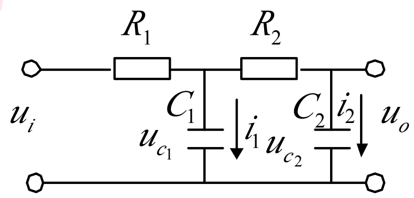
第一章　　控制系统的状态空间描述

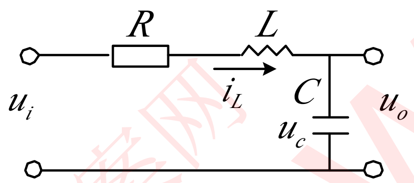
3-1-1　求图示网络的状态空间表达式，选取 u_c 和 i_L 为状态变量。

（1）



题 3-1-1 图 1

(2)



题 3-1-1 图 2

【解】:

(1)

设状态变量: $x_1 = u_{c1}$、 $x_2 = u_{c2}$

而

$$i_1 = C_1 \dot{u}_{c1} 、 \quad i_2 = C_2 \dot{u}_{c2}$$

根据基尔霍夫定律得:

$$u_i = [C_1 \dot{u}_{c1} + (\frac{u_{c1} - u_{c2}}{R_2})]R_1 + u_{c1}$$

$$u_{c1} = C_2 \dot{u}_{c2} R_2 + u_{c2}$$

整理得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$y = u_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2)

设状态变量: $x_1 = i_L$、 $x_2 = u_c$

而

$$i_L = C\dot{u}_c$$

根据基尔霍夫定律得：

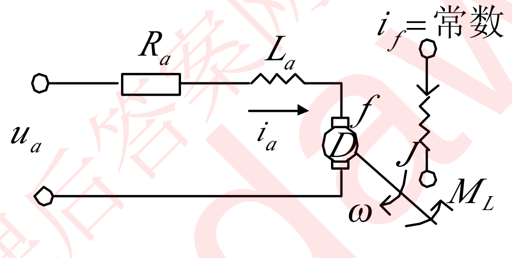
$$u_i = R \cdot i_L + L\dot{i}_L + u_c$$

整理得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$y = u_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

3-1-2　如图所示电枢电压控制的它励直流电动机，输入为电枢电压 u_a 输出为电动机角速度 ω，电动机轴上阻尼系数为 f，转动惯量 J，试列写状态方程和输出方程。



题 3-1-2 图

【解】：

设状态变量为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix}$$

其中 i_a 为流过电感上的电流，ω 电动机轴上的角速度。

电动机电枢回路的电压方程为：

$$u_a = L_a\dot{i}_a + R_a \cdot i_a + e_b$$

e_b 为电动机反电势。

电动机力矩平衡方程为

$$M_D = J\dot{\omega} + f\omega + M_L$$

由电磁力矩和反电势的关系，有

$$e_b = c_e\omega \text{，} \quad M_D = c_M i_a$$

式中 c_e 为电动机反电势系数，c_M 为电动机的转矩系数。

J 为电动机轴上粘性摩擦系数，f 电动机轴上等效转动惯量。

整理得

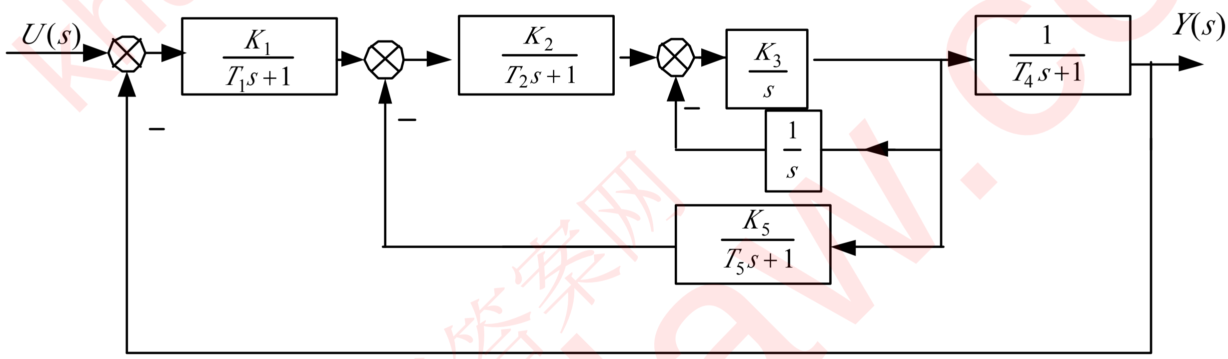
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{c_e}{L_a}\\ \dfrac{c_M}{J} & -\dfrac{f}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L_a} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_a\\ M_L\end{bmatrix}$$

$$y=\omega=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

(注：解是非唯一的)

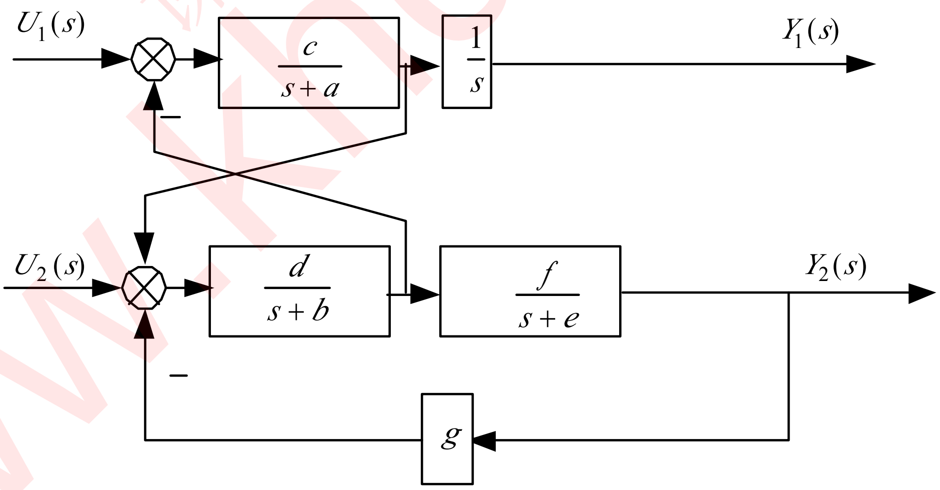
3-1-3　试求图示系统的模拟结构图，并建立状态空间表达式。

（1）



题 3-1-3 图 1

（2）

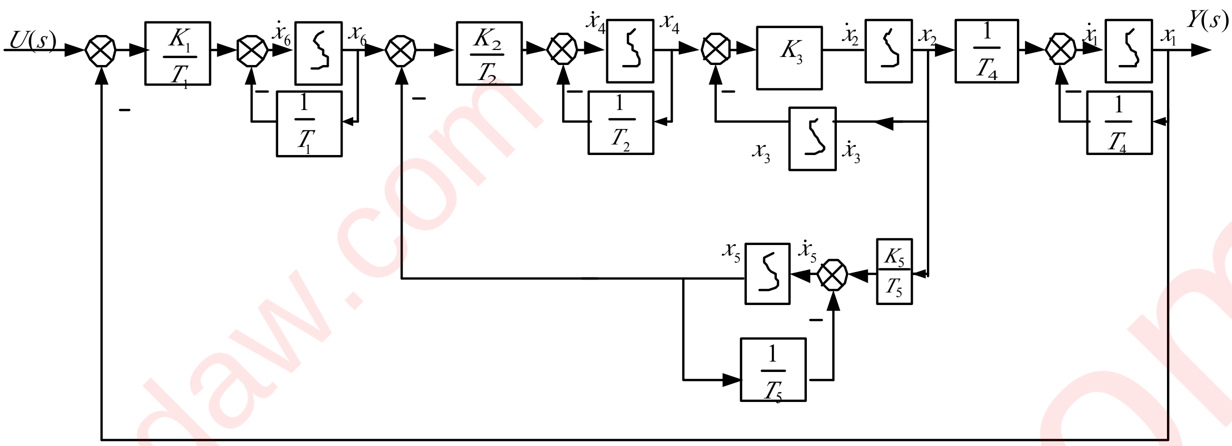


题 3-1-3 图 2

【解】:

(1)

如题 3-1-3 图 3 设状态变量



题 3-1-3 图 3

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T_4}x_1 + \frac{1}{T_4}x_2$$

$$\dot{x}_2 = K_3(x_4 - x_3)$$

$$\dot{x}_3 = x_2$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{1}{T_2}x_4 - \frac{K_2}{T_2}x_5 + \frac{K_2}{T_2}x_6$$

$$\dot{x}_5 = \frac{K_5}{T_5}x_2 - \frac{1}{T_5}x_5$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{1}{T_1}x_6 + \frac{K_1}{T_1}(u - x_1)$$

$$y = x_1$$

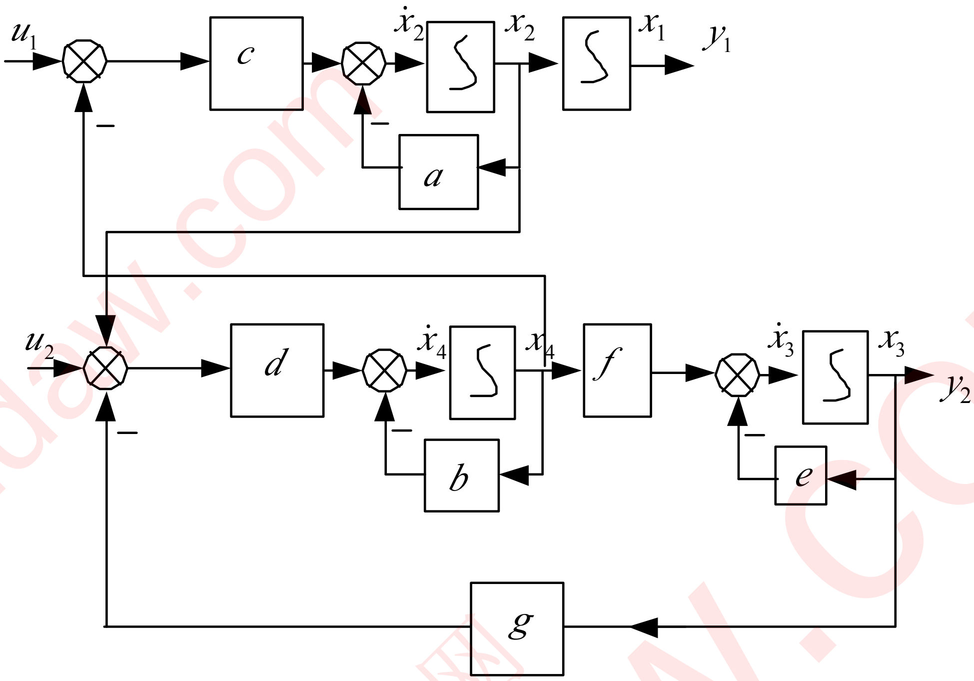
写成矩阵的形式得：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_4} & \frac{1}{T_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_2} & -\frac{K_2}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ 0 & \frac{K_5}{T_5} & 0 & 0 & -\frac{1}{T_5} & 0 \\ -\frac{K_1}{T_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_1}{T_1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

（2）

如图题 3-1-3 图 4 设状态变量



题 3-1-3 图 4

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 + c(u_1 - x_4)$$

$$\dot{x}_3 = -ex_3 + fx_4$$

$$\dot{x}_4 = -bx_4 + dx_2 - dgx_3 + du_2$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

$$y = x_1$$

写成矩阵的形式得：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & -c \\ 0 & 0 & -e & f \\ 0 & d & -dg & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

（注：此题解并非唯一的）

3-1-4　已知系统的微分方程，试将其转变成状态空间表达式。

(1)　$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} + 6y = 2u$

(2)　$\dddot{y} + 7\ddot{y} + 3y = \dot{u} + 2u$

(3)　$\dddot{y} + 5\ddot{y} + 4\dot{y} + 7y = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$

(4)　$y^{(4)} + 3\ddot{y} + 2y = -3\dot{u} + u$

【解】：

在零初始条件下，方程两边拉氏变换，得到传递函数，再根据传递函数求状态空间表达式。

此题多解，一般写成能控标准型、能观标准型或对角标准型，以下解法供参考。

（1）传递函数为：

$$G(s)=\frac{2}{s^3+2s^2+4s+6}$$

状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-4&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}2&0&0\end{bmatrix}x$$

（2）传递函数为：

$$G(s)=\frac{s+2}{s^3+7s^2+3}=\frac{s+2}{s^3+7s^2+0s+3}$$

状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&0&-7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}2&1&0\end{bmatrix}x$$

（3）传递函数为：

$$G(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^3+5s^2+4s+7}$$

状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-7&-4&-5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}2&3&1\end{bmatrix}x$$

（4）传递函数为：

$$G(s)=\frac{-3s+1}{s^4+3s^2+2}=\frac{-3s+1}{s^4+0s^3+3s^2+0s+2}$$

状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&0&-3&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1&-3&0&0\end{bmatrix}x$$

3-1-5　已知系统的传递函数，试建立其状态空间表达式，并画出结构图。

（1）$G(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s^3+6s^2+11s++6}$　（2）$G(s)=\dfrac{s^2+3s+1}{s^2+5s+6}$

（3）$G(s)=\dfrac{4}{s(s+1)^2(s+3)}$　（4）$G(s)=\dfrac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+3s+1}$

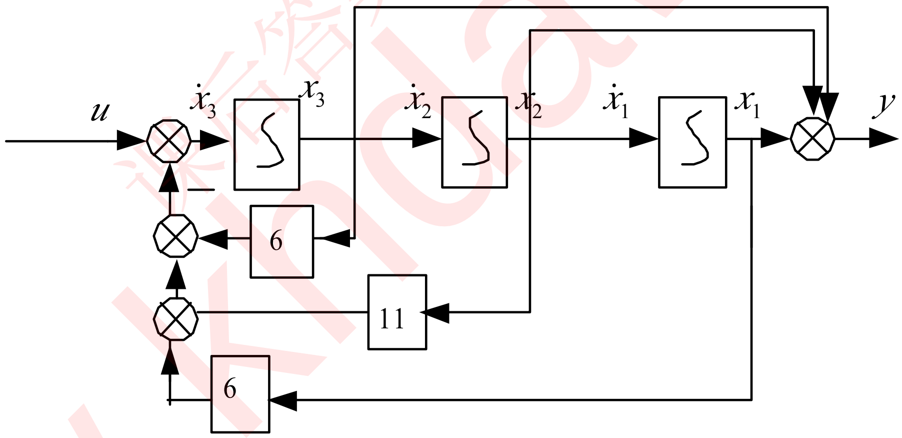
【解】：

此题多解，一般可以写成能控标准型、能观标准型或对角标准型，以下解法供参考。

（1）

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

结构图如图题 3-1-5 图 1 所示

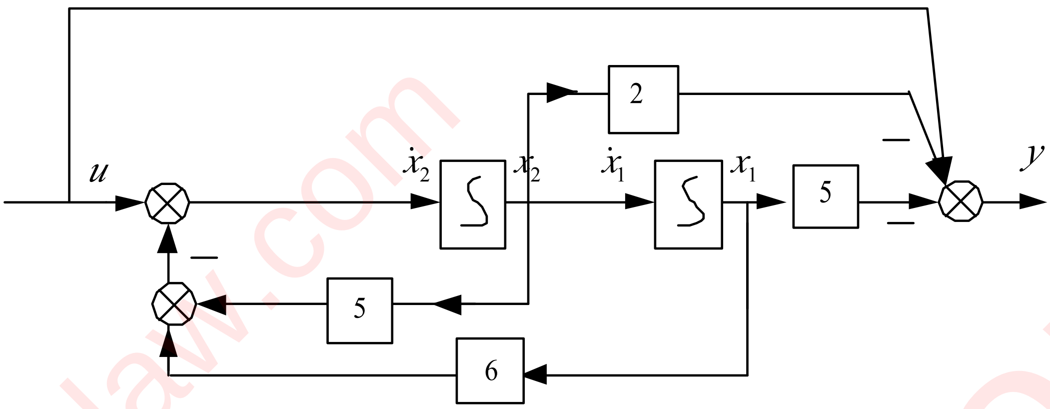


题 3-1-5 图 1

（2）$G(s)=\dfrac{s^2+3s+1}{s^2+5s+6}=\dfrac{s^2+5s+6-2s-5}{s^2+5s+6}=1-\dfrac{2s+5}{s^2+5s+6}$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=[-5\quad -2]+u$$

结构图如图题 3-1-5 图 2（a）所示



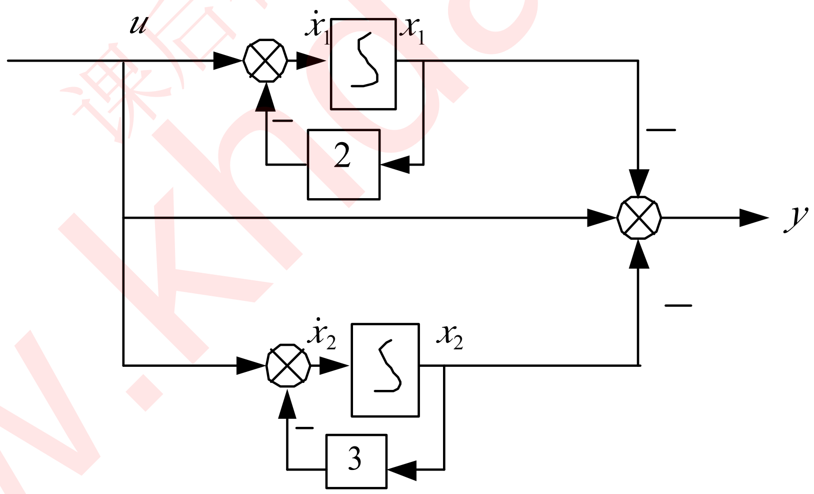
题 3-1-5 图 2(a)

或有

$$G(s)=\frac{s^2+3s+1}{s^2+5s+6}=1-\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}x+u$$

结构图如图题 3-1-5 图 2（b）所示



题 3-1-5 图 2(b)

（3）

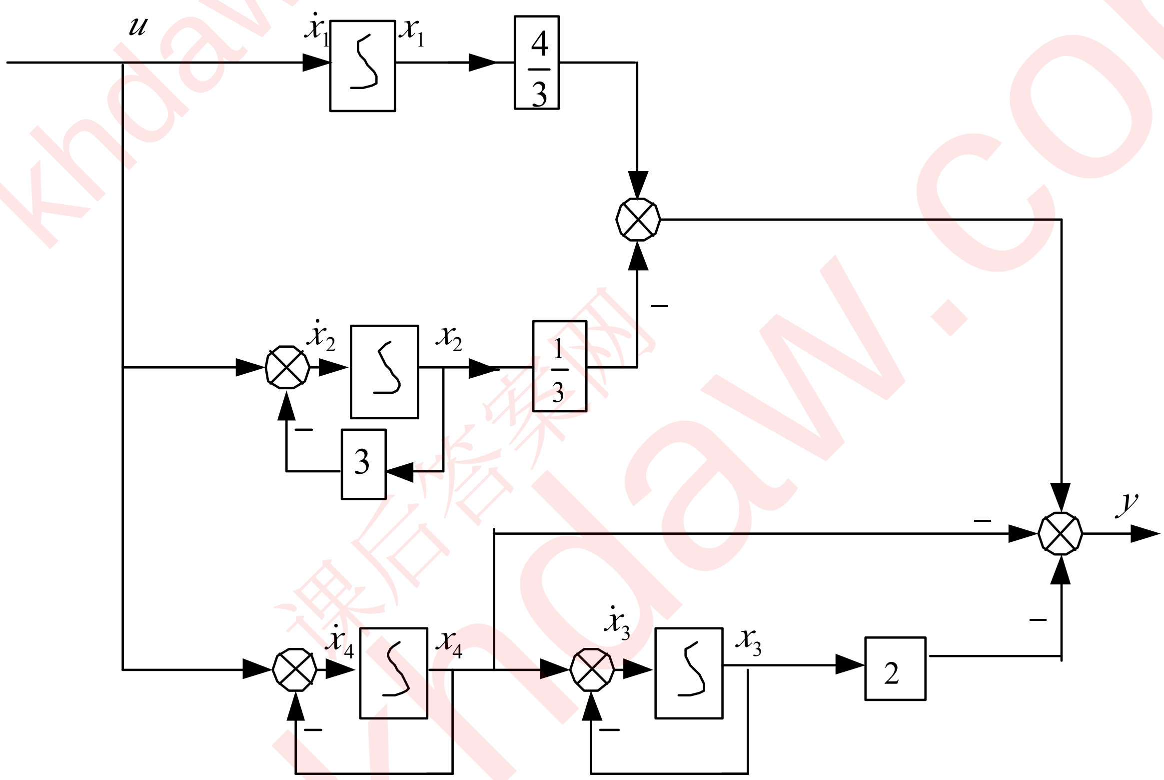
$$G(s)=\frac{4}{s(s+1)^2(s+3)}$$

$$G(s)=\frac{\frac{4}{3}}{s}+\frac{-\frac{1}{3}}{(s+3)}+\frac{-2}{(s+1)^2}+\frac{-1}{(s+1)}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-2&-1\end{bmatrix}x$$

结构图如图题 3-1-5 图 3 所示



题 3-1-5 图 3

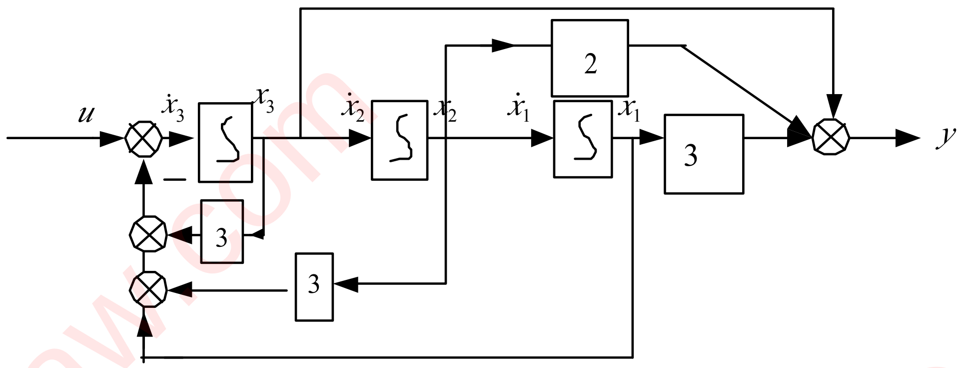
（4）

$$G(s)=\frac{s^2+2s+3}{s^3+3s^2+3s+1}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3&2&1\end{bmatrix}x$$

结构图如图题 3-1-5 图 4 所示



题 3-1-5 图 4

3-1-6 将下列状态方程化成对角标准型。

（1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$

（2）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2\\ -12 & -7 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}u$

（3）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$

【解】:

（1）

特征方程为：

$$D(\lambda)=\lambda^2+6\lambda+5=(\lambda+1)(\lambda+5)=0\text{。}$$

特征值为：

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-5$$

系统矩阵 A 为友矩阵，且特征值互异，因此可以化为对角标准型，其变换矩阵 P 为范德蒙矩阵。

变换阵：

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -5\end{bmatrix},P^{-1}=-0.25\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

线性变换后的状态方程为：

$$\dot{\bar{x}}=(P^{-1}AP)\bar{x}+(P^{-1}b)u=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0.25\\ -0.25\end{bmatrix}u$$

（2）

特征方程为：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3 & \lambda & -2 \\ 12 & 7 & \lambda+6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

特征值为：

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3 \text{。}$$

设变换阵：P= $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$

由 $(\lambda_i I - A)P_i = 0$ 得

当 $\lambda_1 = -1$ 时， $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ 12 & 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} = 0$ 取 $P_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_2 = -2$ 时， $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \\ 12 & 7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix} = 0$ 取 $P_2 = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ P_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

当 $\lambda_3 = -3$ 时， $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & -2 \\ 12 & 7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix} = 0$ 取 $P_3 = \begin{bmatrix} P_{13} \\ P_{23} \\ P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

变换阵：

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 4.5 & 2.5 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 2.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix}$$

线性变换后的状态方程为：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\bar{x} + \begin{bmatrix} 18.5 & 27 \\ -15 & -20 \\ 13.5 & 16 \end{bmatrix}u$$

（3）

特征方程为：

$$D(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0 \text{。}$$

特征值为：

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3 \text{。}$$

系统矩阵 A 为友矩阵，且特征值互异，因此可以化为对角标准型，其变换矩阵 P 为：

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

线性变换后的状态空间表达式为：

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}5.5\\ -7\\ 2.5\end{bmatrix}u$$

3-1-7　将下列状态方程化成约旦标准型。

（1）$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$

（2）$\dot{x}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 7\\ 5 & 3\end{bmatrix}u$

（3）$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$

【解】：

（1）

特征方程为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$$

特征值为：

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-3。$$

设变换阵：$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}$

由 $(\lambda_i I-A)P_i=0$ 得：

当 $\lambda_1=-1$ 时，$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}\\ P_{21}\end{bmatrix}=0$ 取 $P_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

当 $\lambda_2=-3$ 时，$\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{12}\\ P_{22}\end{bmatrix}=0$ 取 $P_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}$$

线性变换后的状态空间表达式为：

$$\dot{\bar{x}}=(P^{-1}AP)\bar{x}+(P^{-1}b)u=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0.5\\ -0.5\end{bmatrix}u$$

（2）

特征方程为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4 & -1 & 2\\ -1 & \lambda & -2\\ -1 & 1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)^2=0$$

特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=1$。

设变换阵：

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}$$

当 $\lambda_1=3$ 时，由 $(\lambda_1 I-A)P_1=0$ 得：$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}\\ P_{21}\\ P_{31}\end{bmatrix}=0$，取 $P_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

当 $\lambda_2=3$ 时，由 $(\lambda_2 I-A)P_2=-P_1$ 得：$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{12}\\ P_{22}\\ P_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$，取 $P_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

当 $\lambda_3=1$ 时，由 $(\lambda_3 I-A)P_3=0$ 得：$\begin{bmatrix}-3 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{13}\\ P_{23}\\ P_{33}\end{bmatrix}=0$，取 $P_3=\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

变换阵：

$$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\1&0&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&2\\1&1&-2\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

线性变换后的状态空间表达式为：

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}8&-1\\-5&2\\-3&4\end{bmatrix}u$$

（3）

特征方程为：

$$D(\lambda)=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0\text{ 。}$$

特征值为：

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2\text{ 。}$$

系统矩阵 A 为友矩阵，且特征值有重根，因此可以化为约当标准型，其变换矩阵 P 为：

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{bmatrix}=\left[P_1 \vdots \frac{dP_1}{d\lambda_1}\vdots P_3\right]$$

$$P_1=\begin{bmatrix}1\\\lambda_1\\\lambda_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\lambda_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\quad P_3=\begin{bmatrix}1\\\lambda_3\\\lambda_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$$

变换阵：

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&4\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-2&3&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

线性变换后的状态空间表达式为：

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}u$$

3-1-8　已知状态空间表达式，$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&-3&0\\0&1&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1&-1\\1&4\\2&-3\end{bmatrix}u$

（1）试用 $\tilde{x} = P^{-1}x$ 进行线性变换，变换矩阵 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 求变换后的状态空间表达式。

（2）试证明变换前后系统的特征值的不变性和传递函数矩阵的不变性。

【解】：

（1）

$$\tilde{x} = P^{-1}x \quad \Rightarrow \quad x = P\tilde{x}$$

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0.5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0.5 & -4 \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}u$$

（2）证明：

变换后的系统矩阵为 $\tilde{A} = P^{-1}AP$，输入矩阵为 $\tilde{B} = P^{-1}B$

特征值的不变性：

$$\left|sI - P^{-1}AP\right| = \left|sP^{-1}P - P^{-1}AP\right| = \left|P^{-1}\right|\left|sI - A\right|\left|P\right| = \left|sI - A\right|$$

传递函数矩阵的不变性：

$$G(s) = CP(sI - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B = CP(sP^{-1}P - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B$$
$$= CP[P^{-1}(sI - A)P]^{-1}P^{-1}B = CPP^{-1}(sI - A)^{-1}PP^{-1}B = C(sI - A)^{-1}B$$

验证：

变换前的特征方程为：

$$D_1(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4) = 0$$

变换后的特征方程为：

$$D_2(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4) = 0$$

$D_1(\lambda) = D_2(\lambda)$

所以变换前后系统的特征值是不变的。

3-1-9　已知两个子系统的传递函数矩阵分别为

$G_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$，$G_2(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}$，试求两子系统串联后和并联后的传递函数矩阵。

【解】:

（1） 串联

$G_1(s)$ 在前，$G_2(s)$ 在后时

$$G(s)=G_2(s)G_1(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{2s^2+6s+6}{s(s+1)(s+2)(s+3)}\\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$G_2(s)$ 在前，$G_1(s)$ 在后时

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)^2}\\ \frac{1}{s(s+1)} & 0\end{bmatrix}$$

（2） 并联

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1}\\ \frac{1}{s+1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2s+4}{(s+1)(s+3)} & \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

3-1-10 已知离散系统的差分方程为 $y(k+3)+3y(k+2)+5y(k+1)+y(k)=u(k+1)+2u(k)$，求系统的状态空间表达式，并画出系统结构图。

【解】:

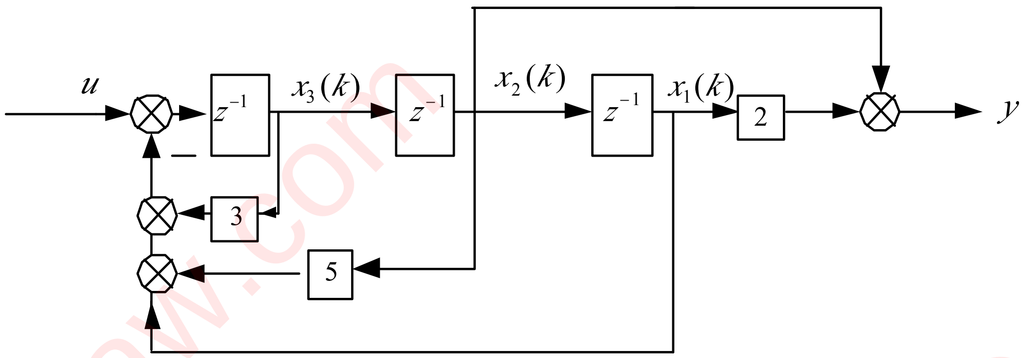
根据差分方程，在零初始条件下，方程两边 Z 变换，得到系统的脉冲传递函数为

$$G(z)=\frac{z+2}{z^3+3z^2+5z+1}$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -5 & -3\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

其结构图如图题 3-1-10 图所示：



题 3-1-10 图

3-1-11　已知离散系统的状态空间表达式为 $\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$，

$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$，求系统的脉冲传递函数。

【解】:

$$W(z) = C(zI - G)^{-1} H$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ -1 & z-3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{z^2 - 3z - 1} \begin{bmatrix} z-3 & 1 \\ 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z+1}{z^2 - 3z - 1}$$

也可以直接写出。

3-1-12　已知系统的脉冲传递函数，试求系统的状态空间表达式。

（1） $G(z) = \dfrac{2z^2 + z + 2}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6}$

（2） $G(z) = \dfrac{1}{z^3 + 4z^2 + 5z + 2}$

【解】:

此题多解，一般可以写成能控标准型、能观标准型或对角标准型，以下解法供参考。

（1）

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\end{bmatrix}x(k)$$

（2）

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -5 & -4\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

第二章　　状态空间表达式的解

3-2-1　试求下列矩阵 A 对应的状态转移矩阵 φ（t）。

（1）　$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$　（2）　$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

（3）　$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$　（4）　$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & -5 & 4\end{bmatrix}$

（5）　$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$　（6）　$A=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$

【解】:

（1）

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\{\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{0.5}{s}-\frac{0.5}{(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0.5-0.5e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}$$

（2）

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\{\begin{bmatrix}s & 1\\ -4 & s\end{bmatrix}^{-1}\}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s}{s^2+4} & -\frac{1}{s^2+4}\\ \frac{4}{s^2+4} & \frac{s}{s^2+4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2t & -0.5\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}$$

（3）

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\{\begin{bmatrix}s & -1\\ 1 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2}\\ -\frac{1}{(s+1)^2} & \frac{s}{(s+1)^2}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}te^{-t}+e^{-t} & te^{-t}\\ -te^{-t} & e^{-t}-te^{-t}\end{bmatrix}$$

（4）

特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$。

由习题 3-1-7(3)得将 A 阵化成约当标准型的变换阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&4\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&2&-1\\-2&3&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

线性变换后的系统矩阵为：

$$\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$e^{\tilde{A}t}=\begin{bmatrix}e^t&te^t&0\\0&e^t&0\\0&0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=e^{At}=Pe^{\tilde{A}t}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^t&te^t\\0&0&e^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-1\\-2&3&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}-2te^t&-2e^{2t}+3te^t+2e^t&e^{2t}-te^t-e^t\\2e^{2t}-2te^t-2e^t&-4e^{2t}+3te^t+5e^t&2e^{2t}-te^t-2e^t\\4e^{2t}-2te^t-4e^t&-8e^{2t}+3te^t+8e^t&4e^{2t}-te^t-3e^t\end{bmatrix}$$

（5）

为结构四重根的约旦标准型。

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$$

$$\Phi(t)=e^{At}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2!}t^2&\frac{1}{3!}t^3\\0&1&t&\frac{1}{2!}t^2\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&t&\frac{1}{2}t^2&\frac{1}{6}t^3\\0&1&t&\frac{1}{2}t^2\\0&0&1&t\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

（6）

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda$$

虽然特征值相同，但对应着两个约当块。

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}e^{A_1t}&0\\0&e^{A_2t}\end{bmatrix}$$

$$A_1=[\lambda]\ \Rightarrow\ e^{A_1t}=[e^{\lambda t}]$$

$$A_2=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix} \Rightarrow e^{A_2 t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t}\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

或 $\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\{\begin{bmatrix}s-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & s-\lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & s-\lambda & -1\\ 0 & 0 & 0 & s-\lambda\end{bmatrix}^{-1}\}$

$$=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{-1}{-s+\lambda} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{-s+\lambda} & \frac{1}{(-s+\lambda)^2} & \frac{-1}{(-s+\lambda)^3}\\ 0 & 0 & \frac{-1}{-s+\lambda} & \frac{1}{(-s+\lambda)^2}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{-s+\lambda}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t}\\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

3-2-2 已知系统的状态方程和初始条件

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}x,\quad x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

（1）用 laplace 法求状态转移矩阵；
（2）用化标准型法求状态转移矩阵；
（3）用化有限项法求状态转移矩阵；
（4）求齐次状态方程的解。

【解】：

（1）

$$\Phi(t)=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=L^{-1}\{\begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & -1 & s-2 \end{bmatrix}^{-1}\}$$

$$=L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{(s-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s-1)}\frac{1}{(s-2)} & \frac{1}{(s-2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & -e^t+e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

（2）

特征方程为：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

特征值为：

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2\text{。}$$

$$rank(\lambda_1 I-A)=rank\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}=n_1=1$$

$$rank(\lambda_1 I-A)^2=rank\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}=n_2=1$$

由于 $n_2=n_1=1$，所以 λ_1 对应的广义特征向量的阶数为 1。
求满足 $(\lambda_1 I-A)P_1=0$ 的解 P_1，得：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ P_{31} \end{bmatrix}=0\text{，}\quad P_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

再根据 $(\lambda_2 I-A)P_2=0$，且保证 P_1、P_2 线性无关，解得：

$$P_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

对于当 $\lambda_3=2$ 的特征向量，由 $(\lambda_3 I-A)P_3=0$ 容易求得：

$$P_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

所以变换阵为：

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & P_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

线性变换后的系统矩阵为：

$$\tilde{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$e^{\tilde{A}t}=\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0\\0 & e^t & 0\\0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=e^{At}=P\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0\\0 & e^t & 0\\0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}e^t & 0 & 0\\0 & e^t & 0\\0 & -e^t+e^{2t} & e^{2t}\end{bmatrix}$$

（3）

特征值为：

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2\text{。}$$

$$e^{\lambda_1 t}=a_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_1^2$$

$$te^{\lambda_1 t}=a_1+2a_2\lambda_1$$

$$e^{\lambda_3 t}=a_0+a_1\lambda_3+a_2\lambda_3^2$$

即

$$\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2\\0 & 1 & 2\lambda_1\\1 & \lambda_3 & \lambda_3^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\te^{\lambda_1 t}\\e^{\lambda_3 t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^t\\te^t\\e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\2 & 3 & -2\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\te^t\\e^{2t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2te^{t}+e^{2t} \\ 2e^{t}+3te^{t}-2e^{2t} \\ -e^{t}-te^{t}+e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=a_0I+a_1A+a_2A^2$$

$$=\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & -e^{t}+e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

(4)

$$x(t)=\Phi(t)x(0)=\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & -e^{t}+e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

3-2-3 试判断下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件，如果满足，试求对应的矩阵 A。

（1） $\Phi(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & \sin t \end{bmatrix}$ （2） $\Phi(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0.5(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

（3） $\Phi(t)=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & -2e^{-t}+2e^{-2t} \\ e^{-t}-e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$ （4） $\Phi(t)=\begin{bmatrix} 0.5e^{-t}+0.5e^{3t} & -0.25e^{-t}+0.25e^{3t} \\ -e^{-t}+e^{3t} & 0.5e^{-t}+0.5e^{3t} \end{bmatrix}$

【解】:

（1）

$$\because \Phi(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & \sin t \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\neq I$$

∴不满足状态转移矩阵的条件。

（2）

$$\because \Phi(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0.5(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

∴满足状态转移矩阵的条件。

由 $\dot{\Phi}(t)=A\Phi(t)$，得 $\dot{\Phi}(0)=A\Phi(0)=A$。

$$\therefore \dot{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}0 & e^{-2t}\\ 0 & -2e^{-2t}\end{bmatrix},\quad \Rightarrow\quad A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix}0 & e^{-2t}\\ 0 & -2e^{-2t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

（3）

$$\because \Phi(0)=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & -2e^{-t}+2e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}_{t=0}=I$$

∴满足状态转移矩阵的条件。

$$A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix}-2e^{-t}+2e^{-2t} & 2e^{-t}-4e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-t}-4e^{-2t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

（4）

$$\because \Phi(0)=\begin{bmatrix}0.5e^{-t}+0.5e^{3t} & -0.25e^{-t}+0.25e^{3t}\\ -e^{-t}+e^{3t} & 0.5e^{-t}+0.5e^{3t}\end{bmatrix}_{t=0}=I$$

∴满足状态转移矩阵的条件。

$$A=\dot{\Phi}(0)=\begin{bmatrix}-0.5e^{-t}+1.5e^{3t} & 0.25e^{-t}+0.75e^{3t}\\ e^{-t}+3e^{3t} & -0.5e^{-t}+1.5e^{3t}\end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

3-2-4　已知线性时变系统为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-2t & 1\\ 1 & -2t\end{bmatrix}x$，试求系统的状态转移矩阵。

【解】:

取 $A(t_1)=\begin{bmatrix}-2t_1 & 1\\ 1 & -2t_1\end{bmatrix}$，$A(t_2)=\begin{bmatrix}-2t_2 & 1\\ 1 & -2t_2\end{bmatrix}$，得：$A(t_1)*A(t_2)=A(t_2)*A(t_1)$

$$\Phi(t,t_0)=e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}=I+\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}-2\tau & 1\\ 1 & -2\tau\end{bmatrix}d\tau+\frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix}-2\tau & 1\\ 1 & -2\tau\end{bmatrix}^2 d\tau+\cdots$$

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}1+(t_0^2-t^2)+\frac{2}{3}(t^3-t_0^3)+\frac{1}{2}(t-t_0)+\cdots & t-t_0+t_0^2-t^2+\cdots\\ t-t_0+t_0^2-t^2+\cdots & 1+(t_0^2-t^2)+\frac{2}{3}(t^3-t_0^3)+\frac{1}{2}(t-t_0)+\cdots\end{bmatrix}$$

3-2-5　已知线性定常系统的状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$，初始条件为 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ 试求输入为单位阶跃函数时系统状态方程的解。

【解】:

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

$$\Phi(t)=L^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ -\dfrac{2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\Phi(t)x(0)-A^{-1}[I-\Phi(t)]B=\begin{bmatrix}0.5+0.5e^{-2t}\\ -e^{-2t}\end{bmatrix}$$

3-2-6 已知线性定常系统的状态空间表达式为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u$， $y=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x$，已知状态的初始条件为 $x(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$，输入量为 $u(t)=e^{-t}\quad(t\geq 0)$，试求系统的输出响应。

【解】:

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-5t} & \frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-5t}\\ -\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{5}{4}e^{-5t} & -\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{5}{4}e^{-5t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=c\Phi(t)x(0)+\int_0^t c\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-5t} & \frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-5t}\\ -\frac{5}{4}e^{-t}+\frac{5}{4}e^{-5t} & -\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{5}{4}e^{-5t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{4}e^{-(t-\tau)}-\frac{1}{4}e^{-5(t-\tau)} & \frac{1}{4}e^{-(t-\tau)}-\frac{1}{4}e^{-5(t-\tau)}\\ -\frac{5}{4}e^{-(t-\tau)}+\frac{5}{4}e^{-5(t-\tau)} & -\frac{1}{4}e^{-(t-\tau)}+\frac{5}{4}e^{-5(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}e^{-\tau}d\tau$$

$$=\left(-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{9}{4}e^{-5t}\right)+\int_0^t\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{2}e^{-(t-\tau)}-\frac{1}{2}e^{-5(t-\tau)}\\ -\frac{5}{2}e^{-(t-\tau)}+\frac{5}{2}e^{-5(t-\tau)}\end{bmatrix}e^{-\tau}d\tau$$

$$=\left(-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{9}{4}e^{-5t}\right)+\int_0^t(-\frac{5}{2}e^{-t}+\frac{9}{2}e^{-5t+4\tau})d\tau=-\frac{5}{2}te^{-t}+\frac{7}{8}e^{-t}+\frac{9}{8}e^{-5t}(t\geq 0)$$

3-2-7 线性定常系统的齐次方程为 $\dot{x}=Ax(t)$，已知当 $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$ 时，状态方程的解为

$x(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix}$；而当 $x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 时，状态方程的解为 $x(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$，试求：

(1) 系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$；

(2) 系统的系数矩阵 A。

【解】：

$$x(t)=\Phi(t)x(0)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{11}-2\phi_{12}=e^{-2t},\quad \phi_{21}-2\phi_{22}=-2e^{-2t}$$

$$\phi_{11}-\phi_{12}=e^{-t},\quad \phi_{21}-\phi_{22}=-e^{-t}$$

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$A=\dot{\Phi}(t)\big|_{t=0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

3-2-8 已知线性时变系统为 $\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}x,\quad x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，试求系统状态方程的解。

【解】：

对任意时间 t_1 和 t_2 有 $A(t_1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix},\quad A(t_2)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}$

得：$A(t_1)*A(t_2)\neq A(t_2)*A(t_1)$

所以有

$$\Phi(t,0)=I+\int_0^t A(\tau)d\tau+\int_0^t A(\tau_1)\int_0^{\tau_1} A(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0.5t^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & \frac{1}{6}t^3 \end{bmatrix}+\cdots$$

$$x(t)=\Phi(t,0)x(0)=(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&t\\0&0.5t^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}t^2\\0&\frac{1}{6}t^3\end{bmatrix}+\cdots)\times\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}1&t+\frac{1}{2}t^2\cdots\\0&1+0.5t^2+\frac{1}{6}t^3\cdots\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-t-\frac{1}{2}t^2\cdots\\-(1+0.5t^2+\frac{1}{6}t^3\cdots)\end{bmatrix}$$

3-2-9　已知线性定常离散系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(kT)\\u_2(kT)\end{bmatrix}$$

$$y(kT)=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\x_2(kT)\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$$

若 $u_1(kT)$ 与 $u_2(kT)$ 为同步采样时，且 $u_1(kT)$ 是来自斜坡函数 t 的采样，即 $u_1(t)=t$，$u_2(kT)$ 是来自指数函数 $u_2(t)=e^{-t}$ 的采样。试求系统的输出响应 y（KT）。

【解】：

方法一：

利用 Z 变换的方法求解：

$$G=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}$$

$$Z[u_1(t)]=Z(t)=\frac{Tz}{(z-1)^2}\quad,\quad Z[u_2(t)]=Z(e^{-t})=\frac{z}{(z-e^{-T})}$$

$$U(z)=\begin{bmatrix}\frac{Tz}{(z-1)^2}\\\frac{z}{(z-e^{-T})}\end{bmatrix}$$

$$X(z)=(zI-G)^{-1}zx(0)+(zI-G)^{-1}HU(z)$$

$$X(z)=\begin{bmatrix}z-0.5&-0.125\\-0.125&z-0.5\end{bmatrix}^{-1}z\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z-0.5&-0.125\\-0.125&z-0.5\end{bmatrix}^{-1}HU(z)$$

$$X(z)=\begin{bmatrix}\dfrac{32(2z-1)}{64z^2-64z+15} & \dfrac{8}{64z^2-64z+15}\\ \dfrac{8}{64z^2-64z+15} & \dfrac{32(2z-1)}{64z^2-64z+15}\end{bmatrix}z\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{32(2z-1)}{64z^2-64z+15} & \dfrac{8}{64z^2-64z+15}\\ \dfrac{8}{64z^2-64z+15} & \dfrac{32(2z-1)}{64z^2-64z+15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}U(z)$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{32z(2z-1)}{64z^2-64z+15} & \dfrac{8z}{64z^2-64z+15}\\ \dfrac{8z}{64z^2-64z+15} & \dfrac{32z(2z-1)}{64z^2-64z+15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{32(2z-1)}{64z^2-64z+15} & \dfrac{8}{64z^2-64z+15}\\ \dfrac{8}{64z^2-64z+15} & \dfrac{32(2z-1)}{64z^2-64z+15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{Tz}{(z-1)^2}\\ \dfrac{z}{(z-e^{-T})}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{-2z}{z-\frac{3}{8}}+\dfrac{z}{z-\frac{5}{8}}\\ \dfrac{2z}{z-\frac{3}{8}}+\dfrac{z}{z-\frac{5}{8}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{(z-0.5)}{(z-\frac{3}{8})(z-\frac{5}{8})}\dfrac{Tz}{(z-1)^2}+\dfrac{\frac{1}{8}}{(z-\frac{3}{8})(z-\frac{5}{8})}\dfrac{z}{(z-e^{-T})}\\ \dfrac{\frac{1}{8}}{(z-\frac{3}{8})(z-\frac{5}{8})}\dfrac{Tz}{(z-1)^2}+\dfrac{(z-0.5)}{(z-\frac{3}{8})(z-\frac{5}{8})}\dfrac{z}{(z-e^{-T})}\end{bmatrix}$$

=第一部分+第二部分

第二部分为：

$$\begin{bmatrix}\dfrac{32}{25}\dfrac{Tz}{z-\frac{3}{8}}+\dfrac{32}{9}\dfrac{Tz}{z-\frac{5}{8}}+\dfrac{32}{15}\dfrac{Tz}{(z-1)^2}-\dfrac{1088}{225}\dfrac{Tz}{z-1}\cdots\\ +\dfrac{0.5z}{(z-\frac{3}{8})(\frac{3}{8}-e^{-T})}+\dfrac{0.5z}{(z-\frac{5}{8})(\frac{5}{8}-e^{-T})}+\dfrac{z}{8(z-e^{-T})(\frac{3}{8}-e^{-T})(\frac{5}{8}-e^{-T})}\\ -\dfrac{32}{25}\dfrac{Tz}{z-\frac{3}{8}}+\dfrac{32}{9}\dfrac{Tz}{z-\frac{5}{8}}+\dfrac{8}{15}\dfrac{Tz}{(z-1)^2}-\dfrac{512}{225}\dfrac{Tz}{z-1}\cdots\\ +\dfrac{0.5z}{(z-\frac{3}{8})(\frac{3}{8}-e^{-T})}+\dfrac{0.5z}{(z-\frac{5}{8})(\frac{5}{8}-e^{-T})}-\dfrac{(0.5-e^{-T})z}{(z-e^{-T})(\frac{3}{8}-e^{-T})(\frac{5}{8}-e^{-T})}\end{bmatrix}$$

$$x(kT)=Z[X(z)]$$

所以第一部分的 Z 反变换为：

$$x1(kT)=\begin{bmatrix}(\frac{5}{8})^k-2(\frac{3}{8})^k\\ (\frac{5}{8})^k+2(\frac{3}{8})^k\end{bmatrix}$$

所以第二部分的 Z 反变换为：

$$x2(kT)=\begin{bmatrix}\left[\frac{32}{25}T-\frac{0.5}{\frac{3}{8}-e^{-T}}\right](\frac{3}{8})^k+\left[\frac{32}{9}T+\frac{0.5}{\frac{5}{8}-e^{-T}}\right](\frac{5}{8})^k+\frac{32}{15}kT\cdots \\ -\frac{1088}{225}T+\frac{e^{-kT}}{8(\frac{3}{8}-e^{-T})(\frac{5}{8}-e^{-T})} \\ \left[-\frac{32}{25}T-\frac{0.5}{\frac{3}{8}-e^{-T}}\right](\frac{3}{8})^k+\left[\frac{32}{9}T+\frac{0.5}{\frac{5}{8}-e^{-T}}\right](\frac{5}{8})^k+\frac{8}{15}kT\cdots \\ -\frac{512}{225}T+\frac{(0.5-e^{-T})e^{-kT}}{(\frac{3}{8}-e^{-T})(\frac{5}{8}-e^{-T})}\end{bmatrix}$$

$$x(kT)=x1(kT)+x2(kT)$$

$$y(kT)=Cx(kT)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x(kT)$$

$$y(kT)=\left[-\frac{1}{\frac{3}{8}-e^{-T}}\right](\frac{3}{8})^k+\left[\frac{64}{9}T+\frac{1}{\frac{5}{8}-e^{-T}}\right](\frac{5}{8})^k+\frac{40}{15}kT-\frac{1600}{225}T+\frac{(0.625-e^{-T})e^{-kT}}{(\frac{3}{8}-e^{-T})(\frac{5}{8}-e^{-T})}$$

方法二：

利用递推算法求解差分方程组：

$$k=0$$

$$\begin{bmatrix}x_1[T]\\x_2[T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8}\\ \frac{19}{8}\end{bmatrix}$$

$$y(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=2;\quad y\,(T)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(T)\\x_2(T)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{8}\\ \frac{19}{8}\end{bmatrix}=\frac{9}{4}$$

特征方程为:

$$|zI-A|=(z-0.375)(z-0.625)=0$$

特征值为:

$$z_1=0.375,z_2=0.625\text{。}$$

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5\\0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$\Phi(k)=P\begin{bmatrix}0.375^k & 0\\ 0 & 0.625^k\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$\Phi(\mathrm{k})=\begin{bmatrix}0.5\times0.375^k+0.5\times0.625^k & -0.5\times0.375^k+0.5\times0.625^k\\ -0.5\times0.375^k+0.5\times0.625^k & 0.5\times0.375^k+0.5\times0.625^k\end{bmatrix}$$

利用 $x(k)=\Phi(\mathrm{k})\mathrm{x}(0)+\sum_{\mathrm{j=0}}^{\mathrm{k-1}}\Phi(\mathrm{k-j-1})\mathrm{Hu(j)}$

得：

$$x(T)=\begin{bmatrix}-0.1250\\ 2.3750\end{bmatrix}$$

$$x(2T)=\begin{bmatrix}15/64+\mathrm{T}\\ 75/64+\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$x(3T)=\begin{bmatrix}135/512+5/2*\mathrm{T}+1/8*\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}\\ 315/512+1/8*\mathrm{T}+1/2*\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$x(4T)=\begin{bmatrix}855/4096+273/64*\mathrm{T}+1/8*\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}+1/8*\mathrm{e}^{-2\mathrm{T}}\\ 1395/4096+3/8*\mathrm{T}+17/64*\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}+1/2*\mathrm{e}^{-2\mathrm{T}}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$x(5T)=\cdots$$

$$y(kT)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}$$

$$y(T)=2.25$$

$$y(2T)=90/64+\mathrm{T}+\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}$$

$$y(3T)=450/512+2.625\mathrm{T}+0.625\mathrm{e}^{\mathrm{T}}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{T}}$$

$$y(4T)=2250/4096+4.6406\mathrm{T}+0.3906\mathrm{e}^{-\mathrm{T}}+0.625\mathrm{e}^{-2\mathrm{T}}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{T}}$$

$$y(5T)=\cdots$$

3-2-10　已知连续系统的状态方程为：

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\ x_2[(k+1)T]\\ x_3[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\\ x_3(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}u(kT)$$

系统的初始状态为 $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

试求当控制序列为 $u(kT) = 2kT \quad (T = 1\text{秒})$ 时离散系统的状态 $x(kT)$ 。

【解】:

利用递推算法求解差分方程组：

$$\Phi(k) = G^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k$$

$$\Phi(1) = G^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}，\quad \Phi(2) = G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(3) = G^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}，\quad \Phi(4) = G^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$x(1) = \Phi(1)x(0) + \Phi(0)Hu(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

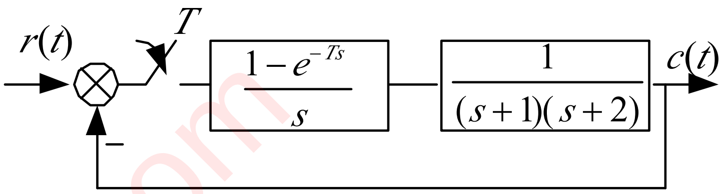
$$x(2) = \Phi(2)x(0) + \Phi(1)Hu(0) + \Phi(0)Hu(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \Phi(3)x(0) + \Phi(2)Hu(0) + \Phi(1)Hu(1) + \Phi(0)Hu(2) = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = \Phi(4)x(0) + \Phi(3)Hu(0) + \Phi(2)Hu(1) + \Phi(1)Hu(2) + \Phi(0)Hu(3) = \begin{bmatrix} 13 \\ 30 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$x(5) = \cdots$$

3-2-11　已知离散系统的结构图如题 3-2-11 图所示，



题 3-2-11 图

(1)求系统离散化的状态空间表达式；

(2)当采样周期 $T=0.1$ 秒时，输入为单位阶跃函数，且初始条件为零时离散系统的输出 $y(kT)$。

【解】:

方法一：

①依据方框图求闭环脉冲传递函数：

$$G_{开}(z)=(1-z^{-1})\ Z\left[\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right]$$

$$G_{开}(z)=(1-z^{-1})\ Z\left[\frac{0.5}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{0.5}{s+2}\right]$$

$$G_{开}(z)=(1-z^{-1})\left(\frac{0.5z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}+\frac{0.5z}{z-e^{-2T}}\right)$$

$$G_{开}(z)=(z-1)\left(\frac{0.5}{z-1}-\frac{1}{z-e^{-T}}+\frac{0.5}{z-e^{-2T}}\right)$$

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_{开}(z)}{1+G_{开}(z)}=\frac{0.5(1-e^{-T})^2z+0.5e^{-T}(1-e^{-T})^2}{z^2+0.5(1-4e^{-T}-e^{-2T})z+0.5e^{-T}(1-2e^{-T}+3e^{-2T})}$$

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-0.5e^{-T}(1-2e^{-T}+3e^{-2T}) & -0.5(1-4e^{-T}-e^{-2T})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}r(kT)$$

$$y(kT)=\begin{bmatrix}0.5e^{-T}(1-e^{-T})^2 & 0.5(1-e^{-T})^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\x_2(kT)\end{bmatrix}$$

当采样周期 $T=0.1$ 秒时

$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G_{开}(z)}{1+G_{开}(z)}=\frac{0.0046z+0.0041}{z^2-1.7190z+0.7448}$$

②依据闭环脉冲传递函数写出状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7448 & 1.7190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0046 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix},$$

③求零初始条件下单位阶跃输入的输出 $y(kT)$。

$$\Phi(k) = G^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7448 & 1.7190 \end{bmatrix}^k$$

$$\Phi(1) = G^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7448 & 1.7190 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(2) = G^2 = \begin{bmatrix} -0.7448 & 1.7190 \\ -1.2803 & 2.2102 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(3) = G^3 = \begin{bmatrix} -1.2803 & 2.2102 \\ -1.6461 & 2.5190 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(4) = G^4 = \begin{bmatrix} -1.6461 & 2.5190 \\ -1.8761 & 2.6840 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \Phi(k)x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)Hu(j)$$

又因为输入为单位阶跃函数，且初始条件为零，所以

$$x(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(k-j-1)H$$

$$x(1) = \Phi(0)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \Phi(1)H + \Phi(0)H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.7190 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \Phi(2)H + \Phi(1)H + \Phi(0)H = \begin{bmatrix} 2.7190 \\ 4.9292 \end{bmatrix}$$

$$x(4) = \Phi(3)H + \Phi(2)H + \Phi(1)H + \Phi(0)H = \begin{bmatrix} 4.9292 \\ 7.4482 \end{bmatrix}$$

$$x(5) = \cdots$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$y(k) = Cx(k) = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0046 \end{bmatrix} x(k)$$

$$y(1) = Cx(1) = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0046 \end{bmatrix} x(1) = 0.0046$$

$$y(2) = Cx(2) = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0046 \end{bmatrix} x(2) = 0.0166$$

$$y(3) = Cx(3) = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0046 \end{bmatrix} x(3) = 0.0388$$

$$y(4) = Cx(4) = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0046 \end{bmatrix} x(4) = 0.0545$$

方法二：

系统中连续时间被控对象的传递函数为：

$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

系统中连续时间被控对象的状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}x$$

状态转移矩阵为：

$$\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\left\{\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\right\}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)} & 0\\ 0 & \frac{1}{(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}(\text{对角标准型也可直接写})$$

$$G(T)=e^{AT}=\begin{bmatrix}e^{-T} & 0\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}$$

$$H(T)=\int_0^T e^{At}Bdt=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ 0.5-0.5e^{-2T}\end{bmatrix}$$

故被控对象的离散化状态方程为：

$$x[(k+1)T]=G(T)x(kT)+H(T)u(kT)$$

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\ x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-T} & 0\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ 0.5-0.5e^{-2T}\end{bmatrix}u(kT)$$

根据系统结构图，系统输入量为 $r(t)$，输出为 $y(t)$，而被控对象的输入 $u(t)=r(t)-y(t)=r(t)-x_1(t)+x_2(t)$，所以系统的离散化方程为：

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\ x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-T} & 0\\ 0 & e^{-2T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ 0.5-0.5e^{-2T}\end{bmatrix}[r(kT)-x_1(kT)+x_2(kT)]$$

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\ x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-T}-1 & 1-e^{-T}\\ -0.5+0.5e^{-2T} & 0.5+0.5e^{-2T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}1-e^{-T}\\ 0.5-0.5e^{-2T}\end{bmatrix}r(kT)$$

系统输出方程为：

$$y(kT)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}$$

令 $T=0.1$秒，离散化状态方程为：

$$\begin{bmatrix}x_1[(k+1)T]\\ x_2[(k+1)T]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8097 & 0.0952\\ -0.0906 & 0.9094\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.0952\\ 0.0906\end{bmatrix}r(kT)$$

$$y(kT)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(kT)\\ x_2(kT)\end{bmatrix}$$

当输入为单位阶跃函数，初始条件为零时离散系统的输出为：

$$y(k)=CZ^{-1}[(zI-G)^{-1}Hu(z)]+Du(k)$$

$y(k)=CZ^{-1}[(zI-G)^{-1}Hu(z)]$ 可得。

或与方法一一样，利用 $x(k)=\Phi(k)x(0)+\sum_{j=0}^{k-1}\Phi(k-j-1)Hu(j)$

一步一步地求。

3-2-12　线性时变系统的状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 5(1-e^{-5t})\\ 0 & 5e^{-5t}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5\\ 0\end{bmatrix}u$，求采样周期 $T=0.2$秒时，系统的离散化方程。

【解】:

由于采样周期较小，可以采用近似离散化的方法。

$$G(kT)=TA(kT)+I=0.2\begin{bmatrix}0 & 5(1-e^{-k})\\ 0 & 5e^{-k}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-k}\\ 0 & 1+e^{-k}\end{bmatrix}$$

$$H(kT)=TB(kT)=0.2\begin{bmatrix}5\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$x((k+1)T))=x(0.2(k+1))=G(0.2k)x(0.2k)+H(0.2k)u(0.2k)$$

$$x((k+1)0.2))=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-k}\\ 0 & 1+e^{-k}\end{bmatrix}x(0.2k)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u(0.2k)$$

第三章　线性控制系统的能控性和能观性

3-3-1　判断下列系统的状态能控性。

（1）$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$（2）$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

（3）$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$（4）$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

【解】:

(1)

$U_c=[B\quad AB]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $rank U_c=n=2$，所以系统完全能控。

(2)

$$U_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots\\ -1 & 1 & 1 & -7 & \end{bmatrix}$$

前三列已经可使$rank U_c=n=3$，所以系统完全能控（后续列元素不必计算）。

（3）

A为约旦标准型，且第一个约旦块对应的B阵最后一行元素全为零，所以系统不完全能控。

（4）

A阵为约旦标准型的特殊结构特征，所以不能用常规标准型的判别方法判系统的能控性。

同一特征值对应着多个约旦块，只要是单输入系统，一定是不完全能控的。

可以求一下能控判别阵。

$U_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & A^3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\lambda_1 & 3\lambda_1^2\\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3\\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3\\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3\end{bmatrix}$, $rank U_c=2$，所以系统不完全能控。

3-3-2　判断下列系统的输出能控性。

(1) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$　(2) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$

【解】:

（1）

已知 $A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}D & CB & CAB & CA^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 3 & -1 & \cdots & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & \end{bmatrix}$$

前两列已经使 $rank\begin{bmatrix}D & CB & CAB & CA^2B\end{bmatrix}=m=2$，所以系统输出能控。

（2）

系统为能控标准型，所以状态完全能控。又因输出矩阵 C 满秩，且输出维数 m 小于状态维数 n，所以状态能控则输出必然能控。

2-3-3　判断下列系统的能观性。

(1) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$；(2) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$；（4）$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\end{bmatrix}x\end{cases}$

【解】:

（1）

已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -4 & -3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$V_0=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ & \vdots & \\ & & \end{bmatrix}$$

前三行已使 $rank V_0 = n = 3$，

所以系统完全能观（后续元素不必计算）。

（2）

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_0=\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\quad rank V_0 = n = 2$$

所以系统完全能观。

（3）

状态空间表达式为约旦标准型，且 C 阵对应于第一个约旦块的第一列元素为零，所以系统状态不完全能观。

（4）

状态空间表达式为约旦标准型的特殊结构形式，所以不能用常规方法判系统的能观性。同一特征值对应着多个约旦块，只要是单输出系统，一定是不完全能观的。

也可求

$$V_0=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 16 & 16 & 4 \end{bmatrix},\quad |V_0| = 0,\quad rank V_0 = 2$$

所以系统不完全能观。

3-3-4　设系统状态方程为 $\dot{x} = Ax + Bu$，若 x_1、x_2 是系统的能控状态，试证状态 $\alpha x_1 + \beta x_2$ 也是能控的（其中 α、β 为任意常数）。

【解】：

设：

$$y = Cx = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} x$$

因为，状态 x_1 和 x_2 能控，所以至少有

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 2\text{。}$$

而由系统输出能控的判别阵得：

$$rank\begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B \end{bmatrix} = rank\left(C\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = 1\text{，（}C\text{ 阵又满秩）。}$$

所以 $y = Cx = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} x$ 一定是能控的。

3-3-5 设系统Σ_1和Σ_2的状态空间表达式为

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u_1\\ y_1=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x_1\end{cases}\qquad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2=-2x_2+u_2\\ y_2=x_2\end{cases}$$

（1）试分析系统Σ_1和Σ_2的能控性和能观性，并写出传递函数；

（2）试分析由Σ_1和Σ_2组成的串联系统的能控性和能观性，并写出传递函数；

（3）试分析由Σ_1和Σ_2组成的并联系统的能控性和能观性，并写出传递函数。

【解】：

（1）

$$\Sigma_1:U_c=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -4\end{bmatrix},rank\,U_c=2;\quad V_o=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix},rank\,V_o=2$$

$$\Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2=-2x_2+u_2\\ y_2=x_2\end{cases}$$

两个子系统既能控又能观。

（2）以系统1在前系统2在后构成串联系统为例（串联顺序变化状态空间表达式不同，又都是SISO系统，传递函数相同）：

系统有下关系成立：

$$u_1=u,\quad u_2=y_1,\quad y=y_2$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ b_2C_1 & A_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_1\\ 0\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & C_2\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & -4 & 13\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix},rank\,U_c=2;$$

$$V_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ -7 & -4 & 4\end{bmatrix},rank\,V_o=3$$

串联后的系统不能控但能观。

传递函数为：

$$G(s)=G_2(s)G_1(s)=C_2(sI-A_2)^{-1}b_2C_1(sI-A_1)^{-1}b_1$$

$$=[1\times(s+2)^{-1}\times 1]\times\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 3 & s+4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{s+2}{(s^2+4s+3)(s+2)}=\frac{1}{(s^2+4s+3)}$$

（3）并联后的系统数学模型为：

系统有下关系成立：

$$u_1=u_2=u，\quad y=y_1+y_2$$

并联后的状态空间表达式为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & -4 & 13\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix},rankU_c=3;$$

$$V_o=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -3 & -2 & -2\\ 6 & 5 & 4\end{bmatrix},rankV_o=3$$

并联后系统既能控又能观。

传递函数为：

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s)=C_1(sI-A_1)^{-1}b_1+C_2(sI-A_2)^{-1}b_2$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 3 & s+4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+[1\times(s+2)^{-1}\times 1]=\frac{s+2}{(s^2+4s+3)}+\frac{1}{s+2}=\frac{2s^2+8s+7}{s^3+6s^2+11s+6}$$

3-3-6　已知系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{s+a}{s^3+10s^2+27s+18}$

（1）试确定 a 的取值，使系统成为不能控或为不能观；

（2）在上述 a 的取值下，求使系统为能控的状态空间表达式；

（3）在上述 a 的取值下，求使系统为能观的状态空间表达式。

【解】：

系统的传递函数可以写成：

$$G(s)=\frac{s+a}{s^3+10s^2+27s+18}=\frac{s+a}{(s+3)(s+1)(s+6)}$$

(1)

当 $a=1$，3，6 时，系统传递函数出现零极点对消现象，则系统可能不能控，或不能观或即不能控又不能观。

(2)

在上述 a 的取值下，求使系统为能控的状态空间表达式；

能控标准型为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -18 & -27 & -10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}a & 1 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

(3)

在上述 a 的取值下，求使系统为能观的状态空间表达式。

能观标准型为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -18\\ 1 & 0 & -27\\ 0 & 1 & -10\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}a\\1\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

3-3-7　已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}x\end{cases}$$

试问能否选择常数 a、b、c 使系统具有能控性和能观性。

【解】：

$$|U_c|=\left|\begin{bmatrix}a & a\lambda+b & a\lambda^2+2b\lambda\\ b & b\lambda & b\lambda^2\\ c & c\lambda & c\lambda^2\end{bmatrix}\right|$$

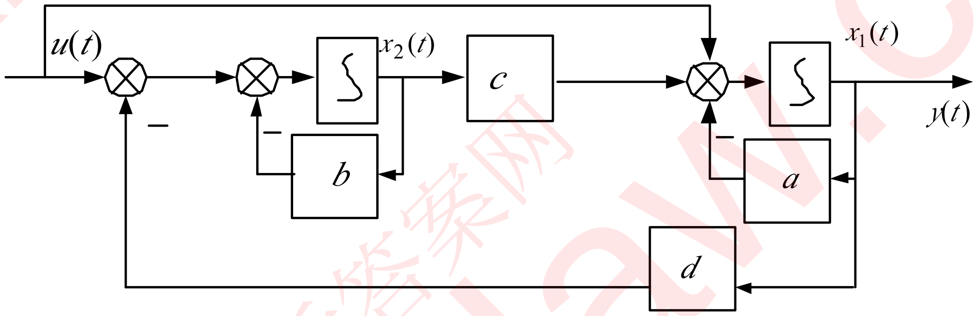
在上述行列式中，无论 a、b、c 如何取值，都有两行元素线性相关，则 $|U_c|=0$，$rankU_c=2$。

$$|V_0| = \left|\begin{bmatrix} a & b & c \\ a\lambda & a+b\lambda & c\lambda \\ a\lambda^2 & 2a\lambda+b\lambda^2 & c\lambda^2 \end{bmatrix}\right|$$

在上述行列式中，无论 a、b、c 如何取值，都有两列元素线性相关，则 $|V_0| = 0$，$rank V_0 = 2$。

所以，无论常数 a、b、c 取何值，系统都不能控和不能观。

3-3-8 系统的结构如题 3-3-8 图所示，图中 a、b、c、d 均为实常数，试建立系统的状态空间表达式，并分别确定当系统状态能控和能观时 a、b、c、d 应满足的条件。



题 3-3-8 图

【解】:

系统状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_1 + cx_2 + u \\ \dot{x}_2 = -dx_1 - bx_2 + u \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -a & c \\ -d & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

系统能控的条件为：

$$U_c = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a+c \\ 1 & -d-b \end{bmatrix} \quad |U_c| = -d-b+a-c \neq 0。$$

系统能观的条件为：

$$V_0 = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & c \end{bmatrix}, \quad |V_o| = c \neq 0。$$

3-3-9 设系统 $\sum(A, C)$ 的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 a_1,a_2,a_3,c_1 为实数。试问系统 $\sum(A,C)$ 能观的充要条件是什么？要求用 A、C 中的参数具体表示。

【解】：

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1 & 0 & 0\\ -a_1c_1 & -a_2c_1 & -a_3c_1\\ a_1^2c_1-a_2c_1 & a_1a_2c_1-a_3c_1 & a_1a_3c_1\end{bmatrix}=c_1^3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -a_1 & -a_2 & -a_3\\ a_1^2-a_2 & a_1a_2-a_3 & a_1a_3\end{bmatrix}$$

$$|V_0|=-c_1^3a_3^2\neq 0\quad\Rightarrow\quad c_1\neq 0,\ a_3\neq 0.$$

3-3-10　已知系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}x\end{cases}$$

欲使系统中有一个状态既能控又能观，另一个状态既不能控又不能观，试确定参数 b_1,b_2,c_1,c_2 应满足的关系。

【解】：

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^2+3\lambda+2=0,\quad \lambda_1=-1,\quad \lambda_2=-2$$

A 为友矩阵，且特征值互异，所以

$$P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$x=P\bar{x}$$

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}2b_1+b_2\\ -b_1-b_2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}c_1-c_2 & c_1-2c_2\end{bmatrix}\bar{x}\end{cases}$$

显然，当状态 x_2 既能控又能观，而状态 x_1 既不能控又不能观的条件是：

$$\begin{cases}c_1-c_2=0, c_1-2c_2\neq 0\\ 2b_1+b_2=0, -b_2-b_1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=c_2\neq 0\\ b_2=-2b_1\neq 0\end{cases}$$

当状态 x_1 既能控又能观，而状态 x_2 既不能控又不能观的条件是：

$$\begin{cases}c_1-2c_2=0, c_1-c_2\neq 0\\ -b_2-b_1=0, 2b_1+b_2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=2c_2\neq 0\\ b_2=-b_1\neq 0\end{cases}$$

3-3-11 设 n 阶系统的状态空间表达式为 $\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=Cx\end{cases}$，试证：

（1）若 $Cb=0$，$CAb=0$，$CA^2b=0$，……$CA^{n-1}b=0$，则系统不能同时满足能控性和能观性条件。

（2）如果满足 $Cb=0$，$CAb=0$，$CA^2b=0$，……$CA^{n-2}b=0$，$CA^{n-1}b\neq 0$ 则系统总是又能控又能观的。

【解】：

（1）以三阶系统为例：

$$V_0\times U_c=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Cb & CAb & CA^2b\\CAb & CA^2b & CA^3b\\CA^2b & CA^3b & CA^4b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & CA^3b\\0 & CA^3b & CA^4b\end{bmatrix}$$

$$|V_0\times U_c|=0,\quad |V_0|\times|U_c|=0$$

所以该系统不能同时满足能控性和能观性条件。

（2）以三阶系统为例：

$$V_0\times U_c=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Cb & CAb & CA^2b\\CAb & CA^2b & CA^3b\\CA^2b & CA^3b & CA^4b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & k\\0 & k & CA^3b\\k & CA^3b & CA^4b\end{bmatrix}$$

$$|V_0\times U_c|=k^3=(CA^2b)^3\neq 0\Rightarrow |V_0|\neq 0,|U_c|\neq 0,$$

所以该系统既能控又能观。

3-3-12 已知系统的微分方程为 $\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$，试写出对偶系统的状态空间表达式及其传递函数。

【解】：

因为 $G_{对偶}(s)=b^T(sI-A^T)^{-1}C^T=[C(sI-A)^{-1}b]^T=G_{原系统}{}^T(s)$

又因为单输入/单输出系统传递函数矩阵为一个元素，所以二者传递函数是相同的。

$$G(s)=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

系统传递函数无零点，所以不会出现零极点对消现象，系统既能控又能观。

能控标准型为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-6 & -11 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

能观标准型为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\1 & 0 & -11\\0 & 1 & -6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

3-3-13 已知系统的状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$，试求出它的能控标准型。

【解】：

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & -1\end{bmatrix},\quad rankU_c=1<n=2。$$

所以系统不能控，不存在能控标准型。

3-3-14 已知系统的状态空间表达式为 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 4\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$ 试求出它的能观标准型。

【解】：

判系统的能观性：

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\-3 & 4\end{bmatrix},\quad rankV_0=2$$

所以系统能观。

方法之一：

①求变换阵

$$T_0=\begin{bmatrix}T_1 & AT_1\end{bmatrix},\quad T_1=V_0^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$T_0=\begin{bmatrix}T_1 & AT_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix},\quad T_0^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

②设 $x=T_0\bar{x}$ 对原状态空间表达式做线性变换得：

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0 & -4\\1 & 5\end{bmatrix}\bar{x}\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

方法之二：

依据特征多项式 $f(s)=|sI-A|=s^2-5s+4$ 直接可以写出能观标准型的 A，C 阵。

$$A=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}。$$

3-3-15　已知系统传递函数为 $G(s)=\dfrac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}$，试求能控标准型和能观标准型。

【解】:

系统的传递函数可以写成：

$$G(s)=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=\frac{2s+5}{s^2+4s+3}+1$$

传递函数无零极点对消，系统既能控又能观。

能控标准型为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix}x+u\end{cases}$$

能观标准型为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x+u\end{cases}$$

3-3-16　已知完全能控系统的状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$，试问与它相应的离散化方程 $x(k+1)=\begin{bmatrix}\cos T & \sin T\\ -\sin T & \cos T\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1-\cos T\\ \sin T\end{bmatrix}u(k)$ 是否一定能控。

【解】:

已知 $x(k+1)=\begin{bmatrix}\cos T & \sin T\\ -\sin T & \cos T\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}1-\cos T\\ \sin T\end{bmatrix}u(k)$，

离散系统完全能控的条件为 M_c 矩阵满秩。

而 $M_c=\begin{bmatrix}H & GH\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\cos T & \cos T(1-\cos T)+\sin^2 T\\ \sin T & -\sin T(1-\cos T)+\cos T\sin T\end{bmatrix}$，所以系统是否能控，取决于采样周期 T 的取值使能控判别阵满秩。

$$M_c=\begin{bmatrix}H & GH\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\cos T & \cos T(1-\cos T)+\sin^2 T\\ \sin T & -\sin T+2\cos T\sin T\end{bmatrix}$$

$$\left|M_c\right|=2\sin T(\cos T-1)$$

当 $T\neq k\pi\quad(k=1,2,\cdots n)$ 时， $rank(M_c)=2$ 离散化方程也是能控的。

3-3-17　试将下列系统分别按能控性、能观性进行结构分解。

（1）$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -4 & 3\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

（2）$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

【解】:

（1）

①按能控性进行结构分解

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix},\quad rank U_c=2$$

所以系统不完全能控，需按能控性进行结构分解，构造非奇异变换阵 T_c。

$$T_c=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix},\quad T_c^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

按能控性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

②按能观性进行结构分解

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & -9 & 5\end{bmatrix},\quad rank V_0=2$$

所以系统不完全能观，需按能观性进行结构分解，构造非奇异变换阵 P_0^{-1}。

$$P_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad P_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

按能观性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{x}_{\bar{0}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ x_{\bar{0}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ x_{\bar{0}}\end{bmatrix}$$

（2）

①按能控性进行结构分解

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad rank\,U_c=2$$

所以系统不完全能控，需按能控性进行结构分解，构造非奇异变换阵 T_c。

$$T_c=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad T_c^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

按能控性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

②按能观性进行结构分解

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad rank\,V_0=2$$

所以系统不完全能观，需按能观性进行结构分解，构造非奇异变换阵 P_0^{-1}。

$$P_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad P_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

按能观性进行结构分解后的系统状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{x}_{\bar{0}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 0\\ -2 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ x_{\bar{0}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ x_{\bar{0}}\end{bmatrix}$$

3-3-18　试将下列系统分别按能控性和能观性进行结构分解。

（1）$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 4 & -1 & -2 & 4\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$；

（2）$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}$。

【解】：

（1）

系统的特征方程为：

$$f(\lambda)=\left|\lambda I-A\right|=(\lambda-4)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda-1)=0$$

化为对角标准型，其变换阵为：

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & -\frac{17}{18}\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1.127 & -0.1429 & -0.333 & 1\\ -0.5 & 1 & 0 & 0\\ -0.333 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

化成对角标准型为：

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&-3&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix}1.667\\0\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1&3.333\end{bmatrix}\overline{x}$$

可以看出系统不能控也不能观，需按能控性和能观性进行结构分解。

其中 $\overline{x}_3$ 为能控能观的状态变量 x_{co}； $\overline{x}_1$ 为能控不能观的状态变量 $x_{c\overline{o}}$； $\overline{x}_4$ 为不能控能观的状态变量 $x_{\overline{c}o}$； $\overline{x}_2$ 为不能控不能观的状态变量 $x_{\overline{co}}$

将上述方程按 x_{co}， $x_{c\overline{o}}$， $x_{\overline{c}o}$， $x_{\overline{co}}$ 的顺序排列，则有：

$$\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_3\\\dot{\overline{x}}_1\\\dot{\overline{x}}_4\\\dot{\overline{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_3\\\overline{x}_1\\\overline{x}_4\\\overline{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1.667\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&3.333&0\end{bmatrix}x$$

或写成

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{co}\\\dot{x}_{c\overline{0}}\\\dot{x}_{\overline{c}0}\\\dot{x}_{\overline{co}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{co}\\x_{c\overline{0}}\\x_{\overline{c}0}\\x_{\overline{co}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1.667\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&3.333&0\end{bmatrix}x$$

（2）

$$U_c=\begin{bmatrix}b&Ab&A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&12&26\\2&0&-2\end{bmatrix},\quad rank\,U_c=3$$

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\-1&2&5\\-7&4&11\end{bmatrix},\quad rank\,V_0=3$$

系统既能控又能观，无需分解。

3-3-19 已知系统的微分方程为 $\ddot{y}+4\dot{y}+3y=\ddot{u}+6\dot{u}+8u$，试分别求出满足下列要求的状态空间表达式：

（1）系统为能控能观的对角标准型；

（2）系统为能控不能观的；

（3）系统为能观不能控；

（4）系统为不能控也不能观的。

【解】：

$$G(s)=\frac{s^2+6s+8}{s^2+4s+3}=\frac{2s+5}{s^2+4s+3}+1=\frac{1.5}{s+1}+\frac{0.5}{s+3}+1。$$

传递函数无零极点对消，则原系统既能控又能观。

$$Y(s)=\frac{1.5}{s+1}U(s)+\frac{0.5}{s+3}U(s)+U(s)$$

设：

$$\begin{cases}X_1(s)=\dfrac{1}{s+1}U(s)\\ X_2(s)=\dfrac{1}{s+3}U(s)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+u\\ \dot{x}_2=-3x_2+u\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=1.5x_1+0.5x_2+u=\begin{bmatrix}1.5&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+u$$

人为增加一对偶极子，得：

$$G(s)=\frac{(2s+5)s}{(s^2+4s+3)s}+1=\frac{2s^2+5s}{s^3+4s^2+3s}+1$$

系统能控不能观的状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-3&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0&5&2\end{bmatrix}x+u\end{cases}$$

系统能观不能控的状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-3\\0&1&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}x+u\end{cases}$$

系统既不能控又不能观的状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1.5&0.5&0\end{bmatrix}x+u\end{cases}$$

3-3-20　已知系统的状态空间表达式为 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&3\\-2&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}x\end{cases}$，利用线性变换 $\bar{x}=Tx$，

其中 $T=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$，对系统进行结构分解。试回答以下问题：

(1) 不能控但能观的状态变量以 x_1，x_2，x_3 的线性组合表示；
(2) 能控且能观的状态变量以 x_1，x_2，x_3 的线性组合表示；
(3) 试求这个系统的传递函数。

【解】：

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&-1&0\end{bmatrix},\quad \overline{A}=TAT^{-1},\overline{B}=TB,\overline{C}=CT^{-1}$$

线性变换后系统的状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\\dot{\bar{x}}_2\\\dot{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\2&3&0\\0&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\\bar{x}_2\\\bar{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\2\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}\bar{x}$$

系统的特征方程为：

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$$

将线性变换后的系统变成约当标准型，变换阵为：

$$P=\begin{bmatrix}0&-1&0.5\\0&1&0\\1&2&2\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}-4&-6&1\\0&1&0\\2&2&0\end{bmatrix}$$

约当标准型为：

$$\tilde{A}=P^{-1}\overline{A}P=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\tilde{B}=P^{-1}\overline{B}=\begin{bmatrix}-4\\2\\0\end{bmatrix},\tilde{C}=\overline{C}P=\begin{bmatrix}1&1&2.5\end{bmatrix}$$

$\tilde{A}$ 为约当标准型，可以看出系统完全能观，状态 $\tilde{x}_3$ 不能控。

因为：

$$\bar{x} = Tx\,,\quad \bar{x} = P\tilde{x}$$
$$\tilde{x} = P^{-1}Tx$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

所以不能控但能观的状态变量 $\tilde{x}_3 = -4x_1 + x_2 + 3x_3$

能控且能观的状态变量 $\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$

线性变换不改变系统的传递函数，用约当标准型的能控能观的部分即最小实现求传递函数：

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$$G(s) = \tilde{C}_{co}(sI - \tilde{A}_{co})^{-1}\tilde{b}_{co} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-2s}{(s-1)(s-2)}$$

3-3-21　已知系统的传递函数矩阵为 $G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s+4}{s+3} \end{bmatrix}$，

（1）求系统的能控标准型实现，画出系统的状态图；

（2）求系统的能观标准型实现，画出系统的状态图；

（3）用传递函数并联分解法，求系统对角标准型的实现，画出系统状态图。

【解】：

$$r = 1,\ m = 2,\ n = 3.$$

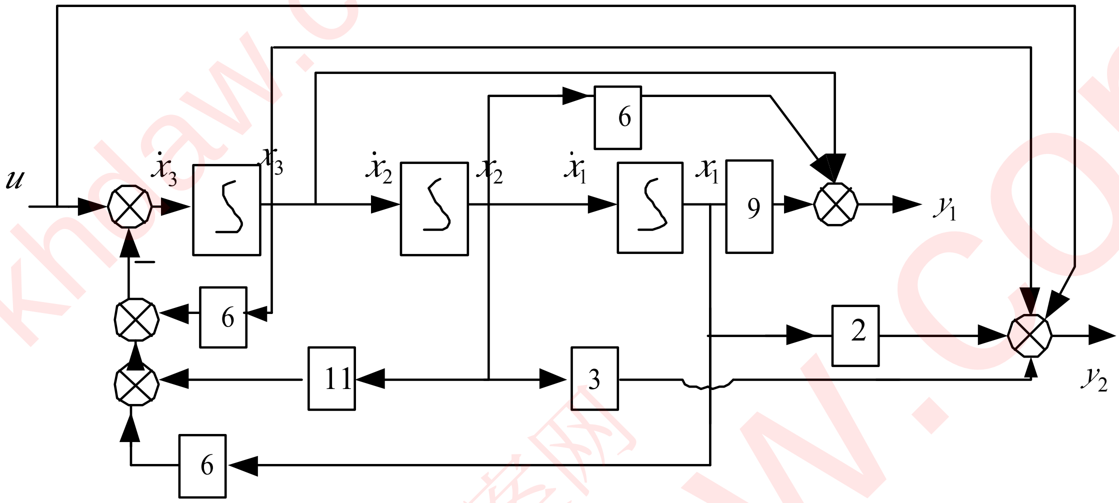
$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = G(s)U(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s+4}{s+3} \end{bmatrix} U(s)$$

$$= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}\right] U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

能控标准型为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u \qquad \begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&6&1\\2&3&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

系统状态图如题 3-3-21 图 1 所示。



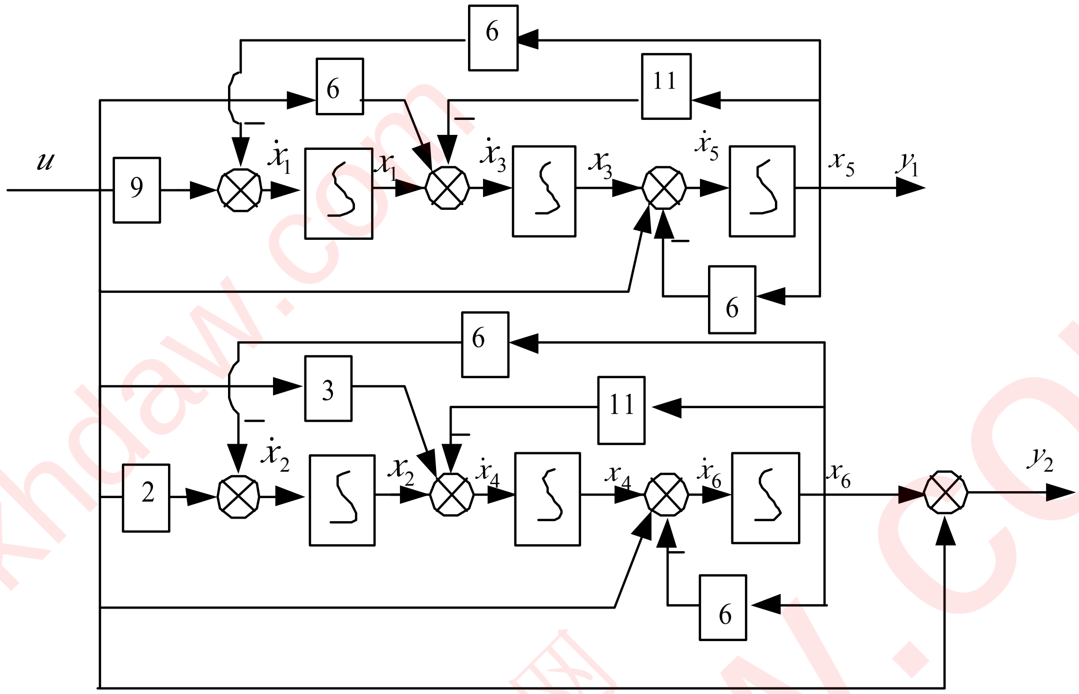
题 3-3-21 图 1

能观标准型为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0_2&0_2&-a_0I_m\\I_m&0_2&-a_1I_m\\0_2&I_m&-a_2I_m\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}B_0\\B_1\\B_2\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-6&0\\0&0&0&0&0&-6\\1&0&0&0&-11&0\\0&1&0&0&0&-11\\0&0&1&0&-6&0\\0&0&0&1&0&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}9\\2\\6\\3\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

系统状态图如图题 3-3-21 图 2 所示。



题 3-3-21 图 2

对角标准型为：

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s+4}{s+3} \end{bmatrix} U(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{1}{s+3} \end{bmatrix} U(s) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

$$Y_1(s) = \frac{2}{s+1}U(s) - \frac{1}{s+2}U(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s+3}U(s) + U(s)$$

设：

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s), \quad X_2(s) = \frac{1}{s+2}U(s), \quad X_3(s) = \frac{1}{s+3}U(s)$$

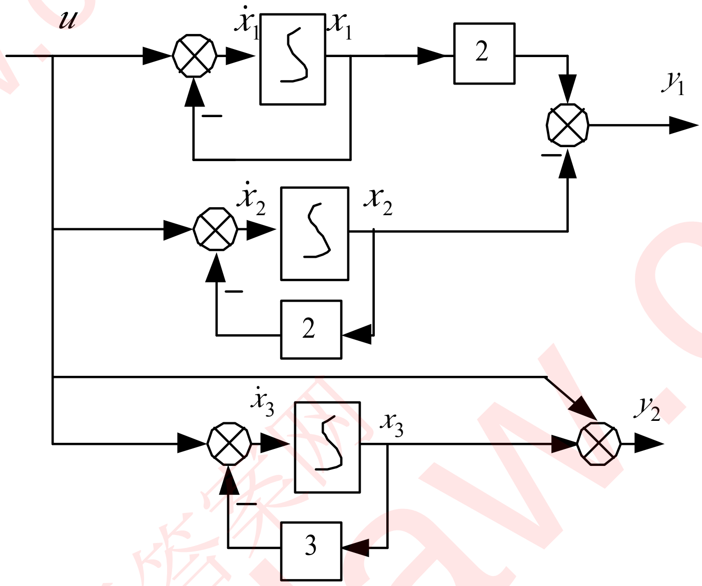
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y_1(s) = \frac{2}{s+1}U(s) - \frac{1}{s+2}U(s) = 2X_1(s) - X_2(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s+3}U(s) + U(s) = X_3(s) + U(s)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

系统状态图如题 3-3-21 图 3 所示。



题 3-3-21 图 3

3-3-22　已知系统的微分方程为$\begin{cases} 2\dot{y}_1 + 2y_1 + \dot{y}_2 + y_2 = \dot{u}_1 + u_2 \; (1) \\ \dot{y}_1 + y_1 + \dot{y}_2 + y_2 = \dot{u}_1 - u_2 \quad (2) \end{cases}$，试求该系统的最小实现。

【解】:

由（1）式-（2）式和 2×（2）式-（1）式得：

$$\begin{cases} \dot{y}_1 + y_1 = 2u_2 \\ \dot{y}_2 + y_2 = \dot{u}_1 - 3u_2 \end{cases}$$

在零初始条件下，拉氏变换得：

$$Y_1(s) = 2 \times \frac{1}{s+1} U_2(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{1}{s+1}[sU_1(s) - 3U_2(s)] = \frac{s+1-1}{s+1} U_1(s) - 3 \times \frac{1}{s+1} U_2(s)$$
$$= U_1(s) - \frac{1}{s+1} U_1(s) - 3 \times \frac{1}{s+1} U_2(s)$$

$$\begin{cases} X_1(s) = \dfrac{1}{s+1} U_1(s) \\ X_2(s) = \dfrac{1}{s+1} U_2(s) \end{cases}$$

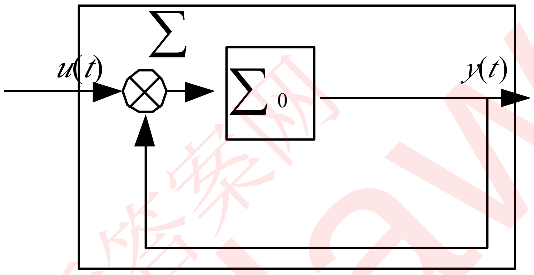
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$U_c = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad rank U_c = n = 2$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad rank V_0 = n = 2$$

系统完全能控能观，所以上述系统为最小实现。

3-3-23　从传递函数是否出现零极点对消的现象出发，说明下图题 3-3-23 图中闭环系统 Σ 的能控性与能观性和开环系统 Σ_0 的能控性与能观性是一致的。



题 3-3-23 图

【解】:

设开环系统的传递函数为 $G_0(s) = \dfrac{M(s)}{D(s)}$，则开环系统能控且能观的条件是无零极点对消，即 $M(s)$ 和 $D(s)$ 无公因子。而闭环系统的传递函数为 $G(s) = \dfrac{M(s)}{M(s) + D(s)}$。

①开环系统传递函数 $G_0(s)$ 有零极点对消时，$M(s)$ 和 $D(s)$ 有公因子，设为 $(s + a)$。则闭环系统传递函数 $G(s) = \dfrac{(s + a)M'(s)}{(s + a)(M'(s) + D'(s))}$ 也有零极点对消，所以闭环系统 Σ 的能控性与能观性和开环系统 Σ_0 的能控性与能观性是一致的。

②开环系统传递函数 $G_0(s)$ 没有零极点对消时，$M(s)$ 和 $D(s)$ 没有公因子，则闭环系统传递函数 $G(s) = \dfrac{M(s)}{M(s) + D(s)}$ 也没有公因子，没有零极点对消，所以闭环系统 Σ 的能控性与能观性和开环系统 Σ_0 的能控性与能观性也是一致的。

第四章　控制系统的稳定性

3-4-1　试确定下列二次型是否正定。

(1) $v(x)=x_1^{\ 2}+4x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2-6x_3x_2-2x_1x_3$

(2) $v(x)=-x_1^{\ 2}-10x_2^{\ 2}-4x_3^{\ 2}+6x_1x_2+2x_3x_2$

(3) $v(x)=10x_1^{\ 2}+4x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+2x_1x_2-2x_3x_2-4x_1x_3$

【解】:

（1）

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{bmatrix},\Rightarrow |1|>0,\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=3>0,\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 4 & -3\\ -1 & -3 & 1\end{vmatrix}=-4<0$$

二次型函数不定。

(2)

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -10 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix},\Rightarrow |-1|<0,\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 3 & -10\end{vmatrix}=1>0,\begin{vmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -10 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{vmatrix}=-3<0$$

二次型函数为负定。

(3)

$$P=\begin{bmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix},\Rightarrow |10|>0,\begin{vmatrix}10 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=39>0\begin{vmatrix}10 & 1 & -2\\ 1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=17>0$$

二次型函数正定。

3-4-2　试确定下列二次型为正定时，待定常数的取值范围。

$v(x)=a_1x_1^{\ 2}+b_1x_2^{\ 2}+c_1x_3^{\ 2}+2x_1x_2-4x_3x_2-2x_1x_3$

【解】:

$$v(x)=a_1x_1^{\ 2}+b_1x_2^{\ 2}+c_1x_3^{\ 2}+2x_1x_2-4x_3x_2-2x_1x_3$$

$$=x^T\begin{bmatrix}a_1 & 1 & -1\\ 1 & b_1 & -2\\ -1 & -2 & c_1\end{bmatrix}x$$

$$|a_1|>0,\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & b_1 \end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} a_1 & 1 & -1 \\ 1 & b_1 & -2 \\ -1 & -2 & c_1 \end{vmatrix}>0$$

满足正定的条件为：

$$\begin{cases} a_1>0 \\ a_1b_1>1 \\ a_1b_1c_1+4>b_1+4a_1+c_1 \end{cases}$$

3-4-3　试用李亚普诺夫第二法判断下列线性系统的稳定性。

(1) $\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}x$; (2) $\dot{x}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}x$;

(3) $\dot{x}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}x$; (4) $\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}x$;

【解】:

（1）

设

$$v(x)=0.5x_1^2+0.5x_2^2$$

$$\dot{v}(x)=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=x_1x_2-x_1x_2-x_2^2=-x_2^2\begin{cases}=0 & (x=0) \\ \le 0 & (x\ne 0)\end{cases}\text{为半负定。}$$

又因为 $\dot{v}(x)\equiv 0$ 时，有 $x_2\equiv 0$，

则 $\dot{x}_2\equiv 0$，代入状态方程得：$x_1\equiv 0$.

所以系统在 $x\ne 0$ 时，$\dot{v}(x)$ 不恒为零。

则系统渐近稳定，又因为是线性系统，所以该系统是大范围渐近稳定。

（2）

设

$$v(x)=0.5x_1^2+0.5x_2^2$$

$$\dot{v}(x)=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=x_1(-x_1+x_2)+x_2(2x_1-3x_2)=-x_1^2-3x_2^2+3x_1x_2$$

$$=x^T\begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ 1.5 & -3 \end{bmatrix}x\Rightarrow|-1|<0,\begin{vmatrix} -1 & 1.5 \\ 1.5 & -3 \end{vmatrix}>0$$

$$=x^TPx$$

P 负定，系统渐近稳定，又因为是线性系统，所以该系统是大范围渐近稳定。

（3）

设

$$v(x)=0.5x_1^{\ 2}+0.5x_2^{\ 2}$$

$$\dot{v}(x)=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2=x_1(-x_1+x_2)+x_2(-x_1-x_2)=-x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}$$

$$=x^T\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}x$$

$$=x^TPx$$

P负定，系统渐近稳定，又因为是线性系统，所以该系统是大范围渐近稳定。

（4）

两个状态变量相互独立，所以可以单独分析各变量的稳定性。

$$\dot{x}_1=x_1\quad v(x_1)=0.5x_1^{\ 2}\quad\Rightarrow\quad \dot{v}(x_1)=x_1\dot{x}_1=x_1^{\ 2}\begin{cases}\geq 0 & (x\neq 0)\\ =0 & (x=0)\end{cases}$$

$$\dot{x}_2=-x_2\quad v(x_2)=0.5x_2^{\ 2}\quad\Rightarrow\quad \dot{v}(x_2)=x_2\dot{x}_2=-x_2^{\ 2}\begin{cases}\leq 0 & (x\neq 0)\\ =0 & (x=0)\end{cases}$$

所以系统不稳定。

3-4-4　试确定下列系统平衡状态的稳定性。

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}x(k)$$

【解】:

方法一：

采用第一方法，确定特征多项式对应的特征值是否在单位圆内。

$$f(z)=|zI-A|=\begin{vmatrix}z-1 & -3 & 0\\ 3 & z+2 & 3\\ -1 & 0 & z\end{vmatrix}=0$$

$$z_1=0.1173+2.6974\mathrm{i}$$

$$z_2=0.1173-2.6974\mathrm{i}$$

$$z_3=-1.2346$$

特征多项式对应的特征值均在单位圆外，所以系统不稳定。

方法二：

采用第二方法，

$$G=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ -3 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}。$$

设

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 1 & 0\\0.5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因为 1>0，$\begin{vmatrix}1 & 0.5\\0.5 & 1\end{vmatrix}=0.75>0$，$\begin{vmatrix}1 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 1 & 0\\0.5 & 0 & 1\end{vmatrix}=0.5>0$，所以 P 正定。

$$v(x)=x^TPx \text{ 正定。}$$

$$\Delta v(k)=x^T(k)(G^TPG-P)x(k)$$

$$G^TPG-P=\begin{bmatrix}1 & -3 & 1\\3 & -2 & 0\\0 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0.5\\0.5 & 1 & 0\\0.5 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\-3 & -2 & -3\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\-3 & -2 & -3\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 4.5 & 7\\4.5 & 6 & 1.5\\7 & 1.5 & 8\end{bmatrix}$$

因为 8>0，$\begin{vmatrix}8 & 4.5\\4.5 & 6\end{vmatrix}=27.75>0$，$\begin{vmatrix}8 & 4.5 & 7\\4.5 & 6 & 1.5\\7 & 1.5 & 8\end{vmatrix}=4.5>0$，所以 P 正定。

$\Delta v(k)$ 为正定，所以系统在原点不稳定。

3-4-5 设离散系统状态方程为 $x(k+1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & \frac{k}{2} & 0\end{bmatrix}x(k)$ $k>0$，求平衡点 $x_e=0$ 渐近稳定时 k 值范围。

【解】:

方法一：

采用第一方法，确定特征多项式对应的特征值是否在单位圆内。

$$f(z)=|zI-A|=\begin{vmatrix}z & -1 & 0\\0 & z & -1\\0 & -k/2 & z\end{vmatrix}=0$$

$$z_1 = 0.5\sqrt{2\mathrm{k}}$$
$$z_2 = -0.5\sqrt{2\mathrm{k}}$$
$$z_3 = 0$$

$\left|\pm 0.5\sqrt{2\mathrm{k}}\right| < 1 \Rightarrow 0 < k < 2$ 时平衡点渐近稳定。

方法二：

$$v(x) = x^T P x \text{ 正定。}$$

$$\Delta v(k) = x^T(k)(G^T PG - P)x(k)$$

$$\Delta v(k) = x^T(k) Q x(k)$$

令

$$Q = -I$$

$$Q = G^T PG - P，\text{设 } P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix}$$

$$G^T PG - P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{k}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{11} = 1, P_{12} = 0, P_{13} = 0, P_{23} = 0$$

$$P_{22} = \frac{12}{4-k^2} - 1, P_{33} = \frac{12}{4-k^2}$$

所以

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{4-k^2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{4-k^2} \end{bmatrix}$$

P 为正定，则 $\begin{cases} \frac{12}{4-k^2} - 1 > 0 \\ \frac{12}{4-k^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 2$ 时系统渐近稳定。

3-4-6　设系统的状态方程为 $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，试求这个系统的李亚普诺夫函数，然后再求从封闭曲线 $v(x)=100$ 边界上的一点到封闭曲线 $v(x)=0.05$ 内一点的响应时间上限。

【解】：

令

$$Q=I$$

$$A^T P+PA=-I$$

求矩阵 P，即

$$\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -1.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{5.5}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

所以李氏函数为：

$$v(x)=\frac{5.5}{4}x_1^{\ 2}+0.5x_1x_2+0.5x_2^{\ 2}$$

$$\dot{v}(x)=-(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2})$$

$$\left|QP^{-1}-\lambda I\right|=\left|P^{-1}-\lambda I\right|=0$$

$$\left|I-\lambda P\right|=0$$

则

$$\lambda_1=2.3062\text{，}\quad \lambda_2=0.6938$$

$$t-t_0=-\frac{1}{\eta_{\min}}\ln\frac{v(x,t)}{v(x_0,t_0)}=-\frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{0.05}{100}=10.955$$

3-4-7　试确定下列非线性系统在原点处的稳定性。

(1) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1-x_2-x_1^{\ 3}\\ \dot{x}_2=x_1+x_2-x_2^{\ 3}\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_2+x_1(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2})\\ \dot{x}_2=-x_1-x_2+x_2(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2})\end{cases}$

【解】：

（1）采用非线性系统线性化的方法，在平衡点原点处线性化得：

$$A=\frac{\partial f}{\partial x^T}\Big|_{x=0}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x=0}=\begin{bmatrix}1-3x_1^2 & -1\\ 1 & 1-3x_2^2\end{bmatrix}_{x=0}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s-1 & 1\\ -1 & s-1\end{vmatrix}=s^2-2s+2=0$$

系统的两个特征值均在右半平面，则系统在平衡点附近不稳定。

（2）采用非线性系统线性化的方法，在平衡点原点处线性化得：

$$A=\frac{\partial f}{\partial x^T}\Big|_{x=0}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x=0}=\begin{bmatrix}-1+3x_1^2+x_2^2 & 1+2x_1x_2\\ -1+2x_1x_2 & -1+x_1^2+3x_2^2\end{bmatrix}_{x=0}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s+1 & -1\\ 1 & s+1\end{vmatrix}=s^2+2s+2=0$$

系统的两个特征值都在左半平面，则系统在平衡点附近渐近稳定。

3-4-8　试确定下列非线性系统在原点处稳定时的参数 a、b 的取值范围（其中二者均大于或等于零，但二者不同时为零）。

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_1-ax_2-bx_2^3\end{cases}$$

【解】：

$$A=\frac{\partial f}{\partial x^T}\Big|_{x=0}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x=0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -a-3bx_2^2\end{bmatrix}_{x=0}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -a\end{bmatrix}$$

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s & -1\\ 1 & s+a\end{vmatrix}=s^2+as+1$$

结论：系统在原点渐近稳定的充要条件是 a 大于 0，b 任意（同时还需满足题目要求）。

3-4-9　试证明系统 $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-a_1x_1-a_2x_1^2x_2\end{cases}$ 在 $a_1>0, a_2>0$ 时是全局渐近稳定的。

【解】：

求平衡点：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -a_1x_1 - a_2x_1^2x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 0\end{cases}$$

设

$$v(x) = 0.5a_1x_1^2 + 0.5x_2^2$$

$$\dot{v}(x) = a_1x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = a_1x_1x_2 + x_2(-a_1x_2 - a_2x_1^2x_2)$$

$$\dot{v}(x) = -a_2x_1^2x_2^2 < 0$$

结论 $a_1 > 0$，$v(x)$ 正定；$a_2 > 0$，$\dot{v}(x)$ 负定，系统渐近稳定。

因为 $\|x\| \Rightarrow \infty$ 时，$v(x) = 0.5a_1x_1^2 + 0.5x_2^2 \Rightarrow \infty$，所以系统又是大范围渐近稳定。

3-4-10　试用克拉索夫斯基法确定非线性系统在原点 $x_e = 0$ 处为大范围渐近稳定时，参数 a 和 b 的取值范围。

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = ax_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + bx_2^3\end{cases}$$

【解】：

$$J = \frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & 1 \\ 1 & -1+3bx_2^2\end{bmatrix}$$

令

$$P = I$$

$$v(x) = f^T(x)f(x)$$

$$\dot{v}(x) = f^T(x)[J^T + J]f(x) = 2f^T(x)\begin{bmatrix}a & 1 \\ 1 & -1+3bx_2^2\end{bmatrix}f(x)$$

系统在 $x_e = 0$ 处渐近稳定的条件是 $\dot{v}(x)$ 负定。而 $\dot{v}(x)$ 负定的条件为：

$$a < 0,\quad \begin{vmatrix}a & 1 \\ 1 & -1+3bx_2^2\end{vmatrix} = -a + 3abx_2^2 - 1 > 0$$

大范围渐近稳定的条件是：

$$\|x\| \Rightarrow \infty \text{ 时 } v(x) \Rightarrow \infty$$

而 $\|x\| \Rightarrow \infty$ 时， $v(x) = (ax_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 + bx_2^3)^2 \Rightarrow \infty$

所以系统大范围渐近稳定的条件是： $a < 0,\quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & -1+3bx_2{}^2 \end{vmatrix} = -a + 3abx_2{}^2 - 1 > 0$

3-4-11 试用变量-梯度法构成下述非线性系统的李氏函数。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

【解】:

求平衡点:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 0 \end{cases}$$

设

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v}(x) = (\nabla V)^T \dot{x} = -a_{11}x_1^2 - (a_{12} + a_{21})x_1 x_2 + 2a_{11}x_1^3 x_2 + 2a_{12}x_1^2 x_2{}^2 - a_{22}x_2{}^2$$

若选

$$a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = a_{21} = 0 \quad \frac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = a_{12} = \frac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = a_{21} = 0$$

满足旋度方程条件

$$\dot{v}(x) = -x_1^2(1 - 2x_1 x_2) - x_2{}^2 \text{。当 } x_1 x_2 < 0.5 \text{ 时，} \dot{v}(x) \text{ 负定}$$

而 $v(x) = \int_0^{x_1(x_2=0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} x_2 dx_2 = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$ 为正定。

当 $x_1 x_2 < 0.5$ 时，系统在平衡点渐近稳定。

3-4-12 设非线性系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -f_1(x_1) + f_2(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_3(x_2) \end{cases} \text{式中 } f_1(0) = f_3(0) = 0, f_2(0, x_2) = 0$$

试求系统原点 $x_e = 0$ 稳定的充分条件。

【解】:

由第一法，

$$A=\frac{\partial f}{\partial x^T}\bigg|_{x=0}=\begin{bmatrix}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\ 0 & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x=0}$$

稳定条件为：

$$-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}<0\,,\quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2}<0$$

由克拉索夫斯基法

设

$$v(x)=\dot{x}^T\dot{x}\text{ 为正定。}$$

$$\dot{v}(x)=\dot{x}^T F x$$

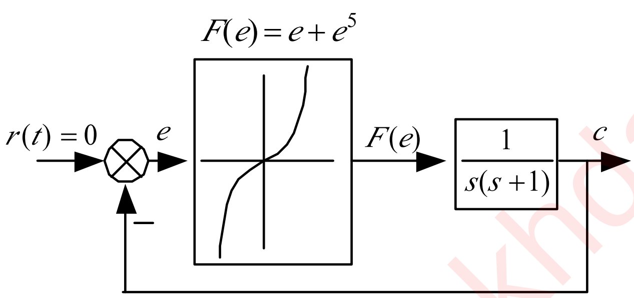
$$F=\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)^T+\frac{\partial f}{\partial x^T}=\begin{bmatrix}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\ 0 & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & 2\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

当 $\begin{cases}-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}<0\\ 4\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_2}>\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^2\end{cases}$ 时渐近稳定。

当 $\begin{cases}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\geq\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\ 4\left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\geq\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)^2\end{cases}$ 时稳定。

3-4-13 试用阿依捷尔曼法分析下列非线性系统在原点 $x_e=0$ 处的稳定性。结构如题 3-4-13 图所示。



题 3-4-13 图

【解】:

当输入为零时，非线性系统方程可以写成

$$\ddot{e}+\dot{e}+F(e)=0$$

若取状态变量：$x_1=e$, $x_2=\dot{e}$，那么系统的状态方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_2-F(e)\end{cases}$$

(1) 在 $x_e=0$ 处将非，线性环节输入-输出特性用一直线近似 $F(e)=ke$，取 $k=1$

则线性化状态方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-x_2-x_1\end{cases}$$

(2) 取二次型函数作为系统的李氏函数，则有

$$v(x)=x^TPx，\quad \dot{v}(x)=-x^TQx$$

取

$$Q=I$$

得到 $P=\begin{bmatrix}1.5 & 0.5\\ 0.5 & 1\end{bmatrix}$ $v(x)=1.5x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ 为正定。

(3)

$$\dot{v}(x)=3x_1\dot{x}_1+\dot{x}_1x_2+x_1\dot{x}_2+2x_2\dot{x}_2=-kx_1^2+(2-2k)x_1x_2-x_2^2=x^T\begin{bmatrix}-k & 1-k\\ 1-k & -1\end{bmatrix}x$$

当 $-k<0$， $k-(k-1)^2>0$ 时 $\dot{v}(x)$ 为负定，从而求得 $0.382<k<2.618$ 时系统稳定，即只要非线性环节的曲线在 $0.382e$ 和 $2.618e$ 范围内变化，原非线性控制系统就是大范围渐近稳定的。

☆3-4-14 下列是描述两种生物个数的瓦尔特拉（bolterea）方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\alpha x_1+\beta x_1x_2\\ \dot{x}_2=\gamma x_2+\delta x_1x_2\end{cases}$$

式中 x_1，x_2 分别表示两种生物的个数。α β γ δ 为非零实数。$\alpha>0$，$\delta>0$，$\beta<0$，$\gamma<0$。

（1）确定系统的平衡点。

（2）在平衡点附近线性化，并讨论平衡点的稳定性。

【解】:

（1）

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_1 x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = \gamma x_2 + \delta x_1 x_2 = 0 \end{cases}$$

得到平衡状态：

$$\begin{cases} x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{1e} = -\dfrac{\gamma}{\delta} \\ x_{2e} = -\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

（2）线性化 $\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha + \beta x_{2e}) x_1 + \beta x_{1e} x_2 \\ \dot{x}_2 = \delta x_{2e} x_1 + (\gamma + \delta x_{1e}) x_2 \end{cases}$

对于平衡点：

$$\begin{cases} x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 \\ \dot{x}_2 = \gamma x_2 \end{cases}$$

特征值为：

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_2 = -\gamma \end{cases}$$

因为 $\alpha > 0$，$\gamma < 0$ 所以 $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$，由第一法，系统不稳定。

对于平衡点：

$$\begin{cases} x_{1e} = -\dfrac{\gamma}{\delta} \\ x_{2e} = -\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{\beta\gamma}{\delta} x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{\delta\alpha}{\beta} x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\beta\gamma}{\delta} \\ -\dfrac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

特征值为：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{\alpha\gamma}$$

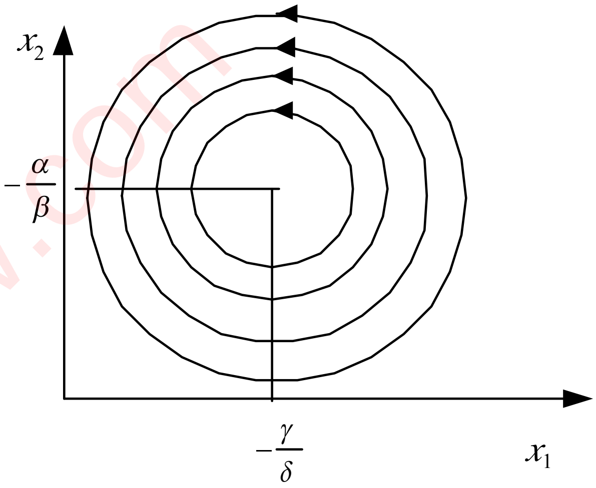
因为 $\alpha > 0$，$\gamma < 0$，λ_1，λ_2 为纯虚数，由第一法，无法确定系统的稳定性。

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{(\gamma + \delta x_1) x_2}{(\alpha + \beta x_2) x_1}, \quad \frac{\alpha + \beta x_2}{x_2} dx_2 - \frac{(\gamma + \delta x_1)}{x_1} dx_1 = 0$$

$$d \ln x_2 - \gamma \ln x_1 + \beta x_2 - \delta x_1 = const$$

或 $(d \ln x_2 + \beta x_2) - (\gamma \ln x_1 + \delta x_1) = const$

其轨迹图如图题 3-4-14 图所示



题 3-4-14 图

可见 $\begin{cases} x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 0 \end{cases}$ 为不稳定的平衡点。

$\begin{cases} x_{1e} = -\dfrac{\gamma}{\delta} \\ x_{2e} = -\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$ 为稳定的平衡点。

☆3-4-15 试求下列非线性微分方程

$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$ 的平衡点，然后对各平衡点进行线性化，并判断平衡点是否稳定。

【解】:

求平衡点:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1e} = n\pi \\ x_{2e} = 0 \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

线性化方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -\cos(x_{1e}) x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

对于平衡点

$$\begin{cases} x_{1e} = 2n\pi \\ x_{2e} = 0 \end{cases}$$

$$\text{则}\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2\end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

特征方程为 $\lambda(\lambda+1)+1=0$，特征根都在左半平面，所以系统为渐近稳定。

对于平衡点

$$\begin{cases}x_{1e} = (2n+1)\pi \\ x_{2e} = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2\end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

特征方程为 $\lambda(\lambda+1)-1=0$，有一个特征根在右半平面，所以系统不稳定。

☆3-4-16 非线性系统状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1\end{cases}$$ $a>0$ 试确定平衡状态的稳定性。

【解】:

求平衡点:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 0\end{cases}$$

线性化方程为:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a x_2 - x_1\end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}$$

特征方程为 $\lambda(\lambda+a)+1=0$

$a>0$ 时特征根都在左半平面，所以系统为渐近稳定。

☆3-4-17 非线性系统状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2\end{cases}$$ 试用克拉索夫斯基法确定系统原点的稳定性。

【解】:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=f(x)=\begin{bmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1^3-x_2\end{bmatrix}$$

$$J(x)=\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3x_1^2 & -1\end{bmatrix}$$

设

$$v(x)=\dot{x}^T P\dot{x}，\quad P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}$$

$$\dot{v}(x)=\dot{x}^T Q\dot{x}=\dot{x}^T\left[J^T(x)P+PJ(x)\right]\dot{x}$$

令 $Q=-I$，则 $\dot{v}(x)$ 为负定。

$$Q=\begin{bmatrix}0 & -3x_1^2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3x_1^2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}P_{11}=\dfrac{1}{6x_1^2}+\dfrac{3}{2}x_1^2+\dfrac{1}{2}\\ P_{12}=\dfrac{1}{6x_1^2}\\ P_{22}=\dfrac{1}{6x_1^2}+\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow P=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{6x_1^2}+\dfrac{3}{2}x_1^2+\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{6x_1^2}\\ \dfrac{1}{6x_1^2} & \dfrac{1}{6x_1^2}+\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$$

因为 $\dfrac{1}{6x_1^2}+\dfrac{3}{2}x_1^2+\dfrac{1}{2}>0$，

而 $|P|=(\dfrac{1}{6x_1^2}+\dfrac{3}{2}x_1^2+\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{6x_1^2}+\dfrac{1}{2})-\dfrac{1}{6x_1^2}\dfrac{1}{6x_1^2}$

$|P|=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6x_1^2}+\dfrac{3}{4}x_1^2+\dfrac{1}{4}>0$，$P$ 正定，所以系统在原点处渐近稳定。

$\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to\infty$ 时，

$$v(x)=(\frac{1}{6x_1^2}+\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2})x_2^2+2\frac{1}{6x_1^2}x_2(-x_1^3-x_2)+(\frac{1}{6x_1^2}+\frac{1}{2})(x_1^3+x_2)^2$$

$$v(x)=\frac{3}{2}x_1^2x_2^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{6}x_1^4+\frac{1}{2}(x_1^3+x_2)^2\to\infty$$

所以在原点大范围渐近稳定。

☆3-4-18 试用变量梯度法构造下列系统的李雅普诺夫函数。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1(t)x_1 + a_2(t)x_2 \end{cases}$$ 。

【解】:

设

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{v}(x) = (\nabla V)^T \dot{x} = a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 + a_1(t)a_{21}x_1^2 + a_2(t)a_{21}x_1x_2 + a_1(t)a_{22}x_1x_2 + a_2(t)a_{22}x_2^2$$

$$= a_1(t)a_{21}x_1^2 + [a_{11} + a_2(t)a_{21} + a_1(t)a_{22}]x_1x_2 + (a_{12} + a_2(t)a_{22})x_2^2$$

若选

$$a_{11} = -a_1(t),\ a_{22} = 1,\ a_{12} = a_{21} = 0$$

则 $\dfrac{\partial \nabla V_1}{\partial x_2} = a_{12} = \dfrac{\partial \nabla V_2}{\partial x_1} = a_{21} = 0$

满足旋度方程条件

$$\dot{v}(x) = a_2(t)x_2^2$$ 。

当 $a_2(t) < 0$ 时， $\dot{v}(x)$ 为半负定。

而 $v(x) = \int_0^{x_1(x_2=0)} -a_1(t)x_1dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} x_2dx_2 = -0.5a_1(t)x_1^2 + 0.5x_2^2$ 。

则当 $a_1(t) < 0$ 时 $v(x)$ 为正定。且当 $\|x\| \to \infty$ 时， $v(x) = -0.5a_1(t)x_1^2 + 0.5x_2^2 \to \infty$

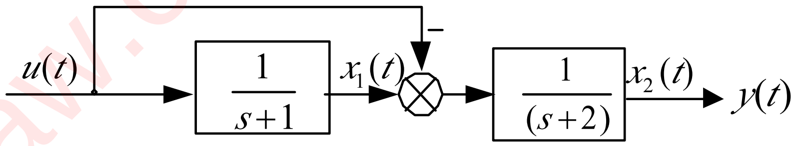
所以当 $\begin{cases} a_1(t) < 0 \\ a_2(t) < 0 \end{cases}$ 时，系统在原点大范围渐近稳定。

第五章　状态反馈和状态观测器

3-5-1　已知系统结构图如图题 3-5-1 图所示。

(1)写出系统状态空间表达式；

(2)试设计一个状态反馈矩阵，将闭环极点特征值配置在 $-3\pm 5j$ 上。



题 3-5-1 图

【解】:

方法一：

根据系统结构直接设状态变量如题 3-5-1 图所示，写状态空间表达式：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x$$

$$U_c=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\qquad rank\,U_c=2$$

系统能控，可以设计状态反馈阵。

设状态反馈阵为 $K=[k_1 \quad k_2]$

状态反馈控制规律为：$u=r-Kx$

求希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+3)^2+25=s^2+6s+34$$

求加入反馈后的系统特征多项式：

$$f(s)=\left|sI-A+bK\right|=s^2+(3+k_1-k_2)s+(2+2k_1)$$

依据极点配置的定义求反馈矩阵：

$$\begin{cases}(3-k_2+k_1)=6\\ (2+2k_1)=34\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=16\\ k_2=13\end{cases}\quad K=[16 \quad 13]$$

方法二：

$$K=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}U_c^{-1}f^*(A)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}^{-1}(A^2+6A+34I)=\begin{bmatrix}16 & 13\end{bmatrix}$$

方法三：（若不考虑原受控对象的结构，仅从配置极点位置的角度出发）

求系统传递函数写出能控标准型：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=(\frac{1}{s+1}-1)\frac{1}{s+2}=\frac{-s}{s^2+3s+2}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}x$$

求系统希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+3)^2+25=s^2+6s+34$$

求状态反馈矩阵 $\tilde{K}$：

$$\tilde{K}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}34-2 & 6-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 3\end{bmatrix}$$

$$P_1=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}P_1\\ P_1A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$K=\tilde{K}P=\begin{bmatrix}16 & 13\end{bmatrix}$$

3-5-2　已知系统的传递函数为 $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10}{s(s+1)(s+2)}$ 试设计一个状态反馈矩阵，使闭环系统的极点在-2，$-1\pm j$。

【解】：

依据系统传递函数写出能控标准型

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{10}{s(s+1)(s+2)}=\frac{10}{s^3+3s^2+2s}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

求系统希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+2)[(s+1)^2+1]=s^3+4s^2+6s+4$$

求状态反馈矩阵：

$$K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-0 & 6-2 & 4-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4 & 1\end{bmatrix}。$$

3-5-3 已知系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{(s-1)(s+2)}{(s-2)(s+1)(s+3)}$，试问是否可以通过状态反馈，将传递函数变为 $\dfrac{(s-1)}{(s+2)(s+3)}$ 和 $\dfrac{(s+2)}{(s+1)(s+3)}$，若有可能，分别求出状态反馈阵 K，并画出结构图。

【解】：

系统传递函数无零极点对消，所以系统既能控又能观。可以通过状态反馈进行极点的任意配置。另有状态反馈不改变系统的零点。

(1) 由闭环传递函数得希望极点为-2，-2，-3。

受控对象传递函数：

$$G(s)=\frac{(s-1)(s+2)}{(s-2)(s+1)(s+3)}=\frac{s^2+s-2}{s^3+2s^2-5s-6}$$

受控对象状态空间表达式的能控标准型：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\6&5&-2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}-2&1&1\end{bmatrix}x$$

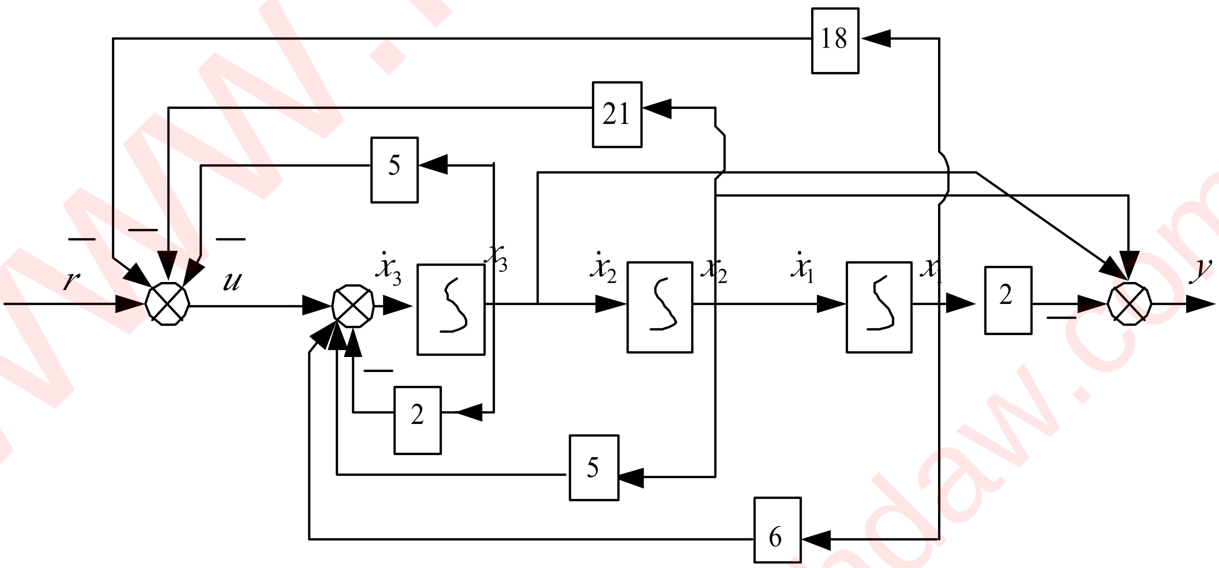
希望特征多项式为：

$$f^*(s)=(s+2)^2(s+3)=s^3+7s^2+16s+12$$

状态反馈矩阵：

$$K=\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12+6&16+5&7-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18&21&5\end{bmatrix}。$$

结构图如图题 3-5-3 图 1 所示：



题 3-5-3 图 1

（2）由闭传递函数得希望极点为-1，1，-3。

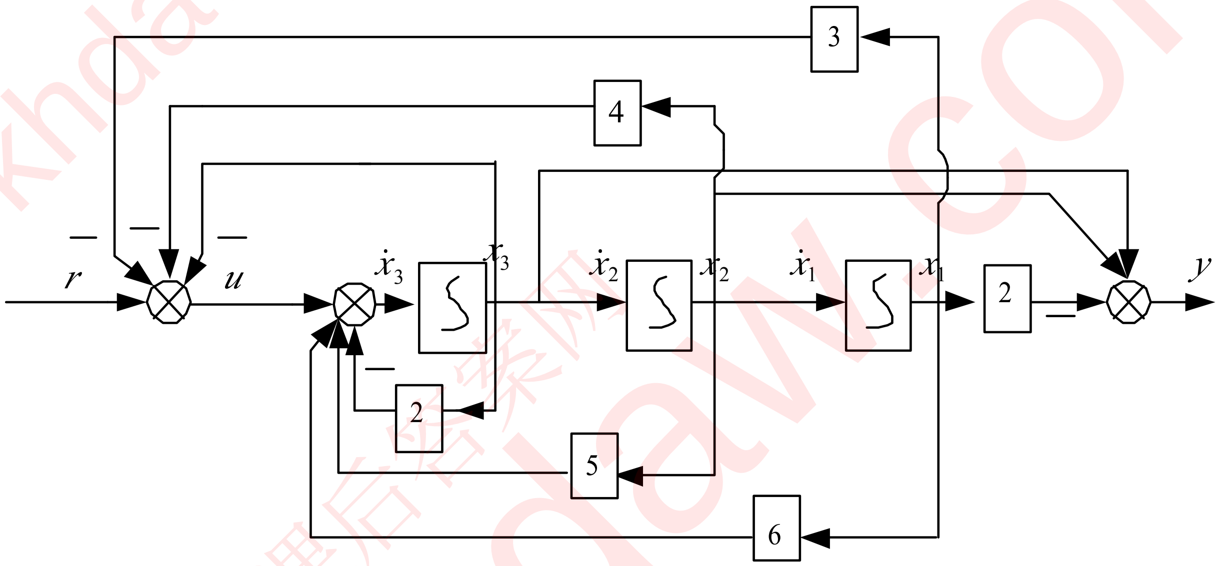
希望特征多项式为：

$$f^*(s)=(s+1)(s-1)(s+3)=s^3+3s^2-s-3$$

状态反馈矩阵：

$$K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+6 & -1+5 & 3-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\end{bmatrix}。$$

结构图如图题 3-5-3 图 2 所示：



题 3-5-3 图 2

3-5-4　已知系统状态空间表达式为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\1 & 0 & -3\\0 & 1 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}u$，$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$，试判断系统的能控性和能观性，若不完全能控，用结构分解将系统分解为能控和不能控的子系统，并讨论用状态反馈是否可以使闭环系统稳定。

【解】：

判系统的能控性和能观性：

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 1 & -3\\0 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad rank\,U_c=2$$

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\1 & -2 & 3\\-2 & 3 & -4\end{bmatrix},\quad rank\,V_0=2$$

系统不能控不能观。

按能控性进行结构分解：

取

$$R_c=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad R_c^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\1&-1&1\end{bmatrix}$$

分解后的状态空间表达式为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\\dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=(R_c^{-1}AR_c)\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+(R_c^{-1}b)u=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\1&-2&-2\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=(CR_c)\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

因为不能控分量对应的特征值为-1，因此对系统的稳定性无影响，所以可以通过状态反馈的方法，对能控子空间进行极点的任意配置（左半平面），从而使系统稳定。

3-5-5　已知系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{(s+1)}{s^2(s+3)}$，设计一个状态反馈矩阵，将闭环极点配置在-2，-2，和-1 处，并说明所得的闭环系统是否能观。

【解】：

被控对象状态空间表达式的能控标准型：

因为系统的传递函数可写成：

$$G(s)=\frac{(s+1)}{s^2(s+3)}=\frac{s+1}{s^3+3s^2}$$

所以能控标准型为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}x$$

闭环后的希望特征多项式为：

$$f^*(s)=(s+2)^2(s+1)=s^3+5s^2+8s+4$$

状态反馈系数阵：

$$K=\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-0&8-0&5-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&8&2\end{bmatrix}。$$

闭环传递函数为：

$$G_b(s)=\frac{s+1}{s^3+5s^2+8s+4}=\frac{s+1}{(s+2)^2(s+1)}=\frac{1}{(s+2)^2}$$

系统闭环传递函数出现零极点对消现象，又有原受控对象本身能控，且状态反馈不改变系统的能控性，所以该闭环系统不能观。

3-5-6　已知系统状态方程为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$，试判断系统是否可以通过状态反馈分别配置以下两组特征值：（1）{-2，-2，-1}；（2）{-2，-2，-3}。若能配置，求出反馈阵。

【解】：

判系统的能控性：

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad rank U_c=2$$

系统不能控.

按能控性分解：

取

$$R_c=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad R_c^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=(R_c^{-1}AR_c)\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+(R_c^{-1}b)u=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}u$$

不能控子空间的特征值为-1。

（1）对能控子空间进行极点配置，极点位置在-2，-2：

$$\dot{x}_c=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}x_c+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u$$

$$f^*(s)=(s+2)^2=s^2+4s+4$$

$$\overline{K}=\begin{bmatrix}\bar{k}_1 & \bar{k}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}U_c^{-1}f^*(A)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}^2+4\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix}$$

所以 $\bar{K}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 0\end{bmatrix}$

原系统的状态反馈阵 K 为：

$$K=\bar{K}R_c^{-1}$$

$$K=\begin{bmatrix}5 & 6 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

（2）因为状态反馈不能改变不能控部分的极点，而不能控部分的极点为-1，所以不能通过状态反馈将极点配置在{-2，-2，-3}。

3-5-7　已知系统状态空间表达式为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$，$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$，试设计一个状态观测器，使状态观测器的极点为-r，-2r，（r>0）。

【解】：

方法一：

判能观性 $V_0=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$rankV_0=2$。系统能观，可以构造状态观测器。

确定观测器的希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+r)(s+2r)=s^2+3rs+2r^2$$

确定观测矩阵 $L=\begin{bmatrix}l_1 & l_2\end{bmatrix}^T$，观测器的特征多项式为：

$$f(s)=\left|sI-(A-LC)\right|=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right|=s^2+l_1s+l_2$$

$$f^*(s)=f(s)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}l_1=3r\\ l_2=2r^2\end{cases}$$

方法二：

$$L=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}=f^*(A)V_0^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2+3r\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+2r^2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3r\\2r^2\end{bmatrix}$$

方法三：

被控对象特征多项式：

$$f(s)=|sI-A|=\left|sI-\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right|=s^2$$

确定观测器的希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+r)(s+2r)=s^2+3rs+2r^2$$

对应于能观标准型的观测器矩阵：

$$\bar{L}=\begin{bmatrix}\bar{l}_1\\\bar{l}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0{}^*-a_0\\a_1{}^*-a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2r^2-0\\3r-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2r^2\\3r\end{bmatrix}$$

对应于原系统的观测器矩阵：

$$P_1=V_0^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad P_o=[p_1\quad Ap_1]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$L=P_o\bar{L}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2r^2\\3r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3r\\2r^2\end{bmatrix}$$

3-5-8 已知系统的状态空间表达式为 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&-2&-3\\0&-1&-1\\1&0&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u$

$y=[1\quad 1\quad 0]x$

（1）设计一个全维观测器，将观测器的极点配置在-3，-4，-5 处。

（2）设计一个降维观测器，将观测器的极点配置在-3，-4 处。

（3）画出其结构图。

【解】：

（1）

方法一：

确定能观性：

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-3&-4\\-3&5&10\end{bmatrix},\quad rank\,V_0=3$$

系统能观，可设计观测器。

求希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+3)(s+4)(s+5)=s^3+12s^2+47s+60$$

求观测器特征多项式：

$$f(s)=\left|sI-A+LC\right|$$

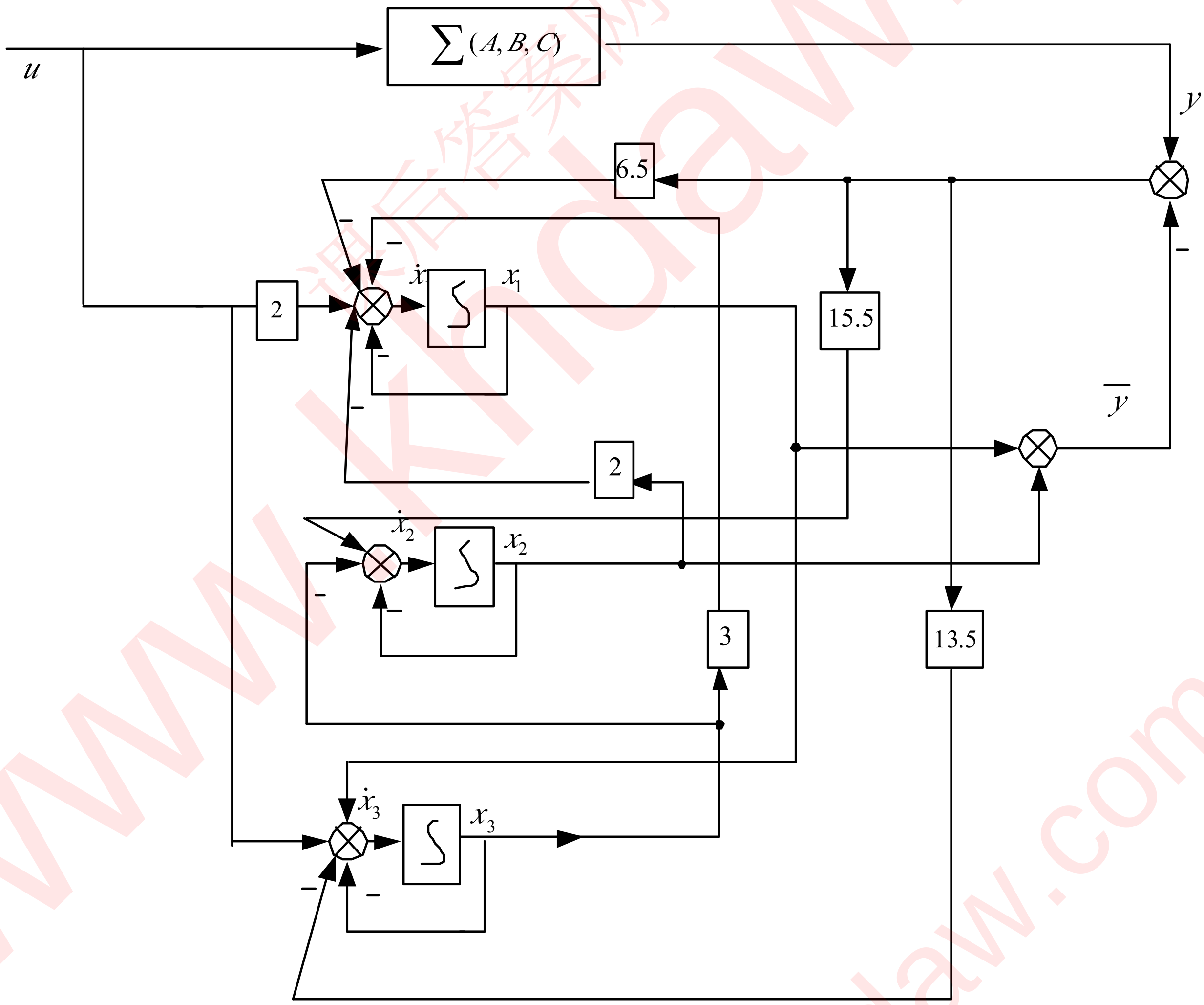
计算观测器系数矩阵：

令 $f^*(s)=f(s)$ 得 $L=\begin{bmatrix}-6.5\\15.5\\-13.5\end{bmatrix}$

方法二：

$$L=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\l_3\end{bmatrix}=f^*(A)V_0^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6.5\\15.5\\-13.5\end{bmatrix}$$

结构图如图题 3-5-8 图 1 所示：



题 3-5-8 图 1

(2)

确定降维观测器的维数：m=1，n=3，则 n-m= 2。

分解输出系数矩阵 c，获得线性变换矩阵 T，对原状态空间表达式进行线性变换，使各输出变量 y 变成各状态变量的单值函数：

$$C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad c_1=1,\quad c_2=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ 0 & I_{2\times2}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{C}=CT=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad y=\overline{x}_1$$

$$\overline{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -4\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12}\\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_{11}=-1,\quad \overline{A}_{12}=\begin{bmatrix}-2 & -4\end{bmatrix},\quad \overline{A}_{21}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad \overline{A}_{22}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\overline{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \overline{B}_1=2,\quad \overline{B}_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

计算线性变换后降维观测器的反馈矩阵 $\overline{L}=\begin{bmatrix}\overline{l}_1\\ \overline{l}_2\end{bmatrix}_{2\times1}$ （一个输出两个状态）

$$f^*(s)=(s+3)(s+4)=s^2+7s+12$$

$$f(s)=\left|sI-(\overline{A}_{22}-\overline{L}\overline{A}_{12})\right|=\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{l}_1\\ \overline{l}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -4\end{bmatrix}\right|$$

$$=s^2+(-4\overline{l}_2-2\overline{l}_1+2)s+(2\overline{l}_1-2\overline{l}_2)$$

$$f^*(s)=f(s)\ \Rightarrow\ \overline{L}=\begin{bmatrix}\overline{l}_1\\ \overline{l}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.1667\\ -2.8333\end{bmatrix}$$

求降维状态观测器的状态方程（状态变量 z）

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=(\overline{A}_{22}-\overline{L}\overline{A}_{12})(z+\overline{L}y)+(\overline{A}_{21}-\overline{L}\overline{A}_{11})y+(\overline{B}_2-\overline{L}\overline{B}_1)u$$

$$=\begin{bmatrix}5.3333 & 11.6667\\ -6.6667 & 12.3333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-13\\ 12\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}-6.3333\\ 6.6667\end{bmatrix}u$$

求降维状态观测器的输出方程（系统针对于线性变换后的状态信号 $\hat{\overline{x}}=\begin{bmatrix}\hat{\overline{x}}_1\\ \hat{\overline{x}}_2\\ \hat{\overline{x}}_3\end{bmatrix}$ ）

$$\begin{bmatrix}\hat{\bar{x}}_1\\ \hat{\bar{x}}_2\\ \hat{\bar{x}}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\ \bar{z}+\bar{L}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\ z_1+3.1667y\\ z_2-2.8333y\end{bmatrix}$$

求对应于原系统的降维状态观测器的状态信号 $\hat{x}$：

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_1\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}=T\hat{\bar{x}}=\begin{bmatrix}-z_1-2.1667y\\ z_1+3.1667y\\ z_2-2.8333y\end{bmatrix}$$

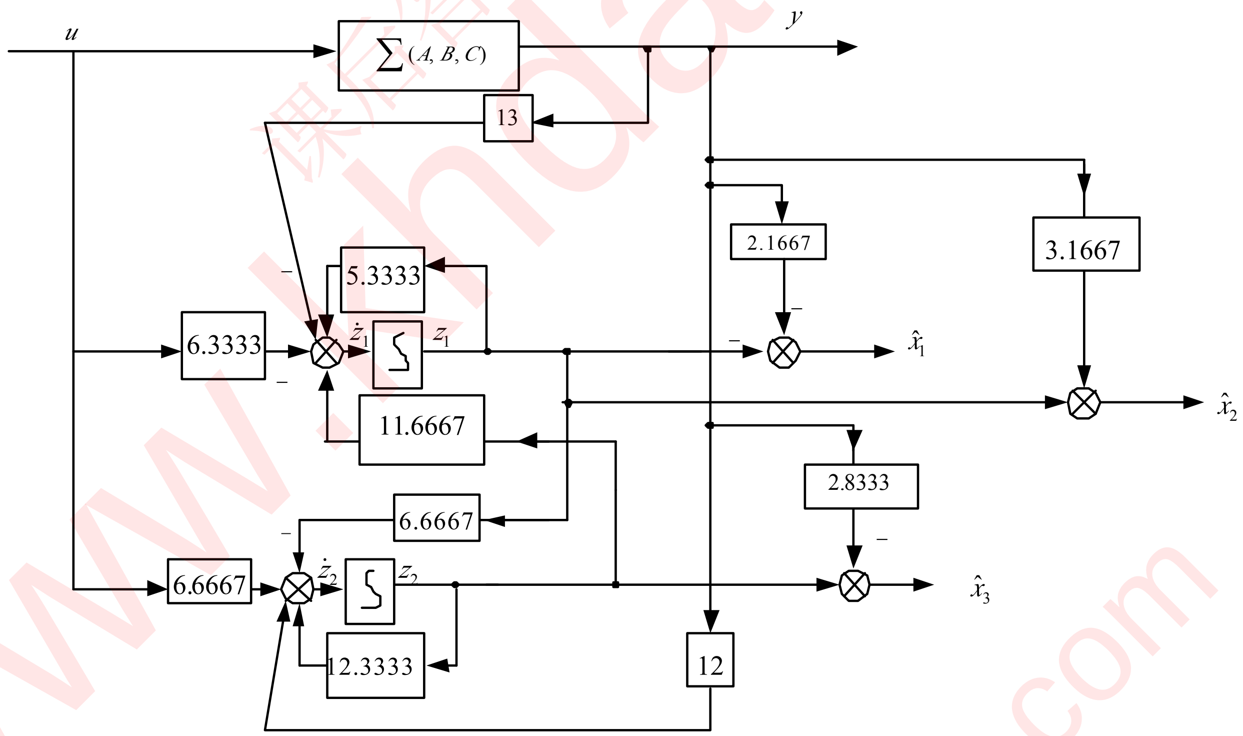
绘制模拟结构图

依据受控对象，降维观测器的状态方程，以及

原系统的降维观测器的输出方程：

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-z_1-2.1667y\\ z_1+3.1667y\\ z_2-2.8333y\end{bmatrix}$$

结构图如图题 3-5-8 图 2 所示：



题 3-5-8 图 2

3-5-9 已知系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$，

(1) 确定一个状态反馈矩阵 K，使闭环系统的极点为-3 和 $-\dfrac{1}{2}\pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

(2)确定一个全维状态观测器，并使观测器的极点全部为-5；

(3)确定一个降维状态观测器，并使观测器的极点在-5 处；

(4)分别画出闭环系统的结构图。

(5)求出闭环传递函数。

【解】：

(1)

系统的传递函数可写成：

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^3+3s+2s}$$

能控标准型为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+3)[(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]=s^3+4s^2+4s+3$$

反馈矩阵：

$$K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-0 & 4-2 & 4-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

（2）

确定能观性：

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, rank V_0=3$$

系统能观。

求观测器的希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+5)^3=s^3+15s^2+75s+125$$

求观测器特征多项式：

$$f(s)=|sI-A+LC|=s^3+(3+l_1)s^2+(3l_1+l_2+2)s+(l_3+2l_1+3l_2)$$

计算观测器系数矩阵：

$$令\ f^*(s)=f(s)\ 得\ L=\begin{bmatrix}12\\ 37\\ -10\end{bmatrix}$$

（3）

m=1，n=3，则 n-m= 2。

$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则输出本身为状态变量的单值函数，无须进行线性变换。

对受控对象状态空间表达式直接分块求状态观测器的反馈矩阵 $\bar{L}=\begin{bmatrix}\bar{l}_1\\ \bar{l}_2\end{bmatrix}_{2\times1}$ （一个输出两个状态）

$$c_1=1,\quad c_2=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\quad A_{21}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad A_{22}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$B_1=0,\quad B_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$f^*(s)=(s+5)^2=s^2+10s+25$$

$$f(s)=\left|sI-(A_{22}-LA_{12})\right|$$

$$=s^2+(l_1+3)s+(3l_1+l_2+2)$$

$$f^*(s)=f(s)\ \Rightarrow\ L=\begin{bmatrix}l_1\\l_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$$

降维观测器的状态方程 z

$$\dot{z}=\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=(A_{22}-LA_{12})(z+Ly)+(A_{21}-LA_{11})y+(B_2-LB_1)u$$

$$=\begin{bmatrix}-7 & 1\\ -4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-47\\-34\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

降维观测器的输出方程 $\hat{x}$

$$\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\ z+Ly\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\ z_1+7y\\ z_2+2y\end{bmatrix}$$

（5）

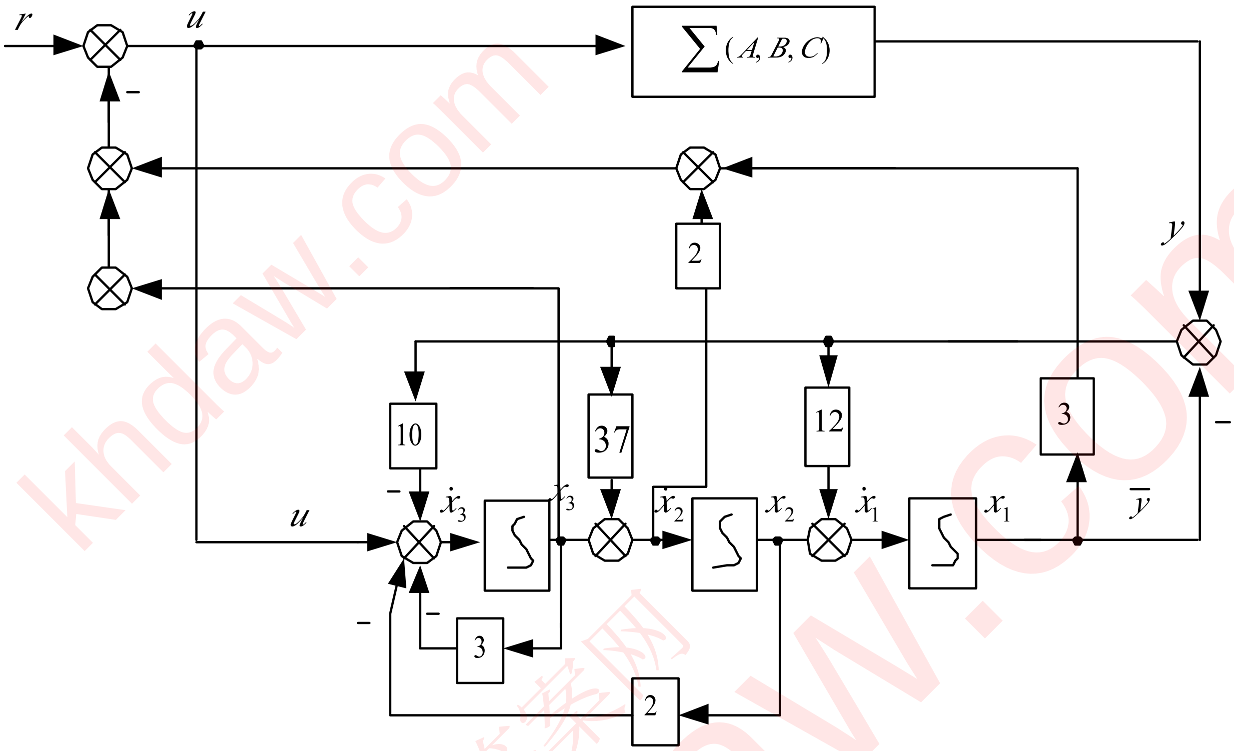
闭环传递函数为：

$$G_b(s)=\frac{1}{(s+3)[(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}=\frac{1}{s^3+4s^2+4s+3}$$

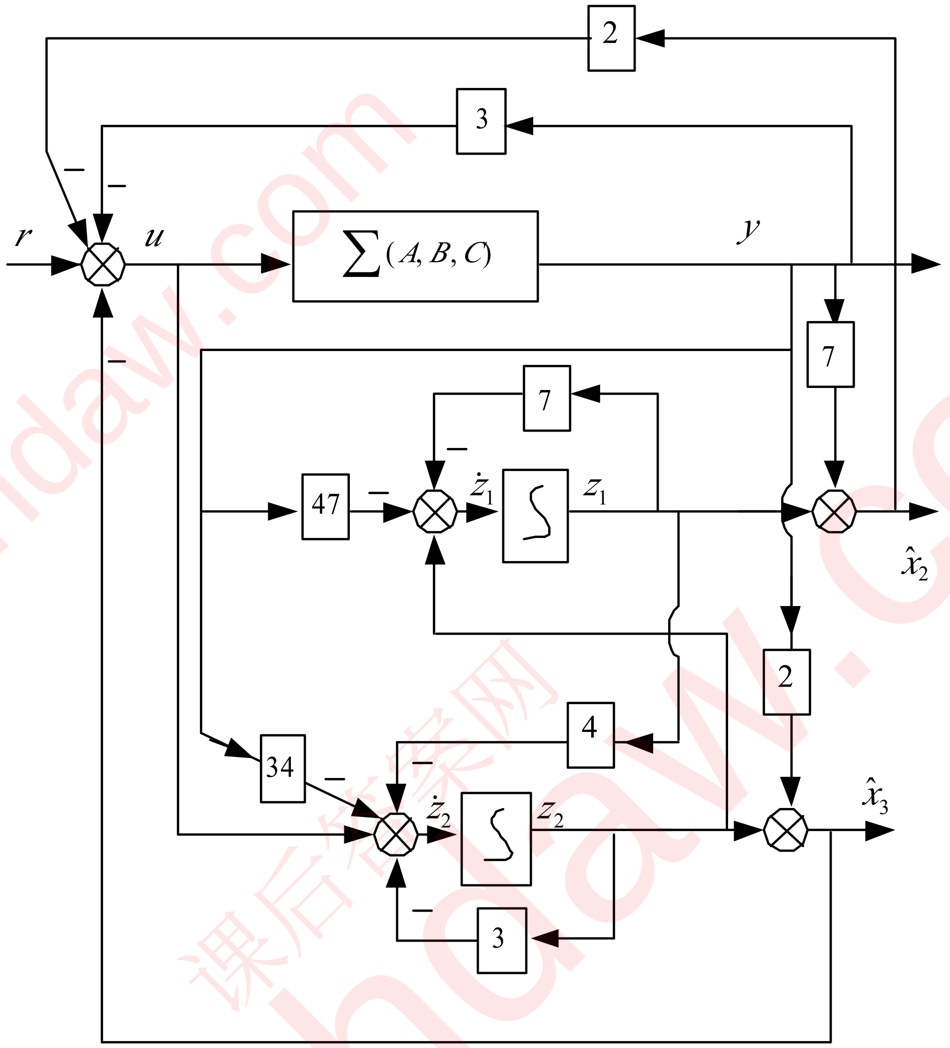
（4）

题（2）的结构图如图题 3-5-9 图 1 所示：

题（3）的结构图如图题 3-5-9 图 2 所示：



题 3-5-9 图 1



题 3-5-9 图 2

3-5-10 设系统的状态空间表达式为 $\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$，现引入状态反馈 $u=r-k\hat{x}$ 构成闭环系统，$\hat{x}$ 为 x 的估值。

(1) 写出该系统状态变量 x 的全维渐近观测器的状态方程；

(2) 写出带状态反馈全维观测器的闭环系统的状态方程，并画出包括状态反馈及全维观测器的闭环系统的结构图。

【解】：

（1）

$$\dot{\hat{x}}=Ly-LC\hat{x}+A\hat{x}+Bu=Ly+(A-LC)\hat{x}+Bu$$

（2）

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ \dot{\hat{x}}=LCx-LC\hat{x}+A\hat{x}+Bu=LCx+(A-LC)\hat{x}+Bu\end{cases}$$

$$u=r-K\hat{x}$$

$$y = Cx$$

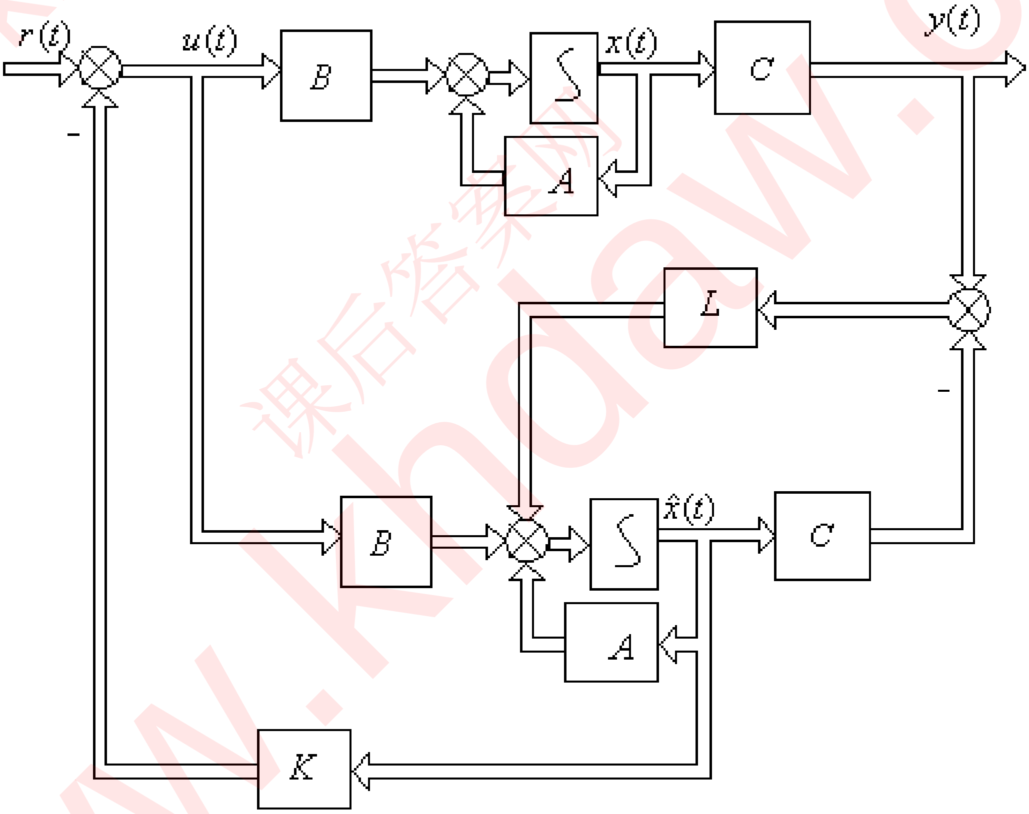
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(r - K\hat{x}) = Ax - BK\hat{x} + Br \\ \dot{\hat{x}} = LCx + (A - LC)\hat{x} + B(r - K\hat{x}) = LCx + (A - LC - BK)\hat{x} + Br \end{cases}$$

$$y = Cx$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

闭环系统结构图如图题 3-5-10 图所示：



题 3-5-10 图

3-5-11　已知系统的状态空间表达式为 $\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$，$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$

(1) 画出系统结构图；

(2) 求系统传递函数；

(3) 判定系统的能控性和能观性

(4) 求系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$；

(5) 当 $x(0)=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}, u(t)=0$ 时，系统的输出 $y(t)$；

(6) 设计全维状态观测器，将观测器的极点配置在 $-10\pm j10$ 处；

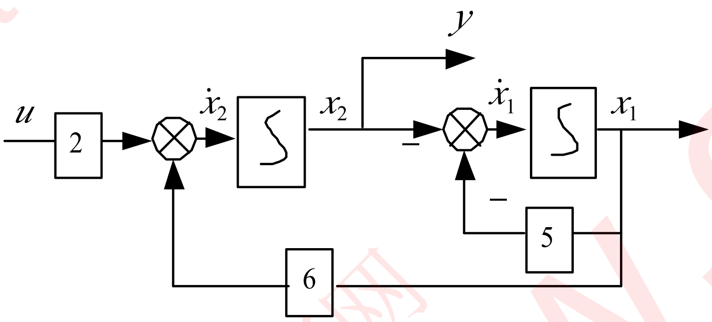
(7) 在（6）的基础上，设计状态反馈矩阵 K，使系统的闭环极点配置在 $-5\pm j5$ 处。

(8) 画出系统总体结构图。

【解】:

(1)

系统结构图如图题 3-5-11 图 1 所示：



题 3-5-11 图 1

(2)

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}b=\frac{2(s+5)}{(s+2)(s+3)}$$

(3)

传递函数无零极点对消，则既能控又能观。

或：

$$U_c=\begin{bmatrix}b & Ab\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}, rank\,U_c=2$$

$$V_0=\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\6 & 0\end{bmatrix}, rank\,V_0=2$$

系统既能控又能观。

(4)

$$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\-6 & s\end{bmatrix}^{-1}=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s}{(s+2)(s+3)} & \frac{-1}{(s+2)(s+3)}\\\frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s+5}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2e^{-2t}+3e^{-3t} & -e^{-2t}+e^{-3t}\\6e^{-2t}-6e^{-3t} & 3e^{-2t}-2e^{-3t}\end{bmatrix}$$

(5)

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2e^{-2t}+3e^{-3t} & -e^{-2t}+e^{-3t}\\6e^{-2t}-6e^{-3t} & 3e^{-2t}-2e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=9e^{-2t}-6e^{-3t}\qquad(t\geq 0)$$

（6）

观测器的希望特征多项式：

$$f^*(s)=(s+10)^2+100=s^2+20s+200$$

观测器矩阵为 $L=[l_1 \quad l_2]^T$，

观测器的特征多项式：

$$f(s)=|sI-(A-Lc)|=\left|\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$=s^2+(5+l_2)s+(5l_2+6l_1+6)$$

$$f(s)=f^*(s) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (5+l_2)=20 \\ (5l_2+6l_1+6)=200 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l_2=15 \\ l_1=\dfrac{119}{6}=19.83 \end{cases}$$

（7）

希望特征多项式：$f^*(s)=(s+5)^2+25=s^2+10s+50$

状态反馈后的特征多项式：

$$f(s)=|sI-(A-bK)|=\left|\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right|$$

$$=s^2+(5+2k_2)s+(10k_2-2k_1+6)$$

$$f(s)=f^*(s) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (5+2k_2)=10 \\ (10k_2-2k_1+6)=50 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k_2=2.5 \\ k_1=-\dfrac{19}{2}=-9.5 \end{cases}$$

$$K=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -9.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

（8）

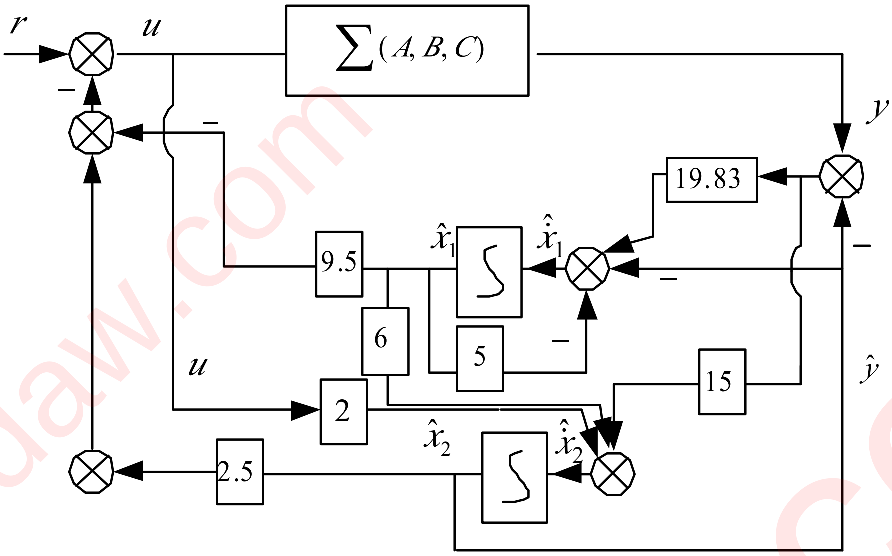
全维观测器的状态空间表达式为：

$$\dot{\hat{x}}=(A-LC)\hat{x}+Bu+Ly$$

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Bu+L(y-\hat{y})$$

$$\dot{\hat{x}}=\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u+\begin{bmatrix} 19.83 \\ 15 \end{bmatrix}(y-\hat{y})$$

系统总体结构图如图题 3-5-11 图 2 所示：


r
u
$\sum(A,B,C)$
y
19.83
$\hat{x}_1$
$\dot{\hat{x}}_1$
9.5
6
5
u
2
15
$\hat{y}$
$\hat{x}_2$
$\dot{\hat{x}}_2$
2.5

题 3-5-11 图 2