的盈余达到一定水平时，保险公司将降低保费或将盈余的一部分作为红利分给保单持有者。因此为了更好的描述保险公司的现金流，需在保险风险模型中考虑分红。特别感兴趣的是两种依赖盈余的红利策略。一是常数边界分红策略，对于常数边界分红策略，当盈余低于一个常数边界时没有分红；当盈余高于这个常数边界时，高出部分全部作为红利分出。另外一种分红策略是阀值分红策略，当盈余低于一个常数边界时没有分红；当盈余高于这个常数边界时，只是把盈余的一部分作为红利分出。[29, 30, 40, 41, 49, 51]

本章对扩散风险模型，考虑投资和再保险对边界分红的影响，得到使得期望边界红利最大的最优投资和再保险策略，以及最大期望贴现红利的显式表达，并通过数值计算得到投资和再保险对红利的影响。

3.1 模型和 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程

为了使数学上更为严格，假设所有的随机过程和随机变量都定义在完备的概率空间(Ω, F, P)上，并且有一满足通常条件的$\sigma-$流$\{F_t, t\geq 0\}$，即F_t右连续且P完备。允许连续交易，不考虑交易费用和税收，且所有资产都是无穷可分的。

考虑下面的扩散风险模型，即保险公司的盈余为

$$R(t)=x+ct+\beta W^{(1)}(t), \qquad t\geq 0 \tag{3-1}$$

如果保险公司进行比例再保险，比例再保险的水平是$(1-a)$，这里$0\leq 1-a\leq 1$为比例再保险的比率，$0\leq a\leq 1$为风险暴露。如果保险公司的风险暴露固定，则在每次理赔时保险公司支付$100a\%$，同时再保险公司支付剩余的$100(1-a)\%$，因此保险公司的盈余为

$$R(t,a)=x+act+a\beta W^{(1)}(t), \qquad t\geq 0 \tag{3-2}$$

此外，我们用$A(t)$表示t时刻投资于风险资产上的盈余数量，风险资产的价格$S(t)$服从几何布朗运动，即

$$dS(t)=S(t)[\mu dt+\sigma dW^{(2)}(t)], \quad t\geq 0 \tag{3-3}$$

其中，μ 和 σ 都是正常数，分别代表风险资产期望收益率和方差；$\left\{W^{(2)}(t);t\geq 0\right\}$ 是一标准布朗运动。假设 $W^{(1)}(t)$ 和 $W^{(2)}(t)$ 相互独立。

在任何时间 t，保险公司选择比例再保险策略 $a(t)$ 和投资策略 $A(t)$ 作为控制变量，定义 $\pi(t)=(a(t),A(t))$。一旦 $\pi(\cdot)$ 给定，则 t 时刻，保险公司的财富过程为

$$dR(t,\pi)=A(t)\frac{dS(t)}{S(t)}+dR(t,a)$$

即

$$dR(t,\pi)=\left[\mu A(t)+ca(t)\right]dt+\sigma A(t)dW^{(2)}(t)+a(t)\beta dW^{(1)}(t) \tag{3-4}$$

$$R(0)=x \tag{3-5}$$

如果 $\pi(t)$ 关于 $\{F_t,t\geq 0\}$ 可料，且 $a(t),A(t)$ 满足下面的条件

(1) $0\leq a(t)\leq 1$；

(2) $p\left\{\int_0^T A^2(t)dt<\infty\right\}=1$，对于所有 $T<\infty$。

则称控制策略 $\pi(t)$ 是可行策略。所有的策略记为 Π。

下面我们考虑边界分红，假设保险公司支付红利以一个常数 $b>0$ 来控制。当盈余低于 b 时没有红利支付；当盈余高于 b 时，高出的部分全部作为红利支付。对 $t\geq 0$，设 $D(t)$ 为到时刻 t 为止支付的总的红利，则支付红利后，在时刻 t，保险公司的盈余 $\tilde{R}(t,\pi)$ 为

$$\tilde{R}(t,\pi)=R(t,\pi)-D(t) \tag{3-6}$$

破产时刻定义为

$$T_b=\inf\left\{t>0:\tilde{R}(t,\pi)\leq 0\right\} \tag{3-7}$$

设 $\delta>0$ 是红利贴现率，$D_{x,b}^{\pi}$ 为在初始盈余为 x，控制策略为 π 时，到破产时刻 T_b 为止所有红利现值，即

$$D_{x,b}^{\pi}=\int_0^{T_b}e^{-\delta t}dD(t) \tag{3-8}$$

对 $x\geq 0$，我们用 $V^{\pi}(x,b)$ 表示 $D_{x,b}^{\pi}$ 的期望，即

$$V^{\pi}(x,b)=E[D_{x,b}^{\pi}\mid\tilde{R}(0)=x] \tag{3-9}$$

投资和再保险的目的是使期望红利最大，即找到最优的值函数

$$V(x,b)=\sup_{\pi\in\Pi}V^{\pi}(x,b) \tag{3-10}$$

以及最优的策略π^*使得

$$V^{\pi^*}(x,b)=V(x,b) \tag{3-11}$$

由 Flemming 和 Soner[15]或 Schmidli[45]，容易得到下面的定理。

定理 3.1 假设$V(x,b)$是定义在R_+上二次连续可微函数，则$V(x,b)$满足下面的 HJB 方程

$$\sup_{\pi\in\Pi}\left\{\frac{1}{2}(\beta^2a^2+\sigma^2A^2)V''(x,b)+(ca+A\mu)V'(x,b)-\delta V(x,b)\right\}=0,0\le x\le b \tag{3-12}$$

$$V(x,b)=x-b+V(b,b),x>b \tag{3-13}$$

边界条件

$$V(0,b)=0,\frac{\partial V(x,b)}{\partial x}\Big|_{x=b}=1 \tag{3-14}$$

由 Flemming 和 Soner[15]或 Schmidli[45]中的标准方法，容易得到下面的检验定理。

定理 3.2 设$W(x;b)$是定义在R_+上递增二次连续可微的凹函数，满足边界条件(3-14)且是方程(3-12)和(3-13)的经典解，那么值函数$V(x;b)$和$W(x;b)$是一致的,也就是说$W(x;b)=V(x;b)$。进一步，如果可行策略π^*满足下面的方程

$$\frac{1}{2}(\beta^2a^{*2}+\sigma^2A^{*2})W''(x,b)+(ca^*+A^*\mu)W'(x,b)-\delta W(x,b)=0,0\le x\le b=0 \tag{3-15}$$

$$W(x,b)=x-b+W(b,b),x>b$$

则π^*是最优策略，即$W(x,b)=V(x,b)=V^{\pi^*}(x,b)$。

3.2 最优投资和再保险

3.2.1 不考虑再保险和投资的风险模型

如果即不考虑再保险，也不考虑投资，则分红利后保险公司的盈余为

$$d\tilde{R}_t = cdt + \beta dW^{(1)}(t) - dD(t) \tag{3-16}$$

对于 $x \ge 0$，我们假设用符号 $V_1(x;b)$ 记作 $D_{x,b}$ 的期望，即

$$V_1(x;b) = E\left[D_{x,b} \middle| \tilde{R}(0) = x\right]$$

则在定理 3.1 中令 $A=0, a=1$，可知 $V_1(x;b)$ 满足下面的方程

$$\frac{1}{2}\beta^2 V_1''(x,b) + cV_1'(x,b) - \delta V_1(x,b) = 0, 0 \le x \le b \tag{3-17}$$

$$V_1(x,b) = x - b + V_1(b,b), x > b \tag{3-18}$$

及边界条件

$$V_1(0,b) = 0, \frac{\partial V_1(x,b)}{\partial x}\Big|_{x=b} = 1 \tag{3-19}$$

易知方程(3-17)的解为

$$V_1(x;b) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

其中 $r_1 = \dfrac{-c + \sqrt{c^2 + 2\beta^2\delta}}{\beta^2}, r_2 = \dfrac{-c - \sqrt{c^2 + 2\beta^2\delta}}{\beta^2}$，因此由边界条件(3-19)可得 $C_1 = -C_2 = \dfrac{1}{r_1 e^{r_1 b} - r_2 e^{r_2 b}}$。因此，我们有

定理 3.3 对于盈余过程(3-16)，期望边界红利值函数 $V_1(x;b)$ 满足

$$V_1(x;b) = \begin{cases} \dfrac{e^{r_1 x} - e^{r_2 x}}{r_1 e^{r_1 b} - r_2 e^{r_2 b}}, 0 \le x \le b \\ x - b + V_1(b;b), x > b \end{cases} \tag{3-20}$$

其中 $r_1 = \dfrac{-c + \sqrt{c^2 + 2\beta^2\delta}}{\beta^2}, r_2 = \dfrac{-c - \sqrt{c^2 + 2\beta^2\delta}}{\beta^2}$。

3.2.2 仅考虑再保险的风险模型

下面仅考虑再保险不考虑投资，则分红后保险公司的盈余为

$$d\tilde{R}(t,a)=acdt+a\beta dW^{(1)}(t)-dD(t) \tag{3-21}$$

设$V_2(x;b)$为比例再保险下的最大期望边界红利函数，即

$$V_2(x;b)=E\left[D_{x,b}^{a}\middle|\tilde{R}(0,a)=0\right]$$

则由定理 3.1 知，$V_2(x;b)$满足下面的 HJB 方程

$$\sup_{a\in[0,1]}\left\{\frac{1}{2}\beta^2a^2V_2''(x,b)+caV_2'(x,b)-\delta V_2(x,b)\right\}=0,0\le x\le b \tag{3-22}$$

$$V_2(x,b)=x-b+V_2(b,b),x>b \tag{3-23}$$

边界条件

$$V_2(0,b)=0,\frac{\partial V_2(x;b)}{\partial x}\Big|_{x=b}=1 \tag{3-24}$$

由 HJB 方程(3-22)可知，$a^*=-\frac{c}{\beta^2}\frac{V_2'(x,b)}{V_2''(x,b)}$，代入(3-22)求解方程，且由边界条件(3-24)，可得值函数$V_2(x,b)=\frac{b^{1-\eta}}{\eta}x^{\eta}$，其中$\eta=\frac{\delta}{\delta+\frac{c^2}{2\beta^2}}$。此时最优比例再保险策略为$a^*=\left(\frac{2\delta}{c}+\frac{c}{\beta^2}\right)x$，而$a^*\le 1$，因此我们有

定理 3.4 对于盈余过程(3-21)，设$\hat{a}=\left(\frac{2\delta}{c}+\frac{c}{\beta^2}\right)x$。若$\hat{a}\le 1$，则最大期望边界红利值函数$V_2(x;b)$满足

$$V_2(x;b)=\begin{cases}\frac{b^{1-\eta}}{\eta}x^{\eta},0\le x\le b\\ x-b+V_2(b;b),x<b\end{cases} \tag{3-25}$$

其中$\eta=\frac{\delta}{\delta+\frac{c^2}{2\beta^2}}$，此时最优比例再保险策略为$a^*=\left(\frac{2\delta}{c}+\frac{c}{\beta^2}\right)x$；若$\hat{a}>1$，则最

大期望边界红利值函数为

$$V_2(x,b)=V_1(x,b)$$

此时最优再保险比例为$a^*=1$。

3.2.3 考虑再保险和投资的风险模型

下面即考虑再保险又考虑投资，则由定理 3.1 知最大期望边界红利值函数$V(x,b)$满足 HJB 方程(3-12)，(3-13)和边界条件(3-14)。因此由 HJB 方程(3-12)可得

$$a^*=-\frac{c}{\beta^2}\frac{V'(x,b)}{V''(x,b)},A^*=-\frac{\mu}{\sigma^2}\frac{V'(x,b)}{V''(x,b)} \tag{3-26}$$

(3-26)代入(3-14)，化简得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{\beta^2}+\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)\frac{(V'(x;b))^2}{V''(x;b)}+\delta V(x;b)=0$$

解上述方程得

$$V(x;b)=Cx^\gamma$$

其中$\gamma=\dfrac{\delta}{\delta+\frac{1}{2}(\frac{c^2}{\beta^2}+\frac{\mu^2}{\sigma^2})}$，由边界条件(3-14)得$C=\dfrac{1}{\gamma}b^{1-\gamma}$。此时$a^*=\dfrac{c}{\beta^2}\dfrac{x}{1-\gamma}$，$A^*=\dfrac{\mu}{\sigma^2}\dfrac{x}{1-\gamma}$。由于$a^*\le 1$，因此我们有

定理 3.5 对于盈余过程(3-6)，假设$x\le\dfrac{(1-\gamma)\beta^2}{c}$，则最大期望边界红利值函数$V(x;b)$满足

$$V(x;b)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma}b^{1-\gamma}x^\gamma,0\le x\le b\\ x-b+V(b;b),x<b\end{cases} \tag{3-27}$$

其中$\gamma=\dfrac{\delta}{\delta+\frac{1}{2}(\frac{c^2}{\beta^2}+\frac{\mu^2}{\sigma^2})}$，最优再保险策略$a^*=\dfrac{c}{\beta^2}\dfrac{x}{1-\gamma}$,最优投资策略

$A^* = \frac{\mu}{\sigma^2}\frac{x}{1-\gamma}$。

3.3 数值结果及经济分析

下面通过数值计算研究再保险和投资对红利的影响，以及最优投资策略的影响因素。

3.3.1 投资和再保险对红利的影响

取 $b=4, \delta=0.05, c=5, \beta=5, \mu=0.1, \sigma=0.2$，则由定理 3.3，定理 3.4，定理 3.5，得到 $V(x,b), V_1(x,b), V_2(x,b)$ 与初始盈余 x 之间的关系，如图 3-1 所示。

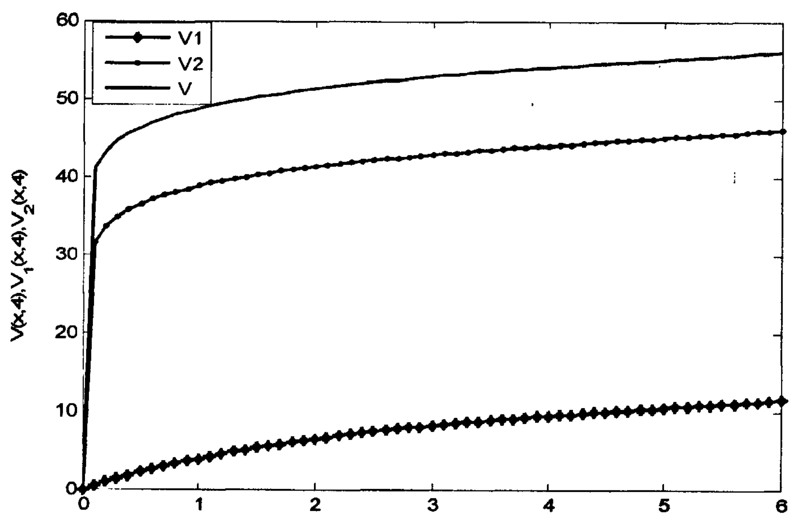

图 3-1 投资和再保险对期望红利的影响

由图 3-1 可以看出，$V_1(x,4) < V_2(x,4) < V(x,4)$，即进行比例再保险后的期望红利比不进行再保险的期望红利大，同时进行投资和比例再保险后的期望红利最大，投资和再保险可使期望红利增大。

3.3.2 市场价格 $\frac{\mu}{\sigma}$ 对红利的影响

取 $b=4, \delta=0.05, c=5, \beta=5, x=3$，则由定理 3.5，得到 $V(x,b)$ 与市场价格

$\frac{\mu}{\sigma}$之间的关系，如图 3-2 所示。

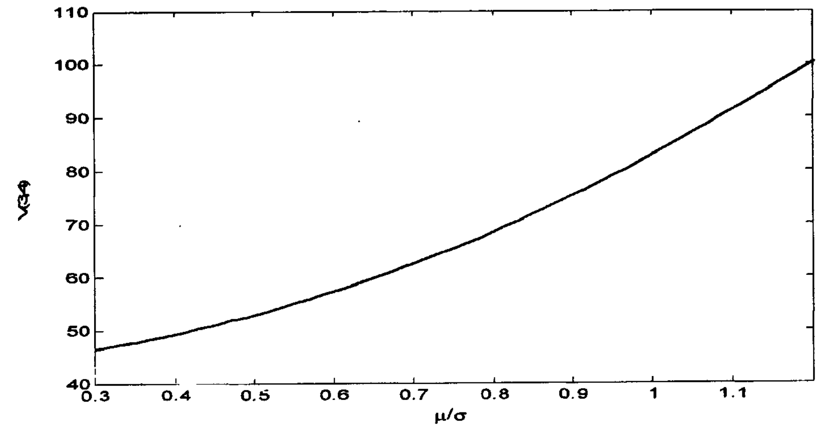

图 3-2 风险的市场价格对期望红利的影响

从图 3-2 可以看出，$V(x,b)$是风险的市场价格$\frac{\mu}{\sigma}$的增函数，这是因为$\frac{\mu}{\sigma}$越大，投资风险资产能得到的收益越大，因而期望红利也越大。

3.3.3 风险资产期望收益率μ对最优投资策略的影响

取$\delta=0.05, c=5, \beta=5, x=3, \sigma=0.4$,则由定理 3.5，得到$A^*$与$\mu$之间的关系，如图 3.3 所示。

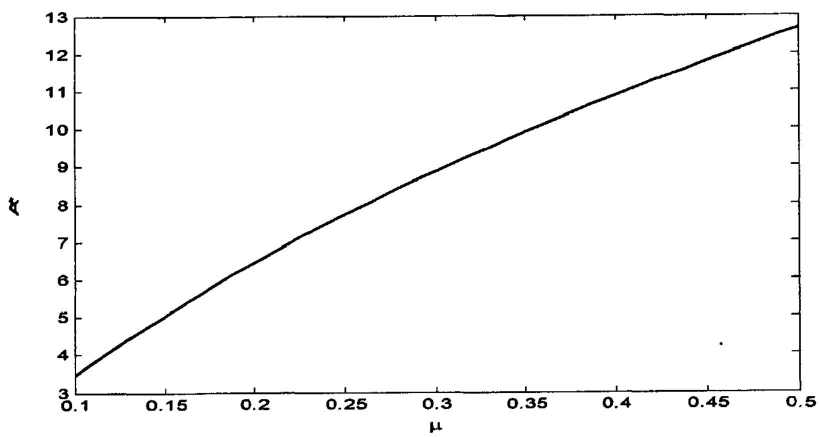

图 3-3 风险资产的期望收益率对最优投资的影响

从图 3-3 可以看出，A^*是风险资产期望收益率μ的增函数。因为μ越大，投资于风险资产所能获得收益越大，因此保险公司应投资更多的盈余于风险资产。

3.3.4 标准差σ对最优投资策略的影响

取$\delta=0.05, c=5, \beta=5, x=3, \mu=0.1$，则由定理 3-5，得到$A^*$与$\sigma$之间的关系，如图 3-4 所示。

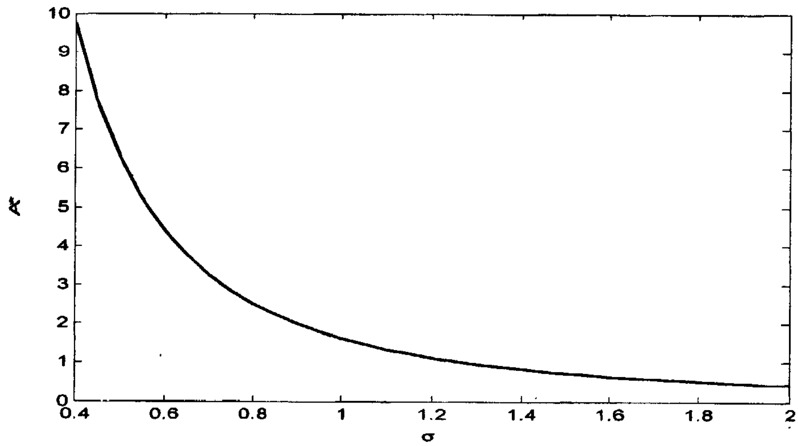

图 3-4 风险资产的期望收益率标准差对最优投资的影响

从图 3-4 可以看出，A^*是σ的减函数，由于σ是风险资产期望收益率的标准差，因此σ越大，风险资产的风险越大，所以保险公司应投资更少的盈余于风险资产。

第四章 带交易费用的最优投资和比例再保险

买卖股票是需要佣金、印花税、过户费的，即交易股票是有交易费用的，尤其是频繁的交易时，交易费用是很大的。此外除了上述提到的交易费用外还有其他费用。其他费用是指投资者在委托买卖股票时，向证券营业部缴纳的委托费(通讯费)、撤单费、查询费、开户费、磁卡费以及电话委托、自助委托的刷卡费、超时费等。这些费用主要用于通讯、设备、单证制作等方面的开支。其他费用由券商根据需要酌情收取，一般没有明确的收费标准，只要其收费得到当地物价部门批准即可。因此在风险投资时，应考虑交易费用，考虑交易费用才更符合实际情况。[4, 5]

Zhang et.al.[55]仅对扩散风险模型，考虑了含交易费用的投资投资和再保险问题。本章对跳扩散风险模型，在投资具有交易费用的条件下，研究使得期望指数效用最大的最优再保险和投资策略。得到最优再保险和投资策略，以及最大期望指数效用函数的显示解。

4.1 模型和 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

4.1.1 模型

考虑如下的跳-扩散风险模型

$$dX_t = cdt + \beta dW_t^0 - d\sum_{i=1}^{N(t)} Y_k \tag{4-1}$$

$$X_0 = x$$

其中 $x \geq 0$ 表示保险公司的初始盈余； $c > 0$ 是保险公司单位时间的保费收入；$\{Y_k, k=1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布的(严格)正值随机变量，其共同分布为 $F(y)$，密度函数为 $f(y)$， $F(0)=0$， Y_k 表示第 k 次赔付的大小； $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda > 0$ 的泊松过程，表示到时刻 t 为止的总的索赔发生次数； $\{W_t^0, t \geq 0\}$ 是标准的布朗运动， $\beta \geq 0$ 是常数，表示扩散变差参数。此外，假设 $\{Y_k, k=1,2,\cdots\}$，

$\{N(t),t\ge 0\}$ 和 $\{W_t^0,t\ge 0\}$ 之间是相互独立的。$\{X_t,t\ge 0\}$ 为保险公司在 t 时刻的盈余。

下面考虑比例再保险，比例再保险的水平为 $(1-a)$，即保险公司的自留额为 $0\le a\le 1$，分出为 $(1-a)$，即在每次理赔时保险公司支付 $100a\%$，同时再保险公司支付剩余的 $100(1-a)\%$。假设保险公司向再保险公司支付的再保费率为 $(1-a)\lambda\mu_1+\alpha(1-a)^2\lambda\mu_2$，且 $c<\lambda(\mu_1+\alpha\mu_2)$，$\alpha$ 为一常数，$\mu_1=EY,\mu_2=EY^2$。则考虑比例再保险后，保险公司在 t 时刻的盈余为

$$dX_t^a=\left[c-(1-a)\lambda\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda\mu_2\right]dt+\beta dW_t^0-d\sum_{i=1}^{N(t)}aY_i \tag{4-2}$$

考虑一个金融市场，由 $n+1$ 个金融资产组成，其中一个是无风险资产（债券），时刻 t 的价格 $\{B_t,t\ge 0\}$ 满足下面的方程

$$dB_t=r_0B_tdt$$

其中 $r_0>0$ 为无风险利率。n 个风险资产（股票），在时刻 t 时的价格 $S_i(t)$ 满足下面的随机微分方程

$$dS_i(t)=S_i(t)[r_idt+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}dW^j(t)],\quad i=1,2,...,n.$$

其中 $r_i\ge r_0$，$\sigma_{ij}>0$ 为常数，$W(t)=\{W^1(t),\cdots,W^n(t)\}$ 是 n 维标准布朗运动，假设 $W_t^j,j=0,1,2,...,n$ 相互独立。

买卖风险资产都需要交易费用，设 $\theta_b=[\theta_{b1},\theta_{b2},...,\theta_{bn}]'$ 和 $\theta_s=[\theta_{s1},\theta_{s2},...,\theta_{sn}]'$ 分别为买卖风险资产的交易费用，即买一个单位的风险资产 i 将花费 $(1+\theta_{bi})S_i(t)$ 的资金，卖一个单位的风险资产 i 将得到 $(1+\theta_{si})S_i(t)$ 的现金。

设 π_b,π_s 分别为买和卖风险资产的资金，这里 $\pi_b=(\pi_b^1,\pi_b^2,...,\pi_b^n)$，$\pi_s=(\pi_s^1,\pi_s^2,...,\pi_s^n)$。因为不能同时买卖风险资产，所以有 $\pi_b\cdot\pi_s'=0$。

比例再保险水平 a_t 和在风险资产上的投资 π_b,π_s 作为控制变量。在任意时刻

$t \geq 0$，$\pi_b = \pi_b(t), \pi_s = \pi_s(t)$ 和比例再保险水平 $a = a(t)$ 由保险公司选择，记 $\pi(\cdot) = (a(\cdot), \pi_b(\cdot), \pi_s(\cdot))$。一旦 $\pi(\cdot)$ 被选择了，则保险公司的财富过程为

$$dX_t^\pi = [c - (1-a)\lambda\mu_1 - \alpha(1-a)^2\lambda\mu_2 + r_0 X_t^\pi + \pi_b(t)(r - r_0 I - \theta_b) + \pi_s(t)(r + r_0 I - \theta_s)]dt$$

$$+[\pi_b(t) + \pi_s(t)]D'D[\pi_b(t) + \pi_s(t)]'dW_t^1 + \beta dW_t^0 - d\sum_{i=1}^{N(t)} aY_i \tag{4-3}$$

$$X_0^\pi = x$$

其中 I 是 n 维单位列向量，$r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)'$，$D = \begin{bmatrix} \sigma_{11}, \sigma_{21} \cdots, \sigma_{n1} \\ \sigma_{12}, \sigma_{22} \cdots, \sigma_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \ldots, \sigma_{nn} \end{bmatrix}$.

定义 4.1 一个策略 $\pi(\cdot) = (a(\cdot), \pi_b(\cdot), \pi_s(\cdot))$ 称为可行的，如果 $\pi(\cdot)$ 关于流 $\{F_t\}$ 是可料的，且对于每个 $t \geq 0$ 过程 $\pi(\cdot)$ 满足下面的条件

(1) $\int_0^T [\pi_b^i(t)]^2 dt < \infty$ a.e. 对所有 $T < \infty, i = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\int_0^T [\pi_s^i(t)]^2 dt < \infty$ a.e. 对所有 $T < \infty, i = 1, 2, \ldots, n$

(3) $0 \leq a \leq 1$ 。

所有可行的策略记为 Π.

4.1.2 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程

假设保险公司的目的是使得时刻 T 时财富的期望效用最大。设效用函数为 $u(x) = m - \frac{\delta}{\gamma}e^{-\gamma x}$，其中 $\delta > 0$，$\gamma > 0$。显然有 $u' > 0, u'' < 0$。记 $V_\pi(t, x)$ 为时刻 t 盈余为 x 时，策略为 π 时的期望效用，即

$$V_\pi(t, x) = E\left[u(X_T^\pi) \middle| X_t^\pi = x\right], \quad 0 < t < T$$

目标是寻找最优的值函数

$$V(t, x) = \sup_{\pi \in \Pi} V_\pi(t, x) \tag{4-4}$$

和最优的策略 π^* 使得

$$V(t,x)=V_{\pi^*}(t,x) \tag{4-5}$$

采用 Flemming 和 Soner[15]或 Schmidli[45]中介绍的标准方法，我们得到最优的期望财富指数效用$V(t,x)$满足下面的 HJB 方程。

定理 4.2 假设由(4-4)定义的V关于t是连续可微，关于x是二次连续可微函数，则V满足下面的 HJB 方程

$$\sup_{\pi\in\Pi}\{V_t+[\pi_b(t)B_1+\pi_s(t)B_2]V_x+[c-(1-a)\lambda\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda\mu_2+r_0x]V_x$$
$$+\frac{1}{2}[\pi_b(t)+\pi_s(t)]D'D[\pi_b(t)+\pi_s(t)]'V_{xx}+\frac{1}{2}\beta^2V_{xx}+\lambda E[V(t,x-aY)-V(t,x)]\}=0 \tag{4-6}$$

边界条件

$$V(T,x)=u(x) \tag{4-7}$$

这里V_t,V_x,V_{xx}分别为V关于t的一阶导数，关于x的一阶导数和关于x的二阶导数，且$B_1=(r_1-r_0-\theta_{b1},r_2-r_0-\theta_{b2},\ldots,r_n-r_0-\theta_{bn})'$

$B_2=(r_1+r_0-\theta_{s1},r_2+r_0-\theta_{s2},\ldots,r_n+r_0-\theta_{sn})'$。

由 Flemming 和 Soner[15]或 Schmidli[45]，有下面的检验定理。

定理 4.3 设$W\in C^2$是一凹函数是 HJB 方程(4-6)的解，满足边界条件(4-7)，则(4-4)给出的期望财富指数效用V恰好等于W。进一步，若π^*使得

$$W_t+[\pi_b^*(t)B_1+\pi_s^*(t)B_2]W_x+\frac{1}{2}[\pi_b^*(t)+\pi_s^*(t)]D'D[\pi_b^*(t)+\pi_s^*(t)]'W_{xx}$$
$$+[c-(1-a^*)\lambda\mu_1-\alpha(1-a^*)^2\lambda\mu_2+r_0x]W_x+\frac{1}{2}\beta^2W_{xx}+\lambda E[W(t,x-a^*Y)-W(t,x)]\}=0 \tag{4-8}$$

则$\pi^*(\cdot)$是最优的策略，也就是$W(t,x)=V(t,x)=V_{\pi^*}(t,x)$。

4.2 辅助结果[46,47,55]

引理 4.4 设 s_1 定义为

$$s_1(z)=\frac{1}{2}\left\|(D')^{-1}z+(D')^{-1}B_1\right\|^2 \tag{4-9}$$

其中 $z\in[0,\infty)^n$。则 s_1 有唯一的最小值 $\bar{z}_1\in[0,\infty)^n$，i.e.

$$\left\|(D')^{-1}\bar{z}_1+(D')^{-1}B_1\right\|^2\le\left\|(D')^{-1}z+(D')^{-1}B_1\right\|^2,\ \forall z\in[0,\infty)^n \tag{4-10}$$

Kuhn–Tucker 条件对于(4-9)中最小的 s_1 在区间 $[0,\infty)$ 导致 Lagrange multiplier 向量 $\bar{v}_1\in[0,\infty)^n$ 使得 $\bar{v}_1=\nabla s_1(\bar{z}_1)=(D'D)^{-1}\bar{z}_1+(D'D)^{-1}B_1$ 和 $\bar{z}_1\bar{v}_1=0$.

引理 4.5 设 s_2 定义为

$$s_2(z)=\frac{1}{2}\left\|(D')^{-1}z+(D')^{-1}B_2\right\|^2 \tag{4-11}$$

其中 $z\in[0,\infty)^n$。则 s_2 有唯一的最小值：$\bar{z}_2\in[0,\infty)^n$, i.e.

$$\left\|(D')^{-1}\bar{z}_2+(D')^{-1}B_2\right\|^2\le\left\|(D')^{-1}z+(D')^{-1}B_2\right\|^2,\ \forall z\in[0,\infty)^n \tag{4-12}$$

Kuhn–Tucker 条件对于(4-11)中最小的 s_2 在区间 $[0,\infty)$ 导致 Lagrange multiplier 向量 $\bar{v}_2\in[0,\infty)^n$ 使得 $\bar{v}_2=\nabla s_2(\bar{z}_2)=(D'D)^{-1}\bar{z}_2+(D'D)^{-1}B_2$ 和 $\bar{z}_2\bar{v}_2=0$.

引理 4.6 设 l_1 定义为

$$l_1(z)=\frac{1}{2}z'D'Dz-\rho_1B_1'z \tag{4-13}$$

其中 $z\in[0,\infty)^n$,这里 $\rho_1\ge0$。则 l_1 有唯一的最小值：$\rho_1D^{-1}\bar{\xi}_1\in[0,\infty)^n$,这里

$$\bar{\xi}_1=(D')^{-1}\bar{z}_1+(D')^{-1}B_1 \tag{4-14}$$

其中 $\bar{z}_1$ 为引理 4.4 给出的 $s_1(z)$ 的唯一最小值。进一步 $\bar{z}_1'D^{-1}\bar{\xi}_1=0$ 且

$$l_1(\rho_1\bar{v}_1)=l_1(\rho_1D^{-1}\bar{\xi})=-\frac{1}{2}\rho_1^2\left\|\bar{\xi}_1\right\| \tag{4-15}$$

引理 4.7 设 l_2 定义为

$$l_2(z)=\frac{1}{2}z'D'Dz-\rho_2B_2'z \tag{4-16}$$

其中 $z\in[0,\infty)^n$, 这里 $\rho_2\ge0$。则 l_2 有唯一的最小值 $\rho_2D^{-1}\bar{\xi}_2\in[0,\infty)^n$,其中

$$\overline{\xi}_2=(D')^{-1}\overline{z}_2+(D')^{-1}B_2 \tag{4-17}$$

其中z_2为引理4.5给出的$s_2(z)$的唯一最小值。进一步$\overline{z}_2'D^{-1}\overline{\xi}_2=0$且

$$l_2(\rho_2\overline{v}_2)=l_2(\rho_2D^{-1}\overline{\xi})=-\frac{1}{2}\rho_2^2\|\overline{\xi}_2\| \tag{4-18}$$

4.3 最优投资和比例再保险策略

假设有一解$W(x,b)$，满足$W_x>0$和$W_{xx}<0$，则由引理4.4--引理4.7的辅助结果，有

$$\begin{aligned}&\sup_{\pi_b\geq 0}\left\{\pi_bB_1W_x+\frac{1}{2}\pi_bD'D\pi_b'W_{xx}\right\}\\&=W_{xx}\inf_{\pi_b\geq 0}\left\{\frac{1}{2}\pi_bD'D\pi_b'+\frac{W_x}{W_{xx}}\pi_bB_1\right\}\\&=-\frac{1}{2}\frac{W_x^2}{W_{xx}}\|\overline{\xi}_1\|^2\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\sup_{\pi_s\geq 0}\left\{\pi_sB_2W_x+\frac{1}{2}\pi_sD'D\pi_s'W_{xx}\right\}\\&=W_{xx}\inf_{\pi_s\geq 0}\left\{\frac{1}{2}\pi_sD'D\pi_s'+\frac{W_x}{W_{xx}}\pi_sB_2\right\}\\&=-\frac{1}{2}\frac{W_x^2}{W_{xx}}\|\overline{\xi}_2\|^2\end{aligned}$$

其中$\overline{\xi}_1$和$\overline{\xi}_2$由(4-14)和(4-17)给出，所以有

$$\pi_b^*=-D^{-1}\overline{\xi}_1\frac{W_x}{W_{xx}},\quad \pi_s^*=-D^{-1}\overline{\xi}_2\frac{W_x}{W_{xx}} \tag{4-19}$$

把(4-19)代入(4-6)，得到

$$\sup_a\{[c-(1-a)\lambda\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda\mu_2+r_0x]W_x+\frac{1}{2}\beta^2W_{xx}+\lambda E[W(t,x-aY)-W(t,x))]\}$$

$$+W_t-\frac{1}{2}\frac{W_x^2}{W_{xx}}\left(\left\|\overline{\xi}_1\right\|^2+\left\|\overline{\xi}_2\right\|^2\right)=0 \tag{4-20}$$

由 Browne [3]或 Yang 和 Zhang[54]，假设有如下形式的解

$$W(t,x)=m-\frac{\delta}{\gamma}\exp\left\{-x\gamma e^{r_0(T-t)}+\frac{1}{2}\left(\left\|\overline{\xi}_1\right\|^2+\left\|\overline{\xi}_2\right\|^2\right)(T-t)+h(T-t)\right\} \tag{4-21}$$

这里 $h(\cdot)$ 是一个适合的的函数使得(4-21)是(4-20)的一个解，且 $h(0)=0$。因此有

$$W_t=[W(t,x)-m][xr_0\gamma e^{r_0(T-t)}+\frac{1}{2}(\left\|\overline{\xi}_1\right\|^2+\left\|\overline{\xi}_2\right\|^2)-h'(T-t)]$$

$$W_x=[W(t,x)-m][-\gamma e^{r_0(T-t)}],\quad W_{xx}=[W(t,x)-m][\gamma^2e^{2r_0(T-t)}]$$

$$\lambda E[W(t,x-aY)-W(t,x))]=\lambda[W(t,x)-m]E[\exp\{\gamma aYe^{r_0(T-t)}\}-1]$$

代入(4-20)，有

$$\sup_a\{-h'(T-t)+[c-(1-a)\lambda\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda\mu_2][-\gamma e^{r_0(T-t)}]+\frac{1}{2}\beta^2\gamma^2e^{2r_0(T-t)}$$

$$+\lambda E[\exp\{\gamma aYe^{r_0(T-t)}\}-1]\}=0 \tag{4-22}$$

假设

$$G(a)=-h'(T-t)+[c-(1-a)\lambda\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda\mu_2][-\gamma e^{r_0(T-t)}]+\frac{1}{2}\beta^2\gamma^2e^{2r_0(T-t)}$$

$$+\lambda E[\exp\{\gamma aYe^{r_0(T-t)}\}-1]$$

则令 $\frac{\partial G(a)}{\partial a}=0$，有

$$\mu_1+2\alpha\mu_2(1-a)=E[Y\exp\{\gamma aYe^{r_0(T-t)}\}] \tag{4-23}$$

定理 4.8 方程(4-23)有唯一正根 $\hat{a}$，且 $0<\hat{a}<1$。

证明 设

$$h(a)=\mu_1+2\alpha\mu_2(1-a)-E[Y\exp\{\gamma aYe^{r_0(T-t)}\}]$$

$$=\mu_1+2\alpha\mu_2(1-a)-\int_0^\infty ye^{\gamma aye^{r_0(T-t)}}F(dy)$$

则

$$h'(a)=-2\alpha\mu_2-\int_0^\infty y^2\gamma e^{r_0(T-t)}e^{\gamma aye^{r_0(T-t)}}F(dy)<0$$

$$h''(a)=-\int_0^\infty y^3\gamma^2e^{2r_0(T-t)}e^{\gamma aye^{r_0(T-t)}}F(dy)<0$$

因此$h(a)$关于a是一单调递减、凹函数。又因为

$$h(0)=2\alpha\mu_2>0,\quad h(1)=\mu_1-\int_0^\infty ye^{\gamma ye^{r_0(T-t)}}F(dy)<0$$

所以(4-23)有唯一正解$0<\hat{a}<1$。

把$\hat{a}$代入(4-22)，得到

$$h'(T-t)=[c-(1-\hat{a})\lambda\mu_1-\alpha(1-\hat{a})^2\lambda\mu_2][-\gamma e^{r_0(T-t)}]+\frac{1}{2}\beta^2\gamma^2e^{2r_0(T-t)}$$
$$+\lambda E[\exp\{\gamma\hat{a}Ye^{r_0(T-t)}\}-1] \tag{4-24}$$

所以

$$W(t,x)=m-\frac{\delta}{\gamma}\exp\left\{-x\gamma e^{r_0(T-t)}+\frac{1}{2}\left(\left\|\bar{\xi}_1\right\|^2+\left\|\bar{\xi}_2\right\|^2\right)(T-t)+h(T-t)\right\}$$

因此，从定理4.3我们有下面的定理。

定理4.9 对盈余过程(4-3)，最优的比例再保险策略a^*为下述方程

$$\mu_1+2\alpha\mu_2(1-a)=E[Y\exp\{\gamma aYe^{r_0(T-t)}\}]$$

的正解，且$0<a^*<1$。最优的投资策略为

$$\pi_b^*=\frac{D^{-1}\bar{\xi}_1}{\gamma e^{r_0(T-t)}} \tag{4-25}$$

$$\pi_s^*=\frac{D^{-1}\bar{\xi}_2}{\gamma e^{r_0(T-t)}} \tag{4-26}$$

最优的值函数为

$$V(t,x)=m-\frac{\delta}{\gamma}\exp\left\{-x\gamma e^{r_0(T-t)}+\frac{1}{2}\left(\left\|\bar{\xi}_1\right\|^2+\left\|\bar{\xi}_2\right\|^2\right)(T-t)+h(T-t)\right\} \tag{4-27}$$

其中$h(T-t)$是下面方程的解。

$$h'(T-t)=[c-(1-a^*)\lambda\mu_1-\alpha(1-a^*)^2\lambda\mu_2][-\gamma e^{r_0(T-t)}]+\frac{1}{2}\beta^2\gamma^2e^{2r_0(T-t)}$$
$$+\lambda E[\exp\{\gamma a^*Ye^{r_0(T-t)}\}-1] \tag{4-28}$$

推论 4.10 当理赔分布为指数分布，即$F(y)=1-e^{-\beta y}$，我们得出最优的比例再保险策略a^*满足如下方程

$$\frac{1}{\beta}+\frac{4\alpha}{\beta^2}(1-a)=\frac{\beta}{\left[\beta-\gamma a e^{r_0(T-t)}\right]^2} \tag{4-29}$$

$h(T-t)$满足如下方程

$$h(T-t)=[c-\left(1-a^*\right)\lambda\mu_1-\alpha\left(1-a^*\right)^2\lambda\mu_2]\frac{\gamma}{r_0}[1-e^{r_0(T-t)}]+\frac{1}{4r_0}\beta^2\gamma^2\left[e^{2r_0(T-t)}-1\right]$$

$$+\lambda\int_0^{T-t}\frac{\beta}{\beta-\gamma a^* e^{r_0 s}}ds-\lambda\left(T-t\right) \tag{4-30}$$

第五章 风险资产含跳的最优投资和再保险

在金融实务中，有许多不确定性的因素，如利率、通货膨胀、自然灾害、战争、金融危机以及国家宏观政策的改变等等。因此在金融市场上，随着这些不确定因素的变化，股票必然会出现不连续的运动，所以需要考虑风险资产价格出现跳跃的情形，也就是风险资产价格服从几何 Levy 过程。

本章在风险资产遵循跳扩散过程的条件下，对跳扩散风险模型，研究了使得期望指数效用最大的最优再保险和投资策略。得到最优再保险和投资策略，以及最大期望指数效用函数的显示解。并通过一些数值计算分析了，一些参数对最优投资策略、最优比例再保险策略及风险资产中跳的程度的影响。

5.1 模型和 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

5.1.1 模型

下面假设：在交易中不考虑交易费用和税收；所有资产是无穷可分的；交易连续进行。为了数学上更为严格，假设所有的随机变量和随机过程都定义在完备的概率空间(Ω,F,P)，满足通常条件，也就是F_t右连续且$P-$完备。

考虑如下的跳-扩散风险模型

$$dX_t = cdt + \beta dW_t^1 - d\sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_k \tag{5-1}$$

其中 $c>0$是保险公司单位时间的保费收入；$\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$是一列独立同分布的(严格)正值随机变量，其共同分布为$F(y)$，密度函数为$f(y)$，$F(0)=0$，Y_k表示第k次赔付的大小；$\{N_1(t),t\ge 0\}$是参数为$\lambda_1>0$的泊松过程，表示到时刻t为止的总的索赔发生次数；$\{W_t^1,t\ge 0\}$是标准的布朗运动，$\beta\ge 0$是常数，表示扩散变差参数。此外，假设$\{Y_k,k=1,2,\cdots\}$，$\{N(t),t\ge 0\}$和$\{W_t^1,t\ge 0\}$之间是相互独立的。$\{X_t,t\ge 0\}$为保险公司在t时刻的盈余。

假设保险公司的比例再保险水平为$1-a$，a称为风险暴露。如果保险公司的

风险暴露a已确定，在每次理赔时保险公司支付$100a\%$，再保险公司支付剩余的$100(1-a)\%$。同时保险公司要支付部分保费给再保险公司，假设再保险公司的保费方式为方差保费，即保险公司向再保险公司支付的保费率为$(1-a)\lambda_1\mu_1+\alpha(1-a)^2\lambda_1\mu_2$，且$c<\lambda_1(\mu_1+\alpha\mu_2)$，$\alpha$为一常数，$\mu_1=EY,\mu_2=EY^2$。则进行比例再保险后，保险公司的盈余为

$$dX_t^a=\left[c-(1-a)\lambda_1\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda_1\mu_2\right]dt+\beta dW_t^1-d\sum_{i=1}^{N_1(t)}aY_i \tag{5-2}$$

假设投资的金融市场有一个无风险资产(债券)和一个风险资产(股票)，其中无风险资产(债券)在时刻t的价格过程满足下面的方程：

$$dB_t=rB_tdt \tag{5-3}$$

这里$r>0$是无风险利率。风险资产（股票）在时刻t它们的价格记为$S_t(t)$满足下面的随机微分方程

$$dS(t)=S(t)\left[\mu dt+\sigma dW_t^2+\int_R zN(dt,dz)\right] \tag{5-4}$$

其中常数$\mu>r$和σ为风险资产的期望收益率和波动率。$\{W_t^2:t\geq 0\}$是一标准布朗运动，假设$\{W_t^1:t\geq 0\}$和$\{W_t^2:t\geq 0\}$独立，$\int_0^t\int_R zN(ds,dz)$是一复合泊松过程，也就是

$$\int_0^t\int_R zN(ds,dz)=\sum_{i=1}^{N_2(t)}Z_i$$

$N_2(t)$是一强度为λ_2的泊松过程，$Z_1,Z_2,\ldots$是相互独立同分布的随机变量，分布函数是$G(z)$。

设$b(t)$为t时刻盈余投资在风险资产上的资金，以b和a作为控制参数。在任意时刻$t\geq 0$，$b=b(t)$和$a=a(t)$由保险公司选取。我们记$\pi(\cdot)=(a(\cdot),b(\cdot))$，一旦策略$\pi(\cdot)$被选择，则保险公司的盈余变为

$$dX_t^\pi=\left[(\mu-r)b(t)+rX_t^\pi+c-(1-a(t))\lambda_1\mu_1-\alpha(1-a(t))^2\lambda_1\mu_2\right]dt$$

$$+\beta dW_t^1+b(t)\sigma dW_t^2+b(t)\int_R zN(dt,dz)-d\sum_{i=1}^{N_1(t)}a(t)Y_i \tag{5-5}$$

$$X_0=x$$

定义 5.1 一个策略$\pi(\cdot)$称为可行的，如果$\pi(\cdot)$关于流$\{F_t\}$是可料的，且对于每个$t\geq 0$过程$\pi(\cdot)$满足下面的条件：

(1) $\int_0^T[b(t)]^2dt<\infty$ a.e. 对所有$T<\infty$

(2) $0\leq a(t)\leq 1$

所有可行策略记为$\prod$。

5.1.2 Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程

假设保险公司的目标是，最大化时刻T的财富效用。并设效用函数为

$$u(x)=m-\frac{\delta}{\gamma}e^{-\gamma x}$$

其中$\delta>0$，$\gamma>0$。显然有$u'>0,u''<0$。记$V_\pi(t,x)$为时刻t时盈余为x时，策略为π时的期望效用，即

$$V_\pi(t,x)=E\left[u(X_T^\pi)\middle|X_t^\pi=x\right],\ 0<t<T$$

投资和再保险的目标是使得期望财富效用最大，即寻找最大的值函数

$$V(t,x)=\sup_\pi V_\pi(t,x) \tag{5-6}$$

和最优的策略π^*使得

$$V(t,x)=V_{\pi^*}(t,x) \tag{5-7}$$

这是有限时间的最优控制问题，采取 Flemming 和 Soner[15]中的标准方法，可得到最优的期望财富$V(t,x)$满足下面的 HJB 方程。

定理 5.2 假设V通过(5-6)定义的，是一连续可微的函数。则V满足下面的 HJB 方程

$$\sup_{\pi\in\prod}\{V_t+[(\mu-r)b+rx+c-(1-a)\lambda_1\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda_1\mu_2]V_x+$$

$$\frac{1}{2}(\beta^2+b^2\sigma^2)V_{xx}+\lambda_1E[V(t,x-aY)-V(t,x))]+\lambda_2E[V(t,x+bZ)-V(t,x))]\}=0 \quad (5\text{-}8)$$

和边界条件

$$V(T,x)=u(x) \quad (5\text{-}9)$$

其中V_t,V_x,V_{xx}分别为V关于t的一阶导数，关于x的一阶导数和关于x的二阶导数。

由 Flemming 和 Soner[15]或 Schmidli[45]，我们有下面的检验定理。

定理 5.3 设$W\in C^2$是一个满足 HJB 方程(5-8)和边界条件(5-9)的单调递增、凹函数，则(5-6)给出的最大期望财富V恰好等于W。进一步，若$\pi^*=(a^*,b^*)$使得对所有 $0<t<T,0\le x<\infty$，有

$$W_t+[(\mu-r)b^*+rx+c-\left(1-a^*\right)\lambda_1\mu_1-\alpha\left(1-a^*\right)^2\lambda_1\mu_2]W_x+\frac{1}{2}(\beta^2+b^{*2}\sigma^2)W_{xx}$$
$$+\lambda_1E[W(t,x-a^*Y)-W(t,x))]+\lambda_2E[W(t,x+b^*Z)-W(t,x))]=0 \quad (5\text{-}10)$$

则策略π^*是最优的策略，也就是$W(t,x)=V(t,x)=V_{\pi^*}(t,x)$.

5.2 HJB 方程的解

下面求 HJB 方程(5-8)满足边界条件(5-9)的解，由 Browne [3]或 Yang 和 Zhang[54]，假设有如下形式的解

$$W(t,x)=m-\frac{\delta}{\gamma}\exp\left\{-x\gamma e^{r(T-t)}+h(T-t)\right\} \quad (5\text{-}11)$$

其中$h(\cdot)$是一个适合的的函数使得(5-11)是(5-8)的一个解，且$h(0)=0$。

由（5-11）有

$$W_t=[W(t,x)-m][xr\gamma e^{r(T-t)}-h'(T-t)]$$

$$W_x=[W(t,x)-m][-\gamma e^{r(T-t)}],\ W_{xx}=[W(t,x)-m][\gamma^2e^{2r(T-t)}]$$

$$\lambda_1E[W(t,x-aY)-W(t,x))]=\lambda_1[W(t,x)-m]E[\exp\{aY\gamma e^{r(T-t)}\}-1]$$

$$\lambda_2E[W(t,x+bZ)-W(t,x))]=\lambda_2[W(t,x)-m]E[\exp\{-Zb\gamma e^{r(T-t)}\}-1] \cdot \quad (5\text{-}12)$$

把以上各式代入(5-8)有

$$\sup_{\pi\in\Pi}\{-h'(T-t)+[(\mu-r)b+c-(1-a)\lambda_1\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda_1\mu_2][-\gamma e^{r(T-t)}]$$
$$+\frac{1}{2}(\beta^2+b^2\sigma^2)[\gamma^2e^{2r(T-t)}]+\lambda_1E[\exp\{aY\gamma e^{r(T-t)}\}-1]$$
$$+\lambda_2E[\exp\{-Zb\gamma e^{r(T-t)}\}-1]\} \tag{5-13}$$

下面寻找最优的π^*使得(5-13)最大。设

$$g(a,b)=-h'(T-t)+[(\mu-r)b+c-(1-a)\lambda_1\mu_1-\alpha(1-a)^2\lambda_1\mu_2][-\gamma e^{r(T-t)}]$$
$$+\frac{1}{2}(\beta^2+b^2\sigma^2)[\gamma^2e^{2r(T-t)}]+\lambda_1E[\exp\{Ya\gamma e^{r(T-t)}\}-1]$$
$$+\lambda_2E[\exp\{-Zb\gamma e^{r(T-t)}\}-1] \tag{5-14}$$

令

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial a}=0$$

则有

$$\mu_1+2\alpha\mu_2(1-a)=E[Y\exp\{\gamma aYe^{r(T-t)}\}] \tag{5-15}$$

令

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial b}=0$$

则有

$$\mu-r+\lambda_2E[Z\exp\{-\gamma bZe^{r(T-t)}\}]=b\sigma^2\gamma e^{r(T-t)} \tag{5-16}$$

引理 5.4 方程(5-15)有唯一根$\hat{a}$，且$0<\hat{a}<1$；方程(5-16)有唯一根$\hat{b}$。

证明 设

$$h(a)=\mu_1+2\alpha\mu_2(1-a)-\int_0^\infty ye^{\gamma aye^{r(T-t)}}F(dy)$$

则

$$h'(a)=-2\alpha\mu_2-\int_0^\infty y^2\gamma e^{r(T-t)}e^{\gamma aye^{r(T-t)}}F(dy)<0$$

$$h''(a)=-\int_0^\infty y^3\gamma^2e^{2r(T-t)}e^{\gamma aye^{r(T-t)}}F(dy)<0$$

所以$h(a)$关于a是一单调递减、凹函数。又因为

$$h(0)=2\alpha\mu_2>0$$

$$h(1)=\mu_1-\int_0^\infty ye^{\gamma ye^{r(T-t)}}F(dy)<0$$

因此(5-15)有唯一正解 $0<\hat{a}<1$。

设

$$g(b)=\mu-r+\lambda_2E[Z\exp\{-\gamma bZe^{r(T-t)}\}]-b\sigma^2\gamma e^{r(T-t)}$$

$$=\mu-r+\lambda_2\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\gamma bze^{r(T-t)}}G(dz)-b\sigma^2\gamma e^{r(T-t)}$$

$g(b)$ 对 b 求微分有

$$g'(b)=-\lambda_2\gamma e^{r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\gamma bze^{r(T-t)}}G(dz)-\sigma^2\gamma e^{r(T-t)}<0$$

因此 $g(b)$ 关于 b 单调递减函数，又因为

$$\lim_{b\to-\infty}g(b)>0,\lim_{b\to\infty}g(b)<0$$

因此(5-16)有唯一解。

把 $\hat{a},\hat{b}$ 代入(5-13)我们有

$$\begin{aligned}h'(T-t)=&[(\mu-r)\hat{b}+c-(1-\hat{a})\lambda_1\mu_1-\alpha(1-\hat{a})^2\lambda_1\mu_2][-\gamma e^{r(T-t)}]\\&+\frac{1}{2}(\beta^2+\hat{b}^2\sigma^2)[\gamma^2e^{2r(T-t)}]+\lambda_1E[\exp\{Y\hat{a}\gamma e^{r(T-t)}\}-1]\\&+\lambda_2E[\exp\{-Z\hat{b}\gamma e^{r(T-t)}\}-1]\end{aligned}\tag{5-17}$$

也就是

$$\begin{aligned}h(T-t)=&-\frac{\gamma}{r}[(\mu-r)\hat{b}+c-(1-\hat{a})\lambda_1\mu_1-\alpha(1-\hat{a})^2\lambda_1\mu_2][e^{r(T-t)}-1]\\&+\frac{\gamma^2}{4r}(\beta^2+\hat{b}^2\sigma^2)[e^{2r(T-t)}-1]+\lambda_1\int_0^{T-t}\left[\int_0^\infty\exp\{\hat{a}y\gamma e^{rs}\}dF(y)ds-1\right]\\&+\lambda_2\int_0^{T-t}\left[\int_{-\infty}^\infty\exp\{-z\hat{b}\gamma e^{rs}\}dG(z)ds-1\right]\end{aligned}\tag{5-18}$$

所以，有

$$W(t,x)=m-\frac{\delta}{\gamma}\exp\left\{-x\gamma e^{r(T-t)}+h(T-t)\right\}$$

这里 $h(T-t)$ 满足(5-18)。因此我们有下面的定理

定理 5.5 对盈余过程(5-5)最优的再保险策略为 $a^*(t)$ 是下面方程的唯一解，且 $0<a^*<1$。

$$\mu_1+2\alpha\mu_2(1-a(t))=E[Y\exp\{\gamma a(t)Ye^{r(T-t)}\}]$$

最优的投资策略为 $b^*(t)$ 下面方程的唯一解

$$\mu-r+\lambda_2E[Z\exp\{-\gamma b(t)Ze^{r(T-t)}\}]=b(t)\sigma^2\gamma e^{r(T-t)}$$

最优的值函数为

$$V(t,x)=m-\frac{\delta}{\gamma}\exp\left\{-x\gamma e^{r(T-t)}+h(T-t)\right\} \tag{5-19}$$

其中 $h(T-t)$ 满足下面的方程。

$$\begin{aligned}h(T-t)=&-\frac{\gamma}{r}[(\mu-r)b^*+c-\left(1-a^*\right)\lambda_1\mu_1-\alpha\left(1-a^*\right)^2\lambda_1\mu_2][e^{r(T-t)}-1]\\&+\frac{\gamma^2}{4r}(\beta^2+b^{*2}\sigma^2)[e^{2r(T-t)}-1]+\lambda_1\int_0^{T-t}\left[\int_0^\infty\exp\{a^*y\gamma e^{rs}\}dF(y)\,ds-1\right]\\&+\lambda_2\int_0^{T-t}\left[\int_{-\infty}^\infty\exp\{-zb^*\gamma e^{rs}\}dG(z)\,ds-1\right]\end{aligned}$$

推论 5.6 在(5-5)令 $b(t)=0$，也就是不考虑投资，则最优的值函数为

$$V_1(t,x)=m-\frac{\delta}{\gamma}\exp\left\{-x\gamma e^{r(T-t)}+h_1(T-t)\right\} \tag{5-20}$$

这里 $h_1(T-t)$ 满足

$$\begin{aligned}h_1'(T-t)=&\left(c-\left(1-a^*\right)\lambda_1\mu_1-\alpha\left(1-a^*\right)^2\lambda_1\mu_2\right)[-\gamma e^{r(T-t)}]+\frac{1}{2}\beta^2[\gamma^2e^{2r(T-t)}]\\&+\lambda_1E[\exp\{a^*Y\gamma e^{r(T-t)}\}-1]\end{aligned} \tag{5-21}$$

推论 5.7 在(5-5)令 $\lambda_2=0$，也就是风险资产不含跳，则最优的投资策略 b^* 为

$$b^*=\frac{\mu-r}{\sigma^2}\frac{1}{\gamma e^{r(T-t)}} \tag{5-22}$$

最优的值函数为

$$V_2(t,x)=m-\frac{\delta}{\gamma}\exp\left\{-x\gamma e^{r(T-t)}+h_2(T-t)\right\} \tag{5-23}$$

这里$h_2(T-t)$满足

$$h_2'(T-t)=-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2+\left(c-\left(1-a^*\right)\lambda_1\mu_1-\alpha\left(1-a^*\right)^2\lambda_1\mu_2\right)[-\gamma e^{r(T-t)}]$$

$$+\frac{1}{2}\beta^2[\gamma^2e^{2r(T-t)}]+\lambda_1E[\exp\{a^*Y\gamma e^{r(T-t)}\}-1] \tag{5-24}$$

注 5.8 在推论 5.7 中当$a^*(t)=0$，也就是不考虑再保险，是 Yang 和 Zhang[54] 当$\rho=0$的情况。

定理 5.9 在(5-5)中令$\lambda_2=0$，则得到投资总比不投资好。

证明 因为$h_2(T-t)<h_1(T-t)$,所以从(5-20)和(5-23)得到

$$V_2(t,x)>V_1(t,x)。$$

5.3 数值计算及经济分析

下面通过数值计算得到一些参数对最优投资和再保险策略的影响。若风险资产不含跳，则最优的投资策略为

$$b^*(t)=\frac{\mu-r}{\sigma^2}\frac{1}{\gamma e^{r(T-t)}}$$

所以$b^*(t)$关于μ是单调增加的，关于σ或γ是单调减小的。当风险资产含跳时，也得出同样的结果。

设

$$F(y)=1-e^{-y}$$

$$G(z)=p\eta_1e^{-\eta_1z}I_{\{z\ge0\}}+q\eta_2e^{\eta_2z}I_{\{z\le0\}},$$

其中$p+q=1$，$\eta_1>0,\eta_2>0$ 且$\eta_2>\eta_1$。因此(5-15)变为

$$1+4\alpha(1-a(t))=\frac{1}{\left[1-\gamma a(t)e^{r(T-t)}\right]^2} \tag{5-25}$$

(5-16)变为

$$\mu - r + \frac{\lambda_2 p \eta_1}{[\eta_1 + \gamma b(t) e^{r(T-t)}]^2} - \frac{\lambda_2 q \eta_2}{[\eta_2 - \gamma b(t) e^{r(T-t)}]^2} = b(t)\sigma^2 \gamma e^{r(T-t)} \tag{5-26}$$

5.3.1 最优比例再保险的影响因素

设$r = 0.05, T = 5, t = 1, \alpha = 0.1, 0.15, 0.2$，则由（5-25）得到$\gamma$和$\alpha$与$a^*(t)$之间的关系见图 5-1 所示。

设$\gamma = 0.2, T = 5, t = 1, \alpha = 0.15$，则由（5-25）得到$r$与$a^*(t)$之间的关系见图 5-2 所示。

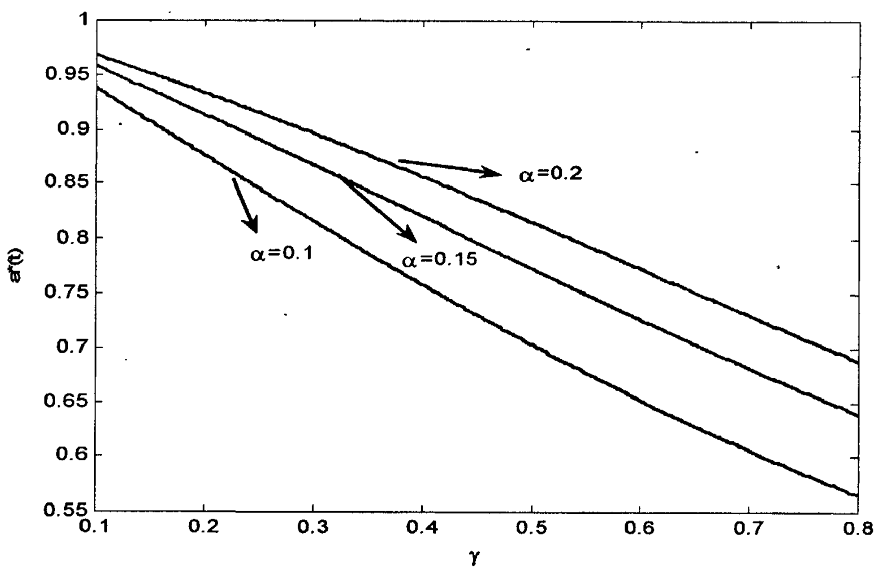

图 5-1 $a^*(t)$与γ和α之间的关系

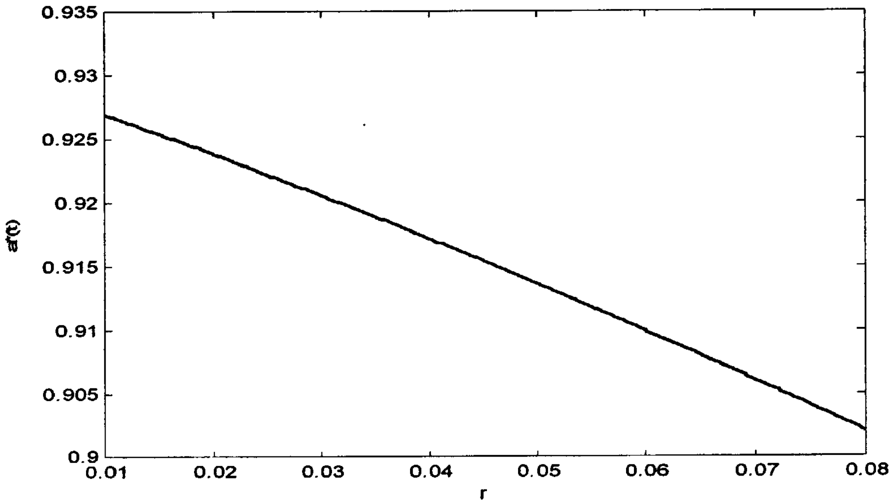

图 5-2 $a^*(t)$ 与 r 之间的关系

从图 5-1，我们可以看出 $a^*(t)$ 是 γ 的减函数。γ 是绝对风险厌恶参数，γ 的值越大，保险人所承受的风险越大，因此保险人保留的再保险部分越小。从图 5-1 中，我们还可以看出，$a^*(t)$ 是 α 的增函数。α 的值越大保险人保留的再保险部分越大。

从图 5-2，我们可以看出比例再保险策略 $a^*(t)$ 是 r 的减函数。r 是无风险利率，r 的值越大，无风险资产的期望收益越大，因此保险人从投资中获得的收入越多。

5.3.2 最优投资的影响因素

设 $\mu=0.1,\lambda_2=2,T=5,t=1,\sigma=0.2,p=\dfrac{2}{3},q=\dfrac{1}{3},\eta_1=2,\eta_2=3,\gamma=0.15$, 0.18，0.20，0.25，则由（5-25）得到 $b^*(t)$ 与 r 和 γ 之间的关系如图 5-3 所示。

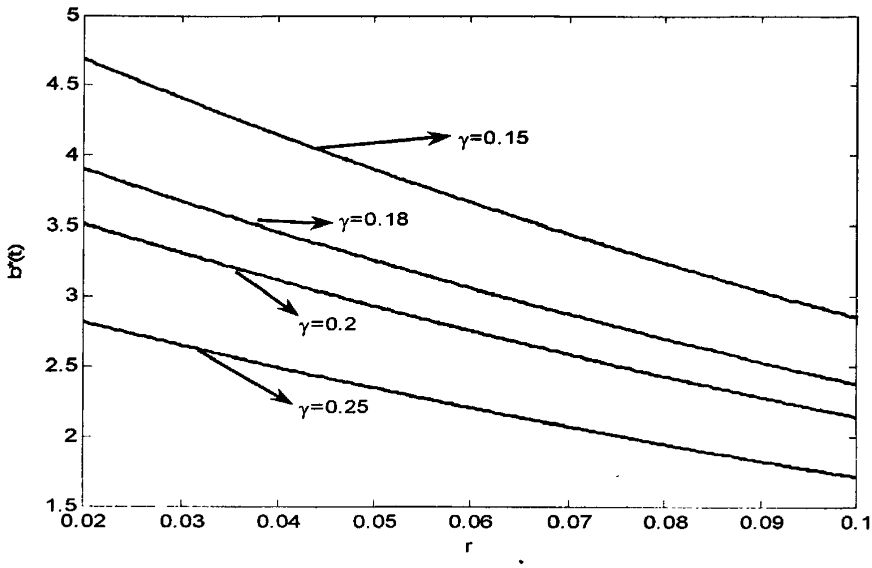

图 5-3 $b^*(t)$ 与 r 和 γ 之间的关系

从图 5-3，我们可以看出最优投资策略 $b^*(t)$ 是 γ 的减函数。因为 γ 是绝对风险厌恶参数，γ 的值越大，保险人所承受的风险越大，因此保险人希望在风险资产上的投资部分越小。从图 5-3，我们还可以看出，最优投资策略是 r 的减函数。因为 r 是无风险利率，r 越大从无风险资产中获得的利益越大，因此保险人在风险资产上的投资越少。

设 $r=0.05, T=5, t=1, \gamma=0.15, p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}, \eta_1=2, \eta_2=3, \lambda_2=2$，$\sigma=0.30, 0.35, 0.40$，由（5-25）得到 $b^*(t)$ 与 μ 和 σ 之间的关系如图 5-4 所示。

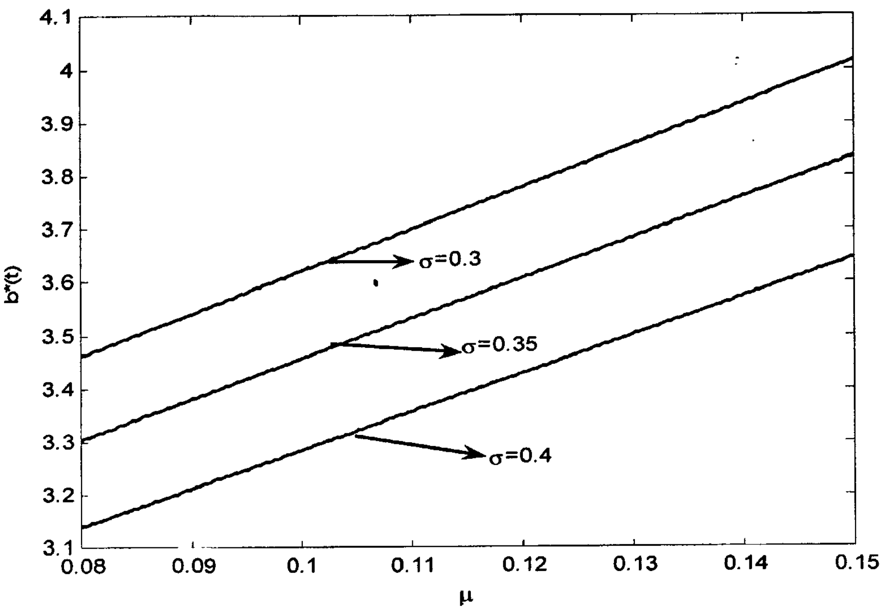

图 5-4 $b^*(t)$与μ和σ之间的关系

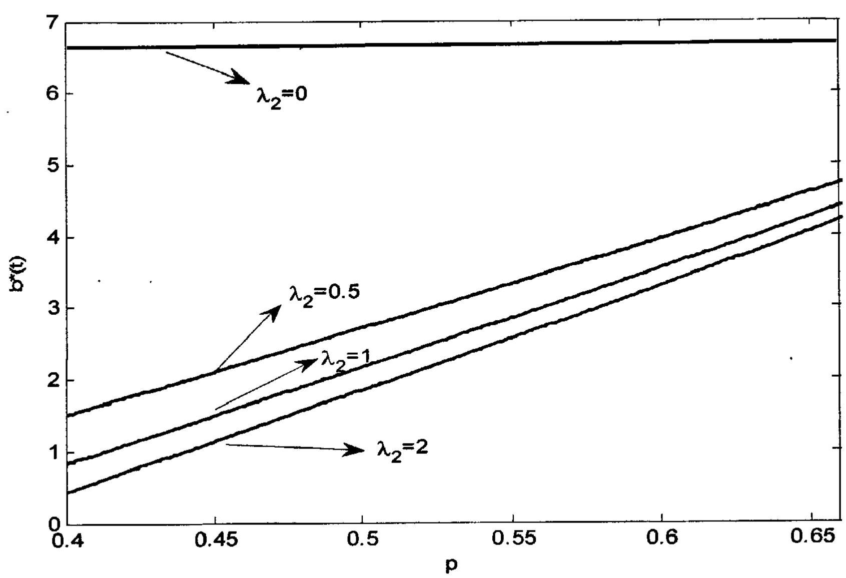

图 5-5$b^*(t)$与p和λ_2之间的关系

从图 5-4 们可以看出最优投资策略$b^*(t)$是σ的减函数。因为σ是风险资产的变差，σ越大风险资产的波动越大，因此风险也就越大；所以当σ增加时，保险人在风险资产上的投资将减少。

设$r=0.05,\mu=0.1,T=5,t=1,\sigma=0.2,\gamma=0.15,\eta_1=2,\eta_2=3,\lambda_2=0,2,3,4$，$p\in[$0.4,0.7]，则由（5-25）得到$b^*(t)$与$p$和$\lambda_2$之间的关系如图 5-5 所示。

从图 5-5 们可以看出最优投资策略$b^*(t)$是λ_2的减函数。λ_2是风险资产中泊松过程的参数，代表风险资产跳跃的程度。λ_2增加，代表风险资产跳跃的程度越大，因此保险人在风险资产上的投资越少。从图 5-5 们还可以看出，$b^*(t)$是p的增函数。p代表，风险资产向正向跳的程度，向正向跳的程度越大，保险人在风险资产上的投资越多。

第六章 总结与展望

本学位论文主要研究了三方面的内容：

第一，在红利问题中引入投资和再保险。得到最大期望折扣边界红利和最优投资和再保险策略的显示表达式，通过数值计算，得到最优策略与各个参数之间的关系，及再保险和投资对红利的影响。

第二，对跳-扩散风险模型，研究了带交易费用的使得期望财富效用最大的最优投资和比例再保险策略，得到最大期望财富指数效用，以及最优投资和再保险策略的显示解。

第三，对跳扩散过程，在风险资产服从几何 Levy 过程的条件下，得到最大期望财富指数效用，以及最优投资和再保险策略的显示解。并通过数值计算，得到最优投资和再保险策略与各个参数之间的关系。

从本学位论文的写作中，我们发现很多问题的研究还有待深入和进一步完善，今后的工作可以在以下几个方面展开：

1、在跳-扩散模型中考虑投资和再保险对红利的影响。

2、投资的风险资产即含有跳，同时风险资产的收益和标准差都是随机的。

3、最优的投资消费问题。

参考文献

[1] Asmussen S ,Taksar M.Controlled diffusion models for optimal dividend payout [J].Insurance: Mathematics and Economics ,1997,20:1–15.

[2] Bühlmann H.Mathematical Methods in Risk Theory [M]. Springer, Berlin, 1970.

[3] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin [J].Mathematics of Operations Research ,1995,20:937–958.

[4] Cox J, Huang C.F.Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process [J].J.Econ.Theory, 1989,49:33-83.

[5] Cadenillasa, Pliska S. Optimal trading of a security when there are taxes and transaction costs [J].Finance Stochastics, 1999, 3:137-165.

[6] Cai J,Dickson C.M.D.On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2002, 30:389-404.

[7] Cai J, Dickson C.M.D.Ruin probability with a markov chain interest model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004,35:513-525.

[8] Cai J ,Xu C.M.On the decomposition of the ruin probability for a jump-Diffusion surplus process compounded by a geometeic Brownian motion [J].North American Actuarial Journal, 2006,10(20): 120-132.

[9] Chiu S.N,Yin C.C.The time of ruin,the surplus prior to ruin and the deficite at ruin for the classical risk process perturbed by diffusion [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2003,33:59-66.

[10] De Finetti.Su un'impostazione alternativa dell teoria colletiva del rischio [J]. Transactions of the XV International Congress of Actuaries, 1957,2:433–443.

[11] Dayananda P.W.A.Optimal reinsurance [J].Journal of Applied Probability, 1970,7:134–156.

[12] Dufersen F,Gerber H.U. Risk theory for the compound Poisson risk model process that is perturbed by diffusion [J]. Insurance:Mathematical and

Economlcs, 1991,10:51-59.

[13] Dickson C.M.D.On the distribution of the surplus prior to ruin [J]. Insurance: Mathematical and Economlcs, 1992,7:191-207.

[14] Dickson D.C.M,Waters H.R. Some optimal dividend problem [J].ASTIN Bulletin ,2004,4:49-74.

[15] Fleming W.H,Soner H.M.Controlled markove processes and viscosity solution [M].New York: Springer Verlag, 1993.

[16] Gerber H.U.Entscheidigungskriterien für den zusammengesetzten Poisson Prozess[J].Mitteilungen der Vereinigung Schweizer Versicherungs mathematiker 1969, 19:185–228.

[17] Gerber H.U.An Extension to the Renewal Equation and its Application in the Collective Theory of Risk [J].Scandinavisk Aktuarietidskrift, 1970,205-210.

[18] Gerber H.U.An Introduction to Mathematical Risk Theory [M].Philadephia,S.S. 1979.

[19] Gerber H.U,Shiu E.S.W..Optimal dividends: Analysis with Brownian motion [J].North American Actuarial Journal, 2004,8 (1):1–20.

[20] Grandell J.Aspects of risk theory [M].New York:Springer-Verlag,1991.

[21] Grossman S.J,Zhou Z. Optimal investment strategies for controlling drawdowns [J].Math.Finance, 1993,3:241-276.

[22] Guo J,Bai L.Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint [J]. Insurance:Mathematical and Economlcs, 2008,42:968-975.

[23] Gao J.Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model [J]. Insurance: Mathematical and Economlcs, 2009,44:479-490

[24] Højgaard B,Taksar M.Controlling risk exposure and dividend pay-out scemes: Insurance company example [J].Mathematical Finance, 1999,9:153–182.

[25] Højgaard B,Taksar M.Optimal risk control for a large corporation in the presence of returns on investments [J].Finance and Stochastics, 2001,5:527–547.

[26] Hipp C, Plum M.Optimal investment for insurer [J]. Insurance:Mathematical

and Economlcs 2000,27:215 — 228.

[27] Hipp C.Optirnal investment for insurer:the Coxian case [J]. Prerint, 2002.

[28] Hipp C, Vogt M.Optimal dynamic XL reinsurance [J].Astin Bulletin, 2003,33(2): 193-207.

[29] Hu Y,Zhinming Z.The perturbed compound Poisson risk model with multilayer dividend strategy [J].Statistic and Probability Letters, 2008.

[30] Hu Y,ZhinmingZ.Gerber-Shiu discounted penalty function in a Sparre Andersen model with multi-layer dividend strategy [J]. Insurance:Mathematic and Economics, 2008,42:984—991.

[31] Irgens C, Paulsen J. Optimal control of risk exposure, reinsurance and investments for insurance portfolios [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 35 :21–51.

[32] Jeanblanc-Picqué, Shiryaev A.N.Optimization of the flow of dividends [J].Russian Mathematical Surveys, 1999,50:257–277.

[33] Lundberg F. I. Aterforsakring av kollektivrisker. Uppsala: Almqvist and Wiksell, 1903.

[34] Li J ,Wu R.Optimal investment problem with stochastic interest rate and stochastic volatility:maximizing a power utility [J].Applied Stochastic Model in Bussiness And Industry. Published Online: 6 Feb 2009.

[35] Lin X.S,Willmot G.E, Drekic S.The classical risk model with a constant dividend barrier [J].Insurance: Mathematics and Economics ,2003,33: 551–566.

[36] Lin X.S, Pavlova K.P. The compound Poisson risk model with a thresholds strategy [J]. Insurance:Mathematic and Economics, 2006,38:57—80.

[37] Lin X.S, Pavlova K.P.The compound Poisson risk model with multiple thresholds [J]. Insurance: Mathematic and Economics, 2008,42:617—627.

[38] Li S.The distribution of the dividend payment in the compound Poisson risk model perturbed by diffusion. Working paper, 2005.

[39] Maritina T.C,Gilber P.Stochastic control theory for optimal optimal investment.School of Actuarial Studies [J].Faculty of Commerce and Economics, 2003,1-23.

[40] Paulsen J.Optimal dividend payouts for diffusions with solvency constraints [J]. Finance and Stochastics, 2003, 4:457–474.

[41] Paulsen J,Gjessing H.K.Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return on investments [J].Insurance: Mathematics and Economics 1997,20:215–223.

[42] Schmidli H.On the distribution of the surplus prior to and at ruin [J].Astin Bulletin, 1999,29:227-244.

[43] Schmidli H.Optimal proportional reinsurance policy in a dynamic setting [J]. Scand Actuarial J, 2001,55-68.

[44] Schmidli H.On minimizing the ruin probability by investment and insurance. Technical Report,No.175,Laboratory for Actuarial Mathematical, University of Copenhagen, 2002,1-24.

[45] Schmidli H.Stochastic control in insyrance [M].Springer,London,2008.

[46] Shreve S,Soner HM. Optimal investment and consumption with transaction costs [J].Annals of Applied Probability, 1994, 4:609-692.

[47] Shreve S,Soner HM,Xu GL.Optimal investment and consumption with two bonds and transaction costs [J].Mathematical Finance, 1991, 1:53-84.

[48] Sundt B,Teugels J.L.The adjustment function in ruin estimates under interest force [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1997,19:85-94.

[49] Taksar M.Optimal risk and dividend distribution control model for an insurance company [J].Math Meth Operres, 2000,51:1-42.

[50] Taksar M ,Hogaard.B ,Asmussen,S. Optimal risk Control and Dividend Distributlon Policies.Example of Exccss-of Loss Reinsurance [J].Finance and Stochastic, 2000,4:299-324.

[51] Taksar M ,Asmussen S.Controlled Diffusion models for Optimal Dividend pay-out [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1997,20:1-15.

[52] Wan Ning.Dividend payment with a threshold strategy in the compound Poisson risk perturbed by diffusion [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007,40: 509–634.

[53] Xu G.L, Shreve S.E.A duality methods for optimal consumption and investment

under short-selling prohibition: II constant market coefficients [J].The Annals of Applied Probability, 1992,2:314–328.

[54] Yang H, Zhang L.Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005,35:21–51.

[55] Zhang Xinli,Zhang Kecun,Yu xingjiang. Optimal proportional reinsurance and investment with transaction cost maximizing the terminal wealth [J]. Insurance: Mathematical and Economics, 2008,44:473-478.

[56] 李秀芳,曾庆五.保险精算 [M].中国金融出版社, 2005.

[57] 梁志彬.跳扩散模型的最优投资和再保险 [J]. 数学学报, 2008,51:1195-1204.

[58] 聂高秦.金融保险中的几类风险模型[M].华中科技大学，博士学位论文, 2008

[59] 粟芳.非寿险精算 [M].清华大学出版社, 2006.

[60] 王爱香.一类超额损失和比例再保险的随机控制问题 [M].上海大学，硕士学位论文, 2006.

[61] 徐林.具有随机投资收益的风险模型下若干破产问题的研究 [M].华东师范大学，博士学位论文, 2008.

[62] 杨步清，叶中行.保险公司的最优再保险和红利分配 [J].系统工程 2000, 6:23-27.

致 谢

在本学位论文完成之际，首先要衷心感谢我的导师林祥副教授！林老师一直对我进行细心的培养、教育和指导；并对我的学习、生活和科研工作给予了极大的关怀和帮助。本学位论文从开题、立论到撰写，多次修改，直到最终审阅无一不倾注者林老师的心血。在这两年半的学习中，我不仅感受到林老师渊博的知识、崇高的敬业精神、严谨务实的治学态度，更折服于他的平易近人的处事风格。林老师不但在学术上给予我启迪，而且潜移默化中教会我做人的道理。所有这些都将使我在以后的学习、工作、生活中终生受益，在此谨向林老师表示最诚挚的敬意和谢意！

这里还要感谢我学术的启蒙老师俞政教授。俞老师虽然只教了我一年的专业课，但在这一年里俞老师交给我怎样学习专业课，帮我打好了后来作研究的基础。并且还在生活上给于我很大的关心。

感谢概率所的侯振挺教授、邹捷中教授、刘再明教授、李俊平教授、刘庆平教授以及数学院的所有老师！感谢你们对我的学习和生活上的帮助和精神上的鼓励！

感谢我的同学李艳方、桂有利、蔡平霞、杨益非、邵建华在我的论文写作及生活中给予的帮助。感谢我室友对我的学习、生活给予的帮助。感谢数学院2007级所有同学们！正是因为有了这个集体，我们才得以共同探讨、共同学习、共同进步。感谢你们对我学习和生活上的帮助！

感谢我的父母！是他们任劳任怨、含辛茹苦地劳动和工作，是他们给我无私的帮助，才使我顺利完成学业！

感谢所有关心、支持过我的朋友们！

杨 鹏

2009年10月

攻读硕士期间主要成果

1. 林祥，杨鹏.《扩散风险模型下投资和再保险对红利的影响》.经济数学.（已接收）
2. 杨鹏，林祥，蔡佐威.《一类带常利率离散时间延迟风险模型的研究》.佳木斯大学学报 2009，3，434-437.
3. 杨鹏，林祥.《关于一类带有多重门限分红策略的泊松风险模型的研究》.重庆文理学院学报 2009，3，5-8.
4. Xiang Lin, Peng Yang.《Optimal investment and proportional reinsurance policy in jump-diffusion risk model under the risk asset with jump》. Submitted.