变分法在离子声波方程中的应用

摘　要

随着计算机科学的迅速发展，大型线性方程组的求解已经不成问题；但对于非线性方程，尤其是强非线性方程，迄今为止还没有一种通用的有效求解方法。自 20 世纪 60 年代开始，非线性科学得到了突飞猛进的发展。由于非线性方程问题的复杂性和特殊性，非线性方程没有统一的求解方法，因而出现了求解非线性方程的各种方法，所有这些方法都有一定的局限性。

本文把变分法应用于非线性离子声波方程，建立了其相应的变分原理。变分原理的建立除了在求解近似解析解方面有很大的实际价值外，它还能揭示方程的本质特征，因而变分法得到普遍的关注。

我们知道，大多数非线性波方程含有一阶导数，迄今无法寻求含一阶偏微分方程的变分原理。为了克服这个困难，我们引进适当的变换，使得变换后的方程就存在变分原理。

本文第一章首先介绍变分法的一些基本概念；一般来讲，建立非线性方程的变分原理比较困难的，为了阐述建立变分原理的方法，在第二章，我们给出了几个具体的例子来说明如何从场方程出发来建立其相应的变分原理。本章也简单介绍了变分反问题的一些基本方法。通过几个例子（非线性 Yang-Mill 方程和电化

学方程）显示半反推法是建立变分原理的有效方法；第三章介绍了求解非线性方程的几种常用方法，包括传统的摄动法和约化摄动法；第四章讨论了 KdV 方程变分原理的建立，并应用 Ritz 方法得到了孤立波解。与精确解比较说明变分法是求解非线性波动方程的有效方法之一；基于离子声波方程的复杂性，很难直接建立其相应的变分原理。为此在第五章，我们引进了一个特殊函数，建立了以特殊函数等为独立变量的广义变分原理。对变分原理进行适当的简化后，应用 Ritz 方法，得到了离子声波方程的一个新孤波解， 该孤波解揭示了波的振幅、波速以及孤子宽度之间的相互关系。

关键词 非线性波动方程，离子声波，孤波解，变分法，Ritz 法

VARIATIONAL APPROACH TO ION ACOUSTIC WAVE EQUATIONS

ABSTRACT

With the development of the computer science, there exits no difficulty in solving linear equations now, however, we have no universal approach to nonlinear equations especially those with strong nonlinearity. The nonlinear science has been caught much attention since 1960s, and the nonlinear equations are becoming richer and richer. The nonlinear equations have some special characters, and various different methods with merits on the one hand and disadvantages on the other hand are introduced to solve various nonlinear equations.

In this thesis, we apply the variational method to the ion acoustic wave equations, and it is shown to be a great success. In addition to the tremendous practical importance of variational principles in establishing approximate methods, there are some reasons of a more fundamental nature which motivate variational formulation in science.

As it is well known that there exists no variational formulation for differential equations with first-order derivatives which occurs in most nonlinear wave equations. In order to overcome the difficulty, a transformation is introduced. The transformed equations admit a variational formulation.

Chapter 1 introduces some basic characters of the variational principle. It is always difficulty to establish a variational principle for nonlinear equations, some examples are given in Chapter 2 to illustrate the way how to construct variational formulations direct from the field equations. It is shown that the semi-inverse method is very effective and convenient to construct variational formulae of some nonlinear equations, e.g., Yang-Mill equation, the nonlinear electrochemical equation and others. In chapter 3, various approximate analytical methods including classical perturbation method and reductive perturbation method are introduced. Chapter 4 discusses the establishment of a variational formulation for the well-known KdV equation. The Ritz method is applied to solve its approximate solitary solution. Comparing of the approximate solution with the exact one reveals the effectiveness of the variational method. Chapter 5 discusses the nonlinear ion acoustic wave equations in details. In order to establish a variational formulation, a special function is introduced. A generalized variational principle is established. Based on the established variational theory, a new approximate solitary solution is obtained by Ritz method, revealing the relationship among the velocity, height and the solitary width of the wave.

Liu Hongmei(Mechanics of Solids)

Supervised by Prof. He Jihuan

KEY WORDS: nonlinear wave equation, solitary wave, ion acoustic wave , variational method, Ritz method

东华大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：刘红梅

日期：2006年1月10日

东华大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权东华大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于 保密 □，在 ____ 年解密后适用本版权书。

不保密 ☑。

学位论文作者签名：刘红梅　　　　指导教师签名：何瑾馨

日期：2006年 1月 10日　　　　日期：06年 1 月 10日

第一章 绪 论

随着非线性科学研究的进展，非线性方程（包括非线性常微分方程、非线性偏微分方程、非线性差分方程和函数方程等)的求解已成为广大物理学、力学、地球科学、生命科学、应用化学、应用数学和工程技术科学工作者研究非线性问题所不可缺少的。

非线性方程没有统一的求解方法，它是应用数学的一个研究范畴。在一般非线性方程专著中基本上是从群分析或变换群的方法论述，有些非线性方程即便求出解析解，也是以隐函数形式出现，不便于应用。而非线性方程在实际应用中有着广泛的意义，对非线性方程解的研究成为广大科研工作者致力解决的重要问题。

而变分法是解微分方程的一种重要的近似方法，它把解微分方程问题转化为一个泛函的极值问题，通过求变分问题的极值（驻值）而给出方程的近似解。

1.1 变分法的研究现状及其发展

变分法的历史非常悠久，历史上最早的变分原理是由 P.Fermat 提出来的，Fermat 原理是根据当时的光学、哲学、神学和审美学的原理而提出来的，用数学公式可表示为

$$J=\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{v}\to\min \tag{1.1}$$

式中v是光线速度。

变分法的发展初期是和微积分的迅速发展分不开的，除了牛顿在1687年的工作外，1696年和1697年Bernoulli提出了最速下降线(brachisto-chrone)问题及短程线(geodesic line)问题。

最速下降线问题可用数学公式表示为

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx\to\min \tag{1.2}$$

许多当时最著名的数学家，诸如 Calileo、Leibniz、Newton 及 Jacobi 等都参加了该问题的研究，从而大大促进了变分法的发展。

20 世纪变分法发展非常迅速，这主要表现在弹性力学方面，如 1950 年钱令希提出了余能原理；同年又出现了 Helling-Reissner 广义变分原理[1,2,3]，1954 年又出现了胡海昌-鹫津久一朗(Hu-Washizu)广义变分原理[2,4]；1964 年钱伟长系统地论述了拉氏乘子法并第一次用拉氏乘子法推导得到了胡-鹫广义变分原理[1]，这无疑是一次重大飞跃。1983 年钱伟长首次发现临界变分现象，并应用高阶拉氏乘子法消除了临界变分现象，从而得到了更为一般的广义变分原理[1]，这是固体力学变分法的重要里程碑。在此之前，建立广义变分原理都是用先验的方法，即先列出泛函，然后证明泛函取驻值是否满足场方程和边界条件。

流体力学的第一条变分原理是 Kelvin 于 1849 年提出来的。对于理想流体，在相同的边界条件下，不可压势运动具有最小动能[5]。1868 年 Helmholtz 提出了不可压粘性流体的最小能耗原理。1929 年 Bateman 提出了第一条可压无旋理想流体的变分原理[5]。

Hamilton 原理在流体力学中的应用在上世纪 50 年代和 60 年代是一个热门话题。许多学者（如 Herivel)都想套用 Hamilton 原理来建立流体力学的变分原理。结果证明对于理想流体在 Lagrange 空间中的流动，Hamilton 原理是成立的；而在 Euler 空间中，这种努力曾不断遇到困难[6]，例如，1955 年 Herivel 曾在 Euler 空间中导出过理想流体的 Hamilton 型变分原理，但它并不能代表理想流体的所有流动，对于均熵流只能得到无旋方程，然而根据 Crocco 定理，均熵不一定无旋[7]。1963 年林家翘[8]对 Herivel 现象作认真研究，对 Herivel 变分原理加了三个所谓的林家翘约束后，变分原理可应用于一般的流体。1968 年 Seliger 和 Whitham[9]进一步发展了林家翘约束理论。1983 年 Ecer 和 Akay[10]为减少林家翘数作了很多努力，从而使得林家翘约束理论变得实用，并进行了大量的二维有限元计算，取得了很好的成果。1993

年刘高联[11]应用林家翘约束理论建立了变域变分理论，谢定裕[12]和Finlayson[5]分别将林家翘约束理论用于分层流体变分原理和磁流流体的变分原理的建立。1984 年钱伟长[13]运用权余法和拉氏乘子法，推导出了粘性流体力学的广义变分原理。

从数学的角度看，变分法研究的是极值(或驻值)性质。变分法的一个最重要的优点是我们能够利用变分直接方法来解决工程上的一些问题，它已经广泛应用于数学、物理、力学、控制论等各个领域，是研究物质系统的能量(泛函)与方程之间的关系的一门科学。

根据泛函求极值的方法为我们许多领域的问题提供了不同的概念，求解一些泛函的极值问题完全等价于求解某些与之相应的微分方程。所以，这种方法对不同领域中的许多数学物理问题赋予了一种完全不同的新观点。例如，在光学中，一束光线在真空中从一点到另一点所需的时间相对于一族“容许”的光程取极值等价于辐射光程的Maxwell方程。这就是著名的Fermat原理。在质点力学中，对于动能和位能的差值(即拉格朗日函数)在二点之间沿一族“容许”的路径积分而取极值所得到的路程与应用牛顿定理推导而得出的正确路程完全一致，这就是Hamilton原理。在弹性力学中，我们首先需要研究的是所谓的最小位能原理。这一原理是对一个物体的总位能相对于一族容许的位移场取极值，使满足物体的平衡方程。

1.2 非线性方程的研究状况及其发展

自 20 世纪 60 年代开始，非线性科学飞速发展，因而非线性科学的内容也日趋丰富，在物理学、力学、地球科学、生命科学、应用化学等各个学科中有着广泛的应用，随着生产力发展的需要，人们必须深入到非线性问题的研究领域中去。以力学学科为例，正如钱伟长在“关于非线性力学”[14]一文中指出的，本世纪 40 年代人造纤维与塑料的问世(它们的本构关系是非线性的)，航空工业采用薄的固体材料(因而产生大变形)，飞机飞行速度要突破“声障”(跨声速方程)，这就是非线性力学出现的工业与生产背景。在非线性领域中，由于叠加原理不适用了，原先那些数学方法有些就失效了。尽管线性方程定解问题的适定性(存在性、唯一性和稳定性)在非线性方程中同样

存在，但非线性方程的适定性问题要复杂得多，并且非线性方程有许多自身的特点，这就导致了非线性方程没有统一的求解方法。

由于非线性方程在实际应用中有着广泛的意义，从而对非线性方程解的研究成为广大科研工作者致力解决的重要问题。渐近分析是理论研究中进行近似计算的有效方法，渐近方法中的奇异摄动理论是解决弱非线性问题行之有效的手段之一。目前，国际上有关渐近理论与摄动方法的书籍大体上有两类：一类是 Bender 和 Orszag 的《高等应用数学方法》[15]和 Nayfeh 的《摄动方法》[16]为代表。另外，在很多文献中着重给出了一些求解物理学中的非线性方程的方法，主要有试探函数法、摄动法、行波解、相似变换和自相似解、特殊变换法、散射反演法及 Backlund 变换等各种方法[17,18]。对于目前常用的数值方法在求解强非线性方程时会遇到一些困难，如对初始近似非常敏感，当初始近似解在真解附近时，则容易收敛；但当初始近似解远离真解时，迭代过程很难收敛。有些非线性方程即便求出精确解，也是以隐函数或特殊函数的形式出现，不便于应用与理解。

1.3 本文的主要工作及其意义

本论文将从变分法的角度来研究某些非线性方程，通过建立起非线性方程的变分原理来研究所讨论的方程。为此，我们建立了一些常见的非线性方程的变分原理，通过对变分原理的研究可更深入地了解这些非线性方程及其解的主要特征，进而得到非线性方程的近似解，为解非线性方程提供一个有效的解题思路。

首先，并不是所有的微分方程都能找到相应的变分原理，本文将对如何建立变分原理作一简单论述，通过各种方法进行类比，然后结合实例，如 Yang-Mill 方程、非线性电化方程等，建立相应的变分原理。

其次，大部分非线性方程都存在某些基本特征，这些基本特征可用非线性分析方法近似地求得，本文对某些非线性方程的各种解法做出比较，再结合建立起的变分原理，利用 Ritz 法来求解非线性方程。寻求离子声波方程的孤立波解一直是人们关注的问题之一，本论文将从变分法入手，得到了一个新的孤立波解。

第二章 建立变分原理的方法

建立变分原理目前还没有普遍适用的方法，是变分学中一个很难的课题，特别是对于强非线性方程，很难建立其相应的变分原理。建立变分原理有很多种方法，有经典反推法[19,20,21,22]、变量变换法[23,24]、积分算子法[20]、钱伟长权余法[1] 等。刘高联在流体力学变分原理的研究上也做了很多工作，特别是在流体力学反问题和杂交问题的变分原理的建立做了很多创造性的工作[25]。文献[6]提出了一种建立广义变分原理的方法--半反推法。

本章将用具体例子阐述如何应用半反推法建立非线性方程的变分原理。首先介绍一下变分法的概念。

2.1 变分法的概念[26]

变分法是解微分方程的一种重要的近似方法，它把解微分方程问题转化为一个泛函的极值问题，即变分问题，通过求变分问题近似解而给出方程的解。最近应用变分法求解非线性方程得到了普遍关注，如在文献[15]中讨论了如何应用变分法求解非线性 Schrödinger 方程。

为了阐述变分法的基本思想，我们首先考虑泛函的基本概念。一个自变量 x 的函数 $y=y(x)$，它随自变量 x 变化，如果有另一个变量 J，其值取决于函数关系 $y(x)$，称 J 是 $y(x)$ 的泛函，记为 $J[y(x)]$。注意它依赖于 $y(x)$，而不是简单的 y 值。

例如一个质点沿光滑的轨道 $y=y(x)$ 从 A 点自由下滑到 B 点，如下图所示。

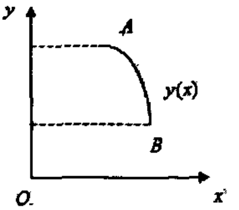

图 2－1

所需时间

$$J=\int dt=\int\frac{ds}{v}=\int_A^B\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}dx \tag{2.1}$$

J 的大小与轨道 $y(x)$ 有关，时间 J 取决于整个轨道形状则不是 y 值，即取决于函数关系 $y=y(x)$，J 称为 $y(x)$ 的泛函。

如果我们要选取一个适当的轨迹 $y=y(x)$，使质点从 A 自由下滑到 B 所需时间最短，这就是求泛函 $J[y(x)]$ 的极值问题。泛函的极值问题称为变分问题。在物理学中变分原理有广泛的应用，例如光学中的 Fermat 原理：光从某点传播到另一点所取的实际路程是使花费的时间为极值，力学中的最小作用量原理。在数理方法中，变分法也是一种重要的求解特征值、特征向量的有效方法。

2.2 变分问题的求解[27]

求解变分问题方法分为两类：一类是间接方法，将变分问题转化为微分方程(称 Euler 方程)再求解；另一类是直接方法，是指不通过求解 Euler 方程而直接从泛函出发，根据问题分析，直接引入含有几个待定系数的试函数，利用极值条件，求得待定系数值。

2.2.1 Euler 方程

泛函的极值（或驻值）的必要条件称为 Euler 方程。Euler 方程是将变分问题转化为微分方程的求解。

为简单起见，设泛函 J 只依赖于自变量 x 函数 $y(x)$ 和导数 $y'(x)$，即

$$J(y(x))=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{2.2}$$

且满足固定边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \tag{2.3}$$

设 F 对 x,y,y' 是连续可导的，当函数 $y(x)$ 有微小变化 $y\to y+\delta y$ （δy 称为变分），泛函变化可写成如下形式：

$$\begin{aligned}J(y+\delta y)-J(y)&=\int_{x_0}^{x_1}[F(xy+\delta yy'+\delta y')-F(x,y,y')]dx\\&\approx\int_{x_0}^{x_1}(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx\end{aligned} \tag{2.4}$$

泛函的变分可表示为

$$\delta J(y)=\int_{x_0}^{x_1}(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y')dx \tag{2.5}$$

应用积分算子与微分算子的可交换性，即

$$\delta y'=\delta\frac{d}{dx}y=\frac{d}{dx}(\delta y)$$

则式(2.5)中

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y)dx$$

$$=\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y)dx \tag{2.6}$$

取固定端点变分为零，$\delta y\big|_{x=x_0}=0$，$\delta y\big|_{x=x_1}=0$，则有

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'dx=-\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})\delta y dx \tag{2.7}$$

将式(2.7)代入式(2.5)得到

$$\delta J(y)=\int_a^b(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'}))\delta y dx=0 \tag{2.8}$$

由变分δy是任意的，上式为零的必要条件是

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})=0\\ y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1\end{cases} \tag{2.9}$$

这就是对应泛函(2.2)变分问题的 Euler 方程。

对于较复杂一些的泛函，其 Euler 方程可以仿照式(2.9)推导过程给出，例如

(1) 泛函J取决于$y(x)$和$z(x)$两个函数的情况

$$J=[y(x),z(x)]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx \tag{2.10}$$

由$\delta\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx=0$给出 Euler 方程

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial z'})=0\end{cases} \tag{2.11}$$

(2) 泛函取决于 $y(x)$ 及 y 的高阶导数，由

$$\delta\int_a^b F(x,y,y',y'',y''')dx=0 \tag{2.12}$$

导出 Euler 方程

$$\frac{dF}{dz}-\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial y'})+\frac{d^2}{dx^2}(\frac{\partial F}{\partial y''})-\frac{d^3}{dx^3}(\frac{\partial F}{\partial y'''})=0 \tag{2.13}$$

(3) 泛函取决于多元函数 $u(x,y)$，由

$$\delta\int_a^b F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy=0 \tag{2.14}$$

导出 Euler 方程

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial u_x})-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial F}{\partial u_y})=0 \tag{2.15}$$

2.2.2 Ritz 方法

这是一种直接方法，它是根据问题分析给出试函数。其特点是试函数必须满足边界条件。试函数中包括几个待定系数，即假设

$$y(x)=f(x,c_1,c_2\cdots) \tag{2.16}$$

使泛函 J 成为 $c_1,c_2,\cdots$ 的多元函数。泛函的极值(驻值)问题转化为多元函数的极值(驻值)问题：

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}=0 \tag{2.17}$$

求解方程组(2.17)即可得到 $c_1,c_2,\cdots$ 的值，从而得到问题的近似解。

下面举例说明 Ritz 方法的具体应用。

考虑泛函

$$J[y(x)]=\int_0^1(y'^2-y^2-2xy)dx \tag{2.18}$$

求 $y(x)$ 取 J 极小值，其中 $y(0)=0, y(1)=0$。

根据边界条件选择试函数：

$$y_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(1-x)x^k \tag{2.19}$$

取 $n=1,2$ 来计算近似值。先求 $n=1$ 的情形，此时有

$$y_1(x)=a_1(1-x)x \tag{2.20}$$

代入泛函中，得

$$\begin{aligned}J(a_1)&=\int_0^1[a_1^2(1-2x)^2-a_1^2(1-x)^2-2a_1(1-x)x^2]dx\\&=\frac{3}{10}a_1^2-\frac{1}{6}a_1\end{aligned} \tag{2.21}$$

令

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}=0 \tag{2.22}$$

从而得

$$a_1=\frac{5}{18} \tag{2.23}$$

于是得以下近似解

$$y_1(x)=\frac{5}{18}(1-x)x \tag{2.24}$$

再求 $n=2$ 的情形，此时设

$$y_2(x)=a_1(1-x)x+a_2(1-x)x^2=x(1-x)(a_1+a_2x) \tag{2.25}$$

代入泛函中，且令

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}=0,\frac{\partial J}{\partial a_2}=0 \tag{2.26}$$

从而得

$$a_1=\frac{71}{369},a_2=\frac{7}{41} \tag{2.27}$$

于是得以下近似解

$$y_2(x)=(1-x)x(\frac{71}{369}+\frac{7}{41}x) \tag{2.28}$$

对于泛函(2.18)的解析解为

$$y(x)=\frac{\sin x}{\sin 1}-x \tag{2.29}$$

近似解与精确解的比较如下图所示：

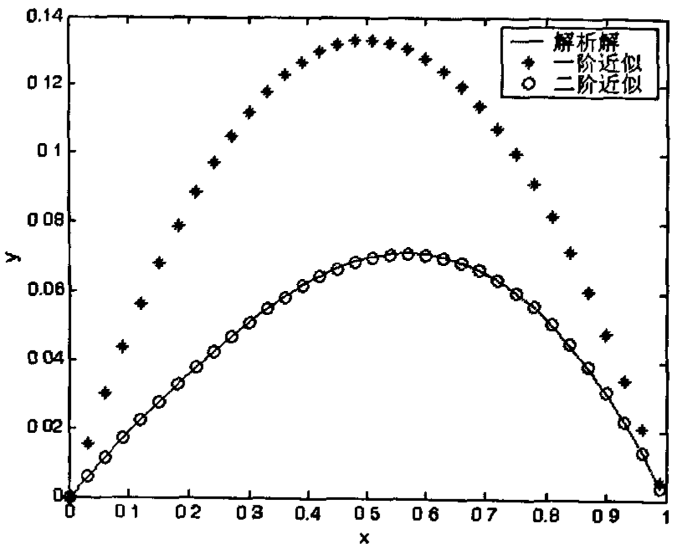

图 2-2

从上图可以看出，Ritz 法是一种有效的方法，上例中二阶近似的精度已经相当高了。

2.3 变分反问题

把微分方程及边界条件转化为泛函极值问题，称之为变分反问题。变分问题一直被学术界所重视。1978年的IUTAM会议上一些学者提出一些新的建立变分原理的方法，如Athel等[28]提出了建立耗散系统的变分原理。由于奇数阶导数不存在相应的变分原理，所以在处理时需要引入伴随变量。刘高联在变分反问题也做了大量工作，提出各种流体力学反问题和杂交问题的变分原理。 最新变分反问题的进展可参考Sieniutycz和Farkas 的专著[29]。在文献[29]中研究了各种变分反问题，包括Navier-Stokes方程的变分原理。 本文将应用半反推法建立问题的变分原理。

半反推法的基本思想是构造某一形式的试泛函，然后使其Euler方程满足场方程。在文献[6]中，对如何寻找试泛函有详细的论述。半反推法主要由三条路线组成：第一条，从已知的场方程及边界条件出发构造多变量的广义变分原理；第二条，从已知的单变量或少变量的变分原理出发构造多变量的广义变分原理；第三条，通过构造一个适当的能量试泛函来建立多变量广义变分原理。

下面以几个非线性方程为例阐述半反推法的基本思想。

2.3.1 Yang-Mills 方程

我们考虑Yang-Mills方程[17]如下形式：

$$\beta^2 y'' - e^2\rho^2 z^2 y = 0 \tag{2.30}$$

$$\beta^2 z'' - e^2\alpha^2\rho^2 y^2 z = 0 \tag{2.31}$$

上述方程中各变量的物理意义见文献[17]。

该方程是耦合的方程组，由(2.30)式我们可以设泛函的形式可表示为

$$J(y,z)=\int(\frac{1}{2}\beta^2y'^2+\frac{1}{2}e^2\rho^2z^2y^2+F)dx \tag{2.32}$$

式中 F 为 z 或其导数的待定函数。

上述试泛函的特点是：对 y 独立变分即可得到方程(2.30)，这样 F 只是 z 的函数. 对 z 独立变分，我们得

$$e^2\rho^2zy^2+\frac{\delta F}{\delta z}=0 \tag{2.33}$$

式中 $\frac{\delta F}{\delta z}$ 为对 z 的变分导数，可定义为

$$\frac{\delta F}{\delta z}=\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_x}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial z_{xx}}-\cdots$$

我们的目标是使方程(2.33)与方程(2.31)等价，为此我们设

$$\frac{\delta F}{\delta z}=-e^2zy^2=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}z'' \tag{2.34}$$

从上式(2.34)我们可确定 F，得

$$F=\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}z'^2 \tag{2.35}$$

这样我们得到了以下的一个变分原理：

$$J(y,z)=\int(\frac{1}{2}\beta^2y'^2+\frac{\beta^2}{2\alpha^2}z'^2+\frac{1}{2}e^2\rho^2z^2y^2)dx \tag{2.36}$$

我们取泛函 $J(y,z)$ 的变分 $\delta J(y,z)=0$，则有

$$\delta J(y,z)=\delta\int(\frac{1}{2}\beta^2y'^2+\frac{\beta^2}{2\alpha^2}z'^2+\frac{1}{2}e^2\rho^2z^2y^2)dx$$

$$= \int(\beta^2 y'\delta y' + \frac{\beta^2}{\alpha^2} z'\delta z' + e^2\rho^2 z^2 y\delta y + e^2\rho^2 z y^2 \delta z)dx$$

$$= \int(-\beta^2 y''\delta y - \frac{\beta^2}{\alpha^2} z''\delta z + e^2\rho^2 z^2 y\delta y + e^2\rho^2 z y^2 \delta z)dx$$

$$= \int[-(\beta^2 y'' - e^2\rho^2 z^2 y)\delta y - (\frac{\beta^2}{\alpha^2} z''\delta z - e^2\rho^2 z y^2)\delta z]dx = 0 \tag{2.37}$$

由δy及δz的任意性，我们得到Euler方程

$$\beta^2 y'' - e^2\rho^2 z^2 y = 0 \tag{2.38}$$

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} z''\delta z - e^2\rho^2 z y^2 = 0 \tag{2.39}$$

化简(2.38)及(2.39)即得(2.30)及(2.31)。这也正表明了(2.30)及(2.31)这个耦合方程组是变分问题(2.36)的Euler方程。

2.3.2 非线性电化学系统

近年来,很多学者对非线性电化学的研究做出了一些模型[30,31], Scott 等[30]得到固体聚合物电解质的一个近似模型，其方程如下：

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} - M_1 c\exp(M_3\eta) = 0 \tag{2.40}$$

$$\frac{d^2 c}{dz^2} - M_2 c\exp(M_3\eta) = 0 \tag{2.41}$$

其中η是标准超电势，c是标准电流密度，z是标准距离，M_1、M_2及M_3是常参数。

其边界条件：

$$\eta'(0) = 0, c(0) = C_0 \tag{2.42}$$

$$c'(0)=0,\eta(1)=E_r \tag{2.43}$$

对于方程(2.40)和(2.41)看起来似乎很简单，但是要求它的数值解或者解析解都很难的。Cheng 等应用 Adomian 分裂算法[32]讨论了这个问题，但在这个过程中，计算 Adomian 多项式相当繁琐且得到的解是弱收敛的。而变分法可克服这些缺点，我们应用半反推法[6]来建立其变分原理。

由(2.40)和(2.41)得到

$$c=\frac{M_2}{M_1}\eta+K_1z+K_2 \tag{2.44}$$

其中 K_1,K_2 是常数。

把(2.44)代入(2.40)得到

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}-(M_2\eta+M_1K_1z+M_1K_2)e^{M_3\eta}=0 \tag{2.45}$$

由(2.45)式我们可以设其泛函形式表示为

$$J(\eta)=\int[-\frac{1}{2}(\frac{d\eta}{dz})^2-\frac{M_1}{M_3}(K_1z+K_2)e^{M_3\eta}+F]dz \tag{2.46}$$

对 η 独立变分得

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}-(M_1K_1z+M_1K_2)e^{M_3\eta}+\frac{\delta F}{\delta\eta}=0 \tag{2.47}$$

于是有

$$\frac{\delta F}{\delta\eta}=-M_2\eta e^{M_3\eta} \tag{2.48}$$

由于

$$\int M_2\eta e^{M_3\eta}\delta\eta dz=\delta\int M_2\eta e^{M_3\eta}d\eta=\delta\int\frac{M_2}{M_3}\eta d(e^{M_3\eta})$$

$$=\delta\int(\frac{M_2}{M_3}\eta e^{M_3\eta}-\frac{M_2}{M_3^{\,2}}e^{M_3\eta})dz \tag{2.49}$$

因此

$$F=-(\frac{M_2}{M_3}\eta e^{M_3\eta}-\frac{M_2}{M_3^{\,2}}e^{M_3\eta}) \tag{2.50}$$

于是得到(2.45)对应的变分原理

$$J(\eta)=\int[\frac{1}{2}(\frac{d\eta}{dz})^2+M_2(\frac{1}{M_3}\eta-\frac{1}{M_3^{\,2}})\exp(M_3\eta)]dz$$

$$+\int[\frac{M_1}{M_3}(K_1z+K_2)\exp(M_3\eta)]dz \tag{2.51}$$

求其 Euler 方程得

$$\frac{dL}{d\eta}-\frac{d}{dz}(\frac{dL}{d\eta_z})=M_2\eta\exp(M_3\eta)$$

$$+M_1(K_1z+K_2)\exp(M_3\eta)-\frac{d}{dz}(\frac{d\eta}{dz})=0 \tag{2.52}$$

通过化简，我们可发现(2.52)与(2.45)是等价的。

2.3.3 化学反应

考虑一化学扩散反应[33]

$$\frac{\partial c'}{\partial t}=\nabla\cdot D_e\nabla c'-R_A \tag{2.53}$$

其中c'是化学反应含量，$-R_A$是每单位体积的化学反应率，D_e是有效扩散系数.

假设此反应的扩散反应过程是稳定的，方程(2.53)可化为

$$D_e\left(\frac{\partial^2 c'}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial c'}{\partial r}\right)=R_A \tag{2.54}$$

其边界条件为

$$\frac{\partial c'}{\partial r}=0,\ c'=c_s \tag{2.55}$$

引入变量$C=c'/c_s$和$R=r/r_0$，于是我们便得到以下方程[33]

$$\frac{\partial^2 C}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial C}{\partial R}=\phi^2 C^n \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial C}{\partial R}(0)=0,\quad C(1)=1 \tag{2.57}$$

这里$\phi=\sqrt{{r_0}^2 k_v {c_s}^{n-1}/D_e}$，$k_v$是化学反应常数。

对于式(2.56)变形得

$$R^2\frac{\partial^2 C}{\partial R^2}+R\frac{\partial C}{\partial R}=R^2\phi^2 C^n \tag{2.58}$$

由于

$$\delta\int\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\partial C}{\partial R}\right)^2 dR=\int R^2\frac{\partial^2 C}{\partial R^2}\delta C dR \tag{2.59}$$

$$\delta\int\frac{\phi^2 R^2}{n+1}C^{n+1}dR=\int R^2\phi^2 C^n\delta C dR \tag{260}$$

于是得到下面的变分原理

$$J(C)=\int_0^1\{\frac{1}{2}R^2(\frac{\partial C}{\partial R})^2+\frac{\phi^2R^2}{n+1}C^{n+1}\}dR \tag{2.61}$$

式(2.61)相应变分问题的 Euler 方程

$$\frac{\partial L}{\partial C}-\frac{\partial}{\partial R}(\frac{\partial L}{\partial C_R})=0 \tag{2.62}$$

其中 $C_R=\partial C/\partial R$， L 为 Lagrange 函数：

$$L=\frac{1}{2}R^2(\frac{\partial C}{\partial R})^2+\frac{\phi^2R^2}{n+1}C^{n+1} \tag{2.63}$$

这样我们可得到泛函(2.61)的 Euler 方程：

$$\phi^2R^2C^n-\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial R}{\partial C})=0 \tag{2.64}$$

方程(2.64)与(2.58)等价。

对微分方程转化为变分问题，这样就可利用 Ritz 方法求得近似解，从而得到原微分方程的近似解。

利用 Ritz 方法，可以选择满足边界条件 $\frac{\partial C}{\partial R}(0)=0$ 和 $C(1)=1$ 的试函数，进而得到其近似解。

为了说明问题，讨论 $\phi=1$ 时近似解与精确解的比较，讨论 $n=1$ 和 $n=5$ 的情况。

1） 当 $n=1$ 时，取一阶近似，由边界条件令

$$C=a+(1-a)R^2 \tag{2.65}$$

把(2.65)代入(2.61)并结合 $n=1$，得

$$J(a)=\int_0^1\{\frac{1}{2}R^2(-2aR+2R)^2+\frac{\phi^2}{2}R^2[a+(1-a)R^2]^2\}dR \tag{2.66}$$

由 Ritz 法，令

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0 \tag{2.67}$$

由此得

$$a=0.8478261 \tag{2.68}$$

因而得一阶近似为

$$C=0.8478261+0.1521739R^2 \tag{2.69}$$

取二阶近似，同样由边界条件，令

$$C=a+bR^2+(1-a-b)R^3 \tag{2.70}$$

同样把(2.70)代入(2.61)并结合 $n=1$，由 Ritz 法得到二阶近似为

$$C=0.85146871+0.13371931R^2+0.01481198R^3 \tag{2.71}$$

由此我们可以进行比较，如图 2-2 所示

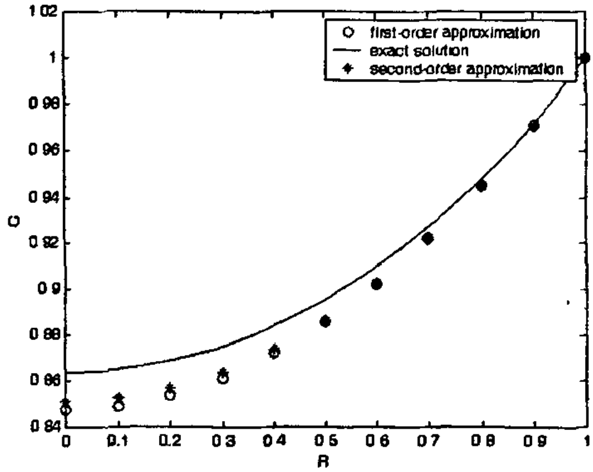

图 2-2

2) 当 $n=5$ 时，同理可以得到一阶近似和二阶近似，如图 2-3 所示：

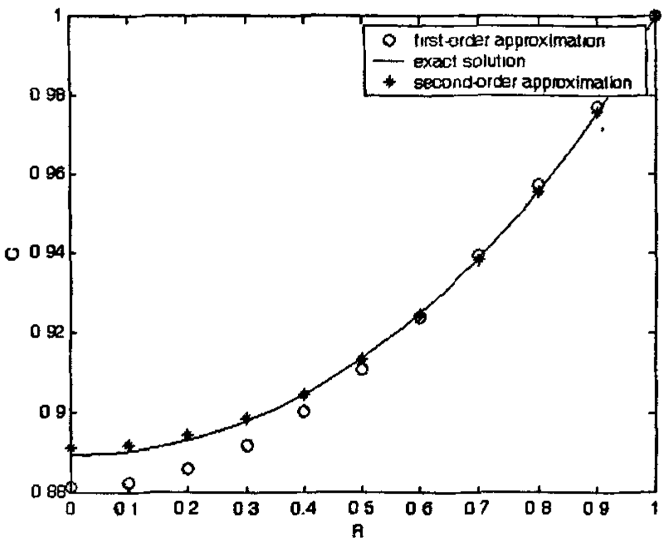

图 2-3

由以上几个例子可看出，变分法是求解非线性方程的有效数学工具，而半反推法在建立变分原理的有效方法之一。

第三章 求非线性方程的一些解法

尽管绝大多数非线性方程很难求其精确解，但一般来讲，大部分非线性方程都存在某些基本特征，这些基本特征可用非线性分析方法近似地求得，如果再结合数值方法，则可求解绝大多数非线性方程。

对于一般相对简单和经典的非线性方程，主要是常微分方程、差分方程和函数方程的求解，这些利用简单变换和直接积分的方法求解。

下面针对其中的方法并结合文献[16][17]对一些具体非线性方程的解法作一阐述。

3.1 摄动法

摄动法[16]是求解非线性方程的一种重要的方法，这在很多文献中都出现过，这种方法的第一步是在方程中引进无量纲的小参数ε ($0<\varepsilon\ll 1$)；第二步是将方程的解展开为小参数ε的幂级数，从而可以依次求得方程的各级近似解；第三步是分析摄动级数的收敛性，它通常在自变量变得很大时不收敛，为了解决这个问题在经典的正规摄动法的基础上出现了许多奇异摄动法。

对于正规摄动法、多尺度方法、PLK 方法、平均值方法等方法[17]在这里不一一阐述，仅对约化摄动法作一详细的说明。

约化摄动法是在 PLK 方法[17]的基础上发展起来的一种摄动方法，其目的是化复杂的非线性方程或方程组为比较简单的且可准确求解的非线性演化方程，如 Burgers 方程、KdV 方程、mKdV 方程和非线性 Schrödinger 方程等。

约化摄动法的第一步是作所谓 GM(Gardner-Morikawa)变换，第二步再作摄动展开，然后再化复杂的非线性方程或方程组为简单的非线性方程。

3.1.1 GM(Gardner-Morikawa)变换[17]

约化摄动法常用于求解非线性波动，但不同的非线性波动受不同的物理规律控制，频散系数不同，因而慢变的空间、时间尺度也不同。设ε为一无

量纲的小参数(它通常为无量纲振幅)，则通常的 GM 变换的形式为

$$\xi=\varepsilon^{\alpha}(x-ct),\tau=\varepsilon^{\beta}t \tag{3.1}$$

其中α,β和c为常数。

下面是不同非线性方程的 GM 变换。

KdV 方程：

$$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-ct),\tau=\varepsilon^{3/2}t \tag{3.2}$$

Burgers 方程：

$$\xi=\varepsilon(x-ct),\tau=\varepsilon^{2}t \tag{3.3}$$

mKdV 方程：

$$\xi=\varepsilon(x-ct),\tau=\varepsilon^{3}t \tag{3.4}$$

非线性 Schrödinger 方程：

$$\xi=\varepsilon(x-c_{g}t),\tau=\varepsilon^{2}t \tag{3.5}$$

在(3.5)式中c_g表群速度。

由此可见，对于约化摄动法首先需要确定(3.1)式的α,β值，这个问题需要根据具体的方程具体对待。

3.1.2 约化摄动法

为了说明约化摄动法，我们举例说明。

浅水波的 Boussinesq 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}+\dfrac{1}{3}H\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}=0\\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\end{cases}\tag{3.6}$$

第一步，作 GM 变换，即利用式(3.2)。在此变换下有

$$\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial \tau}-\varepsilon^{1/2}c\frac{\partial}{\partial \xi},\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial \xi}\tag{3.7}$$

将(3. 7)代入(3. 6)得

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial \tau}-c\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+u\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+g\dfrac{\partial h}{\partial \xi}+\dfrac{H}{3}(\varepsilon^3\dfrac{\partial^3 u}{\partial \tau^2\partial \xi}-2\varepsilon^2 c\dfrac{\partial^3 u}{\partial \tau\partial \xi^2}+\varepsilon c^2\dfrac{\partial^3 u}{\partial \xi^3})=0\\ \varepsilon\dfrac{\partial h}{\partial \tau}-c\dfrac{\partial h}{\partial \xi}+h\dfrac{\partial h}{\partial \xi}+h\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=0\end{cases}\tag{3.8}$$

第二步，对 u 和 h 作摄动展开。因静止时 $(u=0)$ 流体深度为 H，因此，摄动展开应为

$$\begin{cases}h=H+\varepsilon h_1+\varepsilon^2 h_2+\cdots\\ u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots\end{cases}\tag{3.9}$$

将(3.9)代入(3.8)，得到其一阶近似和二阶近似方程组分别为

$$\begin{cases}-c\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}+g\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi}=0\\ -c\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi}+H\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi}=0\end{cases}\tag{3.10}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi} + u_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi} + g\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} + \dfrac{1}{3}c^2 H\dfrac{\partial^3 h_1}{\partial \xi^3} = 0 \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial \tau} - c\dfrac{\partial h_2}{\partial \xi} + u_1\dfrac{\partial h_1}{\partial \xi} + h_1\dfrac{\partial u_1}{\partial \xi} + H\dfrac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

一阶近似(3.10)的两个方程分别对ξ积分，并取积分常数为零，则得到

$$cu_1 = gh_1,\quad ch_1 = hu_1 \tag{3.12}$$

由此有

$$c^2 = gH = c_0{}^2 \tag{3.13}$$

由(3.11)和(3.13)得二阶近似

$$\frac{\partial h_1}{\partial \tau} + \frac{3c_0}{2H}h_1\frac{\partial h_1}{\partial \xi} + \frac{1}{6}c_0 H\frac{\partial^3 h_1}{\partial \xi^3} = 0 \tag{3.14}$$

这就是 KdV 方程。

3.2 行波解

求非线性方程的行波解是将方程的解写成下列形式：

$$u = u(\xi),\quad \xi = x - ct \tag{3.15}$$

其中c为常数，相当于波的移动速度。

下面以广义的热传导方程为例说明一下。

广义的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial}{\partial x}(u^\alpha\frac{\partial u}{\partial x}) \tag{3.16}$$

其中κ为导温系数，α为常数。当$\alpha=0$时，方程(3.16)化为线性热传导方程。

把(3.15)式代入方程(3.16)，得

$$-c\frac{du}{d\xi}=\kappa\frac{d}{d\xi}(u^{\alpha}\frac{du}{d\xi}) \tag{3.17}$$

上式两边对ξ积分一次，取积分常数为零，得

$$u^{1-\alpha}\frac{du}{d\xi}+\frac{c}{\kappa}=0 \tag{3.18}$$

当$\alpha\neq 0$时，上式对ξ积分求得

$$u=[-\frac{\alpha c}{\kappa}(\xi-\xi_0)]^{1/\alpha}=[-\frac{\alpha c}{\kappa}(x-ct-\xi_0)]^{1/\alpha} \tag{3.19}$$

其中ξ_0为积分常数。当$\alpha=0$时，方程(3. 18)积分求得

$$u=Ae^{-\frac{c}{\kappa}\xi}=Ae^{-\frac{c}{\kappa}(x-ct)} \tag{3.20}$$

其中A为积分常数。

从 20 世纪 60 年代开始，对非线性现象的研究发生了根本性的变化，发现许多不同的非线性偏微分方程有某些共同的性质，有共同的求解方法和性质相似的解。而对于 KdV 方程在物理学与工程学科的许多问题中相继出现，如等离子体中的磁流体波、离子声波、弹性体中的纵色散波等。下面两章我们就 KdV 方程以及等离子体中的离子声波方程作一详细的讨论。

第四章 KdV 方程

KdV 方程是 1895 年荷兰数学家 Korteweg 和他的学生 de Vries 在研究水波时，发现 S.Russel 观察到的孤立波[34]是波动过程中非线性效应与色散现象互相平衡的过程，并导出了如下形式的方程

$$u_t + \alpha u u_x + u_{xxx} = 0 \tag{4.1}$$

其中 β 为常数。

4.1 KdV 方程的一般解法

文献[17]应用行波法，齐次平衡法和 Jacobi 椭圆函数展开法求解 KdV 方程，得到了该方程的准确周期解及孤波解，且给出了若干新的精确解析解。对于一般形式的 KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{4.2}$$

为寻求它的行波解，令

$$\xi = x - ct,\quad u(x,t) = u(\xi) \tag{4.3}$$

代入 KdV 方程(4.2)得

$$-c\frac{\partial u}{\partial \xi} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \tag{4.4}$$

通过积分等过程，求得(4.2)的行波解[34]。

当 $\beta > 0$ 时，其行波解为

$$u = u_2 + (u_1 - u_2)\mathrm{cn}^2\left(\sqrt{\frac{u_1 - u_3}{12\beta}}(\xi - \xi_0), k\right) \quad (u_2 \le u \le u_3) \tag{4.5}$$

其中ξ_0为积分常数，而

$$k=\sqrt{\frac{u_1-u_2}{u_1-u_3}} \tag{4.6}$$

当$\beta<0$时，其行波解为

$$u=u_2-(u_2-u_3)\mathrm{cn}^2(\sqrt{\frac{u_1-u_3}{-12\beta}}(\xi-\xi_0),k) \quad (u_2\le u\le u_3) \tag{4.7}$$

其中ξ_0为积分常数，而

$$k=\sqrt{\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}} \tag{4.8}$$

由其行波解可知它是周期函数，其振幅为

$$a=u_1-u_2 \tag{4.9}$$

对于方程(4.1)的行波解，我们同样令

$$\xi=x-ct\,,\quad u(x,t)=u(\xi) \tag{4.10}$$

其中c为常数。

将(4.10)代入(4.1)，得

$$-cu_\xi+\alpha uu_\xi+u_{\xi\xi\xi}=0 \tag{4.11}$$

对ξ积分一次得

$$-cu+\frac{\alpha}{2}u^2+u_{\xi\xi}=A \tag{4.12}$$

其中A为任意常数。

用u_ξ乘(4.12)式两边，并对ξ积分得

$$3u_\xi^2+\alpha u^3-3cu^2-6Au=6B \tag{4.13}$$

其中B为任意常数。

由于孤立波是一个局部波，当$\xi\to\pm\infty$时，$u(\xi)$及其各阶导数都趋于零，于是由式(4.12)和(4.13)知，应有

$$A=B=0 \tag{4.14}$$

从而(4.13)式变为

$$3u_\xi^2=u^2(3c-\alpha u) \tag{4.15}$$

从(4 15)可看出，只有当$3c-\alpha u\ge 0$时，KdV 方程才可能有实的行波解。当$u=\dfrac{3c}{\alpha}$时，$u_\xi=0$。由此可知当ξ由$-\infty$变到$+\infty$时，u由零上升到极大值$\dfrac{3c}{\alpha}$，然后又下降到 0，这种形状的波就是前面提到的孤立波。

4.2 KdV 方程的变分方法

为了更好的获得 KdV 方程的孤立波解，我们从变分法的角度去考虑。在文献[35]中首先把方程(4.15)改写为

$$\frac{\sqrt{3}du}{u\sqrt{3c-\sigma u}}=d\xi \tag{4.16}$$

解之得(可查积分表)

$$\xi+A=\int\frac{\sqrt{3}du}{u\sqrt{3c-\sigma u}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\frac{\sqrt{3c}+\sqrt{3c-\sigma u}}{\sqrt{3c}-\sqrt{3c-\sigma u}} \tag{4.17}$$

其中 A 为积分常数。不妨设 $A=0$ (否则作 ξ 的平移)，则(4.17)式可化为

$$u=\frac{3c}{\sigma}\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}\xi \tag{4.18}$$

其中 $\operatorname{sech}(x)$ 为双曲正割函数。

而 $u=\operatorname{sech}^2 x$ 的图形如下

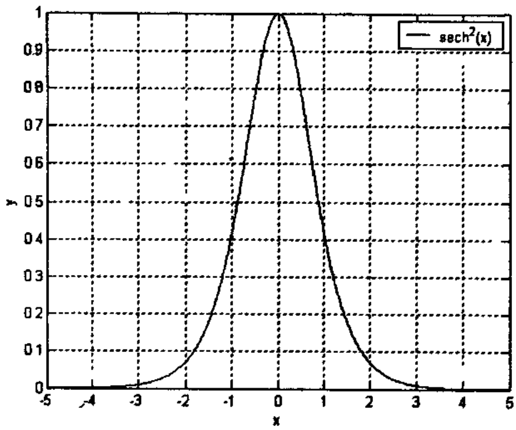

图 4-1

如图 4-1，这说明 KdV 方程有孤立波解，同时也会发现其解的复杂性，因为要用到特殊函数的计算。

下面我们对 KdV 方程建立变分原理。

考虑 KdV 方程的形式为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{4.19}$$

它是一个三阶的非线性偏微分方程，它的非线性项为 $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$，是二次非线性.

将行波解(3.15)代入式(4.19)后得

$$-c\frac{du}{d\xi}-6u\frac{du}{d\xi}+\frac{d^3u}{d\xi^3}=0 \tag{4.20}$$

两边对ξ积分，并取积分常数为零，有

$$-cu-3u^2+\frac{d^2u}{d\xi^2}=0 \tag{4.21}$$

由此我们可得到(4.19)的变分原理为

$$J=\int_0^\infty(\frac{1}{2}cu^2+u^3+\frac{1}{2}(\frac{du}{d\xi})^2)d\xi \tag{4.22}$$

我们用 Ritz 方法求 KdV 方程的孤立波解。

令

$$u=p\operatorname{sech}^2(q\xi) \tag{4.23}$$

则

$$\frac{du}{d\xi}=-2pq\operatorname{sech}^2(q\xi)\tanh(q\xi) \tag{4.24}$$

将式(4. 23)及(4. 24)代入式(4. 22)得

$$\begin{aligned}J&=\int_0^\infty[\frac{1}{2}cp^2\operatorname{sech}^4(q\xi)+p^3\operatorname{sech}^6(q\xi)+\frac{1}{2}(4p^2q^2\operatorname{sech}^4(q\xi)\tanh^2(q\xi))]d\xi\\&=\frac{cp^2}{2q}\times\frac{2}{3}+\frac{p^3}{q}\times\frac{8}{15}+2p^2q\times\frac{2}{15}\\&=\frac{cp^2}{3q}+\frac{8p^3}{15q}+\frac{4p^2q}{15}\end{aligned} \tag{4.25}$$

则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial p} = \dfrac{2cp}{3q} + \dfrac{8p^2}{5q} + \dfrac{8pq}{15} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial q} = -\dfrac{cp^2}{3q^2} - \dfrac{8p^3}{15q^2} + \dfrac{4p^2}{15} = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

由上两式得

$$\begin{cases} 5c = -12p - 4q^2 \\ 5c = -8p + 4q^2 \end{cases} \tag{4.27}$$

由此得

$$p = -\frac{1}{2}c, \quad q = \sqrt{\frac{c}{4}} \tag{4.28}$$

因此式(4.23)可变为

$$u = -\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2(\sqrt{\frac{c}{4}}\xi) \tag{4.29}$$

即

$$u(x,t) = -\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2[\sqrt{\frac{c}{4}}(x-ct)] \tag{4.30}$$

此结果与文献[36]中的结果是一致的。

令

$$c = k^2 \tag{4.31}$$

则式(4.30)变为

$$u(x,t) = -\frac{k^2}{2}\mathrm{sech}^2[\frac{k}{2}(x-k^2t)] \tag{4.32}$$

以下是式(4.32)在 $k=2$ 时的图形。

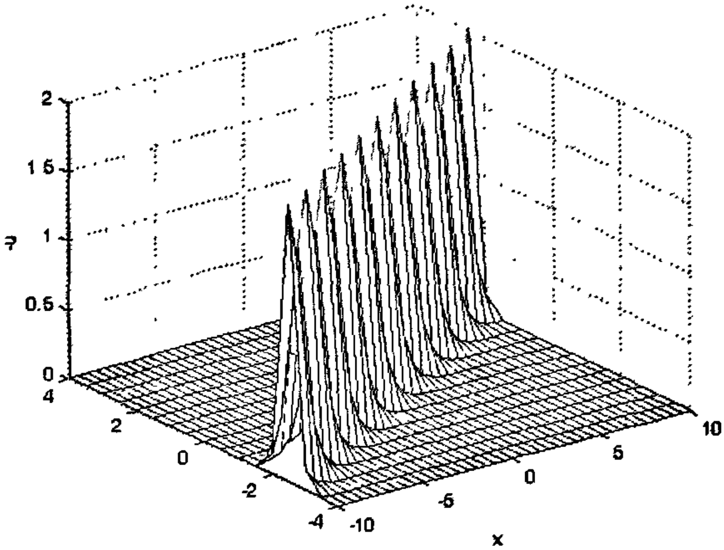

图 4-2 $k=2$，$-4 \le t \le 4, -10 \le x \le 10$

当 $k=2, t=0$ 时，如图所示：

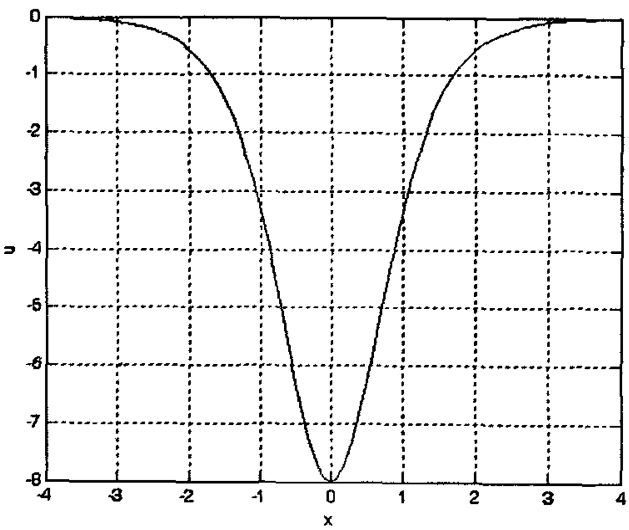

图 4-3 $k=2$，$t=0, -4 \le x \le 4$

第五章 离子声波方程

5.1 引言

在自然界中，波是一种非常普遍的物理现象，空气能产生和传递声波，平静的水波上投下一块石子马上出现波浪向四面八方传开。在物质的第四态等离子体中，同样也产生和传播各种形式的波，由于等离子体中大量带电粒子的相互影响，尤其在有外加磁场的情况下，等离子体中的波动现象更复杂得很。

等离子体是由电子和离子组成的电离气体。由于离子的质量m_i比电子的质量m_e大得多$(\frac{m_i}{m_e}\approx 10^3)$，故惯性也大得多，相应的运动频率也要低得多。因此，对于热等离子体中的低频扰动，由于等离子体具有强烈的恢复准电中性倾向，电子和离子都能响应。这时，描述电子和离子的一维纵波传播的动力学方程[37, 38]为

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i)=0 \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_e v_e)=0 \tag{5.2}$$

$$m_i n_i(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial x})=en_i E-T_i\frac{\partial n_i}{\partial x} \tag{5.3}$$

$$m_e n_e(\frac{\partial v_e}{\partial t}+v_e\frac{\partial v_e}{\partial x})=en_e E-T_e\frac{\partial n_e}{\partial x} \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}=4\pi e(n_i-n_e) \tag{5.5}$$

其中n_j,v_j,m_j分别表示离子$(j=i)$和电子$(j=e)$的密度数、速度和质量；E是电场。绝热压缩过程已通过压力梯度项$\frac{\partial \rho}{\partial x}=T_j\frac{\partial n_j}{\partial x}$ $(j=i,e)$考虑到方程中去。

5.2 离子声波传播的力学分析

离子声波是没有磁场时的等离子体波。因为是低频长波其速度跟空气中的声波速度的表达式相同，因而称离子声波，但它与空气中的声波又有很大的差别，其机理是电荷分离所产生的扰动电场引起电子和离子之间的耦合。

在无碰撞的等离子体中，驱动离子声波传播的力来源于离子的热压力和由于电荷分离而产生的静电力。当等离子体受到低频扰动形成所谓稠密区域和稀疏区域时，一方面，离子的热压力使离子扩散；另一方面，在离子的过剩区域中电荷分离产生静电场。但是，这个电场由于受到周围电子的不完全屏蔽，还有量级为T_e/e的电势Φ泄露出来，且有$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-E$。这时，关于电子的运动方程为(5.4)，由于电子质量很小，在低频扰动下，忽略(5.4)式左边的惯性项，则(5.4)式成为

$$-e\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{T_e}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial x}=0 \tag{5.6}$$

由于电子的运动比离子波快得多，所以$T_e=$常数是个很好的近似。所以求解(5.6)式得

$$\Phi=\frac{T_e}{e}\ln\frac{n_e}{n_0} \tag{5.7}$$

在泄露电势Φ的作用下，离子从稠密区被压缩到稀疏区，为使离子声波不受朗道阻尼[37,38]而传播，其必要条件为：$\frac{T_i}{T_e}\ll 1$，当T_e为有限值时，可忽略(5.3)中右边第二项，于是，方程变为

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}=\frac{e}{m_i}E=-\frac{e}{m_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{5.8}$$

这样，具有 Boltzmann 分布的高温电子气体中的冷离子的运动方程便为(5.1)、(5.5)、(5.6)、(5.8)式，即

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(n_i v_i)=0 \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x}=4\pi e(n_i-n_e) \tag{5.10}$$

$$-e\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{T_e}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial x}=0 \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial x}=\frac{e}{m_i}E=-\frac{e}{m_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{5.12}$$

上式通过消变量及无量纲变换就可得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}=0 \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial (nv)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}[(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial x})(\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x})]=0 \tag{5.14}$$

近年来，等离子体中的一维离子声波问题已有较多的研究[39, 40, 41]，文献[41]采用摄动方法推导出了 KdV 方程，文献[42]得出线性色散关系中存在色散项，是非线性方程有孤立波解的必要条件。

5.3 离子声波方程的变分原理

考虑以下形式的离子声波方程[43]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(nv)=0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{1}{2}v^2+\phi)=0 \\ \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}-e^{\phi}+n=0 \end{cases} \tag{5.15}$$

其中n，v，ϕ分别为离子密度、运动速度、低频电势。

下面通过建立变分原理来进一步研究。由(5.15)的第一式，我们引进一特殊函数Ψ，并定义为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}=n\\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial t}=-nv\end{cases}\tag{5.16}$$

为了更好的建立(5.15)式的变分原理，应用半反推法[6]，考虑试泛函

$$J(v,\phi,\Psi)=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}[v\frac{\partial\Psi}{\partial t}+(\frac{1}{2}v^2+\phi)\frac{\partial\Psi}{\partial x}+F]dx\tag{5.17}$$

其中F是n，v及其导数的待定函数。

对ϕ取变分，得 Euler 方程为

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\delta F}{\delta\phi}=0\tag{5.18}$$

其中

$$\frac{\delta F}{\delta\phi}=\frac{\partial F}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial F}{\partial\phi_t})-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial F}{\partial\phi_x})+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial F}{\partial\phi_{xx}})+\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial F}{\partial\phi_{tt}})-\cdots\tag{5.19}$$

由(5.18)结合(5.16)式及其(5.15)的第三式，得

$$\frac{\delta F}{\delta\phi}=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-n=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-e^{\phi}\tag{5.20}$$

由此可得

$$F=-\frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2-e^{\phi}+f(v)\tag{5.21}$$

所以

$$J(v,\phi,\Psi)=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}[v\frac{\partial\Psi}{\partial t}+(\frac{1}{2}v^2+\phi)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2-e^{\phi}+f(v)]dx \tag{5.22}$$

为了进一步识别 f，对 v 取变分，得

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\delta f}{\delta v}=0 \tag{5.23}$$

结合(5.16)得

$$\frac{\delta f}{\delta v}=-\frac{\partial\Psi}{\partial t}-v\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-(-nv)-vn=0 \tag{5.24}$$

由此

$$f=A\quad（A\text{为常数}） \tag{5.25}$$

最后，我们得到如下的变分原理

$$J(v,\phi,\Psi)=\int_{t_1}^{t_2}dt\int_{x_1}^{x_2}[v\frac{\partial\Psi}{\partial t}+(\frac{1}{2}v^2+\phi)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2-e^{\phi}+A]dx \tag{5.26}$$

且令

$$L=v\frac{\partial\Psi}{\partial t}+(\frac{1}{2}v^2+\phi)\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2-e^{\phi}+A \tag{5.27}$$

对于上述方程分别对 Ψ,ϕ 及 v 取变分，得

$$\begin{cases}-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}v^2+\phi)=0\\ \frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-e^{\phi}=0\\ \frac{\partial\Psi}{\partial t}+v\frac{\partial\Psi}{\partial x}=0\end{cases} \tag{5.28}$$

结合(5.16)便得到(5.15)式，由此得证(5.15)是变分问题(5.26)式的 Euler 方程。

设

$$n=n(\xi),\quad v=v(\xi),\quad \phi=\phi(\xi),\quad \xi=x-ct \tag{5.29}$$

将式(5.29)代入(5.15)，得

$$\begin{cases} -\dfrac{dn}{d\xi}+\dfrac{d}{d\xi}(nv)=0 \\ -\dfrac{dv}{d\xi}+v\dfrac{d}{d\xi}=-\dfrac{d\phi}{d\xi} \\ \dfrac{d^2\phi}{d\xi^2}=e^{\phi}-n \end{cases} \tag{5.30}$$

上式的前两式对 ξ 积分，设 $|\xi|\to\infty$ 时，$n\to 1$，$v\to 0$，

则

$$\begin{cases} n(c-v)=c \\ \dfrac{1}{2}(c-v)^2=\dfrac{1}{2}c^2-\phi \\ \dfrac{d^2\phi}{d\xi^2}=e^{\phi}-n \end{cases} \tag{5.31}$$

由(5.31)式的前两式，得

$$\begin{cases} n=\dfrac{c}{\sqrt{c^2-2\phi}} \\ v=c-\sqrt{c^2-2\phi} \end{cases} \tag{5.32}$$

把(5.16)和(5.32)式代入(5.27)式，并取 $A=1$ 得

$$L=-\frac{1}{2}nv^2+n\phi-\frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2-e^{\phi}+1$$

$$=c^2-c\sqrt{c^2-2\phi}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2-e^{\phi}+1 \tag{5.33}$$

因此，(5.26)可写为

$$J=\int_0^{\infty}\left(c^2-c\sqrt{c^2-2\phi}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2-e^{\phi}+1\right)dx \tag{5.34}$$

下面利用 2. 3 节中 Ritz 法寻找其孤立波解。

令

$$\phi=p\,\mathrm{sech}^2(qx) \tag{5.35}$$

则

$$\frac{d\phi}{dx}=-2pq\,\mathrm{sech}^2(qx)\tanh(qx) \tag{5.36}$$

由 Taylor 级数展开式可得

$$\sqrt{c^2-2\phi}=c-\frac{\phi}{c}-\frac{\phi^2}{2c^3}-\frac{\phi^3}{2c^5}+O(\phi^4)$$

$$e^{\phi}=1+\phi+\frac{\phi^2}{2}+\frac{\phi^3}{6}+O(\phi^4)$$

将上两式代入式(5.34)近似得

$$J=\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2+\frac{1-c^2}{2c^2}\phi^2+\frac{3-c^4}{6c^4}\phi^3\right)dx \tag{5.37}$$

将(5.35)和(5.36)代入式(5.34)得

$$J=\int_0^{\infty}\Big[-\frac{1}{2}(4p^2q^2\,\mathrm{sech}^4(qx)\tanh^2(qx))$$

$$+\frac{1-c^2}{2c^2}p^2\,\mathrm{sec}\,h^4(qx)+\frac{3-c^4}{6c^4}p^3\,\mathrm{sec}\,h^6(qx)\Big]dx$$

$$=-2p^2q\cdot\frac{2}{15}+\frac{1-c^2}{2c^2}\frac{p^2}{q}\frac{2}{3}+\frac{3-c^4}{6c^4}\frac{p^3}{q}\frac{8}{15}$$

$$=-\frac{4p^2q}{15}+\frac{1-c^2}{3c^2}\cdot\frac{p^2}{q}+\frac{4(3-c^4)}{45c^4}\cdot\frac{p^3}{q} \tag{5.38}$$

由 Ritz 方法知

$$\begin{cases}\dfrac{\partial J}{\partial p}=-\dfrac{8pq}{15}+\dfrac{2(1-c^2)}{3c^2}\dfrac{p}{q}+\dfrac{4(3-c^4)}{15c^4}\dfrac{p^2}{q}=0\\ \dfrac{\partial J}{\partial q}=-\dfrac{4p^2}{15}-\dfrac{(1-c^2)}{3c^2}\dfrac{p^2}{q^2}-\dfrac{4(3-c^4)}{45c^4}\dfrac{p^3}{q^2}=0\end{cases} \tag{5.39}$$

由此得

$$p=\frac{12c^4}{3-c^4}q^2 \tag{5.40}$$

由此，知振幅p不仅仅与孤立子的宽度q有关，还与波速c有关。

5.4 化离子声波方程为 KdV 方程

对于离子声波方程(5.15)，我们利用前面提到的约化摄动法[17]作适当的变换，可将其化为 KdV 方程。

令

$$\xi=\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x-t),\quad \tau=\varepsilon^{\frac{3}{2}}t \tag{5.41}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon^{\frac{3}{2}}\frac{\partial}{\partial\tau}-\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{5.42}$$

将(5.41)式代入(5.15)，得

$$\begin{cases} \varepsilon\dfrac{\partial n}{\partial \tau}-\dfrac{\partial n}{\partial \xi}+\dfrac{\partial}{\partial \xi}(nv)=0 \\ \varepsilon\dfrac{\partial v}{\partial \tau}-\dfrac{\partial v}{\partial \xi}+v\dfrac{\partial v}{\partial \xi}=-\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ \varepsilon\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}=e^{\phi}-n \end{cases} \tag{5.43}$$

再令

$$\begin{cases} n=1+\varepsilon n_1+\varepsilon^2 n_2+\cdots \\ v=\varepsilon v_1+\varepsilon^2 v_2+\cdots \\ \phi=\varepsilon\phi_1+\varepsilon^2\phi_2+\cdots \end{cases} \tag{5.44}$$

将式(5.44)代入(5.43)，得

一阶近似

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial n_1}{\partial \xi}+\dfrac{\partial v_1}{\partial \xi}=0 \\ -\dfrac{\partial v_1}{\partial \xi}=-\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \end{cases} \tag{5.45}$$

解得

$$n_1=\phi_1 \tag{5.46}$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial \xi}=\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \quad （可取\ n_1=v_1） \tag{5.47}$$

二阶近似

$$\begin{cases} \dfrac{\partial n_1}{\partial \tau}-\dfrac{\partial n_2}{\partial \xi}+\dfrac{\partial (n_1 v_1)}{\partial \xi}+\dfrac{\partial v_2}{\partial \xi}=0 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau}-\dfrac{\partial v_2}{\partial \xi}+v_1\dfrac{\partial v_1}{\partial \xi}=-\dfrac{\partial \phi_2}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2}=\phi_2+\dfrac{1}{2}\phi_1^{\,2}-n_2 \end{cases} \tag{5.48}$$

由(5.48)式的第三式可得

$$\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3}=\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi}+\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi}\phi_1-\frac{\partial n_2}{\partial \xi} \tag{5.49}$$

把(5.48)式的第一、二式代入(5.49)式，并结合(5.46)及(5.47)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 n_1}{\partial \xi^3}&=-\frac{\partial v_1}{\partial \xi}+\frac{\partial v_2}{\partial \xi}-v_1\frac{\partial v_1}{\partial \xi}+\phi_1\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi}-\frac{\partial n_1}{\partial \tau}-\frac{\partial (n_1 v_1)}{\partial \xi}-\frac{\partial v_2}{\partial \xi} \\ &=-2\frac{\partial n_1}{\partial \tau}-2n_1\frac{\partial n_1}{\partial \xi} \end{aligned} \tag{5.50}$$

即

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau}+\phi_1\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3}=0 \tag{5.51}$$

令

$$\phi_1=-6(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}\phi,\quad \xi=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}s \tag{5.52}$$

方程(5.51)变为

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}-6\phi\frac{\partial \phi}{\partial s}+\frac{\partial^3 \phi}{\partial s^3}=0 \tag{5.53}$$

方程(5.53)式为 KdV 方程，这样，离子声波方程就可转化为 KdV 方程来研究了。

在 4.2 节中用变分法讨论过对于(5.53)的孤立子解为

$$\phi(s,\tau)=-\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2[\sqrt{\frac{c}{4}}(s-c\tau)] \tag{5.54}$$

其中，c是孤子传播速度，孤子振幅为$\frac{c}{2}$，孤子宽度为$\sqrt{\frac{4}{c}}$。由(5.52)式便得

$$\phi_1=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}c\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{c}{4}}(\sqrt[3]{2}\xi-c\tau) \tag{5.55}$$

代回原来变量，可得

$$\phi(x,t)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}c\varepsilon\,\mathrm{sech}^2\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\sqrt{c\varepsilon}[x-(1+\frac{\sqrt[3]{4}}{2}c\varepsilon)t] \tag{5.56}$$

令 $k^2=\sqrt[3]{4}c\varepsilon$，则(5.56)式变为

$$\phi=\frac{3}{2}k^2\,\mathrm{sech}^2\frac{k}{2}[x-(1+\frac{k^2}{2})t] \tag{5.57}$$

以下是 $k=\frac{1}{2}$时，(5.57)式的图形如下：

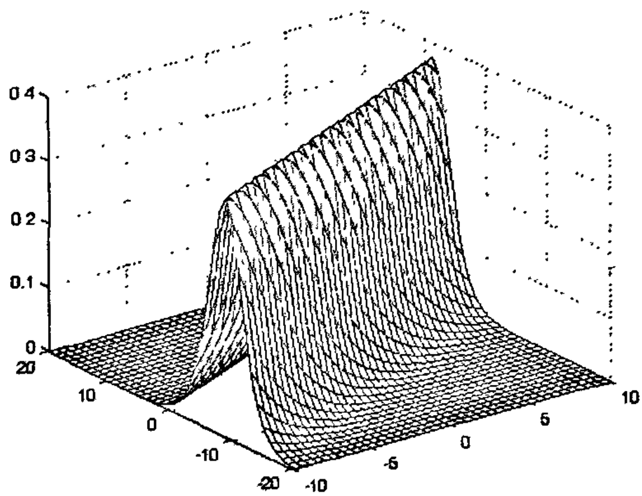

图 5-1 $k=\dfrac{1}{2}$， $-20\le t\le 20,-10\le x\le 10$

而当 $k=\dfrac{1}{2},t=0$ 时，其图变为：

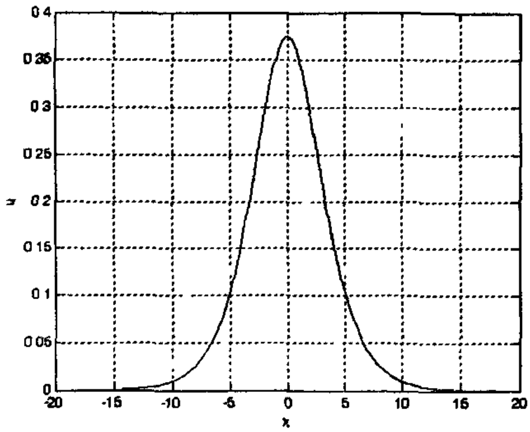

图 5-2 $k=\dfrac{1}{2}$， $t=0,-20\le x\le 20$

由(5.56)式可看出，孤立子的宽度与 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 成比例。当 $\varepsilon\to 0$ 时，孤立子变平，趋近于定态，传播速度趋近于速度 1，这与文献[41]的结论是一致的。同时，

振幅与孤立子的宽度为

$$p=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}c\varepsilon\text{，}\quad q=(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\sqrt{c\varepsilon})^2 \tag{5.58}$$

对于离子声波方程(5.15)，文献[17]有孤立波解

$$\phi=3\Delta c\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{\Delta c}{2}}(\xi-\xi_0) \tag{5.59}$$

满足以下关系式

$$p=6q^2 \tag{5.60}$$

对于(5.40)式，当$c\to 1$时，恰好变为(5.60)式，从而说明(5.40)式的适应性更广。

通过以上分析可以看出，变分法是求解孤波解的有效方法之一，并且能反映孤波的波速、波宽和波高之间的内在关系(参考式 5.40)，而一般方法只能求出波宽与波高之间的关系(参考式 5.60)，这充分说明了变分法具有更广的适应性。

第六章 结论与展望

本文应用变分法研究了非线性波动方程，得到了一些初步结果，显示了变分法是寻求非线性方程的孤波解的有效方法之一。本文主要的工作可概括如下：

1. 详细阐述了如何应用半反推法建立非线性方程的变分原理，开拓了半反推法的应用范围。用具体例子阐述变分原理的建立过程及求解方法；

2. 为了建立非线性波动方程的变分原理，我们引进了一个变换， 使得变换后的方程存在变分原理。首先我们建立KdV方程的变分原理，得到的近似解恰好是方程的精确解，这充分说明变分法的有效性；

3. 由于非线性离子声波方程的复杂性，很难直接建立相应的变分原理。为此我们根据质量方程引进了一个特殊函数，并以特殊函数为独立变量建立了相应的变分原理，最后应用Ritz法得到一个新的孤波解，它反映了波速与波宽和波高之间的内在联系。

本文尝试了用变分法求解非线性波动方程的孤波解，得到了初步结果，还有很多工作有待于进一步完善。

1. 该方法有一定的局限性，只有在建立变分原理后才能有效使用。因此寻求建立变分原理更有效的方法将具有理论和应用价值；

2. 该方法适用于其他形式的非线性波动方程。如果选择适当的试函数，可以求解非线性波动方程各种形式的解，如周期解、compact 解等；

3. 进行数值计算，并与得到的解析解比较，进一步说明该方法的有效性。

参考文献

1. 钱伟长. 广义变分原理, 上海: 知识出版社, 1985, 1-73
2. 胡海昌. 变分学, 北京: 中国建筑工业出版社, 1987, 75-149
3. 牛库均. 现代变分原理, 北京: 北京工业大学出版社, 1992, 12-35
4. K.Washizu. Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1975
5. B.A. Finlayson. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. New York: Academic Press, 1973
6. 何吉欢. 流体力学变分原理建立的新方法及林家翘约束, 上海大学博士论文, 1997
7. 刘高联. 叶轮机械气体动力学基础, 北京: 机械工业出版社, 1980
8. Lin C. C. Hydrodynamics of Helium II. Proc. of Int. Sch. Phys., Academic Press, 1963, 21, 93-146
9. Seliger R. L., Whitham G. B. Variational Principles in Continuum Mechanics. *Proc. Roy. Soc.*(London) A., 1968, 305, 1-25
10. Akay H. U, Ecer A. Application of a Finite Element Algorithm for the Solution of Steady Transonic Euler Equations. AIAA. J., 1983, 21, 1983-1988
11. Liu G. L. A variable-domain variational theory using Clebsch variables for hybrid problems of 2-D transonic rotational flow. *Acta Mechanica,* 1993, 99, 219-223
12. 谢定裕. 渐近分析—在流体力学中的应用, 友谊出版社, 1983, 118-158
13. 钱伟长. 粘性流体力学的变分原理和广义变分原理. 应用数学和力学, 1984, 5(3), 305-323
14. 钱伟长. 应用数学与力学论文集, 南京: 江苏科学技术出版社, 1980
15. C.M.Bender, S.A.Orszag. 高等应用数学方法, 李家春, 庄峰青, 王柏懿译. 北京: 科学出版社, 1992, 370-403
16. A.H.Nayfeh. 摄动方法, 上海: 上海科技出版社, 1984, 1-35

17. 刘式适，刘式达. 物理学中的非线性方程，北京：北京大学出版社，2000，145-163

18. 杨伯君，赵玉芳. 高等数学物理方法，北京：北京邮电大学出版社，2003，174-204

19. M.M. Vainberg, Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden-Day, San Francisco, California, 1964

20. E.Tonti, Variational formulation for every nonlinear formalism, International Journal of Engineering Science, 1984, 22, 1343-1371

21. R.M. Santilli, Foundations of Theoretical Mechanics I: The Inverse Problem in Newtonian Mechanics, Springer-Verlag, 1978

22. F.B. Hildebrand, Methods of Applied Mathematics, 2nd Ed., Englewood Cliffs, Prentice-Hill, 1965

23. H.M. Michael, A variational equation for the wave forcing of floating thin plates , Applied Ocean Research, 2001, 23, 195-206.

24. B.Nyiri. On the construction of potentials and variational principles in thermodynamics and physics, Journal of Non-equilibrium thermodynamics, 1991, 16, 217-223

25. 刘高联. 流体力学变分原理的建立与变换的系统性途径，工程热物理学报. 1990, 11(2), 136-142

26. 吴迪光. 变分法，北京：高等教育出版社，1987, 1-45

27. 老大中. 变分法基础，北京：国防工业出版社，2004, 285-293

28. S. Athel, M.S.El-Naschie, A variational approach to the stability analysis of non-gradient discrete systems, in S. Nemat-Nasser Ed. Variational Methods in the Mechanics of Solids, Proceedings of the IUTAM Symposium on variational methods in the mechanics of solids, Evanston, Illinois, USA, 11-13 Sept., 1978, 205-207

29. S.Sieniutycz, H.Farkas, Variational and Extremum principles in macroscopic systems, Elsevier, 2005, 75-95

30. K. Scott, W. Taama, J. Cruickshank. J. Power Sources, 1997, 65, 159

31. Y. P. Sun, O. Qiu, B.T. Wu, K.Scott. J. Applied Electrochemistry, 2002

32. A.M. Wazwaz, The modified Adomian decomposition method for solving linear and nonlinear boundary value problems of 10^{th}-order and 12^{th}-order, International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2000, 1(1), 17-24
33. S.B. Liu, Y.P. Sun, K. Scott. Analytic solution of diffusion reaction in spherical porous catalyst, Chem. Eng. Technol. 2003, 26, 87-95
34. 郭柏灵，庞小峰. 孤立子，北京：科学出版社，1987, 11-22
35. 韩家骅，徐勇等. KdV 方程的精确解析解，安徽大学学报，2002, 26(3)
36. A.M. Wazwaz. Construction of solitary wave solutions and rational solutions for the KdV equation by Adomian decomposition method, Choas, solitons and Fractals, 2001, 12, 2283-2293
37. T. J. M. Boyd, J. J. Sanderson. 等离子体动力学[M]. 戴世强，陈志云 译. 北京：科学出版社，1977, 235-245
38. 李大潜，秦铁虎. 物理学与偏微分方程[M]，北京：高等教育出版社，1997, 181, 216
39. W. S. Duan, K.P. Lu. Ion oscillation modes in inhomogeneous plasmas [J]. Phys Plasmas, 1998, 5(12), 4160-4162
40. W. S. Duan, J.B. Zhao Korteweg-de Vries solitons in inhomogeneous plasma [J]. Phys Plasmas, 1999, 16(9), 3484-3488
41. 吕克璞，石玉仁，段文山等. 等离子体波动方程的摄动分析[J]，西北师范大学学报(自然科学版)，2001, 37(1), 45-49
42. 王德焜，吴德金，黄光力. 空间等离子体中的孤波[M]，上海：上海科技教育出版社，2000, 21-78
43. Y. Li, Sattinger D.H. Soliton collisions in ion acoustic plasma equations. Journal of Math. Fluid Mech, 1999, 1, 117-130

攻读硕士期间发表的与课题相关的论文

[1] Liu HM, Variational approach to nonlinear electrochemical system, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 5, 2004, 95-96

[2] Liu HM, Generalized variational principles for ion acoustic plasma waves, *Chaos Solitons & Fractals*, 23, 2005, 573-576

致 谢

本论文是在导师何吉欢教授的悉心指导下完成的，论文中凝结着何老师的心血。这两年多我得到了恩师许多的教诲和帮助。何老师知识渊博，治学严谨，思路敏捷，对研究过程中出现的问题给予了很大的帮助和指导。他那勤奋的工作作风、严谨求实的治学态度和不断探索的精神更是给我留下了深刻的印象，它时时刻刻鼓舞激励着我认真的学习研究，完成研究课题，进而取得了今天的成绩。在此，学生向何老师致以崇高的敬意和最衷心的感谢。

在论文的研究过程中，也得到了理学院其他很多老师的指导，他们给我提出了许多诚恳的建议，使我受益匪浅。

感谢班级所有同学， 他们不仅在学习上而且生活上给予我很大的帮助。感谢我的父母、亲人和朋友，他们无时无刻不在关心我、鼓励我，使我遇到困难时勇敢去面对、克服。

衷心感谢所有关心和帮助过我的人！