第3部分
三角函数与平面向量

专题六　三角函数

考纲专题解读

考点分布	考点分频	考纲内容	命题趋势
1.三角函数的有关概念、同角三角函数关系式及诱导公式	5年19考	1.任意角的概念、弧度制 (1)了解任意角的概念. (2)了解弧度制的概念，能进行弧度与角度的互化. 2.三角函数 (1)理解任意角三角函数（正弦、余弦、正切）的定义. (2)能利用单位圆中的三角函数线推导出$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$，$\pi\pm\alpha$的正弦、余弦、正切的诱导公式，能画出$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$的图象，了解三角函数的周期性. (3)理解正弦函数、余弦函数在区间$[0,2\pi]$上的性质（如单调性、最大值和最小值以及与x轴的交点等），理解正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的单调性. (4)理解同角三角函数的基本关系式： $\sin^2x+\cos^2x=1$，$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$. (5)了解函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的物理意义；能画出$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象，了解参数$A$，$\omega$，$\varphi$对函数图象变化的影响. (6)了解三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型，会用三角函数解决一些简单实际问题.	**内容探究：** 1.三角函数的概念、同角三角函数关系式及诱导公式,一般融入三角函数求值、化简中,不单独考查. 2.三角函数的图象，主要考查三角函数的图象变换、三角函数解析式的求法及三角函数图象的应用. 3.三角函数的性质是高考的必考内容，常与三角函数的图象结合，主要考查三角函数的周期性、单调性、最值、奇偶性、对称性. **形式探究：** 1.高考中常以选择、填空题的形式考查三角函数关系式、三角函数诱导公式、三角函数的奇偶性及对称性，分值为5分，属于中低档题. 2.以解答题的形式考查三角函数的单调性、最值，常与平面向量、解三角形及三角恒等变换相结合，一般为12分，属于中低档题.
2.三角函数的图象及其变换	5年24考		
3.三角函数的性质及其应用	5年40考		

考点题组训练

考点16　三角函数的有关概念、同角三角函数关系式及诱导公式

第1步　试真题

A组　新题速递

(2015·重庆，9，中)若 $\tan\alpha=2\tan\frac{\pi}{5}$，则$\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}=$(　　)

A．1　B．2　C．3　D．4

【答案】　C　原式$=\dfrac{\cos\left[\alpha-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\right]}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}$

$=\dfrac{\cos\left[-\frac{\pi}{2}+\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)\right]}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}$

$=\dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)\right]}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}$

$=\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}$

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{5}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{5}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{5}}$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{5}}{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{5}}$

$=\dfrac{3\tan\frac{\pi}{5}}{\tan\frac{\pi}{5}}=3.$

B 组　经典回顾

1．(2014·大纲全国，3，易)设 $a=\sin 33^\circ$，$b=\cos 55^\circ$，$c=\tan 35^\circ$，则(　　)

A．$a>b>c$　B．$b>c>a$

C．$c>b>a$　D．$c>a>b$

【答案】　C　$\because b=\cos 55^\circ=\sin 35^\circ>\sin 33^\circ=a$，

$\therefore b>a$.

又$\because c=\tan 35°=\dfrac{\sin 35°}{\cos 35°}>\sin 35°=\cos 55°=b$，

$\therefore c>b$.$\therefore c>b>a$.故选 C.

2．(2012·江西，4，易)若 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$，则 $\sin 2\theta=$(　　)

A.$\dfrac{1}{5}$　B.$\dfrac{1}{4}$

C.$\dfrac{1}{3}$　D.$\dfrac{1}{2}$

【答案】　D　(先切化弦，再求 $\sin 2\theta$)

因为 $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin 2\theta}=4$，

所以 $\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}$.

3．(2012·山东，7，易)若 $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\sin 2\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，则 $\sin\theta=$(　　)

A.$\dfrac{3}{5}$　B.$\dfrac{4}{5}$

C.$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　D.$\dfrac{3}{4}$

【答案】　D　$\because\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore 2\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，$\sin\theta>0$，

$\therefore\cos 2\theta\leqslant 0$，

$\therefore\cos 2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2}=-\dfrac{1}{8}$.

又 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$，

$\therefore\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{8}\right)}{2}=\dfrac{9}{16}$.

$\therefore\sin\theta=\dfrac{3}{4}$，故选 D.

4．(2011·**课标全国，5，易**)已知角 θ 的顶点与坐标原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边在直线 $y=2x$ 上，则 $\cos 2\theta=($　　$)$

A．$-\frac{4}{5}$　B．$-\frac{3}{5}$

C.$\frac{2}{3}$　D.$\frac{3}{4}$

【答案】　B　方法一：设角 θ 的终边上任一点为 $P(k，2k)$，

则 $r=\sqrt{k^2+(2k)^2}=\sqrt{5}|k|$.

当 $k>0$ 时，$r=\sqrt{5}k$，

$\therefore \sin\theta=\frac{2k}{\sqrt{5}k}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\frac{k}{\sqrt{5}k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=-\frac{3}{5}$.

当 $k<0$ 时，$r=-\sqrt{5}k$，

$\therefore \sin\theta=-\frac{2k}{\sqrt{5}k}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\cos\theta=-\frac{k}{\sqrt{5}k}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2=-\frac{3}{5}$.

综上可得，$\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$，故选 B.

方法二：因为该直线的斜率是 $k=2=\tan\theta$，所以 $\cos 2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{3}{5}$.

5．(2011·**大纲全国，14，易**)已知 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$________.

【解析】　$\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore \tan\alpha=-\frac{1}{2}$,

$\therefore \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{4}{3}$.

【答案】　$-\frac{4}{3}$

第 2 步 | 提能力

考向 1　三角函数的定义及应用

1．终边相同的角

所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $\{\beta|\beta=\alpha+2k\pi，k\in\mathbf{Z}\}$．

2．角度与弧度的互化

(1)$360°=2\pi$ rad；(2)$180°=\pi$ rad；

(3)$1°=\dfrac{\pi}{180}$ rad；(4)1 rad$=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°$．

3．弧长及扇形面积公式

(1)弧长公式：$l=|\alpha|r$；

(2)扇形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}|\alpha|r^2$.

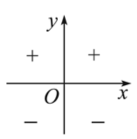
其中 l 为扇形弧长，α 为圆心角，r 为扇形半径．

4．任意角的三角函数的定义

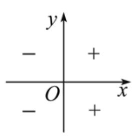
设 α 是一个任意角，α 的终边上任意一点 P(与原点不重合)的坐标为$(x，y)$，它到原点的距离是 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

三角函数	定义	定义域
$\sin\alpha$	$\dfrac{y}{r}$	$\mathbf{R}$
$\cos\alpha$	$\dfrac{x}{r}$	$\mathbf{R}$
$\tan\alpha$	$\dfrac{y}{x}$	$\left\{\alpha\middle|\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi，k\in\mathbf{Z}\right\}$

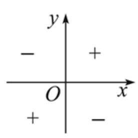
5.三角函数在各象限的符号



sin α



cos α

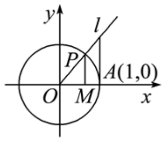
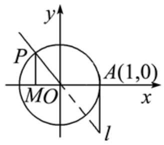
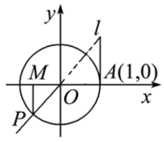
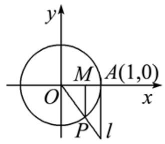


tan α

记忆口诀：一全正，二正弦，三正切，四余弦．

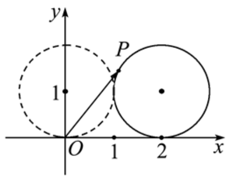
6．三角函数线

角所在的象限	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限

图形				

典型例题 1 (1)(2015·广东佛山质检，11)若角 θ 的终边经过点 $P(-\sqrt{3}, m)(m\neq 0)$且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}m$，则 $\cos\theta$ 的值为________.

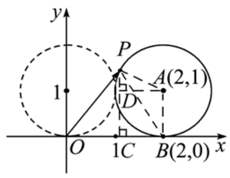
(2)(2012·山东，16)如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一单位圆的圆心的初始位置在(0，1)，此时圆上一点 P 的位置在(0，0)，圆在 x 轴上沿正向滚动．当圆滚动到圆心位于(2，1)时，$\overrightarrow{OP}$的坐标为________.



【解析】 (1)点 $P(-\sqrt{3}, m)$是角 θ 终边上一点，由三角函数定义可知 $\sin\theta=\frac{m}{\sqrt{3+m^2}}$.又 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}m$，$\therefore \frac{m}{\sqrt{3+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}m$.

又 $m\neq 0$，$\therefore m^2=5$，$\therefore \cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3+m^2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(2)如图，



由题意知$\overset{\frown}{BP}=OB=2$.

$\because$圆的半径为 1，$\therefore \angle BAP=2$，故$\angle DAP=2-\frac{\pi}{2}$，

$\therefore DA=AP\cos\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2$，$DP=AP\sin\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2$.

$\therefore OC=2-\sin 2$，$PC=1-\cos 2$.

$\therefore \overrightarrow{OP}=(2-\sin 2, 1-\cos 2)$.

【答案】 (1)$-\frac{\sqrt{6}}{4}$ (2)$(2-\sin 2, 1-\cos 2)$

【点拨】 解题(1)的关键是正确理解三角函数的定义；解题(2)的关键是确定$\overset{\frown}{BP}$的长度，以及通过 P

点、圆心与 x 轴构造直角三角形进行求解．

方法总结 三角函数定义的应用类型及解题方法

(1)已知角 α 终边上一点 P 的坐标求三角函数值，先求出点 P 到原点的距离 r，然后利用三角函数定义求解．

(2)已知角 α 的终边所在的直线方程求三角函数值，先设出终边上一点的坐标，求出此点到原点的距离，然后利用三角函数定义求解相关问题，同时注意分类讨论．

(3)判断三角函数值的符号问题，先判断角所在的象限，再根据各象限的符号规律判断．

变式训练 (2015·山东临沂质检，12)已知角 θ 的终边经过点 $P(-4\cos\alpha, 3\cos\alpha)$，$\alpha\in\left\{\alpha\middle|\pi<\alpha<2\pi, \alpha\neq\frac{3\pi}{2}\right\}$，则 $\sin\theta+\cos\theta=$________．

【解析】 当$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$时，$\cos\alpha<0$，所以 $r=-5\cos\alpha$，故 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$，则 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$；当$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$时，$\cos\alpha>0$，所以 $r=5\cos\alpha$，故 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，则 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{5}$.

【答案】 $\pm\frac{1}{5}$

考向 2 同角三角函数基本关系式及应用

同角三角函数基本关系式

(1)平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

(2)商数关系：$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right)$.

注意

利用同角三角函数的平方关系求三角函数值，进行开方时要根据角的范围，判断符号后正确取舍．

典型例题 2 (1)(2013·大纲全国，2)已知 α 是第二象限角，$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，则 $\cos\alpha=($　　$)$

A．$-\frac{12}{13}$　B．$-\frac{5}{13}$　C．$\frac{5}{13}$　D．$\frac{12}{13}$

(2)(2012·辽宁，7)已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$，$\alpha\in(0, \pi)$，则 $\tan\alpha=($　　$)$

A．-1　B．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　D．1

(3)(2015·贵州贵阳模拟，5)已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}$，且$\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，则 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值为(　　)

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $-\frac{3}{4}$　D. $\frac{3}{4}$

【解析】　(1)因为 α 是第二象限角，所以 $\cos\alpha<0$.由同角函数关系式知 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{12}{13}$，故选 A.

(2)方法一：∵$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$，

$\therefore(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$．

即 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=0$.

等式两边同时除以 $\cos^2\alpha$ 得，

$\tan^2\alpha+2\tan\alpha+1=0$，

即 $\tan\alpha=-1$.

方法二：∵$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$，$\therefore(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$，

即 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=2$.

$\therefore\sin 2\alpha=-1$.

$\because\alpha\in(0,\pi)$，$\therefore\alpha=\frac{3\pi}{4}$，$\therefore\tan\alpha=-1$.

(3)$\because\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，

$\therefore\cos\alpha<0$，$\sin\alpha<0$ 且 $|\cos\alpha|<|\sin\alpha|$，

$\therefore\cos\alpha-\sin\alpha>0$.

又 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$，

$\therefore\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【答案】　(1)A　(2)A　(3)B

【点拨】　解题(1)时需注意余弦值的符号；解题(2)时注意平方关系和商数关系的交替使用；解题(3)的关键是等式 $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$.但要特别注意对 $\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 符号的关注．

方法总结 同角三角函数基本关系式的应用技巧

(1)弦切互化法：主要利用公式 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$化成正弦、余弦函数；

(2)和积转换法：如利用$(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta$的关系进行变形、转化；

(3)巧用“1”的变换：$1=\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos^2\theta(1+\tan^2\theta)=\sin^2\theta\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$.

变式训练 (2015·福建泉州质检，11)已知$-\frac{\pi}{2}<x<0$，$\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，则 $\sin x-\cos x=$________.

【解析】 将等式 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$两边平方，得 $\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=\frac{1}{25}$，即 $2\sin x\cos x=-\frac{24}{25}$，

$\therefore(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{49}{25}$.

又$-\frac{\pi}{2}<x<0$，$\therefore\sin x<0$，$\cos x>0$，

$\because\sin x-\cos x<0$，

故 $\sin x-\cos x=-\frac{7}{5}$.

【答案】 $-\frac{7}{5}$

考向 3 诱导公式及应用

1．诱导公式

组数	一	二	三	四	五	六
角	$2k\pi+\alpha(k\in\mathbf{Z})$	$\pi+\alpha$	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$
正弦	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
余弦	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
正切	$\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$		

2.诱导公式的记忆规律

(1)诱导公式可简记为：奇变偶不变，符号看象限．

(2)“奇”“偶”指的是诱导公式 $k\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha$ 中的整数 k 是奇数还是偶数．“变”与“不变”是指函数的名称的变化，若 k 是奇数，则正、余弦互变；若 k 为偶数，则函数名称不变．

(3)“符号看象限”指的是在 $k\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha$ 中，将 α 看成锐角时 $k\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha$ 所在的象限．

典型例题3 (1)(2013·广东，4)已知 $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{5}$，那么 $\cos\alpha$ 等于(　　)

A．$-\frac{2}{5}$　B．$-\frac{1}{5}$　C.$\frac{1}{5}$　D.$\frac{2}{5}$

(2)(2015·黑龙江哈师大附中模拟，6)设 $\tan(\pi+\alpha)=2$，则$\frac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}$等于(　　)

A．3　B.$\frac{1}{3}$　C．1　D．-1

(3)(2015·河南安阳质检，14)已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{2}{3}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=$________.

【解析】 (1)$\because\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$，

$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

(2)由 $\tan(\pi+\alpha)=2$，得 $\tan\alpha=2$，故$\frac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-(-\cos\alpha)}=$

$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$.

(3)$\because\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\alpha-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$，

$\therefore\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left[-\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

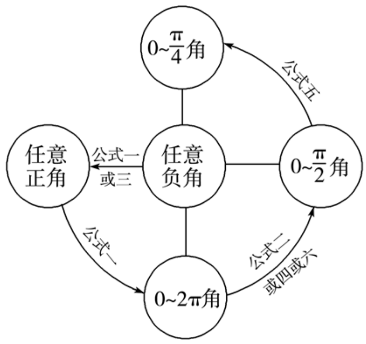
$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{2}{3}$.

【答案】 (1)C　(2)A　(3)$-\frac{2}{3}$

方法总结 1.利用诱导公式求值的原则及步骤

(1)原则：负化正、大化小、化到锐角为终了.

(2)步骤：利用诱导公式可以把任意角的三角函数转化为 $0\sim\frac{\pi}{4}$之间角的三角函数，然后求值，其步骤为：



2．利用诱导公式化简三角函数的思路和要求

(1)思路方法：①分析结构特点，选择恰当公式；②利用公式化成单角三角函数；③整理得最简形式.

(2)化简要求：①化简过程是恒等变形；②结果要求项数尽可能少，次数尽可能低，结构尽可能简单，能求值的要求出值.

变式训练 本例(3)条件不变，则 $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$________.

【解析】 $\because\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\pi$，

$\therefore\frac{5\pi}{6}+\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$，

$\therefore\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{2}{3}.$

又$\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\alpha+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$，

$\therefore\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{2}{3}$，

$\therefore \cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{9}$.

【答案】 $-\frac{4}{9}$

第 3 步 过模拟

1．(2014·湖南株洲质检，3)已知扇形的周长是 4 cm，则扇形面积最大时，扇形的中心角的弧度数是(　　)

A．2　B．1　C．$\frac{1}{2}$　D．3

【答案】 A　设此扇形的半径为 r，弧长为 l，则 $2r+l=4$，面积 $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(4-2r)=-r^2+2r=-(r-1)^2+1$，故当 $r=1$ 时 S 最大，这时 $l=4-2r=2$.从而 $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{2}{1}=2$.

2．(2015·福建泉州一模，5)已知 $2\tan\alpha\cdot\sin\alpha=3$，$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，则 $\sin\alpha=$(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　B．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　C.$\frac{1}{2}$　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】 B　由 $2\tan\alpha\cdot\sin\alpha=3$，得$\frac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=3$，即 $2\cos^2\alpha+3\cos\alpha-2=0$.又$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，解得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$($\cos\alpha=-2$ 舍去)，故 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3．(2015·安徽江淮十校协作体联考，4)已知锐角 α，且 5α 的终边上有一点 $P(\sin(-50°)$，$\cos 130°)$，则 α 的值为(　　)

A．8°　B．44°　C．26°　D．40°

【答案】 B　∵$\sin(-50°)<0$，$\cos 130°=-\cos 50°<0$，∴点 $P(\sin(-50°)$，$\cos 130°)$在第三象限.

又∵$0°<\alpha<90°$，∴$0°<5\alpha<450°$.

又∵点 P 的坐标可化为$(\cos 220°$，$\sin 220°)$，

∴$5\alpha=220°$，∴$\alpha=44°$，故选 B.

4．(2015·黑龙江哈尔滨一模，7)若 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是方程 $4x^2+2mx+m=0$ 的两根，则 m 的值为(　　)

A．$1+\sqrt{5}$　B．$1-\sqrt{5}$

C．$1\pm\sqrt{5}$　D．$-1-\sqrt{5}$

【答案】 B　由题意知，$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{m}{2}$,

$\sin\theta\cos\theta=\frac{m}{4}$.

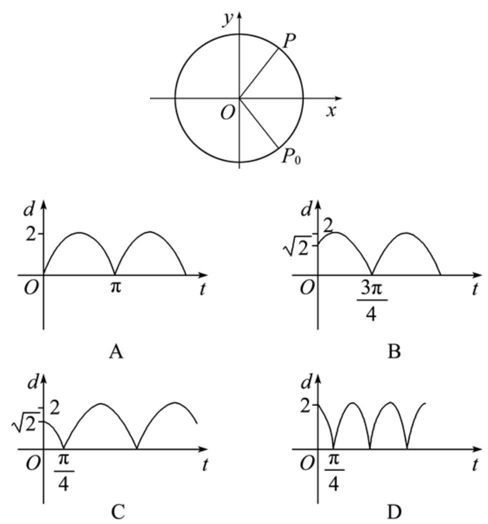
$\because(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，

$\therefore\frac{m^2}{4}=1+\frac{m}{2}$，解得 $m=1\pm\sqrt{5}$.

又 $\Delta=4m^2-16m\geqslant0$，

$\therefore m\leqslant0$ 或 $m\geqslant4$，$\therefore m=1-\sqrt{5}$.

5．(2015·江西南昌质检，7)如图所示，质点 P 在半径为 2 的圆周上逆时针运动，其初始位置为 $P_0(\sqrt{2},-\sqrt{2})$，角速度为 1，那么点 P 到 x 轴的距离 d 关于时间 t 的函数图象大致为(　　)



【答案】　C　$\because P_0(\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\therefore\angle P_0Ox=-\frac{\pi}{4}$.

$\because$角速度为 1，$\therefore$按逆时针旋转时间 t 后，得$\angle POP_0=t$，$\therefore\angle POx=t-\frac{\pi}{4}$.

由三角函数定义，知点 P 的纵坐标为 $2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$，

因此 $d=2\left|\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

令 $t=0$，则 $d=2\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{2}$，

当 $t=\frac{\pi}{4}$时，$d=0$，故选 C.

思路点拨：解题的关键是结合圆周运动，准确理解题意，根据三角函数定义，表示出 $d=2\left|\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

6．(2015·安徽安庆质检，11)已知 $\sin(3\pi-\alpha)=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，则 $\sin\alpha\cos\alpha=$________.

【解析】 由 $\sin(3\pi-\alpha)=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$，得 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，

$\therefore\tan\alpha=-2$，$\therefore\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{2}{5}$.

【答案】 $-\frac{2}{5}$

7．(2015·山西大同一模，14)已知角 α 的终边经过点 $P(-x，-6)$，且 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，则 x 的值为________.

【解析】 $\because\cos\alpha=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+(-6)^2}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+36}}=-\frac{5}{13}$，

$\therefore\begin{cases}x>0,\\ \frac{x^2}{x^2+36}=\frac{25}{169}\end{cases}$，解得 $x=\frac{5}{2}$.

【答案】 $\frac{5}{2}$

8．(2015·广东广州综合测试，12)设 α 为锐角，若 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=$________.

【解析】 由于 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，

因此 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)>0$，

所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$

$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{10}$

9．(2014·山东青岛二模，16，12分)设函数 $f(x)=-x^2+2x+a(0\leqslant x\leqslant 3)$的最大值为 m，最小值为 n，其中 $a\neq 0$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)求 m，n 的值(用 a 表示)；

(2)已知角 β 的顶点与平面直角坐标系 xOy 中的原点 O 重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边经过点 $A(m-1，n+3)$，求 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)$的值.

解：(1)由题意可得 $f(x)=-(x-1)^2+1+a$，而 $0\leqslant x\leqslant 3$，

所以 $m=f(1)=1+a$，$n=f(3)=a-3$.

(2)由题意知，角 β 终边经过点 $A(a，a)$，

当 $a>0$ 时，$r=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$，

则 $\sin\beta=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\beta=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\beta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\beta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

当 $a<0$ 时，$r=\sqrt{a^2+a^2}=-\sqrt{2}a$，

则 $\sin\beta=\frac{a}{-\sqrt{2}a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\beta=\frac{a}{-\sqrt{2}a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\beta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\beta\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

综上所述，$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$或$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

考点 17 三角函数的图象及其变换

第1步 试真题

A组 新题速递

1．(2015·山东，3，易)要得到函数 $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，只需将函数 $y=\sin 4x$ 的图象(　　)

A．向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位

B．向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位

C．向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位

D．向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位

【答案】　B　∵$y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$,

∴只需将 $y=\sin 4x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位，即可得 $y=\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

2．(2015·湖南，9，中)将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\phi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$个单位后得到函数 $g(x)$的图象．若对满足$|f(x_1)-g(x_2)|=2$ 的 x_1，x_2，有$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{3}$，则 $\varphi=$(　　)

A.$\frac{5\pi}{12}$　B.$\frac{\pi}{3}$　C.$\frac{\pi}{4}$　D.$\frac{\pi}{6}$

【答案】　D　由题意知，

$g(x)=\sin 2(x-\varphi)=\sin(2x-2\varphi)$.

若满足$|f(x_1)-g(x_2)|=2$，

不妨设 $f(x_1)=1$，$g(x_2)=-1$，

即 $2x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$；

$2x_2-2\varphi=-\frac{\pi}{2}+2m\pi$，$x_2=-\frac{\pi}{4}+\varphi+m\pi(k，m\in\mathbf{Z})$.

$|x_1-x_2|_{\min}=\left|\frac{\pi}{2}+(k-m)\pi-\varphi\right|_{\min}=\frac{\pi}{3}$，$\phi\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故选 D.

3．(2015·湖北，17，11 分，中)某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，|\phi|<\frac{\pi}{2}\right)$在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

(1)请将上表数据补充完整，并直接写出函数 $f(x)$的解析式；

(2)将 $y=f(x)$图象上所有点向左平行移动 $\theta(\theta>0)$个单位长度，得到 $y=g(x)$的图象．若 $y=g(x)$图象的一个对称中心为$\left(\frac{5\pi}{12}，0\right)$，求 θ 的最小值．

解：(1)根据表中已知数据，解得 $A=5$，$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$.数据补全如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5	0	-5	0

函数解析式为 $f(x)=5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由(1)知，$f(x)=5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，得 $g(x)=5\sin\left(2x+2\theta-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $y=\sin x$ 的对称中心为$(k\pi，0)$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以令 $2x+2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta$，$k\in\mathbf{Z}$.

由于函数 $y=g(x)$的图象关于点$\left(\frac{5\pi}{12}，0\right)$成中心对称，令$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta=\frac{5\pi}{12}$，解得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.由 $\theta>0$ 可知，当 $k=1$ 时，θ取得最小值$\frac{\pi}{6}$.

B 组　经典回顾

1．(2014·四川，3，易)为了得到函数 $y=\sin(2x+1)$的图象，只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点(　　)

A．向左平行移动$\frac{1}{2}$个单位长度

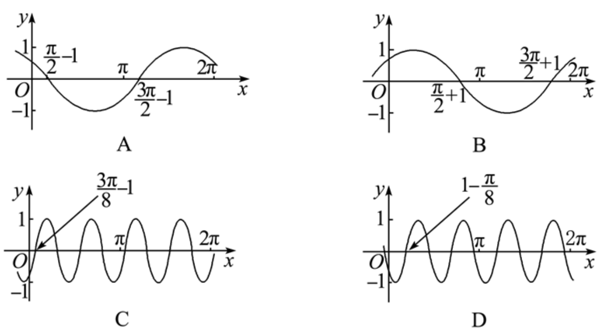
B．向右平行移动$\frac{1}{2}$个单位长度

C．向左平行移动 1 个单位长度

D．向右平行移动 1 个单位长度

【答案】 A　$y=\sin(2x+1)=\sin\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]$，故只需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上所有的点向左平行移动$\frac{1}{2}$个单位长度即可得到 $y=\sin(2x+1)$的图象．

2．(2012·浙江，4，易)把函数 $y=\cos 2x+1$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)，然后向左平移 1 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，得到的图象是(　　)



【答案】 A　把函数 $y=\cos 2x+1$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变)得 $y_1=\cos x+1$；向左平移 1 个单位长度得 $y_2=\cos(x+1)+1$；再向下平移 1 个单位长度得 $y_3=\cos(x+1)$．令 $x=0$，得 $y_3>0$.令 $x=\frac{\pi}{2}-1$，得 $y_3=0$.观察图象知，A 项正确．

3．(2013·山东，5，中)将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$的图象沿 x 轴向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位后，得到一个偶函数的图象，则 φ 的一个可能取值为(　　)

A.$\frac{3\pi}{4}$　B.$\frac{\pi}{4}$

C．0　D．$-\frac{\pi}{4}$

【答案】 B　由题意得 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\varphi\right]$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$为偶函数，

$\therefore \frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore \phi=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

令 $k=0$，得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，故选 B.

方法点拨：$f(x)=\sin(x+\varphi)$是偶函数⇒$\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$；

$f(x)=\sin(x+\varphi)$是奇函数⇒$\varphi=k\pi$；

$f(x)=\cos(x+\varphi)$是偶函数⇒$\varphi=k\pi$；

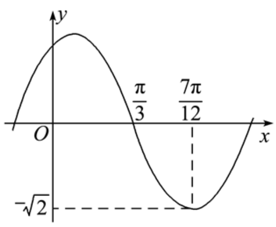
$f(x)=\cos(x+\varphi)$是奇函数⇒$\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

4．(2014·江苏，5，易)已知函数 $y=\cos x$ 与 $y=\sin(2x+\varphi)(0\leqslant\varphi<\pi)$，它们的图象有一个横坐标为$\frac{\pi}{3}$的交点，则 φ 的值是________.

【解析】 由题意知 $\cos\frac{\pi}{3}=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$，即 $\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\frac{1}{2}$，所以$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$或$\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$或 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.因为 $0\leqslant\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

【答案】 $\frac{\pi}{6}$

5．(2011·江苏，9，中)函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A，\omega，\varphi$ 为常数，$A>0，\omega>0)$的部分图象如图所示，则 $f(0)$的值是________.



【解析】 由题图可知 $A=\sqrt{2}$，$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，$\therefore T=\pi$.

又$\frac{2\pi}{\omega}=T$，$\therefore\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

根据函数图象可得 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\varphi=k\pi-\frac{2}{3}\pi(k\in\mathbf{Z})$.

取 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore f(0)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

6．(2014·山东，16，12 分，中)已知向量 $\boldsymbol{a}=(m，\cos 2x)$，$\boldsymbol{b}=(\sin 2x，n)$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，且 $y=f(x)$ 的图象过点$\left(\frac{\pi}{12}，\sqrt{3}\right)$和点$\left(\frac{2\pi}{3}，-2\right)$.

(1)求 m，n 的值；

(2)将 $y=f(x)$的图象向左平移 $\varphi(0<\varphi<\pi)$个单位后得到函数 $y=g(x)$的图象，若 $y=g(x)$图象上各最高点到点(0，3)的距离的最小值为 1，求 $y=g(x)$的单调递增区间.

解：(1)由题意知 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m\sin 2x+n\cos 2x$.

因为 $y=f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{12}，\sqrt{3}\right)$和$\left(\frac{2\pi}{3}，-2\right)$，

所以$\begin{cases}\sqrt{3}=m\sin\frac{\pi}{6}+n\cos\frac{\pi}{6}，\\ -2=m\sin\frac{4\pi}{3}+n\cos\frac{4\pi}{3}，\end{cases}$

即$\begin{cases}\sqrt{3}=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n，\\ -2=-\frac{\sqrt{3}}{2}m-\frac{1}{2}n，\end{cases}$

解得 $m=\sqrt{3}$，$n=1$.

(2)由(1)知 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由题意知 $g(x)=f(x+\varphi)=2\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)$.

设 $y=g(x)$的图象上符合题意的最高点为$(x_0，2)$．

由题意知 $x_0^2+1=1$，所以 $x_0=0$，

即到点(0，3)的距离为 1 的最高点为(0，2)．

将其代入 $y=g(x)$得 $\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

因此 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos 2x$.

由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 得 $k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $y=g(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

第 2 步 提能力

考向 1　利用三角函数图象求解析式

1．用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$在一个周期内的简图

用五点法画 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0，A>0)$在一个周期内的简图时，要找五个特征点．如下表所示：

x	$-\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}-\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}-\frac{\phi}{\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}-\frac{\phi}{\omega}$
$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=A\sin(\omega x+\varphi)$	0	A	0	$-A$	0

注意

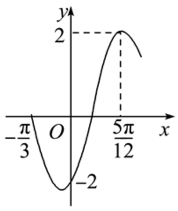
(1)画函数的图象时，首先要确定函数的定义域．

(2)对于周期函数，应先求出其周期，画图象时只要画出一个周期的图象，就可根据周期性画出整个函数图象．

2．$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，x\in[0，+\infty))$的物理意义

$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，x\in[0，+\infty))$表示一个振动量时，$A$ 叫作振幅，$T=\frac{2\pi}{\omega}$叫作周期，$f=\frac{1}{T}$叫作频率，$\omega x+\varphi$ 叫作相位，ϕ叫作初相，ω叫作角速度.

典型例题 1　(1)(2013·四川，5)函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则 ω，φ 的值分别是(　　)



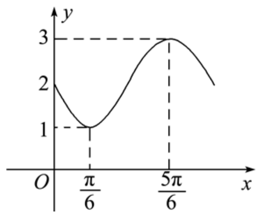
A．2，$-\frac{\pi}{3}$

B．2，$-\frac{\pi}{6}$

C．4，$-\frac{\pi}{6}$

D．4，$\frac{\pi}{3}$

(2)(2015·山东莱芜质检，12)如图是函数 $y=f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+2(A>0,\ \omega>0,\ |\phi|<\pi)$的图象的一部分，则函数 $f(x)$的解析式为__________________.



【解析】 (1)由 $\frac{3}{4}T=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}$得 $T=\pi$，

$\therefore\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，即 $\omega=2$.

又图象过点$\left(\frac{5\pi}{12},2\right)$，则 $2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=2$，

$\therefore 2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

(2)由图象知，$A=\frac{3-1}{2}=1$，$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$，则 $T=\frac{4\pi}{3}$，$\omega=\frac{3}{2}$，由$\frac{5\pi}{6}\times\frac{3}{2}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.又$|\varphi|<\pi$，$\therefore\varphi=-\frac{3\pi}{4}$.

$\therefore f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)+2$.

【答案】 (1)A (2)$f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{3\pi}{4}\right)+2$

【点拨】 解题(1)的关键是求 φ，把点的坐标代入解析式求出即可，注意 φ 本身的取值范围;解题(2)时注意求解 A 的方法，即 A 为函数最大值与最小值差的一半．

方法总结 已知图象求解析式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\ \omega>0)$的方法

(1)求 A，B，已知函数的最大值 M 和最小值 m，则 $A=\dfrac{M-m}{2}$，$B=\dfrac{M+m}{2}$.

(2)求 ω，已知函数的周期 T，则 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.

(3)求 φ，常用方法有：

①代入法：把图象上的一个已知点代入(此时，A，ω，B 已知)，或代入图象与直线 $y=b$ 的交点求解(此时要注意交点在上升区间还是下降区间).

②五点法：确定 φ 值时，往往以寻找“五点法”中的第一个零点$\left(-\dfrac{\varphi}{\omega},0\right)$作为突破口，具体如下：

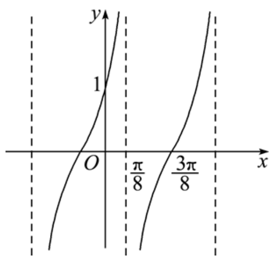
“第一点”(即图象上升时与 x 轴的交点中距原点最近的交点)为 $\omega x+\varphi=0$；“第二点”(即图象的“峰点”)为 $\omega x+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$；“第三点”(即图象下降时与 x 轴的交点)为 $\omega x+\varphi=\pi$；“第四点”(即图象的“谷点”)为 $\omega x+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$；“第五点”为 $\omega x+\varphi=2\pi$.

注意

在求 φ 时要注意已知中所给的 φ 的范围．

变式训练 (2011·辽宁，12)已知函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=f(x)$的部分图象如图，则

$f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=(\quad)$



A．$2+\sqrt{3}$ B.$\sqrt{3}$ C.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ D．$2-\sqrt{3}$

【答案】 B 由图象可知，$T=2\left(\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\ \omega=2$，

$\therefore 2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$， $\therefore\ \phi=\frac{\pi}{4}$.

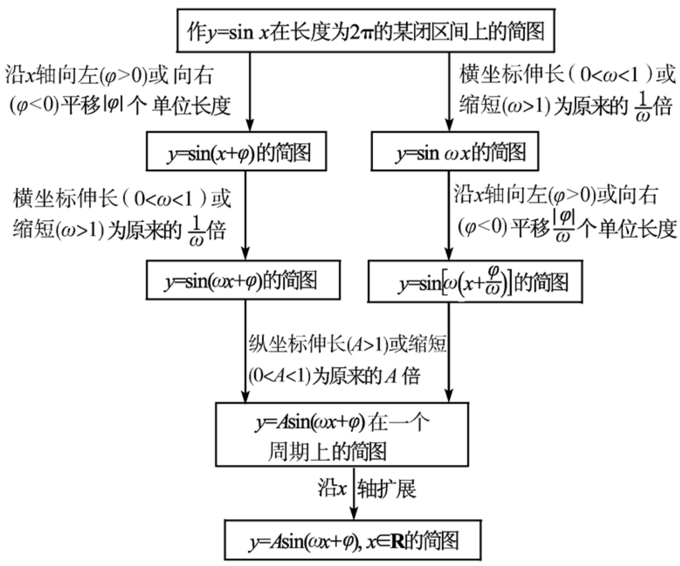
又 $f(0)=1$， $\therefore A\tan\frac{\pi}{4}=1$，

$\therefore A=1$， $\therefore f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{24}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故选 B.

考向 2　三角函数的图象变换及其应用

由函数 $y=\sin x$ 的图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0)$的图象的步骤



注意

A 所起的作用是图象上每个点的横坐标不变，纵坐标变化为原来的 A 倍，简称为振幅变换；ω 所起的作用是图象上的每个点的纵坐标不变，横坐标变化为原来的$\frac{1}{\omega}$倍，简称为周期变换；φ 所起的作用是将函数图象左右平移$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$个单位，简称为相位变换．

典型例题 2 (1)(2014·浙江，4)为了得到函数 $y=\sin 3x+\cos 3x$ 的图象，可以将函数 $y=\sqrt{2}\cos 3x$ 的图

象(　　)

A．向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位　B．向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位

C．向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位　D．向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位

(2)(2014·安徽，11)若将函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向右平移$\varphi$个单位，所得图象关于$y$轴对称，则$\varphi$的最小正值是________．

【解析】　(1)$y=\sin 3x+\cos 3x=\sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$，故只需将$y=\sqrt{2}\cos 3x$向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位．

(2)把函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向右平移$\varphi$个单位，得到解析式

$g(x)=\sin\left[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$.

∵$g(x)$是偶函数，

∴$-2\varphi+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

∴$\varphi=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当$k=-1$时，φ的最小正值为$\frac{3\pi}{8}$.

【答案】　(1)C　(2)$\frac{3\pi}{8}$

【点拨】　解题(1)的关键是将函数化为$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的形式，注意平移变换的原则；解题(2)的关键是根据平移规律，求出平移后的解析式，利用所得函数为偶函数求解．

方法总结　关于三角函数的图象变换的方法

(1)平移变换

①沿x轴平移：由$y=f(x)$变为$y=f(x+\varphi)$时，“左加右减”，即$\varphi>0$，左移；$\varphi<0$，右移．

②沿y轴平移：由$y=f(x)$变为$y=f(x)+k$时，“上加下减”，即$k>0$，上移；$k<0$，下移．

(2)伸缩变换

①沿x轴伸缩：由$y=f(x)$变为$y=f(\omega x)$时，点的纵坐标不变，横坐标变为原来的$\frac{1}{|\omega|}$倍．

②沿y轴伸缩：由$y=f(x)$变为$y=Af(x)$时，点的横坐标不变，纵坐标变为原来的$|A|$倍．

变式训练 (2013·湖北，4)将函数 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x(x\in\mathbf{R})$的图象向左平移 $m(m>0)$个单位长度后，所得到的图象关于 y 轴对称，则 m 的最小值是(　　)

A.$\frac{\pi}{12}$　B.$\frac{\pi}{6}$　C.$\frac{\pi}{3}$　D.$\frac{5\pi}{6}$

【答案】　B　因为 $y=f(x)=\sqrt{3}\cos x+\sin x=$

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，向左平移 $m(m>0)$个单位长度后得 $f(x+m)=2\sin\left(x+m+\frac{\pi}{3}\right)$，图象关于 y 轴对称，

令 $x=0$，得$\left|2\sin\left(m+\frac{\pi}{3}\right)\right|=2$，

从而 $m+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$，故 $m=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $m=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $m>0$，所以 $m_{\min}=\frac{\pi}{6}$.

第 3 步 | 过模拟

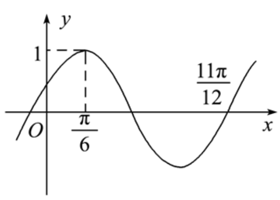
1．(2015·江西九江质检，5)把函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩小到原来的一半，纵坐标保持不变，再把所得函数图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，得到的函数图象的解析式是(　　)

A．$y=\cos 2x$　B．$y=-\sin 2x$

C．$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　D．$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

【答案】　A　由 $y=\sin x$ 图象上所有点的横坐标缩小到原来的一半，纵坐标保持不变，所得图象的解析式为 $y=\sin 2x$，再向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位得 $y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，即 $y=\cos 2x$.

2.(2015·湖南长沙联考，5)函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\ \omega>0,\ |\phi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，则将 $y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位后，得到的函数图象的解析式为(　　)



A．$y=\sin 2x$　B．$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C．$y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　D．$y=\cos 2x$

【答案】　B　由图象知，$A=1$，$\frac{3}{4}T=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{9}{12}\pi=\frac{3}{4}\pi$，

$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=2$.

$\therefore 2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \phi=\frac{\pi}{6}$.

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore f(x)$的图象向右移$\frac{\pi}{6}$个单位得$g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

3．(2015·湖北武汉一模，7)将函数$f(x)=\sin\ \omega x$(其中$\omega>0$)的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度，所得图象经过点$\left(\frac{3\pi}{4}，0\right)$，则$\omega$的最小值是(　　)

A.$\frac{1}{3}$　B．1　C.$\frac{5}{3}$　D．2

【答案】　D　函数$f(x)=\sin\ \omega x$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度得函数$f(x)=\sin\ \omega\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象.

$\because$由题意得$\sin\ \omega\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0$，

$\therefore \frac{\omega\pi}{2}=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore \omega=2k(k\in\mathbf{Z})$．又$\because \omega>0$，

$\therefore \omega$的最小值为2，故选D.

4．(2014·河南郑州二模，5)函数$f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图象与$x$轴交点的横坐标构成一个公差为$\frac{\pi}{2}$的等差数列，要得到函数$g(x)=A\cos\ \omega x$的图象，只需将$f(x)$的图象(　　)

A．向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位　B．向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位

C．向左平移$\frac{2\pi}{3}$个单位　D．向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位

【答案】　A　∵$f(x)$的图象与 x 轴交点的横坐标构成一个公差为$\frac{\pi}{2}$的等差数列，∴$f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，∴ $\omega=2$，

∴$f(x)=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

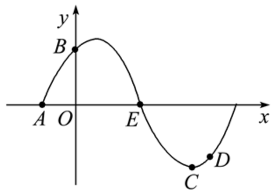
又∵$A\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$

$=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=A\cos 2x$，

∴只需将 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，即得 $g(x)$的图象．

点拨: 解答本题的关键是根据题意求出周期 T，注意 $y=\sin\ \omega x$ 左右平移 φ 个单位时，得到 $y=\sin\ \omega(x\pm\varphi)$，而不是 $y=\sin(\omega x\pm\varphi)$.

5．(2015·山西太原一模，7)已知 A，B，C，D 是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$一个周期内的图象上的四个点，如图所示，$A\left(-\frac{\pi}{6}，0\right)$，$B$ 为 y 轴上的点，C 为图象上的最低点，E 为该函数图象的一个对称中心，B 与 D 关于点 E 对称，$\overrightarrow{CD}$在 x 轴上的投影为$\frac{\pi}{12}$，则 ω，φ 的值为(　　)

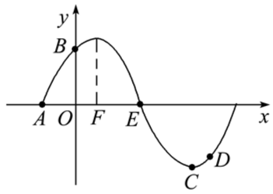


A．$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$　B．$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$

C．$\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$　D．$\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$

【答案】　A　由 E 为该函数图象的一个对称中心，B 与 D 关于点 E 对称，$\overrightarrow{CD}$在 x 轴上的投影为$\frac{\pi}{12}$，知 $OF=\frac{\pi}{12}$.又 $A\left(-\frac{\pi}{6}，0\right)$，所以 $AF=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{4}$，所以 $\omega=2$.同时函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$图象可以看作是由

$y=\sin\ \omega x$ 的图象向左平移得到，故可知$\frac{\phi}{\omega}=\frac{\phi}{2}=\frac{\pi}{6}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

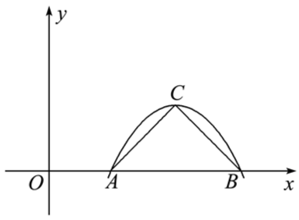


6．(2015·江苏徐州模拟，8)将函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3\omega}$个单位，得到函数 $y=g(x)$的图象，若 $y=g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上为增函数，则 ω 的最大值为________.

【解析】 $g(x)=2\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{3\omega}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\ \omega x$，因为 $y=g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上为增函数，所以$\frac{2\pi}{\omega}\times\frac{1}{4}\geqslant\frac{\pi}{4}$，即 $\omega\leqslant2$，所以 ω 的最大值为 2.

【答案】 2

7．(2015·福建三明一模，13)已知函数 $f(x)=M\cos(\omega x+\varphi)(M>0，\omega>0，0<\phi<\pi)$为奇函数，该函数的部分图象如图所示，$AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle C=90°$，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)$的值为________.



【解析】 依题意知，$\triangle ABC$ 是直角边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的等腰直角三角形，因此其边 AB 上的高是$\frac{1}{2}$，函数 $f(x)$的最小正周期是 2，故 $M=\frac{1}{2}$，$\frac{2\pi}{\omega}=2$，$\omega=\pi$，$f(x)=\frac{1}{2}\cos(\pi x+\varphi)$．

又函数 $f(x)$是奇函数，于是有 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.由 $0<\varphi<\pi$，得 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，

故 $f(x)=-\frac{1}{2}\sin\ \pi x$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}$.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

8．(2015·山东临沂一模，16，12 分)已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega x-1+2\sqrt{3}\cos\omega x\sin\omega x(0<\omega<1)$，直线 $x=\frac{\pi}{3}$是 $f(x)$图象的一条对称轴．

(1)试求 ω 的值；

(2)已知函数 $y=g(x)$的图象是由 $y=f(x)$图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，然后再向左平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度得到的，若 $g\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\sin\alpha$ 的值．

解：$f(x)=2\cos^2\omega x-1+2\sqrt{3}\cos\omega x\sin\omega x=\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)由于直线 $x=\frac{\pi}{3}$是函数 $f(x)=$

$2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$图象的一条对称轴，

$\therefore\sin\left(\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$.

$\therefore\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\omega=\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}(k\in\mathbf{Z})$．

又 $0<\omega<1$，$\therefore-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{3}$.

又$\because k\in\mathbf{Z}$，从而 $k=0$，$\therefore\omega=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

由题意可得

$g(x)=2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$，

即 $g(x)=2\cos\frac{1}{2}x$.

$\because g\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{6}{5}$，

$\therefore \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$.

又 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore \frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，

$\therefore \sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$

$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}$

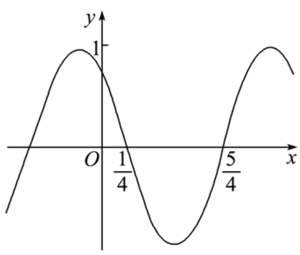
$=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

考点18 三角函数的性质及其应用

第1步 试真题

A组 新题速递

1．(2015·课标Ⅰ，8，中)函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为(　　)



A. $\left(k\pi-\frac{1}{4},\ k\pi+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

B. $\left(2k\pi-\frac{1}{4},\ 2k\pi+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

C.$\left(k-\frac{1}{4},\ k+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

D.$\left(2k-\frac{1}{4},\ 2k+\frac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

【答案】 D 由图象可知，$T=2\times\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right)=2$，

$\therefore\ \omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$，即$f(x)=\cos(\pi x+\varphi)$．由“五点法”作图可知，$\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，$\therefore\ \phi=\frac{\pi}{4}$.

即$f(x)=\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$.

由$2k\pi<\pi x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，得

$2k-\frac{1}{4}<x<2k+\frac{3}{4}(k\in\mathbf{Z})$，即$f(x)$的单调递减区间为$\left(2k-\frac{1}{4},\ 2k+\frac{3}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

2．(2015·安徽，10，难)已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\ \omega,\ \phi$均为正的常数)的最小正周期为π，当$x=\frac{2\pi}{3}$时，函数$f(x)$取得最小值，则下列结论正确的是(　　)

A．$f(2)<f(-2)<f(0)$　B．$f(0)<f(2)<f(-2)$

C．$f(-2)<f(0)<f(2)$　D．$f(2)<f(0)<f(-2)$

【答案】 A $\because T=\pi$，$\therefore\ \omega=2$.

$\therefore 2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得φ的一个正值为$\frac{\pi}{6}$.

$\therefore y=A\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

由函数图象及2，-2，0与最近的最高值的距离，距离越大值越小，可判断$f(2)<f(-2)<f(0)$.

3．(2015·浙江，11，中)函数$f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$的最小正周期是________，单调递减区间是________.

【解析】 $\because f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$，

$\therefore f(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+1$

$=\frac{1}{2}(\sin 2x-\cos 2x)+\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}$.

∴最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3}{2}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴$k\pi+\frac{3}{8}\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7}{8}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

∴单调递减区间为

$\left[k\pi+\frac{3}{8}\pi，k\pi+\frac{7}{8}\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

【答案】 π $\left[k\pi+\frac{3}{8}\pi，k\pi+\frac{7}{8}\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$

4．(2015·北京，15，13 分，中)已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期；

(2)求 $f(x)$在区间$[-\pi，0]$上的最小值.

解：(1)因为 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cos x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $f(x)$的最小正周期为 2π.

(2)因为 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$，

所以 $-\frac{3\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$.

当 $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{3\pi}{4}$时，$f(x)$取得最小值．

所以 $f(x)$在区间$[-\pi，0]$上的最小值为 $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5．(2015·山东，16，12 分，中)设 $f(x)=\sin x\cos x-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)在锐角△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.若 $f\left(\frac{A}{2}\right)=0$，$a=1$，求△$ABC$ 面积的最大值.

解：(1)由题意知 $f(x)=\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

$=\frac{\sin 2x}{2}-\frac{1-\sin 2x}{2}=\sin 2x-\frac{1}{2}$.

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$；

单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{3\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)由 $f\left(\frac{A}{2}\right)=\sin A-\frac{1}{2}=0$，得

$\sin A=\frac{1}{2}$，

由题意知 A 为锐角，所以 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

可得 $1+\sqrt{3}bc=b^2+c^2\geqslant 2bc$，

即 $bc\leqslant 2+\sqrt{3}$，且当 $b=c$ 时等号成立.

因此 $\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

所以△ABC 面积的最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

B 组　经典回顾

1．(2014·陕西，2，易)函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是(　　)

A.$\frac{\pi}{2}$　B．π　C．2π　D．4π

【答案】　B　由周期公式知 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，可知选 B.

2．(2013·**北京**，3，**易**)“$\varphi=\pi$”是“曲线 $y=\sin(2x+\varphi)$过坐标原点”的(　　)

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

【答案】　A　当 $\varphi=\pi$ 时，$y=\sin(2x+\pi)=-\sin 2x$，此时曲线过坐标原点；但曲线 $y=\sin(2x+\phi)$过坐标原点时，$\phi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

∴“$\phi=\pi$”是“曲线 $y=\sin(2x+\varphi)$过坐标原点”的充分而不必要条件，故选 A.

3．(2011·**湖北**，3，**易**)已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，若 $f(x)\geqslant 1$，则 x 的取值范围为(　　)

A.$\left\{x\middle|k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

B.$\left\{x\middle|2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

C.$\left\{x\middle|k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

D.$\left\{x\middle|k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$

【答案】　B　由 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$

$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant 1$，得 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，化简得 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$.

4．(2014·**湖南**，9，**中**)已知函数 $f(x)=\sin(x-\varphi)$，且 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}f(x)\mathrm{d}x=0$，则函数 $f(x)$的图象的一条对称轴是(　　)

A．$x=\frac{5\pi}{6}$　B．$x=\frac{7\pi}{12}$

C．$x=\frac{\pi}{3}$　D．$x=\frac{\pi}{6}$

【答案】　A　由题意知 ***Error!***$\frac{2\pi}{3}{}_0=0$，

故 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\varphi\right)=\cos\ \phi$.

不妨令$\frac{2\pi}{3}-\varphi=\varphi$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的对称轴为 $x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

故 $x=\frac{5\pi}{6}$是 $f(x)$的图象的一条对称轴.

5．(2014·辽宁，9，中)将函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度，所得图象对应的函数(　　)

A．在区间$\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12}\right]$上单调递减

B．在区间$\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{7\pi}{12}\right]$上单调递增

C．在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$上单调递减

D．在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

【答案】 B　$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度得

$y=3\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$

$=3\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

则$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

∴函数在$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \frac{7\pi}{12}+k\pi\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上单调递增.

同理，令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

可得函数在$\left[\frac{7\pi}{12}+k\pi,\ \frac{13\pi}{12}+k\pi\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上单调递减．故选 B.

6．(2011·**课标全国，11，中**)设函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\ |\phi|<\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期为π，且$f(-x)=f(x)$，则(　　)

A．$f(x)$在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$单调递减

B．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$单调递减

C．$f(x)$在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$单调递增

D．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$单调递增

【答案】　A　$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\phi+\frac{\pi}{4}\right)$

∵周期$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，∴$\omega=2$.

又$f(-x)=f(x)$，即$f(x)$为偶函数，

∴$\phi+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，即$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，∴$\phi=\frac{\pi}{4}$，

∴$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，

∴$f(x)$在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，故选 A.

7．(2014·**湖北，17，12 分，中**)某实验室一天的温度(单位：℃)随时间t(单位：h)的变化近似满足函

数关系：

$$f(t)=10-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}t-\sin\frac{\pi}{12}t，t\in[0，24).$$

(1)求实验室这一天的最大温差；

(2)若要求实验室温度不高于 11 ℃，则在哪段时间实验室需要降温？

解：(1)因为 $f(t)=$

$10-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{12}t+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}t\right)$

$=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$，

又 $0\leqslant t<24$，所以$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{3}$，

$-1\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1.$

当 $t=2$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)=1$；

当 $t=14$ 时，$\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)=-1.$

于是 $f(t)$在$[0，24)$上取得最大值 12，取得最小值 8.

故实验室这一天最高温度为 12℃，最低温度为 8℃，最大温差为 4℃.

(2)依题意，当 $f(t)>11$ 时实验室需要降温．

由(1)得 $f(t)=10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)$，

故有 $10-2\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)>11$，

即 $\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}.$

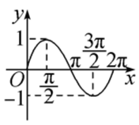
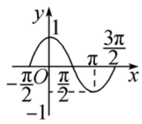
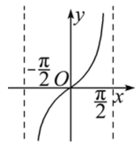
又 $0\leqslant t<24$，因此$\frac{7\pi}{6}<\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{3}<\frac{11\pi}{6}$，即 $10<t<18.$

在 10 时至 18 时实验室需要降温.．

第 2 步 | 提能力

考向 1　三角函数的单调性

三角函数的单调性

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
单调性	在$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\right)$ ***Error!***($k\in\mathbf{Z}$)上递增；在$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$($k\in\mathbf{Z}$)上递减	在$[(2k-1)\pi，2k\pi]$($k\in\mathbf{Z}$)上递增；在$[2k\pi，(2k+1)\pi]$($k\in\mathbf{Z}$)上递减	在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，***Error!***($k\in\mathbf{Z}$)上递增

注意

正切函数 $y=\tan x$ 在定义域上不是单调函数，但存在单调区间，即$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 为其单调递增区间．

典型例题 1 (1)(2012·课标全国，9)已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$上单调递减，则 ω 的取值范围是(　　)

A.$\left[\frac{1}{2}，\frac{5}{4}\right]$　B.$\left[\frac{1}{2}，\frac{3}{4}\right]$

C.$\left(0，\frac{1}{2}\right]$　D．(0，2)

(2)(2014·福建，16，13 分)已知函数 $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}$.

①若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $f(\alpha)$的值；

②求函数 $f(x)$的最小正周期及单调递增区间．

【思路导引】 (1)先求出$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调减区间，根据$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$是单调区间的子集求解；(2)第①问先根据条件得出$\cos\alpha$的值，再代入题干函数解析式求出$f(\alpha)$的值；第②问先利用三角函数降幂公式将$f(x)$转化为$A\sin(\omega x+\varphi)$的形式，再用三角函数的性质求解．

【解析】 (1)由$\frac{\pi}{2}<x<\pi$，$\omega>0$得，$\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\omega\pi+\frac{\pi}{4}$.又$y=\sin x$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上递减，所以

$$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\geqslant\frac{\pi}{2},\\ \omega\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2},\end{cases}$$

解得$\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$，故选A.

(2)①因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以$f(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

②因为$f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}=\sin x\cos x+\cos^2x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，所以$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

得$k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

方法总结 三角函数的单调性问题的常见类型及解题策略

(1)已知三角函数解析式求单调区间

①求函数的单调区间应遵循简单化原则：将解析式先化简，并注意复合函数单调性规律“同增异减”；

②求形如$y=A\sin(\omega x+\varphi)$或$y=A\cos(\omega x+\varphi)$(其中，$\omega>0$)的单调区间时，要视“$\omega x+\varphi$”为一个整体，通过解不等式求解．但如果$\omega<0$，那么一定先借助诱导公式将$\omega$化为正数，防止把单调性弄错．

(2)已知三角函数的单调区间求参数，先求出函数的单调区间，然后利用集合间的关系求解．

变式训练 (2013·安徽，16，12分)已知函数$f(x)=4\cos\ \omega x\cdot\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$的最小正周期为π.

(1)求ω的值；

(2)讨论$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调性.

解：(1)$f(x)=4\cos\ \omega x\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\ \omega x\cos\ \omega x+2\sqrt{2}\cos^2\omega x$

$=\sqrt{2}(\sin 2\omega x+\cos 2\omega x)+\sqrt{2}$

$=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$.

因为$f(x)$的最小正周期为π，且$\omega>0$，

所以$\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，故$\omega=1$.

(2)由(1)知，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$.

若$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$.

当$\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}$时，$f(x)$单调递增；

当$\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$，即$\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$单调递减.

综上可知，$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{8}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减.

考向2　三角函数的值域及最值

三角函数的最值情况

三角函数	最大值	最小值
$y=\sin x$	当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$时，$y_{max}=1$	当$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$时，$y_{min}=-1$
$y=\cos x$	当$x=2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$时，$y_{max}=1$	当$x=\pi+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$时，$y_{min}=-1$

$y=\tan x$	$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$，无最大值	$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$，无最小值

典型例题2 (1)(2014·课标Ⅱ，14)函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)-2\sin\varphi\cos x$ 的最大值为________.

(2)(2014·天津，15，13分)已知函数 $f(x)=\cos x\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{4}$，$x\in\mathbf{R}$.

①求 $f(x)$的最小正周期；

②求 $f(x)$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值.

【解析】 (1)因为 $f(x)=\sin(x+\varphi)-2\sin\varphi\cos x=\sin x\cdot\cos\varphi-\cos x\sin\varphi=\sin(x-\varphi)$，$-1\leqslant\sin(x-\varphi)\leqslant1$，所以 $f(x)$的最大值为 1.

(2)①由已知，有

$$f(x)=\cos x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x$$
$$=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right),$$

$\therefore f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

②$\because x\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$，$\therefore 2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

当 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$，

即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ 时，$f(x)$取最小值 $-\frac{1}{2}$.

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，即 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$时，$f(x)$取最大值$\frac{1}{4}$.

∴函数 $f(x)$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$\frac{1}{4}$，最小值为 $-\frac{1}{2}$.

【点拨】 解题(1)的关键是将函数式化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的形式再求最大值；解题(2)第①问时注意首先通过三角恒等变换将函数式化为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的形式，再求周期；解第②问时易忽视函数定义域而将最值求错．

方法总结 求三角函数的值域(最值)的常见类型及方法

(1)形如 $y=a\sin x+b\cos x+c$ 的三角函数化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的形式，再求最值(值域)；

(2)形如 $y=a\sin^2x+b\sin x+c$ 的三角函数，可先设 $\sin x=t$，化为关于 t 的二次函数求值域(最值)；

(3)形如 $y=a\sin x\cos x+b(\sin x\pm\cos x)+c$ 的三角函数，可先设 $t=\sin x\pm\cos x$，化为关于 t 的二次函数求值域(最值).

变式训练 (2013·山东，17，12 分)设函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x(\omega>0)$，且 $y=f(x)$图象的一个对称中心到最近的对称轴的距离为$\frac{\pi}{4}$.

(1)求 ω 的值；

(2)求 $f(x)$在区间$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

解：(1)$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin^2\omega x-\sin\omega x\cos\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos 2\omega x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\omega x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\omega x-\frac{1}{2}\sin 2\omega x$

$=-\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$.

因为函数 $f(x)$图象的一个对称中心到最近的对称轴的距离为$\frac{\pi}{4}$，且 $\omega>0$，

所以$\frac{2\pi}{2\omega}=4\times\frac{\pi}{4}$，因此 $\omega=1$.

(2)由(1)知 $f(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

当$\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$时，$\frac{5\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{8\pi}{3}$，

所以$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，

因此$-1\leqslant f(x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故$f(x)$在区间$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值分别为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-1$.

考向3　三角函数的奇偶性、周期性、对称性

正弦函数、余弦函数、正切函数的奇偶性、周期性、对称性

<table>
<tr><td colspan="2">函数</td><td>$y=\sin x$</td><td>$y=\cos x$</td><td>$y=\tan x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">奇偶性</td><td>奇函数</td><td>偶函数</td><td>奇函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">对称性</td><td>对称中心</td><td>$(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$</td><td>$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$</td><td>$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$</td></tr>
<tr><td>对称轴</td><td>$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$</td><td>$x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$</td><td>无对称轴</td></tr>
<tr><td colspan="2">最小正周期</td><td>2π</td><td>2π</td><td>π</td></tr>
</table>

典型例题3 (1)(2013·浙江，4)已知函数$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ \varphi\in\mathbf{R})$，则“$f(x)$是奇函数”是“$\varphi=\frac{\pi}{2}$”的(　　)

A．充分不必要条件

B．必要不充分条件

C．充分必要条件

D．既不充分也不必要条件

(2)(2012·福建，8)函数$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象的一条对称轴是(　　)

A．$x=\frac{\pi}{4}$　B．$x=\frac{\pi}{2}$

C．$x=-\frac{\pi}{4}$　D．$x=-\frac{\pi}{2}$

(3)(2014·北京，14)设函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A,\ \omega,\ \varphi$是常数，$A>0,\ \omega>0)$．若$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

上具有单调性，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则$f(x)$的最小正周期为________.

【解析】 (1)$f(x)$是奇函数时，$\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$；$\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)=A\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=-A\sin\ \omega x$，为奇函数，所以“$f(x)$是奇函数”是“$\varphi=\frac{\pi}{2}$”的必要不充分条件. .

(2)方法一(图象特征)：∵正弦函数图象的对称轴过图象的最高点或最低点,故令$x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$，

$\therefore x=k\pi+\frac{3\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

取$k=-1$，则$x=-\frac{\pi}{4}$.

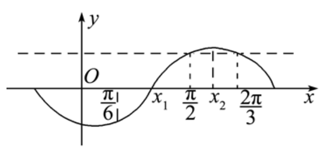
方法二(验证法)：$x=\frac{\pi}{4}$时，$y=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0$，不合题意，排除A；$x=\frac{\pi}{2}$时，$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，不合题意，排除B；$x=-\frac{\pi}{4}$时，$y=\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-1$，符合题意，C正确；而$x=-\frac{\pi}{2}$时，$y=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，不合题意，故D也不正确. .

(3)记$f(x)$的最小正周期为T.

由题意知$\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，

又$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，且$\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$.

可作出示意图如图所示(一种情况)：



$\therefore x_1=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$，

$x_2=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7\pi}{12}$，

$\therefore\frac{T}{4}=x_2-x_1=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore T=\pi$.

【答案】　(1)B　(2)C　(3)π

【点拨】　解题(1)时易忽视诱导公式而错选 D；解题(2)时注意整体思想的运用；解题(3)的关键是作出函数图象，根据图象上的关键点即可确定其单调性、周期．

方法总结　三角函数的奇偶数、周期性、对称性的处理方法

(1)若 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$为偶函数，则 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，同时当 $x=0$ 时，$f(x)$取得最大或最小值．若 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$为奇函数，则 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，同时当 $x=0$ 时，$f(x)=0$.

(2)求三角函数最小正周期，一般先通过恒等变形化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$的形式，再分别应用公式 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，$T=\frac{\pi}{|\omega|}$求解.

(3)对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，其对称轴一定经过图象的最高点或最低点，对称中心的横坐标一定是函数的零点，因此在判断直线 $x=x_0$ 或点$(x_0，0)$是否是函数的对称轴或对称中心时，可通过检验 $f(x_0)$的值进行判断.

变式训练　(1)(2014·上海，1)函数 $y=1-2\cos^2(2x)$的最小正周期是________.

(2)(2015·陕西宝鸡质检，13)函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\ \omega x(\omega>0)$相邻两对称轴之间的距离为 2，则 $\omega=$____.

【解析】　(1)因为 $y=1-2\cos^2(2x)$

$=-\cos 4x$，所以 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

(2)因为 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\ \omega x$

$=\frac{1}{2}\sin\ \omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\ \omega x+\sin\ \omega x=\frac{3}{2}\sin\ \omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\ \omega x=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，$f(x)$相邻两条对称轴之间的距离为 2，所以 $T=4$，所以$\frac{2\pi}{\omega}=4$，即 $\omega=\frac{\pi}{2}$.

【答案】　(1)$\frac{\pi}{2}$　(2)$\frac{\pi}{2}$

第 3 步　过模拟

1．(2015·山西忻州一模，6)函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)(0\leq x\leq 9)$的最大值与最小值之和为(　　)

A．$2-\sqrt{3}$　B．0

C．-1　D．$-1-\sqrt{3}$

【答案】　A　$\because 0\leqslant x\leqslant 9$，$\therefore 0\leqslant\frac{\pi}{6}x\leqslant\frac{3\pi}{2}$，

$\therefore -\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，

即$-\sqrt{3}\leqslant 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 2$.

∴函数的最大值与最小值之和为$2-\sqrt{3}$.

2．(2015·河南洛阳二模，6)已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称，且$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$，则$\omega$的最小值是(　　)

A．1　B．2　C．3　D．4

【答案】　B　设函数的周期为T，则T的最大值为$4\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，$\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\pi$，又$\omega>0$，所以$\omega\geqslant 2$.故选B.

3．(2015·福建漳州一模，6)若函数$y=2\cos\ \omega x$在区间$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减，且有最小值1，则$\omega$的值可以是(　　)

A．2　B.$\frac{1}{2}$　C．3　D.$\frac{1}{3}$

【答案】　B　由$y=2\cos\ \omega x$在$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上是递减的，且有最小值为1，则有$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$，即$2\cos\frac{2\pi}{3}\omega=1$，即$\cos\frac{2\pi}{3}\omega=\frac{1}{2}$.经验证，得出选项B符合.

4．(2014·黑龙江哈尔滨二模，8)若$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)+m$，对任意实数$t$都有$f\left(\frac{\pi}{8}+t\right)=f\left(\frac{\pi}{8}-t\right)$，且$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=-3$，则实数$m$的值等于(　　)

A．-1　B．± 5

C．-5或-1　D．5或1

【答案】　C　由$f\left(\frac{\pi}{8}+t\right)=f\left(\frac{\pi}{8}-t\right)$得函数的对称轴为$x=\frac{\pi}{8}$.故当$x=\frac{\pi}{8}$时，函数取得最大值或最小值，于是有$-2+m=-3$或$2+m=-3$，即$m=-1$或$-5$，故选C.

5．(2015·河北唐山质检，9)已知函数$f(x)=a\sin x-b\cos x$(a，b为常数，$a\neq 0$，$x\in\mathbf{R}$)在$x=\frac{3\pi}{4}$处取得最小值，则函数$y=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$是(　　)

A．偶函数且它的图象关于点(π，0)对称

B．偶函数且它的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2}，0\right)$对称

C．奇函数且它的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2}，0\right)$对称

D．奇函数且它的图象关于点(π，0)对称

【答案】　D　$f(x)=a\sin x-b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$.

$\because f(x)$在$x=\frac{3\pi}{4}$处取得最小值，

$\therefore \frac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\ \phi=2k\pi-\frac{5}{4}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x+2k\pi-\frac{5}{4}\pi\right)$

$=-\sqrt{a^2+b^2}\sin(-x)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin x$，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$是奇函数，且图象关于点($k\pi$，0)($k\in\mathbf{Z}$)对称，故选D.

6．(2014·广东湛江三模，14)已知函数$f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的图象上的两个相邻的最高点和最低点的横坐标之差为$\frac{\pi}{2}$，则函数在[0，$2\pi$]上的零点个数为________.

【解析】　由已知得 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的周期为π，

即$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，得 $\omega=2$，

$\therefore f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

当 $f(x)=0$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

则当 $x\in[0，2\pi]$时 $f(x)$有 4 个零点. .

【答案】　4

7．(2015·安徽合肥一模，13)设 $y=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0，\phi\in\left(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right)\right)$的最小正周期为 π，且其图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$对称，则在下面四个结论中：

①图象关于点$\left(\frac{\pi}{4}，0\right)$对称；②图象关于点$\left(\frac{\pi}{3}，0\right)$对称；

③在$\left[0，\frac{\pi}{6}\right]$上是增函数；④在$\left[-\frac{\pi}{6}，0\right]$上是增函数.

正确结论的编号为________.

【解析】　$\because T=\pi$，$\therefore\omega=2$，

$\therefore y=\sin(2x+\varphi)$.

$\because$图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$对称，

$\therefore\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又$\because\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x=\frac{\pi}{4}$时，$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，故①不正确;当 $x=\frac{\pi}{3}$时，$y=0$，故②正确;当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$不是增函数，即③不正确；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\subseteq\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，故④正确..

【答案】 ②④

8．(2015·湖南怀化一模，18，12 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos x，\sin x)$，向量 $\boldsymbol{b}=(\cos x，-\sin x)$，$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(1)求函数 $g(x)=f(x)+\sin 2x$ 的最小正周期和对称轴方程；

(2)若 x 是第一象限角且 $3f(x)=-2f'(x)$，求 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的值.

解：(1)∵$g(x)=f(x)+\sin 2x=\cos^2x-\sin^2x+\sin 2x$

$=\cos 2x+\sin 2x$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

∴函数 $g(x)=f(x)+\sin 2x$ 最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，

$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$.

∴函数 $g(x)=f(x)+\sin 2x$ 的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)由 $3f(x)=-2f'(x)$，得 $3\cos 2x=4\sin 2x$.

$3\cos^2x-3\sin^2x-8\sin x\cos x=0$.

$(3\cos x+\sin x)(\cos x-3\sin x)=0$.

又 x 是第一象限角，

∴$\cos x=3\sin x$，故 $\tan x=\frac{1}{3}$.

$\therefore \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2.$

9．(2015·山东枣庄质检，17，12分)已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-2\cos^2\frac{\omega x}{2}$，$x\in\mathbf{R}$(其中 $\omega>0$).

(1)求函数 $f(x)$的值域；

(2)若函数 $f(x)$的图象与直线 $y=-1$ 的两个相邻交点间的距离为$\frac{\pi}{2}$，求函数 $f(x)$的单调递增区间.

解：(1)$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\ \omega x+\frac{1}{2}\cos\ \omega x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\ \omega x-\frac{1}{2}\cos\ \omega x-(\cos\ \omega x+1)$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin \omega x-\frac{1}{2}\cos \omega x\right)-1$

$=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-1.$

由 $-1\leqslant\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

得 $-3\leqslant 2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-1\leqslant 1$，

所以函数 $f(x)$的值域为$[-3，1]$．

(2)由题设条件及三角函数的图象和性质可知，

$f(x)$的周期为π，所以$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，即 $\omega=2$.

所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$，

再由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$．

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{6}, k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$．

专题综合测试

(时间：90 分钟　分数：120 分)

一、选择题(共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分)

1．(2015·安徽蚌埠一模，4)若 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且角 α 的终边经过点 $P(x，2)$，则 P 点的横坐标 x 是(　　)

A．$2\sqrt{3}$　B．$\pm2\sqrt{3}$

C．$-2\sqrt{2}$　D．$-2\sqrt{3}$

【答案】　D　$r=\sqrt{x^2+2^2}$，由题意得$\frac{x}{\sqrt{x^2+2^2}}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore x=-2\sqrt{3}$.

2．(2014·课标Ⅰ，7)在函数①$y=\cos|2x|$，②$y=|\cos x|$，③$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，④$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$中，最小正周期为 π 的所有函数为(　　)

A．①②③　B．①③④

C．②④　D．①③

【答案】　A　①$y=\cos|2x|=\cos 2x$，最小正周期为 π；②由图象知 $y=|\cos x|$的最小正周期为 π；③$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；④$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$.因此选 A.

3．(2015·江西景德镇一模，5)使函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数的 φ 值可以是(　　)

A.$\frac{\pi}{4}$　B.$\frac{\pi}{2}$　C．π　D.$\frac{3\pi}{2}$

【答案】　C　要使函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，需 $\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.故选 C.

4．(2015·广东韶关调研，6)将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位，得到函数 $g(x)=\sin(2x+\varphi)$ $\left(0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$的图象，则 φ 等于(　　)

A.$\frac{\pi}{3}$　B.$\frac{\pi}{4}$　C.$\frac{\pi}{6}$　D.$\frac{\pi}{12}$

【答案】　C　由题意知 $g(x)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

又 $g(x)=\sin(2x+\varphi)\left(0<\phi<\frac{\pi}{2}\right)$,

∴ $\phi=\frac{\pi}{6}$.故选 C.

5．(2015·河北唐山一模，6)已知 $\alpha\in(0,\ \pi)$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\tan 2\alpha$ 等于(　　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.$\sqrt{13}$　D．$-\sqrt{13}$

【答案】　A　∵$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\alpha\in(0,\ \pi)$，

∴ $\alpha+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{12}$.

∴$\tan 2\alpha=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选 A.

6．(2014·河南洛阳联考，6)已知△ABC 为锐角三角形，则点 $P(\sin A-\cos B,\ \cos C-\sin B)$必位于直角坐标系中的(　　)

A．第一象限　B．第二象限

C．第三象限　D．第四象限

【答案】　D　∵A，B 是锐角△ABC 的两个内角，

∴$A+B>90°$，

∴$90°>A>90°-B>0$.

又 $y=\sin x$ 在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

∴$\sin A>\sin(90°-B)=\cos B$，

∴$\sin A-\cos B>0$.

同理可得，$\cos C-\sin B<0$，

∴点 P 在第四象限．故选 D.

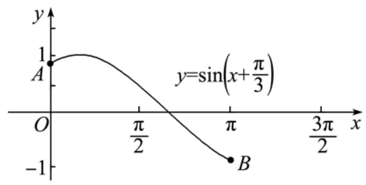
7．(2015·湖北黄冈一模，7)已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{m}{2}$在$[0,\ \pi]$上有两个零点，则实数 m 的取值

范围为(　　)

A．$[-\sqrt{3}，2]$　B．$[\sqrt{3}，2)$

C．$(\sqrt{3}，2]$　D．$[\sqrt{3}，2]$

【答案】　B　如图，画出 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$在$[0，\pi]$上的图象，当直线 $y=\frac{m}{2}$与其有两个交点时，$\frac{m}{2}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2}，1\right)$，所以 $m\in[\sqrt{3}，2)$.



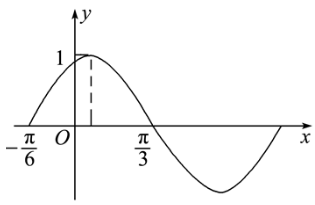
8．(2015·安徽安庆质检，7)已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0，0<\phi<\pi)$为偶函数，其图象与直线 $y=2$某两个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，若$|x_2-x_1|$的最小值为π，则该函数的一个递增区间可以是(　　)

A.$\left(-\frac{\pi}{2}，-\frac{\pi}{4}\right)$　B.$\left(-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{4}\right)$

C.$\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$　D.$\left(\frac{\pi}{4}，\frac{3\pi}{4}\right)$

【答案】　A　由函数为偶函数知 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 又因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $y=2\cos\ \omega x$.由题意知函数的最小正周期为π，故 $\omega=2$，所以 $y=2\cos 2x$，经验证知选项 A 满足条件．故选 A.

9．(2015·湖北十堰质检，8)函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(x\in\mathbf{R}，\omega>0，|\phi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，如果 x_1，$x_2\in\left(-\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{3}\right)$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x_1+x_2)$等于(　　)



A.$\frac{1}{2}$　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　D．1

【答案】　C　由题图知，$T=2\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，

$\therefore \omega=2$.

又函数的图象经过$\left(-\frac{\pi}{6}，0\right)$，

$\therefore 0=\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$.

$\because |\phi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \phi=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$在区间$\left(-\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{3}\right)$内的对称轴方程为$x=\frac{\pi}{12}$.

又$f(x_1)=f(x_2)$，

$\therefore x_1+x_2=2\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x_1+x_2)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 C.

10．(2014·山东济南三模，8)关于函数$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$与函数$g(x)=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$，下列说法正确的是(　　)

A．函数$f(x)$和$g(x)$的图象有一个交点在y轴上

B．函数$f(x)$和$g(x)$的图象在区间$(0，\pi)$内有 3 个交点

C．函数$f(x)$和$g(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称

D．函数$f(x)$和$g(x)$的图象关于原点$(0，0)$对称

【答案】　D　$g(x)=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$与$f(x)=$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象关于原点对称，故选 D.

二、填空题(共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

11．(2015·福建厦门一模，14)已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，对于任意 x 都有 $f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$等于________.

【解析】 $\because f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$，

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$的一条对称轴，

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pm 2$.

【答案】 2 或 - 2

12．(2015·山西大同一模，14)化简$\sqrt{1-2\sin(\pi+2)\cos(\pi+2)}=$________.

【解析】 $\sqrt{1-2\sin(\pi+2)\cos(\pi+2)}$

$=\sqrt{1-2\sin 2\cdot\cos 2}$

$=\sqrt{\sin^2 2-2\sin 2\cdot\cos 2+\cos^2 2}$

$=|\sin 2-\cos 2|$.

又$\because \frac{\pi}{2}<2<\pi$，$\therefore \sin 2>0$，$\cos 2<0$.

$\therefore |\sin 2-\cos 2|=\sin 2-\cos 2$.

【答案】 $\sin 2-\cos 2$

13．(2015·广西南宁一模，15)若函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，则 $\omega=$________.

【解析】 由题意知 $f(x)$的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{3}$，与它相邻的一个对称中心为原点，则 $f(x)$的周期 $T=\frac{4\pi}{3}$，从而$\omega=\frac{3}{2}$.

【答案】 $\frac{3}{2}$

14．(2014·湖南岳阳质检，14)已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位后与函数 $g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象重合，则正数 ω 的最小值为________.

【解析】 将 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位后，得到函数 $f_1(x)=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$的图象．

又 $f_1(x)=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$的图象与 $g(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象重合，故 $\omega x+\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\omega x+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.所以 $\omega=12k-\frac{1}{2}(k\in\mathbf{Z})$．又 $\omega>0$，故当 $k=1$ 时，ω取得最小值，为 $12-\frac{1}{2}=\frac{23}{2}$.

【答案】 $\frac{23}{2}$

思路点拨: 先求出 $f(x)$平移后的解析式 $f_1(x)$，然后 $f_1(x)$与 $g(x)$的图象重合，找出它们的相位之间的关系，进而求出 ω 的最小值．

三、解答题(共 4 小题，共 50 分)

15．(12 分)(2013·天津，15)已知函数 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+6\sin x\cos x-2\cos^2x+1$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期；

(2)求 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

解：(1)$f(x)=-\sin 2x-\cos 2x+3\sin 2x-\cos 2x=2\sin 2x-2\cos 2x$

$=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)由(1)知 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,

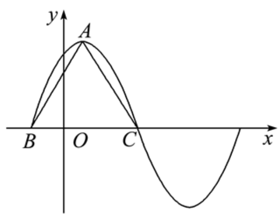
则 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$.

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上最大值为 $2\sqrt{2}$，最小值为 -2.

16．(12 分)(2012·四川，18)函数 $f(x)=6\cos^2\frac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-3(\omega>0)$ 在一个周期内的图象如图所示，A 为图象的最高点，B，C 为图象与 x 轴的交点，且△ABC 为正三角形.

(1)求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的值域；

(2)若 $f(x_0)=\frac{8\sqrt{3}}{5}$，且 $x_0\in\left(-\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)$，求 $f(x_0+1)$ 的值.



解：(1)由已知可得，$f(x)=3\cos\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x=2\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$.

易知正三角形 ABC 的高为 $2\sqrt{3}$，从而 $BC=4$.

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=4\times2=8$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=8$，$\omega=\frac{\pi}{4}$.

函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

(2)已知 $f(x_0)=\frac{8\sqrt{3}}{5}$,

由(1)得

$f(x_0)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{5}$,

即 $\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$.

由 $x_0\in\left(-\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)$,

知$\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$.

故 $f(x_0+1)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sqrt{3}\sin\left[\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{4}\right]$

$=2\sqrt{3}\left[\sin\left(\frac{\pi x_0}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\right)$

Error!

$=2\sqrt{3}\left(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7\sqrt{6}}{5}$.

17．(12 分)(2015·山西晋中二模，17)已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x-(\cos^2x-\sin^2x)$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)试说明函数 $f(x)$的图象是由函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换得到的；

(2)若函数 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)(x\in\mathbf{R})$，试写出函数 $g(x)$的单调区间.

解：(1)∵$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-(\cos^2x-\sin^2x)$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

∴$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$，

∴函数 $f(x)$的图象可由 $y=\sin x$ 的图象按如下方式变换得到：

①将函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象；

②将函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，得到函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象；

③将函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)，得到函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$的图象．

(2)由(1)知，$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$，

则 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin 2x(x\in\mathbf{R})$．

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$．

所以函数 $g(x)$的单调递增区间是$\left[k\pi-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$．

同理可得，函数 $g(x)$的单调递减区间是

$\left[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}\right](k\in\mathbf{Z})$．

18．(14 分)(2012·湖北，17)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x,\sin\omega x)$，$\boldsymbol{b}=(-\cos\omega x-\sin\omega x,2\sqrt{3}\cos\omega x)$，设函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda(x\in\mathbf{R})$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，其中 ω，λ 为常数，且 $\omega\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期;

(2)若 $y=f(x)$的图象经过点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$，求函数 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{3\pi}{5}\right]$上的取值范围.

解：(1)$f(x)=\sin^2\omega x-\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\lambda$

$=-\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x+\lambda$

$=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\lambda.$

由直线 $x=\pi$是 $y=f(x)$图象的一条对称轴，

可得 $\sin\left(2\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$，

所以 $2\omega\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\omega=\frac{k}{2}+\frac{1}{3}(k\in\mathbf{Z})$．

又 $\omega\in\left(\frac{1}{2}，1\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=1$，故 $\omega=\frac{5}{6}$.

所以函数 $f(x)$的最小正周期是$\frac{6\pi}{5}$.

(2)由 $y=f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{4}，0\right)$，得 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，

即 $\lambda=-2\sin\left(2\times\frac{5}{6}\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-2\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$，

故 $f(x)=2\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}$.

由 $0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{5}$，得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，

所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$，

得 $-1-\sqrt{2}\leqslant2\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}\leqslant2-\sqrt{2}$，

故函数 $f(x)$在区间$\left[0，\frac{3\pi}{5}\right]$上的取值范围为$[-1-\sqrt{2}，2-\sqrt{2}]$．