摘 要

本文研究了以 W 态、GHZ 态和团簇态为量子信道的受控量子隐形传态和受控超密编码方案。结果表明：在用 GHZ 态和团簇态作为量子信道时，成功实现受控量子隐形传态的概率为百分之百，而当用 W 态作为量子信道时，实现量子受控隐形传态的概率只有2/3。在第四章中，分别讨论了利用 GHZ 态和类 GHZ 态为量子信道的受控超密编码，发现对于不同的纯化方式，传送的平均信息量会有所不同，并且提出了利用 POVMs 如何实现受控超密编码。此外，还研究了多个量子态相叠加的纠缠，并讨论了多个量子态的纠缠相叠加后与叠加态的纠缠之间的关系。最后，研究了利用不同维数的量子态进行概率编码，给出了计算解码成功率的公式。

关键词：纠缠；受控；量子隐形传态；量子超密编码；概率。

Abstract

We steady the controlled teleportation and controlled dense coding with W state, GHZ state and cluster state, respectively. It is shown that the successful probabilities of controlled teleportation with GHZ state and cluster state are 1, while the one with W state is $2/3$. We discuss the controlled dense coding with GHZ and GHZ-class state, respectively, in chapter four, and find that the average amount of information different with different purifications, and put forwards another scheme how to realize the controlled dense coding with POVMs, instead of purifing the state. In addition, we investigate the entanglement of superposition of multi-states, and explore the relations between the entanglement of superposition and the entanglements of the superposed states. In finally, we investigate probabilistic coding of quantum states of different dimensions, and give a formula for calculating the average probability of successful decoding.

Key words: entanglement; controlled; quantum teleportation; quantum dense coding; probability.

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：李嵩松　签字日期：2008 年 6 月 10 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解江西师范大学研究生院有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权江西师范大学研究生院可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：李嵩松　导师签名：[illegible]

签字日期：2008 年 6 月 10 日　签字日期：2008 年 6 月 10 日

第一章　引　言

量子信息论是量子力学与经典信息科学相结合的新兴交叉学科。这是一门正在迅速兴起、未臻成熟的新兴学科。它是以量子力学基本原理为基础，利用量子系统的各种相干特性（如量子并行、量子纠缠和量子不可克隆等）进行计算、编码和信息传输等方面的全新信息科学。它不仅有广阔的应用前景，而且有助于量子力学本身基础问题的研究。它诞生于20世纪70年代，通常包括量子计算和量子通讯，也包括刚刚兴起但却有着巨大潜力的量子对策论。由于其潜在的应用价值和重大的科学意义，量子信息论作为最近十几年来迅速发展起来的新兴学科，正在引起各方面越来越多的关注。在目前的量子信息论中，关于量子通讯与量子计算领域已经做了广泛深入的研究，基础理论的研究不断取得新的进展。由于量子信息论是利用微观粒子的量子力学原理来解决经典信息学与经典计算机所不能解决的问题，而对于微观粒子，目前在制备及操纵方面还有一定的困难，所以量子信息论的实验研究相对于理论的研究要缓慢一些。

量子隐形传态和量子超密编码是量子通讯中比较典型的两种方式，前者利用经典辅助的方法传送未知的量子态，后者则是利用量子信道传送经典比特表示的信息。而由量子纠缠引起的量系统的非局域性现象是量子隐形传态和量子超密编码的基础，对量子纠缠的深入研究将对量子信息论的基本原理产生广泛而深远的影响，并将进一步揭示出量子力学深层的物理内涵。

1.1 量子纠缠态

自量子力学基本理论形成以来，对于纠缠态的研究就一直是量子力学基本问题研究的重要课题。量子力学的创始人以其深刻的洞察力提出了著名的EPR佯谬[1, 2]和Schrödinger猫佯谬[3]，预示了量子力学基本问题的发展方向，量子纠缠态的概念正是在这一方向上产生的。六十多年来，对这两个佯谬的理论和实验[4]研究取得了长足的进展，人们对量子纠缠态的理解也愈加深刻，量子力学的基础不断得到稳固。

早期对于纠缠态的许多研究都只是停留在哲学层次上的，直至1964年著名的Bell定理的提出[5]，才使得量子理论与局域性隐变量理论的差别能够通过实验来论证。大量精巧的实验支持了量子力学几率解释的预言，人们开始考虑把纠缠这一非经典特性应用到信息科学和计算机科学中去。从1991年第一个基于纠缠态的量子加密协议的提出[6]以及它的实验实现[7]；从1985年量子图灵机模型的提

出[8]，1994 年 Shor 算法的提出[9]，1996 年 Grover 算法的提出[10]到它的核磁共振(NMR)实验演示[11]；从 1993 年量子隐形传态协议的提出[12]到 1997 年首次实验实现[13]，量子信息学这一跨学科的综合性研究领域在近二十年的发展中盛况空前，硕果累累。量子纠缠态作为量子通讯和量子计算的载体，已被广泛地应用于量子隐形传态、量子超密编码、量子密钥分配、量子密码术及量子计算等领域。

经典物理学中，一个物理系统可以用一组物理量作出完备的描述，量子力学则假定一个量子系统可以用一个波函数$|\Psi\rangle$来进行完备的描述。要测量该系统中某一力学量A，根据量子态的叠加原理，波函数$|\Psi\rangle$可以用力学量A的本征波函数$|n\rangle$的线性叠加来表示，即$|\Psi\rangle=\sum_n C_n|n\rangle$，然而，本征态的叠加所导致的测量结果的不确定性完全是一种量子效应，并无经典对应。这是量子力学中最难理解，也是常常被人误解的基本要概念。纠缠态中出现各种奇异性质，均源于此。

1.1.1 量子纠缠态的定义

在量子力学中对物质系统的状态是用波函数$|\psi\rangle$来表示的，对于一个由两体量子系统 A 和 B 构成的联合系统，这个联合系统可用一个量子纯态来描述，可以表示为

$$|\psi\rangle_{AB}=\sum_{ij}C_{ij}|i\rangle_A|j\rangle_B \text{。} \tag{1-1}$$

$\{|i\rangle_A\otimes|j\rangle_B\}$为此联合系统的一组正交完备基。

若描述此联合系统的量子纯态可写成两个子系统的量子纯态的直积形式，则描述联合系统的量子纯态为可分离态，即态$|\psi\rangle_{AB}$满足条件

$$|\psi\rangle_{AB}=|\alpha\rangle_A\otimes|\beta\rangle_B \text{。} \tag{1-2}$$

其中，$|\alpha\rangle_A=\sum_i\alpha_i|i\rangle_A$，$|\beta\rangle_B=\sum_j\beta_j|j\rangle_B$。例如，态$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B-|1\rangle_A|1\rangle_B)$和态$|0\rangle_A\otimes|1\rangle_B$都是可分离二体纯态。

若描述此联合系统的量子纯态不可以写成两个子系统的量子纯态的直积形式，则描述此联合系统的量子纯态为纠缠纯态，即二体纠缠纯态满足如下条件

$$|\psi\rangle_{AB}\neq|\alpha\rangle_A\otimes|\beta\rangle_B \tag{1-3}$$

例如，态$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B-|1\rangle_A|0\rangle_B)$就是一个二体纠缠纯态。

这一定义可以推广到混合态的情况。两个子系构成的复合系统的混合态是纠缠态，当且仅当它不能表示成

$$\hat{\rho}(A,B)=\sum_i P_i|\psi_i(A,B)\rangle\langle\psi_i(A,B)|,(P_i\geq 0,\sum_i P_i=1) \tag{1-4}$$

形式，使其中每个成分态$\psi_i(A,B)$都是非纠缠态(可分离态)，否则就说它是一个混合非纠缠态。

总之，所谓量子纠缠态就是说，一个总的系统不管是纯态还是混合态，都可以被拆分为 N 个子系统，系统的状态可以用一个密度矩阵来表示，如果这个密度矩阵无法表示成为子系统的密度矩阵的直积形式或直积形式的叠加，我们就说这个态是不可分解的(inseparable)，或者说是纠缠的。

1.1.2 几种常见的纠缠态

在量子信息研究中应用最广泛的几类纠缠态是 Bell 态[14]，GHZ 态[15]，W 态[16]，团簇态[17]。现简述如下：

(1) Bell 态

在两量子位体系的量子纠缠中，最重要的是如下四个量子态：

$$|\psi\rangle_{AB}^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_A|0\rangle_B\pm|0\rangle_A|1\rangle_B) \tag{1-5}$$

$$|\phi\rangle_{AB}^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_A|1\rangle_B\pm|0\rangle_A|0\rangle_B) \tag{1-6}$$

其中$|\psi\rangle_{AB}^{-}$称为单重态(single state)，具有粒子交换反对称性，其他三个称为三重态，具有粒子交换对称性，这四个态构成两量子位系统的四维 Hilbert 空间的一组正交完备基，称作 Bell 基(也称为 Bell 态)。Bell 态是具有最大纠缠度的两量子位纯态，常称作最大纠缠态，即不可能通过任何方式增大它的纠缠度。处在纠缠态的系统，在被测量时表现出一种奇特的关联性质，以处于 Bell 态的单重态的两粒子体系为例：

$$|\psi\rangle_{AB}^{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_A|0\rangle_B-|0\rangle_A|1\rangle_B) \tag{1-7}$$

这个态具有以下性质：当系统处于这个态时，1、无论子系 A 或者子系 B 都没有确定的态。2、当以$\{|0\rangle,|1\rangle\}$基进行测量时，若测得 A 子系的结果为$|1\rangle$态，则 B 子系必定处于$|0\rangle$态；当 A 子系测得的结果为$|0\rangle$态，则 B 子系必定处于$|1\rangle$态，反之亦然。即 A 子系总是处于与 B 子系相反的态中。3、上述结论与这两个子系之间的空间距离无关，即使 A、B 两系统相隔非常遥远，上述的关联仍然存在。

这种奇特的关联是没有经典对应的量子现象，体现了量子力学的非局域性质，这也是 EPR 佯谬的核心。

(2) GHZ 态和 W 态

纠缠态还可以存在于多体系统中，在三量子体系中两类重要的纠缠态是 Greenberger-Horner-Zeilinger 态(GHZ 态)和 W 态。GHZ 态的形式如下：

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|1\rangle|1\rangle+|0\rangle|0\rangle|0\rangle) \tag{1-8}$$

GHZ 态也具有和 Bell 态类似的关联性质，即当测得其中一个粒子的态是$|1\rangle$态，其他两个粒子必定在$|1\rangle$态上，如果测得其中一个粒子的态为$|0\rangle$态时，其余两个粒子必定处在$|0\rangle$态上。这一点使得它与 Bell 态一样成为检验量子力学非局域性质中常用的一个态。

三粒子纠缠态中还有一种不同于 GHZ 态的纠缠形式：

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle+|010\rangle+|100\rangle) \tag{1-9}$$

称为 W 态。W 态与 GHZ 态不能通过局域操作和经典通信(LOCC)相互转换。在许多方面，GHZ 态可以被看成三粒子的最大纠缠态，然而，当三个粒子处于 GHZ 态时，如果丢失三个粒子中的任何一个，剩余两个粒子将完全解纠缠，因此 GHZ 态的纠缠特性对粒子丢失是非常脆弱的。相反，W 态和其他任何三粒子态(无论是纯态还是混合态)相比，在对其中任何一个粒子进行处理后，剩余的密度矩阵ρ_{AB}，ρ_{BC}和ρ_{AC}将继续保持最大可能的纠缠数量，因此对于 W 态来说，即是丢失其中的一个粒子，剩余的两个粒子仍然保持纠缠态。

对于多粒子体系，W 态仍然具有这种特性，甚至当 N 个粒子中的 N－2 个粒子丢失了它们的粒子信息，W 态中剩余的粒子还是保持纠缠的，这样意味着，N 个粒子中的任何 2 个粒子不依赖于另外的 N-2 个粒子，无论这 N－2 个粒子是否和它们合作，这两个粒子还是纠缠的。

(3) 团簇态

团簇态是一种多粒子纠缠态，其形式可以写为：

$$|\phi_N\rangle=\frac{1}{2^{N/2}}\bigotimes_{a=1}^{N}\left(|0\rangle_a\sigma_z^{(a+1)}+|1\rangle_a\right) \tag{1-10}$$

对于二个或三个粒子，团簇态与 GHZ 态可以通过局域操作和经典通信(LOCC)相互转换，但对于三个以上的粒子，二者不能通过局域操作和经典通信(LOCC)相互转换。

团簇态的特点：（i）团簇态具有最大关联度。（ii）团簇态具有最大纠缠顽固度（perssistancy），其持续纠缠度 $P_e(|\phi_N\rangle)=\lfloor N/2\rfloor$。

1.1.3 纠缠度[18]

纠缠描述的是共处于同一系统的几个子系的态之间的局域特性，因此只对由几个系统构成的复合系统才由意义。设一个大系统由 A，B，C，……等几个子系构成，复合系统的一般态用密度矩阵 ρ 描述。令 $E(\rho)$ 描述态 ρ 的纠缠度，由于物理上相互作用的两部分联合的幺正演化可以产生纠缠，而局域操作(即对空间分离的各部分互相独立地执行的操作) 和经典通讯只能产生经典相关，不可能产生量子纠缠，因此一个合适的纠缠度量须满足三个基本条件[8]：

(1) 如果 ρ 描述的态是分离的，即它可以表示为属于不同部分态的张量积的线性叠加：

$$\rho=\sum_i p_i\rho_A^i\otimes\rho_B^i\otimes\cdots \tag{1-11}$$

其中 ρ_A^i，ρ_B^i……是分别描述各子系的密度算子，$p_i\geq 0,\sum_i p_i=1$。

那么

$$E(\rho)=0 \tag{1-12}$$

即对分离态，纠缠度为零。

(2) 各个部分的局域幺正变换不改变总系统的纠缠度 $E(\rho)$，

$$E(\rho)=E[(U_A\otimes U_B\otimes\cdots)\rho(U_A^{\dagger}\otimes U_B^{\dagger}\otimes\cdots)] \tag{1-13}$$

在局域操作和经典通信(LOCC)，总系统的平均纠缠度不增。

（3）当两体量子态处于纯态 $|\psi\rangle_{AB}$ 时，A 和 B 之间的纠缠度定义为任何一个粒子约化密度算子的 von Neumann 熵(又称为部分熵)，即 $S(\rho_A^i)$

$$E\left(|\psi\rangle_{AB}\right)\equiv S\left(\rho_A\right)\equiv -Tr\left(\rho_A\log\rho_A\right), \tag{1-14}$$

其中 ρ_A 为在纯态 $|\psi_{AB}\rangle$ 下 A 子系的约化密度矩阵

$$\rho_A=Tr_B\left(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|\right), \tag{1-15}$$

因为 A 和 B 总体系处于纯态，有 $S\left(\rho_A\right)=S\left(\rho_B\right)$，所以纠缠度可定义为任何一个子系的 von Neumann 熵。Bennett 证明[9]，通过对非最大纠缠对的 n 个拷贝进行局域操作和经典通信，可以浓缩它们的纠缠到数目较少的最大纠缠对上。对于两

体两维系统，最大纠缠度为 1。若每个非最大纠缠对的纠缠度为 E, 当 n 足够大时，可以得到最大纠缠对的数目渐近于 nE，这称为纠缠浓缩(entanglement concentration)。相反的，从起始的 n 个最大纠缠对出发，通过局域操作和经典通信，可以制备出数目更多的非最大纠缠对，在 $n\to\infty$ 极限情况下，可以保持总的纠缠度(部分熵)不变，这称为纠缠稀释(entanglement dilution)。因此从这种意义上说，纠缠浓缩和纠缠稀释是可逆的；von Neumann 熵对于两体纯态而言是一个好的纠缠度量，因为它很自然地满足上面指出的纠缠度量的几个基本条件，并且在上述可逆操作下，保持守恒。

1.2 量子隐形传态

1993 年，C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Josza, A. Peres 与 W. K. Wootters 六位科学家联合发表了题为“由经典和 EPR 通道传送未知量子态”的开创性论文[12]，提出了量子隐形传态（Quantum Teleportation）这一概念，开创了人们研究量子隐形传态的先例。并设计了单个两能级粒子量子态的隐形传态理论方案。

所谓量子隐形传态就是指: 将甲地的某个粒子的未知量子态$|\Psi\rangle$传送到乙地的另一个粒子上，使得这个粒子处在$|\Psi\rangle$态上，而原来的粒子仍留在原处。因量子力学的不确定性原理，我们不能精确地将原量子态的所有信息全部提取出来，所以就将原量子态的所有信息分为经典信息和量子信息两部分，它们分别由经典通道和量子通道传送到乙地，根据这些信息，在乙地可以重构出原来的量子态。

量子隐形传态的基本思想是: 为实现传送某个粒子的未知量子态，必须在发送者和接收者之间事先共享一个非局域关联的 EPR 纠缠纠缠通道。发送者先对需要传送的未知粒子与所拥有的 EPR 对的其中一个粒子进行 Bell 基测量, 并将测量结果通过经典通道告知接收者,接收者根据这个信息对所拥有的 EPR 对的第二个粒子实施相应的么正变换, 这样就在 EPR 对的第二个粒子上重构了原粒子的未知量子态。在这个过程中，原粒子并没有被传送给接收者，它始终停留在发送者处，被传送的仅仅是原粒子的量子态。发送者可以对这个量子态一无所知，而接收者别的量子态变换成原粒子相同的量子态，原粒子的量子态在发送者进行测量及提取经典信息时已被破坏，故整个量子态的隐形传送过程并不违背量子不可克隆原理。由于在整个通讯过程中经典信息必不可少，量子态的传送过程不是瞬时完成的，所以隐形传态也不违背相对论的光速最大原理。

实现经典量子隐形传态通常包括三个步骤：一、EPR 纠缠态的制备；二、发送者对需要传送的粒子与其拥有的 EPR 对中的粒子进行 Bell 基测量；三、接收者对其拥有的 EPR 对中的粒子实施相应的么正变换。

量子隐形传态方案一经提出，立即激起了人们的极大兴趣，对如何传送量子态人们进行了深入的理论和实验研究，关于量子隐形传态的各种方案相继出现：M. Zukowski 等人提出另一种类型的量子隐形传态——量子纠缠交换[19, 20]；最近，人们提出了一系列基于腔量子电动力学（腔 QED）的量子隐形传态方案[21-25]，研究了利用光腔相互作用来实现量子态传送[26, 27]。1998 年，Karlsson 和 Bourennane 提出了量子受控隐形传态方案[28]，与前者不同的是，进行传态的双方只有在得到第三方（监控者）的同意下才能实现隐形传态。

在实验方面，1997 年 12 月，奥地利 Innsbruck 大学的实验物理研究所的 Zeilinger 小组在 Nature 杂志上首次报道了利用纠缠的极化光子 EPR 对实现光子极化态的量子隐形传态的实验结果[13]，此事轰动了学术界。紧接着，意大利 Martini 实验小组在 1998 年也报道了另一个成功的量子隐形传态实验结果[29]。1998 年底，美国 Kimble 实验室利用单模光场两个相位相干的正交压缩光，在 50/50 分束器上耦合构成一对连续变量的 EPR 态，在实验上实现了连续变量的量子隐形传态[30]。之后，美国、意大利等多个国家的学者相继报道了运用核磁共振方法（NMR）实现核自旋量子态的隐形传态[31]。

1.3 量子超密编码

量子超密编码（Quantum Dense Coding）是由 Bennett 和 Wiesner 在 1992 年提出的[32]。其基本思想是：利用发送者和接收者事先共享的纠缠态,可以提高量子信道的经典信息容量。在经典信道中，发送 2 比特的信息需要操纵和发送至少 2 个用于信息编码的粒子或物理实体，而如果发送者和接收者共享的是一个纠缠态，那么，发送者可以仅仅操纵或发送一个量子比特就发送 2 比特的信息。此外，量子超密编码还具有保密性好的特点。

通常，量子超密编码包括以下四个步骤：一、EPR 纠缠态的制备；二、发送者对其所拥有的粒子作一个幺正变换（量子编码）；三、发送者将编码后的粒子通过经典信道发送给接收者；四、接收者对自己拥有的粒子和发送者编码后的粒子作一个联合测量，就可以知道发送者所作的幺正变换，即获得了 2 比特的经典信息。

由于具有信息容量大、保密性好的特点，量子超密编码无论是在理论上，还是在实验方面都得到了极大的丰富和发展，各种方案层出不穷。Yeo 和 Chua 研究了多粒子的超密编码[33]；龙桂鲁等人提出了多方高维超密编码方案[34]; Pati 等人研究了非最大纠缠信道的超密编码[35]; Agrawal 等人研究了 W 态的量子隐形传态和超密编码[36]; Braunstein 等人研究了连续变量信道的超密编码[37]。2001 年，郭光灿等人提出了量子受控超密编码编码方案[38]，在此方案中，控制者通过调节测量角的大小可以控制发送者的信息发送量，此后，傅长宝[39]和陈建兰[40]等人分

别对该方案进行了研究。2002 年，Zhang 等人首次在实验上成功成功演示了受控超密编码方案[41]，2003 年，Jing 等人在实验上实现了连续变量的量子超密编码[42]。

1.4 本论文的主要内容

本论文共由六章组成：第一章简要介绍了量子纠缠及量子隐形传态、量子超密编码的基本原理、理论和实验研究的进展。第二章讨论了量子纠缠态叠加的纠缠特性。第三章分别研究了 W 态、GHZ 态和团簇态作为量子信道的受控隐形传态。第四章分别研究了 W 态、GHZ 态和团簇态作为量子信道的受控超密编码，并考虑了利用 POVMs 实现受控超密编码。第五章提出不同维数 qudit 的概率编码方案。最后对全文进行了总结。

第二章 叠加态的纠缠

纠缠是量子态的全局性质，它来源于不同项的叠加，如果单纯地看其中的每一项，很容易忽略这一点[43]。例如，对于两粒子量子态$|\phi\rangle$和$|\varphi\rangle$，叠加后的量子态为$|\Gamma\rangle$，那么它们之间的纠缠关系是什么呢？通常来说，有四种情况：①$|\phi\rangle$和$|\varphi\rangle$不是纠缠态，而它们的叠加态$|\Gamma\rangle$是纠缠态；②$|\phi\rangle$和$|\varphi\rangle$不是纠缠态，而它们的叠加态$|\Gamma\rangle$也不是纠缠态；③$|\phi\rangle$和$|\varphi\rangle$是纠缠态，而$|\Gamma\rangle$不是纠缠态；④$|\phi\rangle$和$|\varphi\rangle$是纠缠态，且它们的叠加态也是纠缠态。

最近，Noah Linden 等人研究了两个两粒子量子态和它们的叠加态之间的纠缠关系[43]，但如果一个量子态是由多个量子态叠加而成，那它们之间的纠缠关系如何呢？

假设量子态$|\Gamma\rangle$是由多个量子态叠加而成，即

$$|\Gamma\rangle=\sum_{i=1}^{n}c_i|\Psi_i\rangle \tag{2-1}$$

其中$\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2=1$。那么它们之间的纠缠关系可分为三种情况。

1. $|\Psi_i\rangle$是双正交的量子态，即除了一个局部么正变换外，量子态

$$|\Psi_i\rangle=\sum_{j=d_{i-1}+1}^{d_i}c_{ij}|j\rangle|j\rangle \tag{2-2}$$

满足

$$Tr_A[Tr_B(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|)Tr_B(|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|)]=Tr_B[Tr_A(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|)Tr_A(|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|)]=\delta_{ij}, \tag{2-3}$$

其中$\sum_{j=d_{i-1}+1}^{d_i}c_{ij}^2=1$且$c_{ij}$是非负的。

定理 1：如果$|\Psi_i\rangle$是双正交的量子态，则$|\Psi_i\rangle$和它们的叠加态$|\Gamma\rangle$之间的纠缠度满足下列关系

$$\frac{E(\Gamma)}{\Omega(\Psi_i,c_i)}=1, \tag{2-4}$$

其中

$$\Omega\left(\Psi_i,c_i\right)\equiv\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2E(\Psi_i)+H\left(|c_i|^2\right),\tag{2-5}$$

且 $H(p_i)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i$。

证明：因为 $|\Psi_i\rangle$ 的约化态在相同的基下是对角的，所以可以直接计算 $|\Psi_i\rangle$ 和 $|\Gamma\rangle$ 的纠缠度来完成证明。

事实上，下列不等式对任何密度矩阵都成立[44]，所以可以用它们来完成证明。这两个反复要用到的不等式为：

$$\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2S\left(\rho_i\right)\le S\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\rho_i\right)\tag{2-6}$$

和

$$S\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\rho_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2S\left(\rho_i\right)+H\left(|c_i|^2\right)。\tag{2-7}$$

当且仅当 $\rho_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 在正交子空间有支集时等式（2-7）取等号。由于 $|\Psi_i\rangle$ 是双正交的，它们的约化密度矩阵也是双正交的，所以可以直接应用（2-7）式来证明定理 1。

从定理 1 可知

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\Psi_i\right)-\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2E\left(\Psi_i\right)\le 1\tag{2-8}$$

即最大纠缠增量有界且与量子态的维数无关。

2. 如果 $|\Psi_i\rangle$ 是相互正交的（但不要求是双正交），情况将有所不同，对此有

定理 2：给定 n 个相互正交而不要求是双正交的量子态 $|\Psi_i\rangle$，它们的叠加纠缠度满足

$$\frac{E(\Gamma)}{\Omega(\Psi_i,c_i)}\le n。\tag{2-9}$$

证明：假设 Alice 除了拥有希尔伯特空间 H_{AB} 外，还有一个具有希尔伯特空间 H_a 的 qudit（多维量子系统），考虑量子态

$$\left|\Delta\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}c_i\left|i\right\rangle_a\left|\Psi_i\right\rangle_{AB} \tag{2-10}$$

其中$\left|i\right\rangle_a\in H_a$且${}_a\left\langle i|j\right\rangle_a=\delta_{ij}$。Bob 对$\left|\Delta\right\rangle$的约化密度矩阵为

$$\rho_B=\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\,Tr_A\left(\left|\Psi_i\right\rangle\left\langle\Psi_i\right|\right) \tag{2-11}$$

从（2-7）可以得知

$$S(\rho_B)\le\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2S\left(Tr_A\left|\Psi_i\right\rangle\left\langle\Psi_i\right|\right)+H\left(|c_i|^2\right)。 \tag{2-12}$$

但是ρ_B也可以写成

$$\rho_B=\frac{1}{n}Tr_A\left(\left|\Gamma\right\rangle\left\langle\Gamma\right|\right)+\frac{1}{n}\sum_{i<j}Tr_A\left[\left(c_i\left|\Psi_i\right\rangle-c_j\left|\Psi_j\right\rangle\right)\left(\left\langle\Psi_i\right|c_i^*-\left\langle\Psi_j\right|c_j^*\right)\right], \tag{2-13}$$

所以不等式（2-7）意味着

$$\frac{1}{n}S\left[Tr_A\left(\left|\Gamma\right\rangle\left\langle\Gamma\right|\right)\right]+\frac{1}{n}\sum_{i<j}S\left[Tr_A(c_i\left|\Psi_i\right\rangle-c_j\left|\Psi_j\right\rangle)(c_i^*\left\langle\Psi_i\right|-c_j^*\left\langle\Psi_j\right|)\right]\le S\left(\rho_B\right) \tag{2-14}$$

利用（2-6）式和（2-7）式得

$$\frac{1}{n}E(\Gamma)+\frac{1}{n}\sum_{i<j}E\left(c_i\Psi_i-c_j\Psi_j\right)\le\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2E(\Psi_i)+H\left(|c_i|^2\right), \tag{2-15}$$

由于$E\left(c_i\Psi_i-c_j\Psi_j\right)\ge 0$，所以有（2-10）式。

3. 对于最一般的情况，有下列定理：

定理 3：假设$\left|\Psi_i\right\rangle$是归一的，则

$$\frac{E(\Gamma)}{\Omega(\Psi_i,c_i)}\le\frac{n}{\left\|\Gamma\right\rangle\|^2}。 \tag{2-16}$$

证明：再次假设量子态$\left|\Delta\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}c_i\left|i\right\rangle_a\left|\Psi_i\right\rangle_{AB}$，尽管$\left|\Delta\right\rangle$是归一的，但$\left|\Gamma\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}c_i\left|\Psi_i\right\rangle$不需要满足这一条件。

象前面一样，Bob 对$\left|\Delta\right\rangle$的约化密度矩阵也可以写成下列两种方式：

$$\rho_B=\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2Tr_A\left(\left|\Psi_i\right\rangle\left\langle\Psi_i\right|\right) \tag{2-17}$$

和

$$\rho_B=\frac{1}{n}\left\|\left|\Gamma\right\rangle\right\|^2 Tr_A\left[\frac{\left|\Gamma\right\rangle}{\left\|\left|\Gamma\right\rangle\right\|}\times\frac{\left\langle\Gamma\right|}{\left\|\left|\Gamma\right\rangle\right\|}\right]+$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i<j}\left\|c_i\left|\Psi_i\right\rangle-c_j\left|\Psi_j\right\rangle\right\|^2 Tr_A\left[\frac{c_i\left|\Psi_i\right\rangle-c_j\left|\Psi_j\right\rangle}{\left\|c_i\left|\Psi_i\right\rangle-c_j\left|\Psi_j\right\rangle\right\|}\times\frac{\left\langle\Psi_i\right|c_i^*-\left\langle\Psi_j\right|c_j^*}{\left\|c_i\left|\Psi_i\right\rangle-c_j\left|\Psi_j\right\rangle\right\|}\right] \tag{2-18}$$

利用不等式（2-6）式和（2-7）可以完成证明。

对于非正交态，不等式（2-16）中的比率是无界的。作为一个例子，假设

$$\left|\Psi_1\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|11\right\rangle-\left|22\right\rangle\right),$$
$$\left|\Psi_2\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|22\right\rangle-\left|33\right\rangle\right),$$
$$\vdots$$
$$\left|\Psi_{n-1}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|n-1,n-1\right\rangle-\left|nn\right\rangle\right),$$
$$\left|\Psi_n\right\rangle=\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{2}}\left(\left|11\right\rangle-\left|nn\right\rangle\right)-\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{d-2}}\left[\left|22\right\rangle+\cdots+\left|n-1,n-1\right\rangle+\left|n+1,n+1\right\rangle+\cdots+\left|dd\right\rangle\right]$$

且

$$c_i=\frac{\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{n-n\varepsilon+\varepsilon}}\,(i=1,2,\cdots,n-1),\qquad c_n=-\frac{1}{\sqrt{n-n\varepsilon+\varepsilon}}。 \tag{2-19}$$

在这种情况下，

$$\frac{\left|\Gamma\right\rangle}{\left\|\left|\Gamma\right\rangle\right\|}=\frac{1}{\sqrt{d-2}}\left[\left|22\right\rangle+\cdots+\left|n-1,n-1\right\rangle+\left|n+1,n+1\right\rangle+\cdots+\left|dd\right\rangle\right] \tag{2-20}$$

所以$E(\Gamma)=\log(d-2)$。对于固定的 d，令ε尽可能的小，以使得$E(\Psi_n)\approx 1$和$H(|p_i|^2)\approx\log n$，所以当$\varepsilon\to 0$和$d\gg n$时有

$$\frac{E(\Gamma)}{\Omega(\Psi_i,c_i)}\approx\frac{\log(d-2)}{1+\log n}\to\log d \tag{2-21}$$

而纠缠度的增量

$$E(\Gamma)-\sum_{i=1}^{n-1}\left|c_i\right|^2 E(\Psi_i)\to\log d \tag{2-22}$$

当$d\to\infty$是无界的。

第三章 受控量子隐形传态

自从Bennett提出量子隐形传态方案以来，人们对量子隐形传态进行了广泛而深入的研究，关于量子隐形传态的各种方案相继出现[21-23,45-47]，这些方案部分已在实验上获得实现。1998年，Karlsson 和 Bourennane提出了受控量子隐形传方案[28]，其基本思想就是接收者在监控者的帮助下，将甲地的某一粒子的未知量子态在乙地的另一粒子上还原出来。最近，人们提出了各种受控量子隐形传态方案[48-52]。闫等人提出了传送一个粒子和两个粒子的概率受控量子隐形传态[48]；朱等人提出了利用GHZ态传送一个单比特量子态的方案[49]；杨等人提出了多粒子的受控量子隐形传方案[50]；邓等人提出了利用两个GHZ态传送一个两粒子任意态的方案[51]；李等人提出了利用一个高维GHZ态传送任意多粒子态的方案[52]。

本章从受控量子隐形传态的基本原理出发，分别提出了利用W态和团簇态作为量子信道的受控量子隐形传态和概率性受控量子隐形传态方案。

3.1 受控量子隐形传态原理

假设 Alice，Bob 和 Charlie 共享一个 GHZ 态

$$|\psi\rangle_{ABC}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle+|111\rangle\right)_{ABC}, \tag{3-1}$$

其中 Alice 拥有粒子 A，Bob 拥有粒子 B，Charlie 拥有粒子 C。Alice 要传送的未知量子态为：

$$|\psi\rangle_{D}=\alpha|0\rangle_{D}+\beta|1\rangle_{D}, \tag{3-2}$$

其中α和β是任意常数且满足关系$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$。这时体系的总的量子态可以表示为

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{DABC}&=\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)_{D}\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle+|111\rangle\right)_{ABC}\\&=\frac{1}{2}\Big[|\phi^{+}\rangle_{DA}\otimes\left(\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle\right)_{BC}+|\phi^{-}\rangle_{DA}\otimes\left(\alpha|00\rangle-\beta|11\rangle\right)_{BC}\\&\quad+|\varphi^{+}\rangle_{DA}\otimes\left(\beta|00\rangle+\alpha|11\rangle\right)_{BC}+|\varphi^{-}\rangle_{DA}\otimes\left(-\beta|00\rangle+\alpha|11\rangle\right)_{BC}\Big]\end{aligned}, \tag{3-3}$$

其中粒子 D 和粒子 A 构成的四个 Bell 态可表示为

$$|\phi^{\pm}\rangle_{DA}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle\pm|11\rangle\right)_{DA}, \tag{3-4}$$

$$\left|\varphi^{\pm}\right\rangle_{DA}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle\pm|10\rangle\right)_{DA} \text{。} \tag{3-5}$$

首先 Alice 对她所拥有的粒子 D 和粒子 A 作一个 Bell 基测量，粒子 B 和粒子 C 的量子态将会塌缩到四个不同的量子态中的一个（详见表 3-1），接着 Alice 再把她的测量结果通过经典通道通知 Bob 和 Charlie。Bob 和 Charlie 根据 Alice 的测量结果作一个相应的么正变换，把粒子 B 和粒子 C 的量子态转变成如下形式

$$|\psi\rangle_{BC}=\left(\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle\right)_{BC}, \tag{3-6}$$

表格 3-1 Alice 的测量结果和对应的么正变换

Alice 的测量结果	粒子 B 和 C 对应的量子态	Bob 和 Charlie 进行的么正变换
$\left\|\phi^{+}\right\rangle_{DA}$	$\left(\alpha\|00\rangle+\beta\|11\rangle\right)_{BC}$	$I_B\otimes I_C$
$\left\|\phi^{-}\right\rangle_{DA}$	$\left(\alpha\|00\rangle-\beta\|11\rangle\right)_{BC}$	$I_B\otimes\sigma_C^Z$
$\left\|\varphi^{+}\right\rangle_{DA}$	$\left(\beta\|00\rangle+\alpha\|11\rangle\right)_{BC}$	$\sigma_B^X\otimes\sigma_C^X$
$\left\|\varphi^{+}\right\rangle_{DA}$	$\left(-\beta\|00\rangle+\alpha\|11\rangle\right)_{BC}$	$\sigma_B^X\otimes\sigma_C^Y$

其中

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \sigma^X=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma^Y=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma^Z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \text{。} \tag{3-7}$$

从（3-6）式可知，如果没有相互的配合，无论是 Bob 还是 Charlie 都不能得到 Alice 要传送的量子态$|\psi\rangle_D=\alpha|0\rangle_D+\beta|1\rangle_D$。如果 Charlie 想帮助 Bob 完成隐形传态，他可以在基矢$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)_2,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)_2\right\}$下对他所拥有的粒子 C 作 Von Neumann 测量，并将其测量结果通过经典通道告诉 Bob。因为粒子 B 和粒子 C 的量子态可以写为

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{BC}&=\left(\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle\right)_{BC}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)_B\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)_C+,\\&\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle\right)_B\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)_C\end{aligned} \tag{3-8}$$

一旦 Bob 得知 Charlie 的测量结果，他在粒子 B 上作一个相应的么正变换（对应

于测量结果$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)_C$和$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)_C$，相应的幺正变换为$I_B$和$\sigma_B^z$)，就可以得到Alice要传送的量子态，这样，量子隐形传态就成功了。

3.2 W信道的受控量子隐形传态

1. 以W态为信息通道的受控量子隐形传态

假设发送者Alice、监控者Bob和接受者Charlie三人之间空间上是相互分开的，他们三人之间建立的量子信道处于W态：

$$|W\rangle_{ABC}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|100\rangle+|010\rangle+|001\rangle\right)_{ABC}, \tag{3-9}$$

其中粒子A、B、C分别属于Alice、Bob和Charlie。Alice要传送的粒子处于未知量子态

$$|\psi\rangle_D=\alpha|0\rangle_D+\beta|1\rangle_D。 \tag{3-10}$$

于是粒子D、A、B、C所构成的系统的量子态为

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_{DABC}&=|\psi\rangle_D|W\rangle_{ABC}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\alpha|0100\rangle+\alpha|0010\rangle+\alpha|0001\rangle+\beta|1100\rangle+\beta|1010\rangle+\beta|1001\rangle\right)_{DABC}\\&=\frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|\Phi^+\rangle_{DA}\left(\alpha|01\rangle+\alpha|10\rangle+\beta|00\rangle\right)_{BC}+|\Phi^-\rangle_{DA}\left(\alpha|01\rangle+\alpha|10\rangle-\beta|00\rangle\right)_{BC}\\&\quad+|\Psi^+\rangle_{DA}\left(\alpha|00\rangle+\beta|01\rangle+\beta|10\rangle\right)_{BC}+|\Psi^-\rangle_{DA}\left(\alpha|00\rangle-\beta|01\rangle-\beta|10\rangle\right)_{BC}\Big)\end{aligned} \tag{3-11}$$

其中

$$\begin{aligned}|\Phi^\pm\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle\pm|11\rangle\right)\\|\Psi^\pm\rangle&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle\pm|10\rangle\right)\end{aligned} \tag{3-12}$$

是四个Bell态。首先Alice对她所拥有的粒子D和粒子A作一个Bell基测量，并将测量结果通过经典通道告诉Bob和Charlie。如果Alice的测量结果是$|\Phi^+\rangle_{DA}$，则粒子B和粒子C的量子态将塌缩为

$$|\psi\rangle_{BC}=\frac{\left(\alpha|01\rangle+\alpha|10\rangle+\beta|00\rangle\right)_{BC}}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}。 \tag{3-13}$$

如果 Bob 想帮助 Charlie 完成隐形传态，他只要用测量算符

$$M_0 = |0\rangle_{B\,B}\langle 0|, \qquad M_1 = |1\rangle_{B\,B}\langle 1| \tag{3-14}$$

对他所拥有的粒子 B 作 Von Neumann 测量，并将测量结果通过经典通道告诉 Charlie。如果测量结果是$|1\rangle_B$，则量子隐形传态失败，不论 Charlie 作何种么正变换，都不能把粒子 C 的量子态转变成与粒子 D 相同的量子态。如果测量结果是$|0\rangle_B$，则粒子 C 的量子态将塌缩为$|\psi\rangle_C = \alpha|1\rangle_C + \beta|0\rangle_C$，量子隐形传态将有可能成功，且其成功率为$1/\left(1+|\alpha|^2\right)$。根据 Alice 和 Bob 的测量结果，Charlie 对粒子 C 作么正变换$X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|$就可以粒子 C 的量子态转变为 Alice 要传送的态，即量子隐形传态成功了。

对于其它的测量结果可以进行相类似的过程。表 3-2 中分别给出了 Alice 和 Bob 的测量结果及其相应的概率，Charlie 实施的么正变换。

表格 3-2 Alice 和 Bob 的测量结果及其相应的概率，Charlie 实施的么正变换

Alice 的测量		Bob 的测量		Charlie 的么正变换
结果	概率	结果	概率	
$\lvert\Phi^+\rangle$	$(1+\lvert\alpha\rvert^2)/6$	$\lvert 0\rangle$ (S)	$1/\left(\lvert\alpha\rvert^2+1\right)$	X
		$\lvert 1\rangle$ (F)	$\lvert\alpha\rvert^2/\left(\lvert\alpha\rvert^2+1\right)$	
$\lvert\Phi^-\rangle$	$(1+\lvert\alpha\rvert^2)/6$	$\lvert 0\rangle$ (S)	$1/\left(\lvert\alpha\rvert^2+1\right)$	iY
		$\lvert 1\rangle$ (F)	$\lvert\alpha\rvert^2/\left(\lvert\alpha\rvert^2+1\right)$	
$\lvert\Psi^+\rangle$	$(1+\lvert\beta\rvert^2)/6$	$\lvert 0\rangle$ (S)	$1/\left(\lvert\beta\rvert^2+1\right)$	I
		$\lvert 1\rangle$ (F)	$\lvert\beta\rvert^2/\left(\lvert\beta\rvert^2+1\right)$	
$\lvert\Psi^-\rangle$	$(1+\lvert\beta\rvert^2)/6$	$\lvert 0\rangle$ (S)	$1/\left(\lvert\beta\rvert^2+1\right)$	Z
		$\lvert 1\rangle$ (F)	$\lvert\beta\rvert^2/\left(\lvert\beta\rvert^2+1\right)$	

其中，X, Y, Z 是泡利矩阵，I 是恒等变换矩阵；字母 S 表示成功，字母 F 表示失败。

在本方案中，量子受控隐形传态成功的概率为

$$p(S) = \frac{2}{3}。 \tag{3-15}$$

2. 以类W态为信息通道的受控量子隐形传态

在这种情况下，Alice、Bob和Charlie三人所共享的量子态（量子通道）是一个类W态，它与W态稍微有点不同，具有如下形式：

$$\left|W'\right\rangle_{ABC}=\left(a\left|100\right\rangle+b\left|010\right\rangle+c\left|001\right\rangle\right)_{ABC}, \tag{3-16}$$

其中，$|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$，不失一般性，可以令a，b和c是非负的，且$a\geq b\geq c$。Alice要传送给Charlie的粒子处于未知量子态

$$\left|\psi\right\rangle_D=\alpha\left|0\right\rangle_D+\beta\left|1\right\rangle_D。 \tag{3-17}$$

于是粒子D、A、B、C所构成的整个系统的量子态为

$$\begin{aligned}\left|\Psi\right\rangle_{DABC}&=\left|\psi\right\rangle_D\left|W'\right\rangle_{ABC}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\left|\Phi^+\right\rangle_{DA}\left(\alpha b\left|10\right\rangle+\alpha c\left|01\right\rangle+\beta a\left|00\right\rangle\right)_{BC}+\\&\left|\Phi^-\right\rangle_{DA}\left(\alpha b\left|10\right\rangle+\alpha c\left|01\right\rangle-\beta a\left|00\right\rangle\right)_{BC}+\\&\left|\Psi^+\right\rangle_{DA}\left(\alpha a\left|00\right\rangle+\beta b\left|10\right\rangle+\beta c\left|01\right\rangle\right)_{BC}+\\&\left|\Psi^-\right\rangle_{DA}\left(\alpha a\left|00\right\rangle-\beta b\left|10\right\rangle-\beta c\left|01\right\rangle\right)_{BC}\Big]\end{aligned} \tag{3-18}$$

现在，Alice对她所拥有的粒子D和粒子A作一个Bell基测量，并将测量结果通过经典通道告诉Bob和Charlie。如果Alice的测量结果是$\left|\Phi^+\right\rangle_{DA}$，则粒子B和粒子C的量子态将塌缩为

$$\left|\psi\right\rangle_{BC}=\frac{\left(\alpha b\left|10\right\rangle+\alpha c\left|01\right\rangle+\beta a\left|00\right\rangle\right)_{BC}}{\sqrt{|\alpha b|^2+|\alpha c|^2+|\beta a|^2}}, \tag{3-19}$$

若Bob想帮助Charlie完成隐形传态，他只要用测量算符

$$M_0=\left|0\right\rangle_{B\,B}\left\langle 0\right|,\qquad M_1=\left|1\right\rangle_{B\,B}\left\langle 1\right| \tag{3-20}$$

对他所拥有的粒子B作Von Neumann测量，并将测量结果通过经典通道告诉Charlie。如果测量结果是$\left|1\right\rangle_B$，则量子隐形传态失败。如果测量结果是$\left|0\right\rangle_B$，则量子隐形传态有可能成功，此时粒子C的量子态将塌缩为

$$\left|\psi\right\rangle_C=\frac{\left(\alpha c\left|1\right\rangle+\beta a\left|0\right\rangle\right)_C}{\sqrt{|\alpha c|^2+|\beta a|^2}}。 \tag{3-21}$$

一旦得知Alice和Bob的测量结果，Charlie可以引进一个初始态为$\left|0\right\rangle_E$的辅助粒子E，并在基矢$\{\left|00\right\rangle_{CE},\left|01\right\rangle_{CE},\left|10\right\rangle_{CE},\left|11\right\rangle_{CE}\}$下对粒子C和粒子E作下列么正变

换

$$U=\begin{pmatrix} c/a & \sqrt{1-c^2/a^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{1-c^2/a^2} & -c/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3-22}$$

实施么正变换后，粒子 C 和粒子 E 的量子态将变为

$$|\psi\rangle_{CE}=\frac{c\left(\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle\right)_C|0\rangle_E+\beta\sqrt{a^2-c^2}\,|01\rangle_{CE}}{\sqrt{|\alpha c|^2+|\beta a|^2}}。 \tag{3-23}$$

Charlie 再在基矢$|0\rangle_E$ 和 $|1\rangle_E$下对粒子 E 作一个正交测量，如果测量结果是$|1\rangle_E$，则量子隐形传态失败；如果测量结果是$|0\rangle_E$，Charlie 再对粒子 C 作一个么正变换 X，则粒子 C 的量子态将转变为粒子 D 的量子态，于是量子隐形传态成功实现了。

同理，对于 Alice 和 Bob 的其它测量结果，可作类似处理。表 3-3 中分别给出了 Alice、Bob 和 Charlie 的测量结果及其相应的概率、Charlie 实施的么正变换。

表格 3-3 Alice、Bob 和 Charlie 的测量结果及其相应的概率、Charlie 实施的么正变换

Alice 的测量		Bob 的测量		Charlie 的测量		Charlie 的么正变换
结果	概率	结果	概率	结果	概率	
$\lvert\Phi^+\rangle$	$(\lvert\alpha b\rvert^2+\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2)/2$	$\lvert 0\rangle$ (PS)	$\frac{\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}{\lvert\alpha b\rvert^2+\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}$	$\lvert 0\rangle$ (S)	$\frac{c^2}{\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}$	X
		$\lvert 1\rangle$ (F)	$\frac{\lvert\alpha b\rvert^2}{\lvert\alpha b\rvert^2+\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}$	$\lvert 1\rangle$ (F)	$\frac{\lvert\beta\rvert^2(a^2-c^2)}{\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}$	
$\lvert\Phi^-\rangle$	$(\lvert\alpha b\rvert^2+\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2)/2$	$\lvert 0\rangle$ (PS)	$\frac{\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}{\lvert\alpha b\rvert^2+\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}$	$\lvert 0\rangle$ (S)	$\frac{c^2}{\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}$	iY
		$\lvert 1\rangle$ (F)	$\frac{\lvert\alpha b\rvert^2}{\lvert\alpha b\rvert^2+\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}$	$\lvert 1\rangle$ (F)	$\frac{\lvert\beta\rvert^2(a^2-c^2)}{\lvert\alpha c\rvert^2+\lvert\beta a\rvert^2}$	

$\|\Psi^+\rangle$	$(\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2+\|\beta c\|^2)/2$	$\|0\rangle$ (PS)	$\frac{\|\alpha a\|^2+\|\beta c\|^2}{\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2+\|\beta c\|^2}$	$\|0\rangle$ (S)	$\frac{c^2}{\|\alpha a\|^2+\|\beta c\|^2}$	I
		$\|1\rangle$ (F)	$\frac{\|\beta b\|^2}{\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2+\|\beta c\|^2}$	$\|1\rangle$ (F)	$\frac{\|\alpha\|^2(a^2-c^2)}{\|\alpha a\|^2+\|\beta c\|^2}$	
$\|\Psi^-\rangle$	$(\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2+\|\beta c\|^2)/2$	$\|0\rangle$ (PS)	$\frac{\|\alpha a\|^2+\|\beta c\|^2}{\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2+\|\beta c\|^2}$	$\|0\rangle$ (S)	$\frac{c^2}{\|\alpha a\|^2+\|\beta c\|^2}$	Z
		$\|1\rangle$ (F)	$\frac{\|\beta b\|^2}{\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2+\|\beta c\|^2}$	$\|1\rangle$ (F)	$\frac{\|\alpha\|^2(a^2-c^2)}{\|\alpha a\|^2+\|\beta c\|^2}$	

成功实现受控量子隐形传态总的概率为

$$p(S)=2c^2。\tag{3-24}$$

由于$0<c\leq 1/\sqrt{3}$，所以很容易知道成功实现受控量子隐形传态的概率界于0到2/3之间，它仅仅决定于类W态（3-16）中的最小系数。

3.3 团簇态信道的受控量子隐形传态

1. 利用四粒子团簇态传送一个单粒子量子态

假设发送者Alice、监控者Bob和接受者Charlie三人之间建立的量子信道是一个四粒子团簇态：

$$|\psi\rangle_{1234}=\frac{1}{2}(|0000\rangle+|0011\rangle+|1100\rangle-|1111\rangle)_{1234},\tag{3-25}$$

其中粒子1和粒子3属于Alice、粒子2属于Bob、粒子4属于Charlie。Alice要传送给Charlie的粒子A的量子态为

$$|\psi\rangle_A=\alpha|0\rangle_A+\beta|1\rangle_A\tag{3-26}$$

其中$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$。于是，粒子A、1、2、3、4所构成的总的系统的量子态可写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{A1234} &= \left(\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A\right)\frac{1}{2}\left(|0000\rangle + |0011\rangle + |1100\rangle - |1111\rangle\right)_{1234} \\
&= \frac{1}{4}\left(|000\rangle + |111\rangle\right)_{A13}\left(\alpha|00\rangle - \beta|11\rangle\right)_{24} + \\
&\quad \frac{1}{4}\left(|000\rangle - |111\rangle\right)_{A13}\left(\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle\right)_{24} + \\
&\quad \frac{1}{4}\left(|001\rangle + |110\rangle\right)_{A13}\left(\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle\right)_{24} + \\
&\quad \frac{1}{4}\left(|001\rangle - |110\rangle\right)_{A13}\left(\alpha|01\rangle - \beta|10\rangle\right)_{24} + \\
&\quad \frac{1}{4}\left(|010\rangle + |101\rangle\right)_{A13}\left(\alpha|10\rangle + \beta|01\rangle\right)_{24} + \\
&\quad \frac{1}{4}\left(|010\rangle - |101\rangle\right)_{A13}\left(\alpha|10\rangle - \beta|01\rangle\right)_{24} + \\
&\quad \frac{1}{4}\left(|100\rangle + |011\rangle\right)_{A13}\left(-\alpha|11\rangle + \beta|00\rangle\right)_{24} + \\
&\quad \frac{1}{4}\left(|100\rangle - |011\rangle\right)_{A13}\left(\alpha|11\rangle + \beta|00\rangle\right)_{24}
\end{aligned}
\quad\text{。} \tag{3-27}
$$

首先，Alice 在基矢 $\{|000\rangle \pm |111\rangle, |001\rangle \pm |110\rangle, |010\rangle \pm |101\rangle, |100\rangle \pm |011\rangle\}$ 下对粒子 A、1 和 3 作一个联合测量，并将测量结果通过经典信道告知 Bob 和 Charlie，使他们能够各自通过一个相应的局部么正变换（详见表 3-4）将粒子 2、4 的量子态转换成下列形式：

$$
|\psi\rangle_{24} = \left(\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle\right)_{24}\text{。} \tag{3-28}
$$

表格 3-4 Alice 的测量结果和对应的么正变换

Alice 的测量结果	对应的么正变换	Alice 的测量结果	对应的么正变换
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vert 000\rangle + \vert 111\rangle\right)$	$I_2 \otimes \sigma_4^Z$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vert 010\rangle + \vert 101\rangle\right)$	$\sigma_2^X \otimes I_4$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vert 000\rangle - \vert 111\rangle\right)$	$I_2 \otimes I_4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vert 010\rangle - \vert 101\rangle\right)$	$\sigma_2^X \otimes \sigma_4^Z$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vert 001\rangle + \vert 110\rangle\right)$	$I_2 \otimes \sigma_4^X$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vert 100\rangle + \vert 011\rangle\right)$	$\sigma_2^X \otimes \left(-i\sigma_4^Y\right)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vert 001\rangle - \vert 110\rangle\right)$	$I_2 \otimes i\sigma_4^Y$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vert 100\rangle - \vert 011\rangle\right)$	$\sigma_2^X \otimes \sigma_4^X$

此时，如果没有双方的合作，无论是 Bob 还是 Charlie 都不能得到最初的量子态

$|\psi\rangle_A=\alpha|0\rangle_A+\beta|1\rangle_A$。

为了实现态从 Alice 传送到 Charlie，Bob 作为监控者需对他所拥有的粒子在基矢

$$|+\rangle_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)_2,\qquad |-\rangle_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)_2 \tag{3-29}$$

下作 Von Neumann 测量，并将测量结果通过经典信道告知 Charlie。因为粒子 2 和粒子 4 的量子态可写为

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{24}&=\alpha|00\rangle_{24}+\beta|11\rangle_{24}\\&=|+\rangle_2\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)_4+|-\rangle_2\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)_4\end{aligned}, \tag{3-30}$$

所以对应于 Alice 的两种测量结果$|+\rangle_2$和$|-\rangle_2$，粒子 4 的量子态将分别塌缩为$(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)_4$和$(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)_4$。如果 Alice 的测量结果是$|+\rangle_2$，则 Charlie 什么也不用做，粒子 4 的量子态将直接塌缩为粒子 A 的量子态；如果 Alice 的测量结果是$|-\rangle_2$，则 Charlie 只需对粒子 4 作一个么正变换 Z 就可以把粒子 4 的量子态转变为粒子 A 的量子态。这样受控量子隐形传态就完成了。

2. 利用四粒子团簇态传送一个两粒子纠缠态

象前面一样，假设发送者 Alice、监控者 Bob 和接受者 Charlie 三人之间建立的量子信道是一个四粒子团簇态：

$$|\psi\rangle_{1234}=\frac{1}{2}(|0000\rangle+|0011\rangle+|1100\rangle-|1111\rangle)_{1234}, \tag{3-31}$$

但是在这里，Alice 拥有粒子 1，Bob 拥有粒子 3，Charlie 拥有粒子 2 和粒子 4。此外 Alice 还拥有处于未知纠缠态

$$|\psi\rangle_{AB}=\alpha|00\rangle_{AB}+\beta|11\rangle_{AB} \tag{3-32}$$

的粒子 A 和粒子 B。此纠缠态正是要被传送的，其中$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$。于是，粒子 A、B、1、2、3、4 所构成的总的系统的量子态为：

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle_{AB1234} &= \left(\alpha|00\rangle_{AB}+\beta|11\rangle_{AB}\right)\frac{1}{2}\left(|0000\rangle+|0011\rangle+|1100\rangle-|1111\rangle\right)_{1234} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle+|111\rangle\right)\right)_{AB1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle+\alpha|011\rangle+\beta|100\rangle-\beta|111\rangle\right)_{234}+ \\
&\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle-|111\rangle\right)\right)_{AB1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle+\alpha|011\rangle-\beta|100\rangle+\beta|111\rangle\right)_{234}+ \\
&\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|001\rangle+|110\rangle\right)\right)_{AB1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|100\rangle-\alpha|111\rangle+\beta|000\rangle+\beta|011\rangle\right)_{234}+ \\
&\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|001\rangle-|110\rangle\right)\right)_{AB1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|100\rangle-\alpha|111\rangle-\beta|000\rangle-\beta|011\rangle\right)_{234}.
\end{aligned}
\tag{3-33}
$$

首先，Alice 在基矢 $\{|000\rangle\pm|111\rangle,|001\rangle\pm|110\rangle,|010\rangle\pm|101\rangle,|100\rangle\pm|011\rangle\}$ 下对粒子 A、B 和粒子 1 作一个联合测量，并将测量结果通过经典信道告知 Bob 和 Charlie，使 Charlie 能够通过一个相应的局部么正变换(详见表 3-5) 将粒子 2、3、4 的量子态统一转换成下列形式：

$$
|\psi\rangle_{234}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|000\rangle+\alpha|011\rangle+\beta|100\rangle-\beta|111\rangle\right)_{234}。\tag{3-34}
$$

表格 3-5 Alice 的测量结果和 Charlie 的么正变换

Alice 的测量结果	Charlie 的么正变换	Alice 的测量结果	Charlie 的么正变换
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|000\rangle+\|111\rangle)$	$I_2\otimes I_4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|001\rangle+\|110\rangle)$	$\sigma_2^X\otimes\sigma_4^Z$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|000\rangle-\|111\rangle)$	$\sigma_2^Z\otimes I_4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|001\rangle-\|110\rangle)$	$i\sigma_2^Y\otimes\sigma_4^Z$

为了实现将纠缠态从 Alice 传送到 Charlie，Bob 作为监控者需对他所拥有的粒子在下列基矢

$$
|+\rangle_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)_3,\qquad |-\rangle_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)_3 \tag{3-35}
$$

下对粒子 3 作 Von Neumann 测量，并将测量结果通过经典信道告知 Charlie。因为粒子 2、3、4 的量子态也可写成：

$$
|\psi\rangle_{234}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle_3\left(\alpha|00\rangle+\beta|10\rangle\right)_{24}+|-\rangle_3\left(\alpha|01\rangle-\beta|11\rangle\right)_{24}\right]。\tag{3-36}
$$

所以对应于 Bob 的测量结果$|+\rangle_3$和$|-\rangle_3$，粒子 2 和粒子 4 的量子态将相应地塌缩为$(\alpha|00\rangle+\beta|10\rangle)_{24}$和$(\alpha|01\rangle-\beta|11\rangle)_{24}$。

如果 Bob 的测量结果是$|+\rangle_3$，则 Charlie 对粒子 2、4 构成的复合系统作下列么正变换：

$$U_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}。\tag{3-37}$$

这个么正变换将会把量子态$(\alpha|00\rangle+\beta|10\rangle)_{24}$转换成$|\psi\rangle_{AB}=\alpha|00\rangle_{AB}+\beta|11\rangle_{AB}$；如果 Bob 的测量结果是$|-\rangle_3$，则 Charlie 对粒子 2、4 构成的复合系统作下列么正变换：

$$U_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}。\tag{3-38}$$

这个么正变换将会把量子态$(\alpha|01\rangle-\beta|11\rangle)_{24}$转换成$|\psi\rangle_{AB}=\alpha|00\rangle_{AB}+\beta|11\rangle_{AB}$。这样，受控隐形传态完成。

3.4 概率性受控量子隐形传态

假设发送者 Alice、监控者 Bob 和接受者 Charlie 三人之间建立的量子信道处于 GHZ 态：

$$|\psi\rangle_{ABC}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle+|111\rangle)_{ABC},\tag{3-39}$$

其中 Alice 拥有粒子 A，Bob 拥有粒子 B，Charlie 拥有粒子 C。此外 Alice 还拥有处于未知量子态

$$|\psi\rangle_1=\alpha|0\rangle_1+\beta|1\rangle_1\tag{3-40}$$

的粒子 1，此态正是要被传送的，其中$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$。于是，粒子 1、A、B、C 所构成的系统的量子态为：

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_{ABC} \\
&= \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle_{1A}(\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle)_{BC} + \frac{1}{2}|\Phi^-\rangle_{1A}(\alpha|00\rangle-\beta|11\rangle)_{BC} \\
&+ \frac{1}{2}|\Psi^+\rangle_{1A}(\alpha|11\rangle+\beta|00\rangle)_{BC} + \frac{1}{2}|\Psi^-\rangle_{1A}(\alpha|11\rangle-\beta|00\rangle)_{BC}
\end{aligned}
\tag{3-41}
$$

首先，Alice 对粒子 1 和粒子 A 作一个联合 Bell 基测量，并将测量结果通过经典信道告知 Bob 和 Charlie，使他们能够各自通过一个相应的局部么正变换（对于四种可能的测量结果$|\Phi^+\rangle_{1A}$、$|\Phi^-\rangle_{1A}$、$|\Psi^+\rangle_{1A}$和$|\Psi^-\rangle_{1A}$，相应的么正变换分别为$I_B \otimes I_C$、$I_B \otimes \sigma_C^Z$、$\sigma_B^X \otimes \sigma_C^X$和$i\sigma_B^Y \otimes i\sigma_C^Y$）将粒子 B、C 的量子态统一转换成下列形式：

$$|\psi\rangle_{BC} = (\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle)_{BC}。 \tag{3-42}$$

此时，如果没有双方的合作，无论是 Bob 还是 Charlie 都不能得到最初的量子态$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$。

为了实现态从 Alice 传送到 Charlie，Bob 作为监控者需对他所拥有的粒子在基矢

$$|+\rangle_B = \cos\theta|0\rangle_B + \sin\theta|1\rangle_B, \qquad |-\rangle_B = \sin\theta|0\rangle_B - \cos\theta|1\rangle_B \tag{3-43}$$

下作下对粒子 3 作 Von Neumann 测量，并将测量结果通过经典信道告知 Charlie。（不失一般性，可设$0 \le \theta \le \pi/4$）。因为粒子 B、C 的量子态也可写成

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle_{BC} &= (\alpha|00\rangle+\beta|11\rangle)_{BC} \\
&= |+\rangle_B(\alpha\cos\theta|0\rangle+\beta\sin\theta|1\rangle)_C + |-\rangle_B(\alpha\sin\theta|0\rangle-\beta\cos\theta|1\rangle)_C
\end{aligned}
，\tag{3-44}
$$

所以对应于 Bob 的测量结果$|+\rangle_B$和$|-\rangle_B$，粒子 C 的量子态将相应地塌缩为$(\alpha\cos\theta|0\rangle+\beta\sin\theta|1\rangle)_C$和$(\alpha\sin\theta|0\rangle-\beta\cos\theta|1\rangle)_C$。

如果粒子 C 的量子态塌缩为$(\alpha\cos\theta|0\rangle+\beta\sin\theta|1\rangle)_C$，则 Charlie 先引进一个初始态处于$|0\rangle_{aux}$的辅助粒子，再对粒子 C 和辅助粒子构成的复合系统作下列么正变换：

$$
U = \begin{pmatrix}
\tan\theta & 0 & 0 & \sqrt{1-\tan^2\theta} \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 & 0 & -\tan\theta
\end{pmatrix}
\tag{3-45}
$$

这个么正变换将会把量子态$\left(\alpha\cos\theta|0\rangle+\beta\sin\theta|1\rangle\right)_C\otimes|0\rangle_{aux}$（未归一化）转换成

$$|\psi\rangle_{Caux}=\frac{\sin\theta\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)_C\otimes|0\rangle_{aux}}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}}+\frac{\alpha\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\,|1\rangle_C\otimes|1\rangle_{aux}}{\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}} \qquad (3\text{-}46)$$

么正变换完成后，Charlie 再对辅助粒子在基矢$\left\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux}\right\}$上作一个正交测量。如果 Charlie 得到的测量结果为$|0\rangle_{aux}$，则粒子 C 的量子态将塌缩为$\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)_C$，于是隐形传态成功，其概率为$\dfrac{\sin^2\theta}{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}$。如果 Charlie 得到的测量结果为$|1\rangle_{aux}$，则隐形传态失败，其概率为$\dfrac{\alpha^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)}{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}$。同理，对于 Bob 的另一种测量结果$|-\rangle_B$，作类似的处理，能以概率$\dfrac{\sin^2\theta}{\alpha^2\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta}$实现隐形传态，其中所需做的么正变换为

$$U'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\tan\theta&\sqrt{1-\tan^2\theta}\\0&0&\sqrt{1-\tan^2\theta}&\tan\theta\end{pmatrix}。\qquad (3\text{-}47)$$

这样，概率性受控隐形传态完成。通过调节其测量基之间的夹角θ的取值，Bob 可以控制隐形传态的成功率。当$\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，Charlie 不需要引进辅助粒子，且成功率为 1。

第四章 受控量子超密编码

量子超密编码是量子信息理论的一个重要分支。近十年来，理论和实验上都对其进行了大量研究。其基本思想就是：利用量子信道进行编码，而且其编码的信息量要比经典信道要大。2001 年，郭光灿等人提出了量子受控超密编码方案[38]，该方案中，发送者（Alice）可以给接受者（Bob）发送信息，而他们之间的量子信道和发送的信息量则由监控者（Cliff）通过调节其测量角来控制。目前，该方案已在实验上也获得成功[53, 54]。最近，陈建兰等人将其推广到多个控制者的情况[40]。傅长宝等人则考虑了利用一个四粒子非最大纠缠信道进行受控超密编码的方案[39]。本章分别考虑了概率性受控超密编码、利用 POVMs[35]实现受控超密编码、利用四粒子团簇态作为量子信道的受控超密编码和利用多粒子 GHZ 态作为量子信道的多方受控超密编码。

4.1 概率性受控量子超密编码

假设发送者 Alice、接受者 Bob 和监控者 Charlie 三人之间建立的量子信道处于 GHZ-class 态：

$$|\Phi\rangle_{123}=\alpha|000\rangle_{123}+\beta|111\rangle_{123}, \tag{4-1}$$

其中$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$，不失一般性，可以假设α和β均是非负的，且满足$\alpha\geq\beta$。

首先 Charlie 在基矢

$$\begin{aligned}|+\rangle_3&=\cos\theta|0\rangle_3+\sin\theta|1\rangle_3,\\|-\rangle_3&=\sin\theta|0\rangle_3-\cos\theta|1\rangle_3\end{aligned} \tag{4-2}$$

$(0\leq\theta\leq\pi/4)$下对其拥有的粒子作 Von Neumann 测量。GHZ-class 态在新基矢$\{|+\rangle_3,|-\rangle_3\}$下可以写为

$$|\Phi\rangle_{123}=|\psi\rangle_{12}|+\rangle_3+|\varphi\rangle_{12}|-\rangle_3, \tag{4-3}$$

其中

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{12}&=\alpha\cos\theta|00\rangle_{12}+\beta\sin\theta|11\rangle_{12},\\|\varphi\rangle_{12}&=\alpha\sin\theta|00\rangle_{12}-\beta\cos\theta|11\rangle_{12}\end{aligned} \tag{4-4}$$

没有归一化。很明显，如果 Charlie 得到的测量结果是$|+\rangle_3$，则粒子 1 和 2 的量

子态将塌缩为$|\psi\rangle_{12}$，反之，如果测量结果是$|-\rangle_3$，则粒子 1 和 2 的量子态将塌缩为$|\varphi\rangle_{12}$。

首先考虑第一种情况。通常来说，量子态$|\psi\rangle_{12}$不是最大纠缠态，所以利用其进行量子超密编码的成功概率要小于 1。得知 Charlie 的测量结果后，Alice 就可以知道她与 Bob 共享的量子信道是粒子 1 和 2 的量子态$|\psi\rangle_{12}$，而 Bob 却不知道。为了纯化量子态$|\psi\rangle_{12}$，Alice 引入一个初始态为$|0\rangle_{aux}$的辅助粒子，并在基矢$\{|0\rangle_{aux}|0\rangle_1,|0\rangle_{aux}|1\rangle_1,|1\rangle_{aux}|0\rangle_1,|1\rangle_{aux}|1\rangle_1\}$下对辅助粒子和其拥有的粒子 1 作下列么正变换

$$U_1=\begin{pmatrix} \beta\tan\theta/\alpha & 0 & \sqrt{1-\beta^2\tan^2\theta/\alpha^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{1-\beta^2\tan^2\theta/\alpha^2} & 0 & -\beta\tan\theta/\alpha & 0 \end{pmatrix}。\tag{4-5}$$

联合么正变换$U_1\otimes I_2$将量子态$|0\rangle_{aux}\otimes|\psi\rangle_{12}$变换为

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{aux12}&=\sqrt{2}\beta\sin\theta|0\rangle_{aux}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{12}+|11\rangle_{12}\right)\right]\\&+\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta-\beta^2\sin^2\theta}|1\rangle_{aux}|10\rangle_{12}\end{aligned}。\tag{4-6}$$

然后 Alice 再在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux}\}$下对辅助粒子作 Von Neumann 测量，并将测量结果告知 Bob。

如果 Alice 的测量结果是$|0\rangle_{aux}$，则粒子 1 和 2 的量子态就是一个 Bell 态。Alice 先对粒子 1 作四个么正变换$\{I,\sigma_X,i\sigma_Y,\sigma_Z\}$中的任一个，再将粒子 1 发送给 Bob。Bob 对粒子 1 和 2 作一个 Bell 基测量，就能得知 Alice 对粒子 1 所作的么正变换，这样，Bob 就获得了 2 比特的信息。如果 Alice 的测量结果是$|1\rangle_{aux}$，则粒子 1 和 2 是非纠缠的，Bob 只能获得 1 比特的信息，所以平均而言，Bob 从 Alice 处只能得到

$$I_1=3\beta^2\sin^2\theta+\alpha^2\cos^2\theta \tag{4-7}$$

比特的信息。从上式可以看到，通过调节测量角θ，Charlie 可以控制 Alice 和 Bob 之间的信息量，这也是对粒子 1 和 2 的量子态的纠缠度的控制。

若 Charlie 的测量结果是$|-\rangle_3$，则粒子 1 和粒子 2 的量子态将塌缩为$|\varphi\rangle_{12}$，这种情况相对要复杂一些。Alice 可以利用两种方法来纯化量子态$|\varphi\rangle_{12}$。

第一种方法就是 Alice 引入一个初始态为$|0\rangle_{aux}$的辅助粒子并根据 Charlie 的测量角θ作一个相应的么正变换。如果$\sin\theta\le\beta$，则 Alice 在基矢$\{|0\rangle_{aux}|0\rangle_1,|0\rangle_{aux}|1\rangle_1,|1\rangle_{aux}|0\rangle_1,|1\rangle_{aux}|1\rangle_1\}$下对辅助粒子和粒子 1 作下列么正变换

$$U_2'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha\tan\theta/\beta & \sqrt{1-\alpha^2\tan^2\theta/\beta^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\sqrt{1-\alpha^2\tan^2\theta/\beta^2} & -\alpha\tan\theta/\beta & 0\end{pmatrix}。\tag{4-8}$$

联合么正变换$U_2'\otimes I_2$将量子态$|0\rangle_{aux}\otimes|\varphi\rangle_{12}$变换为

$$\begin{aligned}|\varphi\rangle_{aux12}=\sqrt{2}\alpha\sin\theta|0\rangle_{aux}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{12}+|11\rangle_{12}\right)\right]+\\ \sqrt{\beta^2\cos^2\theta-\alpha^2\sin^2\theta}|1\rangle_{aux}|11\rangle_{12}\end{aligned}。\tag{4-9}$$

然后 Alice 再在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux}\}$下对辅助粒子作 Von Neumann 测量，如果测量结果是$|1\rangle_{aux}$，则粒子 1 和粒子 2 是非纠缠的，Bob 只能获得 1 比特的信息。如果测量结果是$|0\rangle_{aux}$，粒子 1 和粒子 2 的量子态就是一个 Bell 态，Bob 就可以获得 2 比特的信息。所以对于$\sin\theta\le\beta$这种情况，Alice 可以向 Bob 发送

$$I_2'=3\alpha^2\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta\tag{4-10}$$

比特的信息。而 Alice 向 Bob 发送的总的信息量为

$$I=I_1+I_2'=1+2\sin^2\theta。\tag{4-11}$$

如果$\sin\theta\ge\beta$，则 Alice 在基矢$\{|0\rangle_{aux}|0\rangle_1,|0\rangle_{aux}|1\rangle_1,|1\rangle_{aux}|0\rangle_1,|1\rangle_{aux}|1\rangle_1\}$下对辅助粒子和粒子 1 作么正变换

$$U_2''=\begin{pmatrix}\beta\cot\theta/\alpha & 0 & \sqrt{1-\beta^2\cot^2\theta/\alpha^2} & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \sqrt{1-\beta^2\cot^2\theta/\alpha^2} & 0 & -\beta\cot\theta/\alpha & 0\end{pmatrix}。\tag{4-12}$$

而量子态$|0\rangle_{aux}\otimes|\varphi\rangle_{12}$将变换为

$$\begin{aligned}|\varphi''\rangle_{aux12}=&\sqrt{2}\beta\cos\theta|0\rangle_{aux}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{12}+|11\rangle_{12}\right)\right]\\&+\sqrt{\alpha^2\sin^2\theta-\beta^2\cos^2\theta}|1\rangle_{aux}|10\rangle_{12}\end{aligned}。\tag{4-13}$$

Alice 在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux}\}$下对辅助粒子作 Von Neumann 测量后，利用量子信道或经典信道，Bob 可以获得

$$I_2''=3\beta^2\cos^2\theta+\alpha^2\sin^2\theta\tag{4-14}$$

比特的信息量。而 Alice 向 Bob 发送的总的信息量为

$$I=I_1+I_2''=1+2\beta^2\tag{4-15}$$

比特。

所以，平均而言，Alice 向 Bob 发送的总的信息量为

$$I=\begin{cases}1+2\sin^2\theta & (\sin\theta\le\beta)\\1+2\beta^2 & (\sin\theta\ge\beta)\end{cases}。\tag{4-16}$$

Alice 纯化量子态$|\varphi\rangle_{12}$的第二种方法就是引入一个初始态为$|0\rangle_{aux}$的辅助 qutrit （具有三维希尔伯特空间的量子系统），并在基矢$\{|0\rangle_{aux}|0\rangle_1,|0\rangle_{aux}|1\rangle_1,|1\rangle_{aux}|0\rangle_1,|1\rangle_{aux}|1\rangle_1,|2\rangle_{aux}|0\rangle,|2\rangle_{aux}|1\rangle\}$下对辅助 qutrit 和粒子 1 作么正变换

$$U_2=\begin{pmatrix}\beta/\alpha & 0 & \sqrt{1-\beta^2/\alpha^2} & 0 & 0 & 0\\0 & -\tan\theta & 0 & \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 & 0\\\sqrt{1-\beta^2/\alpha^2} & 0 & -\beta/\alpha & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 & \tan\theta & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。\tag{4-17}$$

联合么正变换$U_2\otimes I_2$将量子态$|0\rangle_{aux}\otimes|\varphi\rangle_{12}$变换为

$$\begin{aligned}|\varphi\rangle_{aux12}=&\sqrt{2}\beta\sin\theta|0\rangle_{aux}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle_{12}+|11\rangle_{12}\right)\right]\\&+\sin\theta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}|1\rangle_{aux}|00\rangle_{12}-\beta\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}|2\rangle_{aux}|01\rangle_{12}\end{aligned}。\tag{4-18}$$

Alice 再在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux},|2\rangle_{aux}\}$下对辅助 qutrit 作 Von Neumann 测量。如果得

到的测量结果是$|1\rangle_{aux}$ 或 $|2\rangle_{aux}$，则粒子 1 和粒子 2 是非纠缠的，Bob 只能获得 1 比特的信息；如果测量结果是$|0\rangle_{aux}$，粒子 1 和粒子 2 的量子态就是一个 Bell 态，Bob 就可以获得 2 比特的信息。这样 Alice 可以发送

$$I_2 = \beta^2 + \sin^2\theta \tag{4-19}$$

比特的信息，而 Bob 从 Alice 处得到的总的信息量为

$$I = I_1 + I_2 = 1 + 4\beta^2 \sin^2\theta\,。 \tag{4-20}$$

从上面的讨论可以看出，当 Charlie 的测量结果为$|-\rangle_3$时，粒子 1 和 2 的量子态将塌缩为$|\varphi\rangle_{12}$，Alice 可以利用两种方法来纯化量子态$|\varphi\rangle_{12}$。在第一种方法中，Alice 最大限度地纯化了量子态$|\varphi\rangle_{12}$，因而 Bob 获得的信息量要多一些。但这种方法的不利之处在于，Alice必须根据初始量子信道GHZ-class 态的系数和Charlie的测量角θ之间的关系来实施相应的么正变换。而在第二种纯化方法中，Alice 所作的么正变换具有相近的形式，但其缺点在于不能最大限度地纯化量子态$|\varphi\rangle_{12}$，因而 Bob 获得的信息量要少一些。

4.2 利用 POVMs 实现受控量子超密编码

假设 Alice、Bob 和 Charlie 三人之间的量子信道处于 GHZ 态

$$|\Phi\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle_{123} + |111\rangle_{123}\right), \tag{4-21}$$

其中粒子 1、2、3 分别属于 Alice、Bob 和 Charlie。为了控制 Alice 和 Bob 之间的信息发送量，Charlie 首先在基矢

$$|+\rangle_3 = \cos\theta|0\rangle_3 + \sin\theta|1\rangle_3, \qquad |-\rangle_3 = \sin\theta|0\rangle_3 - \cos\theta|1\rangle_3; \tag{4-22}$$

（其中$0<\theta\le\pi/4$）下对粒子 3 作 Von Neumann 测量，并将测量结果告知 Alice 和 Bob。由于 GHZ 态在新基矢$\{|+\rangle_3, |-\rangle_3\}$中可以写为

$$|\Phi\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi\rangle_{12}|+\rangle_3 + |\varphi\rangle_{12}|-\rangle_3\right), \tag{4-23}$$

其中

$$|\psi\rangle_{12} = \cos\theta|00\rangle_{12} + \sin\theta|11\rangle_{12}, \quad |\varphi\rangle_{12} = \sin\theta|00\rangle_{12} - \cos\theta|11\rangle_{12}\,。 \tag{4-24}$$

所以对应于 Charlie 的测量结果$|+\rangle_3$或$|-\rangle_3$，粒子 1 和粒子 2 的量子态将分别塌缩为$|\psi\rangle_{12}$或$|\varphi\rangle_{12}$。

首先考虑 Charlie 得到测量结果$|+\rangle_3$，此时，粒子 1 和粒子 2 的量子态塌缩为$|\psi\rangle_{12}$，其纠缠度用 concurrence 可表示为

$$C = 2\sin\theta\cos\theta\text{。} \tag{4-25}$$

一般说来，$|\psi\rangle_{12}$不是最大纠缠态，因而利用其作为量子信道进行量子超密编码的成功率要小于 1。得知 Charlie 的测量结果后，Alice 对粒子 1 作四个幺正变换$\{I,\sigma_X,i\sigma_Y,\sigma_Z\}$中的任一个。幺正变换将把共享量子态$|\psi\rangle_{12}$分别变换为

$$\begin{aligned}
(I\otimes I)|\psi\rangle_{12} &= \cos\theta|00\rangle_{12} + \sin\theta|11\rangle_{12} = |\psi^+\rangle_{12},\\
(\sigma_x\otimes I)|\psi\rangle_{12} &= \cos\theta|10\rangle_{12} + \sin\theta|01\rangle_{12} = |\varphi^+\rangle_{12},\\
(i\sigma_y\otimes I)|\psi\rangle_{12} &= -\cos\theta|10\rangle_{12} + \sin\theta|01\rangle_{12} = |\varphi^-\rangle_{12},\\
(\sigma_z\otimes I)|\psi\rangle_{12} &= \cos\theta|00\rangle_{12} - \sin\theta|11\rangle_{12} = |\psi^-\rangle_{12}\text{。}
\end{aligned} \tag{4-26}$$

然后 Alice 再将粒子 1 发送给 Bob，Bob 此时拥有两个粒子，这两个粒子将处于四个可能的量子态$\{|\psi^+\rangle_{12},|\varphi^+\rangle_{12},|\varphi^-\rangle_{12},|\psi^-\rangle_{12}\}$中的任何一个。如果 Bob 能确定地区分这四个量子态，则他就能获得 2 比特的信息。但是上述四个量子态是非正交的，按照量子理论，非正交量子态不能确定地被区分。但当$\theta=\pi/4$时，共享量子态$|\psi\rangle_{12}$是一个最大纠缠态，上述四个量子态也相互正交，此时就成为标准的量子超密编码方案。

众所周知，如果一组非正交态是线性独立的，那么就可以以一定的概率区分这组非正交态。很容易验证上述四个量子态$\{|\psi^+\rangle_{12},|\varphi^+\rangle_{12},|\varphi^-\rangle_{12},|\psi^-\rangle_{12}\}$是线性独立的。本方案的基本思想是：如果 Bob 能以一定的概率区分这些量子态，他就能以一定的概率知道 Alice 作的幺正变换，从而能以一定的概率获得 2 比特的信息。

这个过程就是首先 Bob 在由基矢$\{|00\rangle,|11\rangle\}$或$\{|01\rangle,|10\rangle\}$张开的子空间中作投影测量。对应的投影算符分别为$P_1=|00\rangle\langle 00|+|11\rangle\langle 11|$和$P_2=|01\rangle\langle 01|+|10\rangle\langle 10|$，很明显，$P_1$和$P_2$是相互正交的。如果投影到$P_1$，Bob 就知道量子态不是$|\psi^+\rangle_{12}$就是$|\psi^-\rangle_{12}$。相似地，如果投影到$P_2$，Bob 就知道量子态不是$|\varphi^+\rangle_{12}$就是$|\varphi^-\rangle_{12}$。然后

Bob 再对粒子 1 和粒子 2 作一个广义测量。在子空间$\{|00\rangle,|11\rangle\}$中对应的 POVM 元分别为

$$A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\tan^2\theta & \tan\theta\\ \tan\theta & 1\end{pmatrix},\quad A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\tan^2\theta & -\tan\theta\\ -\tan\theta & 1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1-\tan^2\theta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}。\tag{4-27}$$

如果 Bob 得到A_1，则量子态就是$|\psi^+\rangle_{12}$；如果 Bob 得到A_2，则量子态就是$|\psi^-\rangle_{12}$；如果得到A_3，则结果是不确定的。所以成功区分量子态$|\psi^+\rangle_{12}$和$|\psi^-\rangle_{12}$的概率为$2\sin^2\theta$。同理，成功区分量子态$|\varphi^+\rangle_{12}$和$|\varphi^-\rangle_{12}$的概率也是$2\sin^2\theta$。

当 Charlie 得到测量结果$|-\rangle_3$时，粒子 1 和粒子 2 的量子态塌缩为$|\varphi\rangle_{12}$。可以用相似的过程处理。很明显，量子超密编码的成功率和 concurrence 并不由测量结果$|\pm\rangle_3$决定，而仅仅取决于 Charlie 的测量角θ。

实际上，由于退纠缠的影响，最大纠缠态不仅难以长久保持，而且在实验上也难以制备。所以有必要考虑利用非最大纠缠态进行量子超密编码。假设 Alice、Bob 和 Charlie 共享量子态为一 GHZ-class 态：

$$|\Psi\rangle_{123}=\alpha|000\rangle_{123}+\beta|111\rangle_{123},\tag{4-28}$$

其中$|\alpha|^2+|\beta|^2=1$，不失一般性，可以假设α和β均是非负的，且满足$\alpha\geq\beta$。首先 Charlie 在基矢$\{|+\rangle_3,|-\rangle_3\}$下对粒子 3 作 Von Neumann 测量。因 GHZ-class 态在基矢$\{|+\rangle_3,|-\rangle_3\}$中可写为

$$|\Psi\rangle_{123}=|\xi\rangle_{12}|+\rangle_3+|\zeta\rangle_{12}|-\rangle_3,\tag{4-29}$$

其中

$$\begin{aligned}|\xi\rangle_{12}&=\alpha\cos\theta|00\rangle_{12}+\beta\sin\theta|11\rangle_{12},\\ |\zeta\rangle_{12}&=\alpha\sin\theta|00\rangle_{12}-\beta\cos\theta|11\rangle_{12}。\end{aligned}\tag{4-30}$$

是非正交的。相似地，对应于 Charlie 的测量结果$|+\rangle_3$或$|-\rangle_3$，粒子 1 和粒子 2 的量子态将分别塌缩为$|\xi\rangle_{12}$或$|\zeta\rangle_{12}$。

当 Charlie 的测量结果为$|+\rangle_3$时，粒子 1 和粒子 2 的量子态塌缩为$|\xi\rangle_{12}$，其纠缠度用 concurrence 可表示为

$$C_+=\frac{2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta}{\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\sin^2\theta}。\tag{4-31}$$

得知 Charlie 的测量结果后，Alice 对粒子 1 作四个么正变换$\{I,\sigma_X,i\sigma_Y,\sigma_Z\}$中的任一个，么正变换将把共享量子态$|\psi\rangle_{12}$分别变换为

$$\begin{aligned}
&(I\otimes I)|\xi\rangle_{12}=\alpha\cos\theta|00\rangle_{12}+\beta\sin\theta|11\rangle_{12}=|\xi^+\rangle_{12},\\
&(\sigma_x\otimes I)|\xi\rangle_{12}=\alpha\cos\theta|10\rangle_{12}+\beta\sin\theta|01\rangle_{12}=|\varsigma^+\rangle_{12},\\
&(i\sigma_y\otimes I)|\xi\rangle_{12}=-\alpha\cos\theta|10\rangle_{12}+\beta\sin\theta|01\rangle_{12}=|\varsigma^-\rangle_{12},\\
&(\sigma_z\otimes I)|\xi\rangle_{12}=\alpha\cos\theta|00\rangle_{12}-\beta\sin\theta|11\rangle_{12}=|\xi^-\rangle_{12}。
\end{aligned}\tag{4-32}$$

么正变换后，Alice 将粒子 1 发送给 Bob，Bob 为了区分这四个非正交量子态，先在由基矢$\{|00\rangle,|11\rangle\}$或 $\{|01\rangle,|10\rangle\}$张开的子空间中作一投影测量，再对粒子 1 和粒子 2 作一个广义测量。在子空间$\{|00\rangle,|11\rangle\}$中对应的 POVM 元分别为

$$\begin{gathered}
A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\beta^2\tan^2\theta}{\alpha^2} & \frac{\beta\tan\theta}{\alpha}\\ \frac{\beta\tan\theta}{\alpha} & 1\end{pmatrix},\qquad A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\beta^2\tan^2\theta}{\alpha^2} & -\frac{\beta\tan\theta}{\alpha}\\ -\frac{\beta\tan\theta}{\alpha} & 1\end{pmatrix},\\
A_3=\begin{pmatrix}1-\frac{\beta^2\tan^2\theta}{\alpha^2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}。
\end{gathered}\tag{4-33}$$

相似地，如果 Bob 得到A_1或A_2（其概率为$2\beta^2\sin^2\theta$），那么他就能知道 Alice 所作的么正变换是I或σ_z，如果得到A_3，那么他就不能区分$|\xi^+\rangle_{12}$和$|\xi^-\rangle_{12}$这两个量子态，即不能获得任何信息。同理，成功区分量子态$|\xi^+\rangle_{12}$和$|\xi^-\rangle_{12}$的概率也是$2\beta^2\sin^2\theta$。

当 Charlie 得到测量结果$|-\rangle_3$时，粒子 1 和粒子 2 的量子态塌缩为$|\zeta\rangle_{12}$，其纠缠度可表示为

$$C_-=\frac{2\alpha\beta\sin\theta\cos\theta}{\alpha^2\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta}。\tag{4-34}$$

在这种情况下，成功量子超密编码的概率应该分为两种情况来考虑。如果$\sin\theta\le\beta$，则在子空间$\{|00\rangle,|11\rangle\}$中对应的 POVM 元分别为

$$A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\alpha^2\tan^2\theta}{\beta^2} & \frac{\alpha\tan\theta}{\beta}\\ \frac{\alpha\tan\theta}{\beta} & 1\end{pmatrix},\quad A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\alpha^2\tan^2\theta}{\beta^2} & -\frac{\alpha\tan\theta}{\beta}\\ -\frac{\alpha\tan\theta}{\beta} & 1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1-\frac{\alpha^2\tan^2\theta}{\beta^2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}。\tag{4-35}$$

这种情况下，Bob 将以概率$\frac{2\alpha^2\sin^2\theta}{\alpha^2\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta}$成功区分量子态$|\xi^+\rangle_{12}$或$|\xi^-\rangle_{12}$。

如果$\sin\theta\geq\beta$，则在子空间$\{|00\rangle,|11\rangle\}$中对应的 POVM 元分别为

$$A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\beta^2\cot^2\theta}{\alpha^2} & \frac{\beta\cot\theta}{\alpha}\\ \frac{\beta\cot\theta}{\alpha} & 1\end{pmatrix},\quad A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\beta^2\cot^2\theta}{\alpha^2} & -\frac{\beta\cot\theta}{\alpha}\\ -\frac{\beta\cot\theta}{\alpha} & 1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1-\frac{\beta^2\cot^2\theta}{\alpha^2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}。\tag{4-36}$$

Bob 将以概率$\frac{2\beta^2\cos^2\theta}{\alpha^2\sin^2\theta+\beta^2\cos^2\theta}$成功区分量子态$|\xi^+\rangle_{12}$或$|\xi^-\rangle_{12}$。

4.3 团簇态信道的受控量子超密编码

假设发送者 Alice、接受者 Bob 和监控者 Charlie、David 四人之间建立的量子信道处于四粒子团簇态：

$$|\psi\rangle=\frac{1}{2}(|0000\rangle+|0011\rangle+|1100\rangle-|1111\rangle)_{1234}\tag{4-37}$$

其中 Alice 拥有粒子 1，Bob 拥有粒子 2，Charlie 拥有粒子 3，David 拥有粒子 4。为了控制粒子 1、2 与粒子 3 之间的纠缠度，David 在基矢

$$\begin{aligned}|+\rangle_4&=\cos\theta_1|0\rangle_4+\sin\theta_1|1\rangle_4,\\ |-\rangle_4&=\sin\theta_1|0\rangle_4-\cos\theta_1|1\rangle_4\end{aligned}\tag{4-38}$$

（不失一般性，设$0\leq\theta_1\leq\pi/4$）下对其所拥有的粒子 4 作一个正交测量并且将测量结果告知 Alice。因为四粒子团簇态在基矢$\{|+\rangle_4,|-\rangle_4\}$中可以写成：

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi\rangle_{123}\otimes|+\rangle_4+|\varphi\rangle_{123}\otimes|-\rangle_4),\tag{4-39}$$

其中

$$
\begin{aligned}
|\phi\rangle_{123} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta_1|000\rangle_{123}+\sin\theta_1|001\rangle_{123}+\cos\theta_1|110\rangle_{123}-\sin\theta_1|111\rangle_{123}\right) \\
|\varphi\rangle_{123} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\theta_1|000\rangle_{123}-\cos\theta_1|001\rangle_{123}+\sin\theta_1|110\rangle_{123}+\cos\theta_1|111\rangle_{123}\right)
\end{aligned}
。 \tag{4-40}
$$

很明显，对应于 David 的两个测量结果$|+\rangle_4$和$|-\rangle_4$，粒子 1、2 和粒子 3 的量子态将以相同的概率分别塌缩为$|\phi\rangle_{123}$和$|\varphi\rangle_{123}$。本文只考虑前一种情况，后一种情况可以利用相同的过程处理。

Charlie 再在下列基矢

$$
\begin{aligned}
|+\rangle_3 &= \cos\theta_2|0\rangle_3+\sin\theta_2|1\rangle_3, \\
|-\rangle_3 &= \sin\theta_2|0\rangle_3-\cos\theta_2|1\rangle_3
\end{aligned}
\tag{4-41}
$$

（不失一般性，设$0\le\theta_2\le\pi/4$）下对粒子 3 作 Von Neumann 测量，并将其测量结果通过经典信道告知 Alice。将粒 1、2 和粒子 3 的量子态$|\phi\rangle_{123}$在基矢$\{|+\rangle_3,|-\rangle_3\}$中写成

$$
|\phi\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi\rangle_{12}\otimes|+\rangle_3+|\varphi\rangle_{12}\otimes|-\rangle_3\right), \tag{4-42}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
|\phi\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[\cos(\theta_1-\theta_2)\right]|00\rangle_{12}+\left[\cos(\theta_1+\theta_2)\right]|11\rangle_{12}\right\}, \\
|\varphi\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left[\sin(\theta_2-\theta_1)\right]|00\rangle_{12}+\left[\sin(\theta_1+\theta_2)\right]|11\rangle_{12}\right\}。
\end{aligned}
\tag{4-43}
$$

如果 Charlie 的测量结果是$|+\rangle_3$，则粒子 1 和粒子 2 的量子态将塌缩为$|\phi\rangle_{12}$，通常这不是一个两粒子最大纠缠态。所以利用$|\psi\rangle_{12}$进行量子超密编码的成功率小于 1。为了获得最大的成功率，Alice 引进一个初始态为$|0\rangle_{aux}$的辅助粒子并且对粒子 1 和辅助粒子在基矢$\{|0\rangle_1|0\rangle_{aux},|0\rangle_1|1\rangle_{aux},|1\rangle_1|0\rangle_{aux},|1\rangle_1|1\rangle_{aux}\}$下作么正变换

$$
U_{1aux} = \begin{pmatrix}
\tan\gamma & 0 & \sqrt{1-\tan^2\gamma} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
\sqrt{1-\tan^2\gamma} & 0 & -\tan\gamma & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}, \tag{4-44}
$$

其中

$$\tan\gamma=\frac{\cos(\theta_1+\theta_2)}{\cos(\theta_1-\theta_2)}。\tag{4-45}$$

联合么正变换$U_1\otimes I_B$将把量子态$|\phi\rangle_{12}\otimes|0\rangle_{aux}$转换成

$$\begin{aligned}|\phi\rangle_{aux,12}&=\cos(\theta_1+\theta_2)|0\rangle_{aux}\otimes\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle_{12}+|11\rangle_{12})\right]\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin2\theta_1\sin2\theta_2|1\rangle_{aux}\otimes|00\rangle_{12}\end{aligned}\tag{4-46}$$

然后 Alice 在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux}\}$下对辅助粒子作 Von Neumann 测量。如果 Alice 的测量结果是$|1\rangle_{aux}$，则粒子 1 和粒子 2 的量子态不是一个纠缠态，而是一个直积态，Bob 只能获得 1 比特的经典信息。如果测量结果是$|0\rangle_{aux}$，则粒子 1 和粒子 2 的量子态是一个最大纠缠态（Bell 态）。Alice 对粒子 1 作四个么正变换$\{I,\sigma_X,i\sigma_Y,\sigma_Z\}$中的任意一个（该么正变换将分别把量子态$|\Phi^+\rangle$转变成量子态$|\Phi^+\rangle$、$|\Psi^+\rangle$、$|\Psi^-\rangle$、$|\Phi^-\rangle$），再把粒子 1 发送给 Bob。由于$|\Phi^+\rangle$、$|\Psi^+\rangle$、$|\Psi^-\rangle$和$|\Phi^-\rangle$是四个相互正交的 Bell 态，所以 Bob 对粒子 1 和粒子 2 作一个联合测量就能获得 2 比特的信息。考虑所有的测量结果，Bob 可以获得

$$C=1+\cos^2(\theta_1+\theta_2)+\sin^2(\theta_1-\theta_2)\tag{4-47}$$

比特的信息。从上式可以看出：Bob 获得信息量仅依赖于测量角θ_1和θ_2，而这分别由 Charlie 和 Davdi 所控制。这也是对 Alice 和 Bob 之间量子信道的控制。

4.4 多粒子信道的受控量子超密编码

首先考虑四粒子信道的受控量子超密编码。假设发送者 Alice、David 接受者 Bob 和监控者 Charlie 四人之间建立的量子信道处于四粒子 GHZ 态：

$$|\psi\rangle_{1234}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle+|1111\rangle)_{1234}。\tag{4-47}$$

首先 Charlie 在基矢

$$\begin{aligned}|+\rangle_4&=\cos\theta_1|0\rangle_4+\sin\theta_1|1\rangle_4,\\|-\rangle_4&=\sin\theta_1|0\rangle_4-\cos\theta_1|1\rangle_4.\end{aligned}\tag{4-48}$$

下对其拥有的粒子 4 作 Von Neumann 测量并且将测量结果告知 Alice。由于四粒子 GHZ 态用基矢$\{|+\rangle_4,|-\rangle_4\}$可表示为

$$|\psi\rangle_{1234}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi\rangle_{123}\otimes|+\rangle_4+|\varphi\rangle_{123}\otimes|-\rangle_4\right), \tag{4-49}$$

其中

$$\begin{aligned}|\phi\rangle_{123}&=\cos\theta|000\rangle_{123}+\sin\theta|111\rangle_{123},\\|\varphi\rangle_{123}&=\sin\theta|000\rangle_{123}-\cos\theta|111\rangle_{123}\end{aligned} \tag{4-50}$$

很明显，Charlie 的测量将以相同的概率 1/2 得到两种结果$|+\rangle_4$和$|-\rangle_4$。对应于测量结果$|+\rangle_4$或$|-\rangle_4$，粒子 1、2、3 的量子态将分别塌缩为$|\phi\rangle_{123}$或$|\phi\rangle_{123}$。

首先考虑第一种情况。通常来说，$|\phi\rangle_{123}$不是一个最大纠缠态，因而利用它进行量子超密编码的成功率要小于 1。得知 Charlie 的测量结果后，Alice 引入一个初态为$|0\rangle_{aux}$的辅助粒子并在基矢$\{|0\rangle_{aux}|0\rangle_1,|0\rangle_{aux}|1\rangle_1,|1\rangle_{aux}|0\rangle_1,|1\rangle_{aux}|1\rangle_1\}$下对粒子 1 和辅助粒子作如下么正变换

$$U_1=\begin{pmatrix}\tan\theta & 0 & \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 & -\tan\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。 \tag{4-51}$$

联合么正变换$U_1\otimes I_4$（其中I_4是作用在粒子 2 和 3 上的恒等变换）将把量子态$|0\rangle_{aux}\otimes|\phi\rangle_{123}$转换成

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{aux123}=&\sqrt{2}\sin\theta|0\rangle_{aux}\otimes\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle_{123}+|111\rangle_{123}\right)\right]\\&+\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}|1\rangle_{aux}\otimes|000\rangle_{123}\end{aligned}。 \tag{4-52}$$

然后 Alice 在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux}\}$下对辅助粒子作 Von Neumann 测量。如果 Alice 的测量结果是$|1\rangle_{aux}$，则粒子 1、2 和粒子 3 的量子态不是一个纠缠态，Bob 只能获得 1 比特的信息。如果得到测量结果$|0\rangle_{aux}$，则 1、2 和粒子 3 的量子态是一个最大纠缠态。然后 Alice 对粒子 1 作$\{I,\sigma_X,\sigma_Y,\sigma_Z\}$四种么正变换中的任何一种后，将粒子 1 发送给 Bob。但是，如果 David 也这样做的话，那么通过一次测量，

Bob就不能唯一地确定Alice和David所做的么正变换，因此必须对Alice和David所做的么正变换作出一些限制。在情况下，可以选择让 Alice 对粒子 1 作$\{I,\sigma_X,\sigma_Y,\sigma_Z\}$四种么正变换中的任何一种，而 Bob 只能作$\{I,\sigma_X\}$或$\{\sigma_Y,\sigma_Z\}$中的任意一种。当 Bob 得到 Alice 和 David 的粒子后，通过对粒子 1，2，3 的量子态作一次测量，就可以区分 Alice 和 David 分别作的么正变换。也就是说，Bob 可以得到 3 比特的信息。所以，平均而言，Bob 得到的信息量为$2+2\sin^2\theta$。

如果 Charlie 的测量结果是$|-\rangle_4$，可以用相似的方法处理，并且 Bob 得到的信息量也相同，所以 Bob 得到的总信息量为

$$I=2+2\sin^2\theta。\tag{4-53}$$

从上式可以看出，通过调节θ的取值，Charlie 可以控制发送者和接收者之间的纠缠，进而可以控制他们之间的信息发送量。

对于多粒子信道的受控量子超密编码方案。可以假设 N 个发送者（为方便假设第一个发送者为 Alice)、接收者 Bob 和监控者 Charlie 共享一个（N+2）粒子 GHZ 态：

$$|\Psi\rangle_{12\cdots N+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+2}+|11\cdots1\rangle_{12\cdots N+2}\right),\tag{4-54}$$

其中前面 N 个粒子由 N 个发送者拥有，第 N+1 个粒子由 Bob 拥有，最后一个粒子由 Charlie 拥有。

首先 Charlie 在基矢

$$\begin{aligned}|+\rangle_{N+2}&=\cos\theta|0\rangle_{N+2}+\sin\theta|1\rangle_{N+2},\\|-\rangle_{N+2}&=\sin\theta|0\rangle_{N+2}-\cos\theta|1\rangle_{N+2}\end{aligned}\tag{4-55}$$

下对其所拥有的粒子进行 Von Neumann 测量。多粒子 GHZ 态在上述基矢下可以写为：

$$|\psi\rangle_{12\cdots N+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi\rangle_{12\cdots N+1}\otimes|+\rangle_{N+2}+|\varphi\rangle_{12\cdots N+1}\otimes|-\rangle_{N+2}\right),\tag{4-56}$$

其中

$$\begin{aligned}|\phi\rangle_{12\cdots N+1}&=\cos\theta|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}+\sin\theta|11\cdots1\rangle_{12\cdots N+1},\\|\varphi\rangle_{12\cdots N+1}&=\sin\theta|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}-\cos\theta|11\cdots1\rangle_{12\cdots N+1}.\end{aligned}\tag{4-57}$$

从（4.56）式可以看出，Charlie 将以相同的概率得到两个测量结果$|+\rangle_{N+2}$或$|-\rangle_{N+2}$。为简单起见，本文只讨论第一种情况，即 Charlie 得到的测量结果为$|+\rangle_{N+2}$，

而相应地，粒子 1，2，$\cdots$, N+1 的量子态将塌缩为$|\phi\rangle_{12\cdots N+1}$。

得知 Charlie 的测量结果后，Alice 引入一个初态为$|0\rangle_{aux}$的辅助粒子，并在基矢$\{|0\rangle_{aux}|0\rangle_1,|0\rangle_{aux}|1\rangle_1,|1\rangle_{aux}|0\rangle_1,|1\rangle_{aux}|1\rangle_1\}$下对粒子 1 和辅助粒子作么正变换$U_1$。联合么正变换$U_1\otimes I_{2^{N-1}}$将把粒子态$|0\rangle_{aux}\otimes|\phi\rangle_{12\cdots N+1}$转变为

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{aux12\cdots N+1}=&\sqrt{2}\sin\theta|0\rangle_{aux}\otimes\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}+|11\cdots1\rangle_{12\cdots N+1}\right)\right]\\&+\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}|1\rangle_{aux}\otimes|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}\end{aligned}。\tag{4-58}$$

然后 Alice 再在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux}\}$下对辅助粒子作 Von Neumann 测量。如果得到测量结果$|1\rangle_{aux}$，则粒子 1，2，$\cdots$, N+1 的量子态将是一个非纠缠态，通过该信道，可以发送 N 比特的信息。如果得到测量结果$|0\rangle_{aux}$，则粒子 1，2，$\cdots$, N+1 的量子态将是一个最大纠缠态，利用它可以进行起密编码。Alice 对粒子 1 作$\{I,\sigma_X,\sigma_Y,\sigma_Z\}$四种么正变换中的任何一种后，将粒子 1 发送给 Bob，而其它的发送者则对其拥有的粒子作$\{I,\sigma_X\}$或$\{\sigma_Y,\sigma_Z\}$中的任意一种后，将其发送给 Bob。得到这 N 个粒子后，Bob 对他所拥有的 N+1 个粒子作一个测量，就能区分这 N 个发送者所作的变换，这样，Bob 就获得了 N+1 比特的信息。

对于测量结果$|-\rangle_{N+2}$，可以进行类似的处理，并且 Bob 所获得的信息量也相同，因而，平均而言，N 个发送者可以向 Bob 发送

$$I'=N+2\sin^2\theta \tag{4-59}$$

比特的信息。

事实上，在实际应用中，最大纠缠态不仅难以制备，且难以长久保持，所以讨论非最大纠缠态的受控量子超密编码也就变得更为必要。在这里，假设量子信道是一个多粒子 GHZ-class 态：

$$|\Psi\rangle_{12\cdots N+2}=\alpha|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+2}+\beta|11\cdots1\rangle_{12\cdots N+2},\tag{4-60}$$

其中$\alpha^2+\beta^2=1$并且$0<\alpha\le\beta$，同样，前面 N 个粒子由 N 个发送者拥有，第 N+1 个粒子由 Bob 拥有，最后一个粒子由 Charlie 拥有。

为了控制发送者和接收者之间的纠缠，Charlie 在基矢$\{|+\rangle_{N+2},|-\rangle_{N+2}\}$下对其拥有的粒子作 Von Neumann 测量，并将其测量结果告知 Alice。由于多粒子

GHZ-class 态可以写成

$$|\psi\rangle_{12\cdots N+2}=|\xi\rangle_{12\cdots N+1}\otimes|+\rangle_{N+2}+|\zeta\rangle_{12\cdots N+1}\otimes|-\rangle_{N+2},\tag{4-61}$$

其中

$$\begin{aligned}|\xi\rangle_{12\cdots N+1}&=\alpha\cos\theta|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}+\beta\sin\theta|11\cdots1\rangle_{12\cdots N+1},\\|\zeta\rangle_{12\cdots N+1}&=\alpha\sin\theta|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}-\beta\cos\theta|11\cdots1\rangle_{12\cdots N+1}\end{aligned}\tag{4-62}$$

是非正交的。尽管也可以得到两个可能的测量结果，但是后面的操作将不再相似。

先考虑 Charlie 得到测量结果$|+\rangle_{N+2}$，此时，粒子 1，2，…, N+1 的量子态将塌缩为$|\xi\rangle_{12\cdots N+1}$。得知 Charlie 的测量结果后，Alice 引入一个初态为$|0\rangle_{aux}$的辅助粒子并在基矢$\{|0\rangle_{aux}|0\rangle_1,|0\rangle_{aux}|1\rangle_1,|1\rangle_{aux}|0\rangle_1,|1\rangle_{aux}|1\rangle_1\}$下对粒子 1 和辅助粒子作如下么正变换

$$U_2=\begin{pmatrix}\beta\tan\theta/\alpha & 0 & \sqrt{1-(\beta\tan\theta/\alpha)^2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sqrt{1-(\beta\tan\theta/\alpha)^2} & 0 & -\beta\tan\theta/\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。\tag{4-63}$$

联合么正变换$U_2\otimes I_{2^{N-1}}$将把粒子态$|0\rangle_{aux}\otimes|\xi\rangle_{12\cdots N+1}$转变为

$$\begin{aligned}|\psi\rangle_{12\cdots N+1aux}=&\sqrt{2}\beta\sin\theta|0\rangle_{aux}\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}+|11\cdots1\rangle_{12\cdots N+1}\right)\\&+\sqrt{\alpha^2\cos^2\theta-\beta^2\sin^2\theta}|1\rangle_{aux}\otimes|00\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}.\end{aligned}\tag{4-64}$$

然后 Alice 再在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux}\}$下对辅助粒子作 Von Neumann 测量。如果得到测量结果$|1\rangle_{aux}$，则粒子 1，2，…, N+1 的量子态将是一个非纠缠态，通过该信道，可以发送 N 比特的信息。如果得到测量结果$|0\rangle_{aux}$，则粒子 1，2，…, N+1 的量子态将是一个最大纠缠态，利用该信道，可以发送 N+1 比特的信息。因而，平均而言，N 个发送者可以向 Bob 发送

$$I_1=(N+2)\beta^2\sin^2\theta+N\alpha^2\cos^2\theta\tag{4-65}$$

比特的信息。

如果 Charlie 的测量结果是$|-\rangle_{N+2}$，粒子 1，2，…, N+1 的量子态将塌缩为$|\zeta\rangle_{12\cdots N+1}$。这种情况下，由于量子态的系数$\alpha\sin\theta$和$\beta\cos\theta$的大小不具有确定性，

因而要复杂一些。

为了纯化量子态$|\zeta\rangle_{12\cdots N+1}$，Alice 引入一个初态为$|0\rangle_{aux}$的辅助 qutrit，并在基矢$\{|0\rangle_{aux}|0\rangle_1,|0\rangle_{aux}|1\rangle_1,|1\rangle_{aux}|0\rangle_1,|1\rangle_{aux}|1\rangle_1,|2\rangle_{aux}|0\rangle,|2\rangle_{aux}|1\rangle\}$下对粒子 1 和辅助 qutrit 作如下么正变换

$$U_2'=\begin{pmatrix} \beta/\alpha & 0 & \sqrt{1-\beta^2/\alpha^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tan\theta & 0 & \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\beta^2/\alpha^2} & 0 & -\beta/\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\tan^2\theta} & 0 & \tan\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。\tag{4-66}$$

联合么正变换$U_2'\otimes I_{2^{N-1}}$将把粒子态$|0\rangle_{aux}\otimes|\zeta\rangle_{12\cdots N+1}$转变为

$$\begin{aligned}|\zeta\rangle_{aux12\cdots N+1}=&\sqrt{2}\beta\sin\theta|0\rangle_{aux}\otimes\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}+|1\cdots1\rangle_{12\cdots N+1}\right)\right]\\&+\sin\theta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}|1\rangle_{aux}\otimes|0\cdots0\rangle_{12\cdots N+1}\\&-\beta\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}|2\rangle_{aux}\otimes|01\cdots1\rangle_{12\cdots N+1}.\end{aligned}\tag{4-67}$$

然后 Alice 再在基矢$\{|0\rangle_{aux},|1\rangle_{aux},|2\rangle_{aux}\}$下对辅助 qutrit 作 Von Neumann 测量。如果得到测量结果$|1\rangle_{aux}$或$|2\rangle_{aux}$，则粒子 1，2，…，N+1 的量子态将是一个非纠缠态，通过该信道，可以发送 N 比特的信息。如果得到测量结果$|0\rangle_{aux}$，则粒子 1，2，…，N+1 的量子态将是一个最大纠缠态，利用该信道，可以发送 N+1 比特的信息。因而，平均而言，N 个发送者可以向 Bob 发送

$$I_2=\left(N\alpha^2+2\beta^2\right)\sin^2\theta+N\beta^2\cos^2\theta\tag{4-68}$$

比特的信息。所以 N 个发送者向 Bob 发送发送的信息量为

$$I''=I_1+I_2=N+4\beta^2\sin^2\theta\tag{4-69}$$

比特。

从上面可知，当多方共享一个 GHZ-class 态时，情况要相对复杂一些。对应于 Charlie 的不同测量结果，Alice 必须引入不同的辅助粒子对$|\xi\rangle_{12\cdots N+1}$或$|\zeta\rangle_{12\cdots N+1}$进行纯化。 而且信息量$I''$不仅依赖于测量角$\theta$，而且依赖于 GHZ-class

态的系数。

第五章 不同维数 qudit 的概率编码

一个纯态 qubit 由两个实参量描述，而一个纯态 qutrit（具有三维希尔伯特空间的量子系统）则由四个实参量描述，因此相同数量的实参量既可以描述两个非纠缠的纯态 qubit，也可以描述一个纯态 qutrit。那么是否可以把这两个纯态 qubit 编码为一个纯态 qubit 呢？理论和实践证明这种编码可以以一定的概率成功[55-57]。这个问题最初由 Grudka 和 Wojcik 提出[55]，此后 Bertuskova 等人对其进行了实验演示，并研究了如何将 n 个 d 维 qudit（具有 d 维希尔伯特空间的量子系统）编码成一个 $n(d-1)=1$ 维 qudit 然后再对其中的任何一个进行无错解码[56]；Grudka 等人则研究了将 n 个 d 维 qudit 编码并对其中任意 $k(n>k)$ 个进行无错解码[57]。事实上，上述方案中所有的 qudit 都具有相同的维数，本章则研究了将不同维数的 n 个 qudit 进行编码，并对其中的任意 $k(n>k)$ 个进行解码，给出了解码成功率的计算公式。

5.1 一个 qubit 和 qutrit 的编码与解码

假设 Alice 为编码者，Bob 为解码者。若 qubit 和 qutrit 的量子态分别为

$$|\Psi_1\rangle=\alpha_1|0\rangle_1+\beta_1|1\rangle_1+\gamma_1|2\rangle_1, \tag{5-1}$$

和

$$|\Psi_2\rangle=\alpha_2|0\rangle_2+\beta_2|1\rangle_2。 \tag{5-2}$$

为了对 qubit 和 qutrit 进行编码，Alice 利用下列六个测量算符对联合态 $|\Psi_1\rangle\otimes|\Psi_2\rangle$ 执行一个广义测量

$$M_{i,j}=\frac{1}{2}(|ij\rangle\langle ij|+\sum_{k=0,k\neq i}^{1}|kj\rangle\langle kj|+\sum_{l=0,l\neq j}^{2}|il\rangle\langle il|), \tag{5-3}$$

其中 $i=0,1,2$；$j=0,1$。即：

$$M_{0,0}=\frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00|+|10\rangle\langle 10|+|20\rangle\langle 20|+|01\rangle\langle 01|), \tag{5-4}$$

$$M_{0,1}=\frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01|+|11\rangle\langle 11|+|21\rangle\langle 21|+|00\rangle\langle 00|), \tag{5-5}$$

$$M_{1,0}=\frac{1}{2}(|10\rangle\langle 10|+|00\rangle\langle 00|+|20\rangle\langle 20|+|11\rangle\langle 11|),\quad (5\text{-}$$

$$M_{1,1}=\frac{1}{2}(|11\rangle\langle 11|+|01\rangle\langle 01|+|21\rangle\langle 21|+|10\rangle\langle 10|),\quad (5\text{-}$$

$$M_{2,0}=\frac{1}{2}(|20\rangle\langle 20|+|00\rangle\langle 00|+|10\rangle\langle 10|+|21\rangle\langle 21|),\quad (5\text{-}$$

$$M_{2,1}=\frac{1}{2}(|21\rangle\langle 21|+|01\rangle\langle 01|+|11\rangle\langle 11|+|20\rangle\langle 20|).\quad (5\text{-}9)$$

如果 Alice 得到测量结果(0, 0)，那么联合态将投影到一个四维子空间（qudit），得到的测量结果为

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\alpha_1\alpha_2|00\rangle+\beta_1\alpha_2|10\rangle+\gamma_1\alpha_2|20\rangle+\alpha_1\beta_2|01\rangle\right),\quad (5\text{-}10)$$

其中 $N=|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2+|\beta_1|^2|\alpha_2|^2+|\gamma_2|^2|\alpha_2|^2+|\alpha_1|^2|\beta_2|^2$ 是得到测量结果(0, 0)的概率。

现在 Bob 可以任意选择对哪一个粒子进行解码。如果 Bob 要对 qutrit 进行解码，他就利用下列测量算符进行一个投影测量：

$$P_{1,S}=|00\rangle\langle 00|+|10\rangle\langle 10|+|20\rangle\langle 20|,\quad (5\text{-}11)$$

$$P_{1,F}=|01\rangle\langle 01|。\quad (5\text{-}12)$$

如果 Bob 得到测量结果(1, S)，该量子态就投影到了一个三维子空间，并且这个量子态就是 Alice 进行编码的 qutrit：

$$|\Psi_{out}\rangle=\frac{\alpha_2}{\sqrt{N}}\left(\alpha_1|0\rangle+\beta_1|1\rangle+\gamma_1|2\rangle\right).\quad (5\text{-}13)$$

即解码是成功的。成功对这个 qutrit 解码的概率为 $|\alpha_2|^2/N$。如果 Bob 得到测量结果(1, F)，这个解码过程将失败。

同理，要对 qubit 进行解码，Bob 利用下列测量算符进行一个投影测量：

$$P_{2,S}=|00\rangle\langle 00|+|01\rangle\langle 01|,\quad (5\text{-}14)$$

$$P_{2,F}=|10\rangle\langle 10|+|20\rangle\langle 20|,\quad (5\text{-}15)$$

而 Bob 成功解码的概率为 $|\alpha_1|^2/N$。

5.2. 两个不同维数的 qudit 的编码与解码

假设有两个维数分别为 s 和 d 的非纠缠 qudit，这两个 qudit 的联合态可以写为：

$$|\Omega\rangle=\sum_{i=0}^{s-1}\alpha_i|i\rangle\otimes\sum_{i=0}^{d-1}\beta_i|i\rangle \tag{5-16}$$

为了将上述量子态编码到一个$s+d-1$维 qudit，Alice 利用下列 sd 个测量算符对联合态$|\Omega\rangle$执行一个广义测量：

$$M_{i,j}=\frac{1}{\sqrt{s+d-1}}\left(|ij\rangle\langle ij|+\sum_{k=0,k\neq i}^{s-1}|kj\rangle\langle kj|+\sum_{l=0,l\neq j}^{d-1}|il\rangle\langle il|\right)。 \tag{5-17}$$

编码后的量子态归一化后可表示为：

$$|\Omega_{i,j}\rangle=\frac{1}{\sqrt{N_{i,j}}}\left(\alpha_i\beta_j|ij\rangle+\sum_{k=0,k\neq i}^{s-1}\alpha_k\beta_j|kj\rangle+\sum_{l=0,l\neq j}^{d-1}\alpha_i\beta_l|il\rangle\right), \tag{5-18}$$

其中$N_{i,j}=|\alpha_i|^2|\beta_j|^2+\sum_{k=0,k\neq i}^{s-1}|\alpha_k|^2|\beta_j|^2+\sum_{l=0,l\neq j}^{d-1}|\alpha_i|^2|\beta_l|^2$是得到测量结果$(i,j)$概率。

在对第一个 qudit 进行解码的过程中，这个量子态将投影到一个 s 维子空间，对其进行解码的投影算符为：

$$P_{1,S}=\sum_{k=0}^{s-1}|kj\rangle\langle kj|, \tag{5-19}$$

$$P_{1,F}=\sum_{l=0,l\neq j}^{d-1}|il\rangle\langle il|. \tag{5-20}$$

得到测量结果$P_{1,S}$表示解码成功，而得到$P_{1,F}$则意味着解码失败。成功解码第一个 qudit 的概率为$|\beta_j|^2/N$。解码第二个 qudit 的方法与上述方法相似。

5.3 多个不同维数的 qudit 的编码与解码

假设 n 个非纠缠 qudit 的维数分别为d_1-1，d_2-1，… d_n-1，这些 qudit 的联合态可以表示为

$$|\Upsilon\rangle=\sum_{i=0}^{d_1-1}\alpha_{1i}|i\rangle\otimes\sum_{i=0}^{d_2-1}\alpha_{2i}|i\rangle\otimes\cdots\otimes\sum_{i=0}^{d_n-1}\alpha_{ni}|i\rangle. \tag{5-21}$$

为了对这些 qudit 进行编码，Alice 利用下列测量算符对联合态$|\Upsilon\rangle$执行一个广义测量：

$$\begin{aligned}M_{i,j,l\cdots}=\frac{1}{\sqrt{D_k}}\Bigg(&|ijl\cdots\rangle\langle ijl\cdots|+\sum_{p=0,p\neq i}^{d_1-1}|pjl\cdots\rangle\langle pjl\cdots|+\\&\sum_{q=0,q\neq j}^{d_2-1}|iql\cdots\rangle\langle iql\cdots|+\sum_{r=0,r\neq l}^{d_3-1}|ijr\cdots\rangle\langle ijr\cdots|+\cdots+\\&\sum_{p=0,p\neq i}^{d_1-1}\sum_{q=0,q\neq j}^{d_2-1}|pql\cdots\rangle\langle pql\cdots|+\sum_{p=0,p\neq i}^{d_1-1}\sum_{r=0,r\neq l}^{d_3-1}|pjr\cdots\rangle\langle pjr\cdots|+\\&\sum_{q=0,q\neq j}^{d_2-1}\sum_{r=0,r\neq l}^{d_3-1}|iqr\cdots\rangle\langle iqr\cdots|+\cdots+others\ \ terms\Bigg)\end{aligned}\quad.\qquad(5\text{-}22)$$

其中“$others\ \ terms$”表示对第三、四、… k个 qudit 的相似求和。常数D_k等于$M_{i,j,l}\cdots$投影到的子空间的维数，即：

$$\begin{aligned}D_k=1+&\sum_i(d_i-1)+\sum_{i\neq j}(d_i-1)(d_j-1)+\\&\sum_{i\neq j\neq l}(d_i-1)(d_j-1)(d_l-1)+other\ \ terms\end{aligned}\text{。}\qquad(5\text{-}23)$$

其中“$others\ \ terms$”表示对第四、五、… k个 qudit 可能的相似求和。

为了解码这 k 个 qudit，Bob 可以进行一个投影测量。这些测量算符依赖于要解码的 qudit。例如，如果 Alice 得到测量结果$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，而 Bob 要对前 k 个 qudit 进行解码，则这组测量算符为

$$\begin{aligned}&P_S=\sum_{p_1=0}^{d_1-1}\sum_{p_2=0}^{d_2-2}\cdots\sum_{p_k}^{d_k-1}|p_1p_2\cdots p_ki_{k+1}\cdots i_n\rangle\langle p_1p_2\cdots p_ki_{k+1}\cdots i_n|\text{。}\\&P_F=I-P_S\end{aligned}\qquad(5\text{-}24)$$

如果假设每个 qudit 处于任意纯态，那么成功对 n 个 qudit 进行编码，并对其中 k 个 qudit 进行解码的概率为

$$p_S=\frac{\prod_{j=1}^{k}d_i^j}{D_k}\qquad(5\text{-}25)$$

这也是k个被解码 qudit 的希尔伯特空间的维数与n个被编码 qudit 的希尔伯特空间的维数的比值。

结　语

随着量子信息研究的不断深入发展，揭示出超越经典信息学与量子力学两个理论体系本身所包含内容的预想不到的全新内涵。在增大信息的存储容量、确保信息的网络状态安全、实现不可破译、不可窃听的保密通信等方面都可以突破现有经典信息通信系统的权限，并将为信息科学与通信技术带来根本性的重大突破。

本文首先讨论了多个量子态的纠缠特性，发现了叠加态的纠缠度与原来各个量子态纠缠度之间的一些关系，对深入了解量子力学中的态叠加原理和纠缠性质有一定的意义。其次着重讨论了利用 W 态和团簇态作为量子信道的受控量子隐形传态。发现以团簇态作为量子信道的受控量子隐形传态总可以实现，而以 W 态为量子信道的受控量子隐形传态则有2/3的成功率。再次，在受控量子超密编码方案中，给出了一种量子控制信息传送量的方法，即监控者通过调节其测量角就可以控制发送者和接收者之间的信息传送量。受控量子超密编码的成功，不仅使控制论延伸到了量子力学领域，同时也为人们在量子力学领域根据要求进行信息处理，提供了一种操作方法。最后，研究了如何利用不同维数的 qudit 进行编码，再对其中的任意个进行解码，并给出了解码成功率的计算公式。

目前量子信息论中，量子通信与量子计算领域已经做了广泛而深入的研究，新的领域如量子对策论等也在兴起，而且其基础理论也不断得到新的发展，相比之下，实验进展要小一些。

尽管量子信息的基本框架已成型，但是我们也应当看到目前量子信息领域还有许多问题亟待解决，但这无损于量子信息的发展，反而吸引了各方面的专家学者加入到量子信息的研究领域中来，我们有理由相信，量子信息科学的明天会更加光明，人类进入量子信息时代已为时不远。

参考文献

[1] A.Einstein, B. Podolsky, N.Rosen. Can quantum mechanics description of physical reality be considered complete[J]. Phys. Rev. A, 1935, **47**:777.

[2] D. Bohm, Quantum Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1951).

[3] E. Schrödinger, The present situation in quantum mechanics, 译者：T. D. John, Prcceedings of the American Philosophical Society, 124:323.

[4] 张礼、葛墨林编著，量子力学的前沿问题，第一章、第三章，清华大学出版社，2000 年 4 月第一版.

[5] J. S. Bell, On the problem of hidden variables in quantum mechanics, Review of Modern Phys. , 1996, **38**:447.

[6] A. K. Akert, Quantum cryptography based on Bell's Theorem, Phys. Rev. Lett.,1991,**61**:661.

[7] T. Jennewein, C. Simon and G. Weihs et al. quantum cryptography with entangledphotons. Phys. Rev. Lett., 2000,**84**: 4725.

[8] D. Deutsch, Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer, Proceedings of the Royal Society of London A, 1985, **400**: 97.

[9] P. W. Shor, Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring, Proc. 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, 1994, 124.

[10] L. K. Grover, Quantum Mechanics helps in searching for a needle in a haystack., Phys. Rev. Lett., 1997,**78**:325

[11] I. L. Chuang, L. M. K. Vandersypen and X. Zhou et al. Experimental realization of a quantum algorithm,1998,**393**:143.

[12] C. H. Bennett, G. Brassard and C. Crepeau *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. Phys. Rev. Lett., 1993,**70**: 1895-1899.

[13] D. Bouwmeester. J. W. Pan and K. Mattle et al. Experimental quantum teleportation,Nature, 1997, **390**:575.

[14] J. S. Bell. On the problem of hidden variables in quantum mechanics[J]. Rev. Mod. Phys., 1966, 38:477-482 J. S. Bell, Physics, 1964, **1**: 195.

[15] D. M. Greenberger, M. A. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger. Bell's theorem without inequalities[J]. Am. J. Phys., 1990, **58**: 1131.

[16] W. Dür G. Vidal and J. I. Cirac. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways[J]. Phys. Rev. A, 2000, **62**: 062314-062325.

[17] H. J. Briegel and R. Raussendorf, Persistent Entanglement in Arrays of Interacting Particles [J] Phys. Rev. Lett. **86**, 910 (2001).

[18] 左战春，夏云杰. Tavis-Cummings 模型中三体纠缠态纠缠量的演化特性[J].物理学报, 2003,**52**(11):2687-2693.

[19] M. Zukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne and A. Ekert, "Event-ready-detectors" Bell experiment via entanglement swapping [J] Phys. Rev. Lett. **71**, 4287 (1993).

[20] A. Barenco, D. Deeutsch, A. Ekert, Conditional quantum dynamics and logic gates [J] Phys. Rev. Lett. **74**, 4083 (1995).

[21] J. I. Cirac, A. S. Parkins, Schemes for atomic-state teleportation [J] Phys. Rev. A, **50**, 4441-4444 (1994).

[22] J. I. Cirac and P. Zoller, Phys. Quantum Computations with Cold Trapped Ions [J] Rev. Lett. **74**, 4091-4094 (1995).

[23] M. H. Y. Moussa, Teleportation of a cavity-radiation-field state: An alternative scheme [J] Phys. Rev. A, **54**, 4661-4669 (1996).

[24] S. Zheng and G. Guo, Teleportation of an unknown atomic state through the Raman atom-cavity-field interaction [J] Phys. Rev. A, **22**, 171-174 (1997).

[25] S. B. Zheng and G. C. Guo, Teleportation of superpositions of macroscopic states of a cavity field [J] Phys. Lett. A, **236**, 180 (1997).

[26] S. B. Zheng and G. C. Guo, Teleportation of atomic states via resonant atom-field interaction [J] Opt. Commun, **167**, 111-113 (1999)

[27] S. B. Zheng and G. C. Guo, Teleportation of atomic states within cavities in themal states [J] Phys. Rev. A, **63**, 044302 (2001).

[28] A. Karlsson and M. Bourennane, Quantum teleportation using three-particle entanglement [J] Phys. Rev. A **58**, 4394 (1998)

[29] D. Boshi, S. Braca, F. D. Martini, L. Hardy and S. Popescu, Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J] Phys. Rev. Lett. **80**, 1121 (1998).

[30] Furosawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, Unconditional quantum teleportation [J] Science, **282**, 706-709 (1998).

[31] M. A. Nielsen, E. Knill and R. Lflamme, Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance [J] Nature, **396**, 52-55 (1998).

[32] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states [J] Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).

[33] Y. Yeo and W. K. Chua, Teleportation and Dense Coding with Genuine Multipartite Entanglement [J] Phys. Rev. Lett. **96**, 060502 (2006).

[34] X. S. Liu, G. L. Long, D. M. Tong and F. Li, General scheme for superdense coding between multiparties [J] Phys. Rev. A, **65**, 022304 (2002).

[35] A. K. Pati, P. Parashar and P. Agrawal, Probabilistic quantum dense coding [J] Phys. Rev. A **72**, 012329 (2005)

[36] P. Agrawal and A. Pati, Perfect teleportation and superdense coding with *W* states [J] Phys. Rev. A, **74**, 062320 (2006).

[37] S. L. Braunstein and H. J. Kimble, Dense coding for continuous variables [J] Phys. Rev. A, **61**, 042302 (2000).

[38] J. C. Hao, C. F. Li and G. C. Guo, Controlled dense coding using GHZ state [J] Phys. Rev. A **63**, 054301 (2001).

[39] C. B. Fu, Y. Xia, B. X. Liu and S. Zhang, Controlled quantum dense coding in a four-particle non-maximally entangled state via local measurements [J] Journal of the Korean Physical society, **46**, 1080 (2005).

[40] J. L. Chen and L. M. Kuang, Quantum dense coding in multiparticle entangled states via local measurements [J] Chin. Phys. Lett. **21**, 12 (2004).

[41] J. Zhang, C. D. Xie and K. C. Peng, Controlled dense coding for continuous variables using three-particle entangled states [J] Phys. Rev. A, **66**, 032318 (2002).

[42] J. Jing, J. Zhang, Y. Yan, F. G. Zhao, C. D. Xie and K. C. Peng, Experimental demonstration of tripartite entanglement and controlled dense coding for continuous variable [J] Phys. Rev. Lett. **90**, 167903 (2003).

[43] N. Linden, S. Popescu and J. A. Smolin, Entanglement of superpositions [J] Phys. Rev. Lett. **97** 100502（2006）.

[44] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (CUP, Cambridge, 2000).

[45] Sleator T , Weinfurter H, Realizable universal quantum logic gates [J] Phys Rev Lett , 1995 , **74** 4087~4090.

[46] Davidovich L , Zagury N , Brune M , *et al.* Teleportation of an atomic state between two cavities using nonlocal microwave field [J] Phys Rev A , 1994 , **50** R895~R898

[47] Vaidman L. Teleportation of quantum states [J] Phys Rev A , 1994 , **49** 1473~1476.

[48] F. L. Yan and D. Wang, Probabilistic and controlled teleportation of unknown

quantum states [J] Phys. Lett. A **316**, 297 (2003).

[49] J. D. Zhou *et al.* Controlled teleportation [J] quant-ph 0006030.

[50] C. P. Yang, Chu. S I, Han S Y, Efficient many-party controlled teleportation of multiqubit quantum information via entanglement [J] Phys. Rev. A **70**, 022329 (2004).

[51] F. G. Deng *et al.* Symmetric multiparty-controlled teleportation of an arbitrary two-particle entanglement [J] Phys. Rev. A **72**, 022338 (2005).

[52] X.. H. Li *et al.* Controlled Teleportation of an Arbitrary Multi-Qudit State in a General Form with d-Dimensional Greenberger--Horne--Zeilinger States [J] Chin. Phys. Lett. **24** (5), 1151-1153 (2007).

[53] J. Zhang, C. Xie and K. C. Peng, Controlled dense coding for continuous variables using three-particle entangled states [J] Phys. Rev. A **66**, 032318 (2002)

[54] J. T. Jing, J. Zhang, Y. Yan, F. G. Zhao, C. D. Xie and K. C. Peng, Experimental demonstrating of tripartite entanglement and controlled dense coding for continuous variables [J] Phys. Rev. Lett. **90**, 167903 (2003).

[55] A. Grudka, and A.Wojcik, How to encode the states of two non-entangled qubits in one qutrit [J] Phys. Lett. A **314** (2003) 350.

[56] L.Bertuskova, A.Cernoch, R. Filip, J. Fiurasek, J. Soubusta and M. Dusek, Optical implementation of the encoding of two qubits to a single qutrit [J] Phys. Rev. A. **74** (2006) 022325.

[57] A. Grudka, A. Wojcik and M. Czechlewski, Probabilistic coding of quantum states[J] Phys. Rev. A 74 (2006) 012302.

在学期间公开发表论文及著作情况

1. Yi-bin Huang, **Song-song Li** and Yi-You Nie, 《Controlled dense coding via GHZ-class state》(accepted by international journal of modern physics C).

2. **Song-song Li** and Yi-bin Huang,, 《Entanglement of Superposition of Multi-states》 (accepted by international journal of quantum information).

3. Yi-bin Huang, **Song-song Li** and Yi-You Nie, 《Probabilistic coding of quantum states of different dimension》 (accepted by international journal of theoretic physics).

4. **Song-song Li** , Yi-you Nie, Zhi-hui Hong, Xiao-jie Yi and Yi-bin Huang, 《Controlled teleportation using four particles cluster state》 (accepted by communication in theoretic physics).

5. 李嵩松、黄亦斌、聂义友, 《非最大纠缠信道的受控超密编码》(《激光杂志》已接收)。

6. Yi-bin Huang, **Song-song Li** and Yi-You Nie, 《Controlled dense coding between multi-parties》 (submitted).

7. Yi-bin Huang, **Song-song Li** and Yi-You Nie, 《Controlled superdense coding with POVMs》 (submitted).

8. Yi-bin Huang, **Song-song Li** and Yi-You Nie, 《Probabilistic and controlled teleportation via W or W-class state》 (submitted).

9. 窦永铭、李嵩松、黄亦斌,《基于团簇态的可控超密编码》(已投)。

致 谢

当我把这篇论文划上最后一个句号的时候,也就意味着我的硕士期间的学习生活即将结束,随之将步入下一个人生驿站。回顾这三年的历程,虽然走得艰辛,但我却得到了众多的支持与帮助,极大地丰富了我的人生。

我要特别感谢我的导师黄亦斌副教授，他治学严谨、学识渊博、品德高尚、平易近人，在我学习期间不仅传授了我知识，还传授了我做人的道理，这些都将使我终生受益。我借此机会向导师表示衷心的感谢！同时还要感谢聂义友教授、曾朝阳教授和雷敏生教授等老师循循善诱的教导和孜孜不倦的教诲。

感谢同窗们的关爱与支持，在这里请接受我对你们最诚挚的谢意！