

题目1证明题 一般

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上正值, 连续, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,

$$\text{使 } \int_a^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)dx .$$

解答_

$$\text{证: 令 } F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)dt$$

由于 $x \in [a, b]$ 时, $f(x) > 0$

$$\therefore F(a) = -\int_a^b f(t)dt < 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt > 0$$

由根的存在性定理, 存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使

$$F(\xi) = 0$$

$$\text{即 } \int_a^{\xi} f(t)dt = \int_{\xi}^b f(t)dt$$

$$\text{又 } Q \int_a^b f(t)dt = \int_a^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^b f(x)dx$$

$$= \int_a^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^b f(x)dx$$

$$= 2 \int_a^{\xi} f(x)dx$$

从而原式成立。

题目2证明题 一般

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \leq M, f(a) = 0$,

$$\text{证明: } \int_a^b f(x)dx \leq \frac{M}{2}(b-a)^2 .$$

解答_

证明: 由假设可知, $\forall x \in (a, b)$ $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上满足

微分中值定理, 则

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(a) \\ &= f'(\xi)(x-a) \quad \xi \in (a, x) \end{aligned}$$

又 $\because f'(x) \leq M, \forall x \in (a, b)$

$$\therefore f(x) \leq M(x-a)$$

由定积分的比较定理, 有

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M(x-a)dx = \frac{M}{2}(b-a)^2 .$$

设 $f(x)$ 在 $[0, 2a], (a > 0)$ 上连续,

$$\text{证明: } \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]dx .$$

题目16证明题

解答_

$$\text{由于 } \int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx$$

令 $x = 2a - t$, 则 $dx = -dt$

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-t)dt \\ &= \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]dx . \end{aligned}$$

题目5证明题

设 k 为正整数，证明：

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi ;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi .$$

解答_

$$\begin{aligned} (1) & \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - \left(-\frac{\pi}{2} + 0 \right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \left(-\frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

题目18证明题 一般

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数 且 $f(1) - f(0) = 1$.

试证： $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 1$ 。

解答_

$$\begin{aligned} \text{证明} & \because [f'(x) - 1]^2 = [f'(x)]^2 - 2f'(x) + 1 \geq 0 \\ & \therefore [f'(x)]^2 \geq 2f'(x) - 1 \\ & \therefore \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \geq 2 \int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 dx \\ &= 2f(x) \Big|_0^1 - 1 \\ &= 2[f(1) - f(0)] - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

题目3证明题

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，

则 $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_a^b f[a + (b-a)x] dx$ 。

解答_

作代换 $x = a + (b - a)t$, 则 $dx = (b - a)dt$

且 $x = b$ 时 $t = 1$

$x = a$ 时 $t = 0$

$$\begin{aligned} & \therefore \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_0^1 f[a + (b - a)t](b - a)dt \\ &= \frac{1}{b - a} \int_0^1 f[a + (b - a)t]dt \\ &= \frac{1}{b - a} \int_0^1 f[a + (b - a)x]dx. \end{aligned}$$

题目21证明题 一般

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,

$$\text{证明: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx .$$

解答_

证: 显然 $f(|\cos x|)$ 是以 π 为周期的函数

$$\begin{aligned} & \therefore \int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} f(|\cos x|)dx \\ &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)dx \right] \end{aligned}$$

在最后一积分中, 令 $x = \pi - t$ 则

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\cos x|)dx \\ &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(|\cos(\pi - t)|)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos t|)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \therefore \int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx \\ &= 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx \right] \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx \end{aligned}$$

$$\text{得证 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|)dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f(|\cos x|)dx.$$

题目22证明题 一般

若函数 $f(x)$ 在 R 连续, 且 $f(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $f(x) \equiv 0$.

解答_

$f(x)$ 在 R 连续

$\therefore f(x)$ 在 R 可导

且 $\forall x \in R$ 有 $f'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$

$f'(x) - f(x) = 0$

考虑函数 $p(x) = f(x)e^{-x} \cdot \forall x \in R$

$p'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = [f'(x) - f(x)]e^{-x} = 0$

$\therefore p(x) = c$ (常数)

$\therefore c = f(x)e^{-x} \quad f(x) = ce^x$

已知 $f(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

$\therefore f(a) = ce^a = 0$

$\therefore c = 0$

$\therefore f(x) = 0 \quad \forall x \in R。$

题目23证明题 一般

设 $f(x)$ 是以 π 为周期的连续函数,

证明: $\int_0^{2\pi} (\sin x + x)f(x)dx = \int_0^{\pi} (2x + \pi)f(x)dx。$

解答_

证明: 由于

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (\sin x + x)f(x)dx \\ &= \int_0^{\pi} (\sin x + x)f(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} (\sin t + t)f(t)dt \\ & \quad \text{令 } t = \pi + x, \text{ 则} \\ & \int_{\pi}^{2\pi} (\sin t + t)f(t)dt \\ &= \int_0^{\pi} [(\sin(\pi + x) + \pi + x)]f(\pi + x)dx \\ &= \int_0^{\pi} (x + \pi - \sin x)f(x)dx \\ \therefore & \int_0^{2\pi} (\sin x + x)f(x)dx \\ &= \int_0^{\pi} (\sin x + x)f(x)dx + \int_0^{\pi} (x + \pi - \sin x)f(x)dx \\ &= \int_0^{\pi} (2x + \pi)f(x)dx。 \end{aligned}$$

题目24证明题 一般

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减,

试证明: 对于任何 $q \in [0,1]$, 都有不等式

$\int_0^q f(x)dx \geq q \int_0^1 f(x)dx$ 成立。

解答_

令 $x = qt$, 则 $dx = qdt$, 从而

$$\int_0^q f(x)dx = \int_0^1 f(qt) \cdot qdt = q \int_0^1 f(qt)dt$$

由于 $q \leq 1$, 即 $qt \leq t$

又 $f(x)$ 单调递减, 故 $f(qt) \geq f(t)$

$$\therefore \int_0^1 f(qt)dt \geq \int_0^1 f(t)dt$$

$$\therefore \int_0^q f(x)dx = q \int_0^1 f(qt)dt \geq q \int_0^1 f(t)dt.$$

题目25证明题 一般

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加且 $f''(x) > 0$.

$$\text{证明: } (b-a)f(a) < \int_a^b f(x)dx < (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

解答_

证明: 由假设 $\forall x \in [a, b]. x > a$ 时 $f(x) > f(a)$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx > (b-a)f(a)$$

$\forall t \in [a, b]. f(t)$ 在 x 点处的展式为

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(t-x)^2$$

(ξ 在 t 与 x 之间)

又因 $f''(\xi) > 0$. 故

$$f(t) > f(x) + f'(x)(t-x)$$

将 $t = b, t = a$ 分别代入上式, 并相加, 有

$$f(b) + f(a) > 2f(x) + (a+b)f'(x) - 2xf'(x)$$

$$\int_a^b [f(b) + f(a)]dx > 2 \int_a^b f(x)dx + (a+b) \int_a^b f'(x)dx - 2 \int_a^b xf'(x)dx$$

$$2[f(b) + f(a)](b-a) > 4 \int_a^b f(x)dx$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

题目26证明题 一般

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调递增。

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt, (a < x \leq b)$$

$$F(a) = f(a),$$

证明: $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增。

解答_

证明: 对 $[a, b]$ 内的每个 x , 由积分中值定理

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt = \frac{1}{x-a} \cdot f(\xi)(x-a) = f(\xi) \quad (a < \xi < x)$$

当 $x \rightarrow a^+$ 时, $\xi \rightarrow a^+$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(\xi) = f(a) = F(a)$$

$\therefore F(x)$ 在点 a 连续. 从而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f(x)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt \\ &= \frac{f(x)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^2} [f(\xi)(x-a)] \\ &= \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a} \quad a < x \leq b \end{aligned}$$

Q $f(x)$ 单调增. 且 ξ 满足 $a < \xi < x$, 故 $f(\xi) < f(x)$, 从而

$$F'(x) > 0, \quad (a < x \leq b)$$

$\therefore F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增。

题目27证明题 一般

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导且 $f''(x) < 0$,

证明: $\int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 。

解答_

$\forall x \in (a, b)$ 将 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 处展开, 有

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!} f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

(ξ 介于 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间.)

由题设知 $f''(\xi) < 0$

$$\therefore f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \Big|_a^b$$

$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)。$$

题目28证明题 一般

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $[a, b]$ 可导, 且 $f'(x) < 0$, 证明函数

$$F(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{x-a} dt$$

在 (a, b) 内满足 $F'(x) \leq 0$ 。

解答_

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \frac{(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2} \\
 &= \frac{(x-a)f(x) - (x-a)f(\xi)}{(x-a)^2} \quad \xi \in [a, x] \\
 &= \frac{f(x) - f(\xi)}{(x-a)}
 \end{aligned}$$

由已知 $x \in (a, b)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 (a, b) 内递减

$$a \leq \xi \leq x, \quad x \in (a, b)$$

$$\therefore f(x) \leq f(\xi)$$

$$\text{又 } x - a > 0$$

$$\therefore F'(x) \leq 0 \quad x \in (a, b)。$$

题目29证明题 一般

试证: 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对于一切 $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$

同时至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) > 0$, 则 $\int_a^b f(x)dx > 0$ 。

解答_

证明: 由 $f(x)$ 在 ξ 点连续, 且 $f(\xi) > 0$, $\xi \in [a, b]$

则存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta)$ 时, 有

$$f(x) > 0$$

于是

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx = 2\delta f(\xi) > 0$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx > 0。$$

题目30证明题 一般

$$\text{试证} \int_a^b f(c-x)dx = \int_{c-b}^{c-a} f(x)dx。$$

解答_

$$\text{令 } t = c - x \text{ 则 } x = c - t, dx = -dt$$

$$\text{且 } x = a \text{ 时, } t = c - a$$

$$x = b \text{ 时, } t = c - b$$

$$\therefore \int_a^b f(c-x)dx$$

$$= \int_{c-a}^{c-b} f(t)(-dt)$$

$$= -\int_{c-a}^{c-b} f(t)dt$$

$$= \int_{c-b}^{c-a} f(x)dx。$$

题目31证明题 一般

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且满足等式:

$$f(1) - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 0$$

试证在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ 。

解答_

由于 $f(1) - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = 0$

则由积分中值定理有 $\xi_1 \in [0, \frac{1}{2}]$, 使

$f(1) - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi_1 f(\xi_1) = 0$ 成立, 即 $f(1) - \xi_1 f(\xi_1) = 0$

令 $F(x) = xf(x)$, 则 $F(\xi_1) = F(1)$;

对函数 $F(x)$ 在 $[\xi_1, 1]$ 上用罗尔定理, 有

$F'(\xi) = 0$, $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$

即 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$, $\xi \in (0, 1)$

$\therefore f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ $\xi \in (0, 1)$ 。

题目32证明题 一般

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 并且对于每一个在 $[a, b]$

上的连续函数 $g(x)$ 都有 $\int_a^b g(x)f(x)dx = 0$

证明: $f(x) = 0$ ($a \leq x \leq b$)。

解答_

证明: 若不然, 设有 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) \neq 0$ 。

不妨设 $f(x_0) > 0$ 。由于 $f(x)$ 在 x_0 处

连续, 故对 $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ 存在 $\delta > 0$ 。

当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 即在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

从而 $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$

构造连续函数 $g(x)$ 如下:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a, x_0 - \delta] \cup [x_0 + \delta, b] \\ h(x) & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases}$$

其中 $h(x) > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 且

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 - \delta)^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow (x_0 + \delta)^-} h(x) = 0$$

$$\therefore \int_a^b g(x)f(x)dx$$

$$= \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} h(x)f(x)dx > \frac{f(x_0)}{2} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} h(x)dx > 0$$

这与题设矛盾故 $f(x) \equiv 0$ $a \leq x \leq b$ 。

题目33证明题 难

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数 $f'(x)$, 且 $f(a) = 0$,

$$\text{则 } \int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

解答_

$$\text{令 } F(x) = \int_a^x [f'(t)] dt \quad a \leq x \leq b$$

$$\text{则 } F(x) \geq \left| \int_a^x [f'(t)] dt \right|$$

$$= \left| f(t) \Big|_a^x \right|$$

$$= |f(x) - f(a)|$$

$$= |f(x)|$$

$$2 \int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq 2 \int_a^b F(x)F'(x) dx = F^2(b)$$

由柯西不等式，有

$$F^2(b) = \left(\int_a^b F'(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b dx \int_a^b [F'(x)]^2 dx$$

$$= (b-a) \int_a^b [f'(x)]^2 dx$$

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx。$$

题目34证明题 难

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶连续可微，其中 $a < 0 < b$ ，则在该区间上必存在一个 ξ ，使

$$\int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \frac{1}{2!} [b^2 f'(b) - a^2 f'(a)]$$

$$+ \frac{1}{3!} (b^3 - a^3) f''(\xi_0)。$$

解答_

令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F(a) = 0$, $F'(x) = f(x)$

$F''(x) = f'(x)$, $F'''(x) = f''(x)$

将 $F(x)$ 在 $x = t$ ($a \leq t \leq b$) 处展成二阶 Taylor 公式, 有

$$F(x) = F(t) = F'(t)(x-t) + \frac{1}{2!}[F''(t)(x-t)^2 + \frac{1}{3}F'''(\xi)(x-t)^3] \\ + \frac{1}{3!}(b^3 - a^3)f''(\xi_0) \quad \xi \in (x, t)$$

令 $x = 0$, 分别将 $t = a$, $t = b$ 代入上式, 并相减, 有

$$0 = F(a) - F(b) + bf(b) - af(a) + \frac{1}{2!}[a^2 f'(a) - b^2 f'(b)] \\ + \frac{1}{3!}[b^3 f''(\xi_2) - a^3 f''(\xi_1)]$$

其中 $\xi_1 \in (a, 0)$ $\xi_2 \in (0, b)$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \frac{1}{2!}[b^2 f'(b) - a^2 f'(a)] + \frac{1}{3!}[b^3 f''(\xi_2) - a^3 f''(\xi_1)]$$

令 $m = \min\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}$

$M = \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}$

$$\therefore m(b^3 - a^3) \leq b^3 f''(\xi_2) - a^3 f''(\xi_1) \leq M(b^3 - a^2)$$

由于 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 于是存在 ξ_0 使

$$\frac{b^3 f''(\xi_2) - a^3 f''(\xi_1)}{b^3 - a^3} = f''(\xi_0)$$

于是 $b^3 f''(\xi_2) - a^3 f''(\xi_1) = (b^3 - a^3)f''(\xi_0)$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \frac{1}{2!}[b^2 f'(b) - a^2 f'(a)] \\ + \frac{1}{3!}(b^3 - a^3)f''(\xi_0)。$$

题目35证明题 难

若 $f(x)$ 关于 $x = T$ 对称, 且 $a < T < b$,

$$\text{则 } \int_a^b f(x)dx = 2 \int_T^b f(x)dx + \int_a^{2T-b} f(x)dx。$$

解答_

证明: 因为 $\int_a^{2T-b} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{2T-b} f(x)dx$

令 $x = 2T - t$, 注意到 $f(2T - t) = f(t)$, 则

$$\int_T^{2T-b} f(x)dx = - \int_T^b f(2T - t)dt = - \int_T^b f(t)dt$$

$$= - \int_T^b f(x)dx$$

$$\therefore 2 \int_T^b f(x)dx + \int_a^{2T-b} f(x)dx$$

$$= 2 \int_T^b f(x)dx + \int_a^T f(x)dx - \int_T^b f(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx。$$

题目36证明题 难

$$\text{试证 } I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} .$$

解答_

$$\text{令 } x = \frac{1}{t}, \text{ 则 } dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

当 $x \rightarrow 0+$ 时, $t \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0+$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{1+(\frac{1}{t})^4} (-\frac{1}{t^2}) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \frac{1}{2} [\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x^2} + x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d(x - \frac{1}{x})}{(x - \frac{1}{x})^2 + 2} \end{aligned}$$

令 $u = x - \frac{1}{x}$, 则 $x \rightarrow 0+$ 时, $u \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow +\infty$ 时, $u \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 2} du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctgu} / \sqrt{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

题目37证明题 难

证明奇函数的一切原函数皆为偶函数,
偶函数的原函数中有一为奇函数。

解答_

证明:

设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上有定义, 则 $f(x)$ 的全部原函数可表示为

$$F_c(x) = \int_0^x f(t)dt + c \quad c \text{ 为任意常数} \quad -1 \leq x \leq 1$$

当 $f(-x) = f(x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数时

$$F_0(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + 0$$

$$= -\int_0^x f(-t)dt$$

$$= -\int_0^x f(t)dt$$

$$= -F_0(x)$$

即 $F_0(x)$ 是奇函数

但当 $c \neq 0$ 时,

$$F_c(-x) = F_0(-x) + c$$

$$= -F_0(x) + c$$

$$= -(F_0(x) + c) + 2c$$

$$= -F_c(x) + 2c$$

$$\neq -F_c(x)$$

则其它原函数都不是奇函数,

当 $f(-x) = -f(x)$, 即 $f(x)$ 为奇函数时, 显然对一切 c , 均有

$$F_c(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + c$$

$$= -\int_0^x f(t)dt + c$$

$$= \int_0^x f(t)dt + c$$

$$= F_c(x)$$

即它的一切原函数都是偶函数。

题目38证明题 难

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 又 $F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{1}{f(t)} dt$

证明: $F(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内有且仅有一个实根。

解答_

$$F'(x) = \left[\int_a^x f(t) dt \right]' + \left[\int_b^x \frac{1}{f(t)} dt \right]'$$

$$= f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{f^2(x) + 1}{f(x)}$$

$$f(x) > 0$$

$$\therefore (f(x) - 1)^2 = f^2(x) - 2f(x) + 1 \geq 0$$

$$\therefore f^2(x) + 1 \geq 2f(x)$$

$$\therefore \frac{f^2(x) + 1}{f(x)} \geq 2 > 0, \text{ 从而 } F(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上严格单调增加。}$$

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + \int_b^a \frac{1}{f(t)} dt = - \int_a^b \frac{dt}{f(t)} < 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + \int_b^b \frac{1}{f(t)} dt = \int_a^b \frac{dt}{f(t)} > 0$$

由连续函数的根的存在性定理知 $F(x) = 0$, 在 $[a, b]$ 内有且仅有一个实根。

题目39证明题 难

$$\text{证明: 当 } a > 1 \text{ 时, 有 } \int_1^a f(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \frac{1}{x} dx = \int_1^a f(x + \frac{a^2}{x}) \frac{1}{x} dx。$$

解答_

$$\text{证明: 令 } x^2 = t, \text{ 则 } dt = 2x dx, \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\begin{aligned} \text{左式} &= \int_1^a f(x^2 + \frac{a^2}{x^2}) \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \cdot \frac{1}{\sqrt{t} 2\sqrt{t}} dt \\ &= \int_1^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{1}{2t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^a f(t + \frac{a^2}{t}) \cdot \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_a^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

在第二个积分中, 令 $t = \frac{a^2}{u}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^{a^2} f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{dt}{t} &= \frac{1}{2} \int_a^1 f(\frac{a^2}{u} + u) \cdot \frac{u}{a^2} \cdot a^2 \left(-\frac{1}{u^2}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_a^1 f(\frac{a^2}{u} + u) \left(-\frac{1}{u}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^a f(u + \frac{a^2}{u}) \frac{du}{u} \end{aligned}$$

将它与第一个积分相加即得

$$\text{左式} = \frac{1}{2} \int_1^a f(t + \frac{a^2}{t}) \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int_1^a f(u + \frac{a^2}{u}) \frac{du}{u} = \text{右式。}$$

题目40证明题 难

若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$,

$$\text{则: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = A。$$

解答_

$$\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0$, 使 $\forall x > B$, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

从而, 对 $\forall x > B$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \frac{1}{x} \left(\int_0^B f(t) dt + \int_B^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^B f(t) dt + \frac{1}{x} \int_B^x [f(t) - A] dt + \frac{1}{x} \int_B^x A dt \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^B f(t) dt = 0$$

$$\left| \frac{1}{x} \int_B^x [f(t) - A] dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_B^x [f(t) - A] dt$$

$$< \varepsilon \left(1 - \frac{B}{x}\right)$$

$$< \varepsilon$$

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_B^x [f(t) - A] dt = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_B^x A dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} A \left(1 - \frac{B}{x}\right) = A$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^B f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_B^x [f(t) - A] dt$$

$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_B^x A dt = A。$$

题目41证明题 难

证明: 若 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ 则 $f(x) = 0 \quad x \in [a, b]$.

解答_

证明:若有 $\xi \in (a, b)$, 使 $f(\xi) \neq 0$, 则有

$$f^2(\xi) = \lambda > 0$$

由 $f(x)$ 的连续性可知, 存在含有点 ξ

的一个小区间 $[\xi - \delta, \xi + \delta]$,

使 $[\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [a, b]$, 且

$$f^2(x) \geq \frac{\lambda}{2} \quad x \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$$

于是

$$\begin{aligned} & \int_a^b f^2(x) dx \\ &= \int_a^{\xi - \delta} f^2(x) dx + \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} f^2(x) dx + \int_{\xi + \delta}^b f^2(x) dx \\ &\geq \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} f^2(x) dx \\ &\geq \frac{\lambda}{2} \cdot 2\delta \\ &> 0 \end{aligned}$$

这与假设条件矛盾! 即说明在 (a, b) 内不能有点 ξ ,

使 $f(\xi) \neq 0$, 故 $f(x) \equiv 0, x \in (a, b)$. 再根据已知条件

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续性, 知在 $[a, b]$ 上, $f(x) \equiv 0$.

题目42证明题 难

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

$$\text{证明: } \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a) \quad (a < x < b).$$

解答_

证明1: 设 $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 则 $\varphi'(x) = f(x)$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{x+h} [f(t+h) - f(t)]dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\varphi(x+h) - \varphi(a+h) - \varphi(x) + \varphi(a)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x) - [\varphi(a+h) - \varphi(a)]}{h} \\ &= \varphi'(x) - \varphi'(a) = f(x) - f(a). \end{aligned}$$

证明2: 设 $t+h = u$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t+h)dt &= \int_{a+h}^{x+h} f(u)du = \int_{a+h}^{x+h} f(t)dt \\ \text{故} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]dt &= \int_{a+h}^{x+h} f(t)dt - [\int_a^{a+h} f(t)dt + \int_{a+h}^{x+h} f(t)dt + \int_{x+h}^x f(t)dt] \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^{a+h} f(t)dt \\ &= f(\xi_1)h - f(\xi_2)h \end{aligned}$$

其中 ξ_1 在 $x, x+h$ 之间, ξ_2 在 $a, a+h$ 之间

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(\xi_1) - f(\xi_2)] \\ &= f(x) - f(a). \end{aligned}$$

题目43证明题 难

设 $f(x)$ 处处二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$ 又 $u(t)$ 为任一连续函数

$$\text{证明: } \frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)]dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt\right] \quad (a > 0).$$

解答

证明: 由 Taylor 公式, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x - x_0)^2, \quad \xi \in (x_0, x)$$

$$\because f''(x) \geq 0$$

$$\therefore f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{令 } x_0 = \frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt \quad x = u(t) \text{ 则}$$

$$f(u(t)) \geq f\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt\right) + f'\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt\right](u(t) - \frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt)$$

从 0 到 a 积分, 有

$$\int_0^a u(t)dt \geq af\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt\right) + f'\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt\right)\left[\int_0^a u(t)dt - \int_0^a u(t)dt\right]$$

$$= af\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt\right) \quad (a > 0)$$

$$\therefore \frac{1}{a} \int_0^a f[u(t)]dt \geq f\left[\frac{1}{a} \int_0^a u(t)dt\right].$$

题目44证明题 难

证明：若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续，
且无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛，则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。

解答

设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ ，则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $\exists x_n > n$ ，有 $|f(x_n)| \geq \varepsilon_0$

从而，存在数列 $\{x_n\}$ ，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ，有 $|f(x_n)| \geq \varepsilon_0$

已知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续，即对 $\frac{\varepsilon_0}{2} > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，

使 $\forall x', x'' \in [a, +\infty)$ ， $|x' - x''| \leq \delta$ ，有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

从而 $\forall x \in [x_n, x_n + \delta]$ ， $|x - x_n| \leq \delta$ ，

$$|f(x) - f(x_n)| > \frac{\varepsilon_0}{2} \quad |f(x) \geq f(x_n)| - |f(x_n) - f(x)| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (1)$$

$\forall x \in [x_n, x_n + \delta]$ ， $f(x)$ 与 $f(x_n)$ 必同号，否则若 $f(x)$ 与 $f(x_n)$ 异号，则有

$$|f(x) - f(x_n)| = |f(x)| + |f(x_n)| > \varepsilon_0, \text{ 矛盾!}$$

若 $f(x_n) > 0$ ，则 $f(x) > 0$ ，由(1)式，有 $f(x) > \frac{\varepsilon_0}{2}$ ，

$$\text{从而} \int_{x_n}^{x_n + \delta} f(x) dx > \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{x_n}^{x_n + \delta} dx = \frac{\varepsilon_0 \delta}{2}$$

若 $f(x_n) < 0$ ，则 $f(x) < 0$ ，有 $f(x) < -\frac{\varepsilon_0}{2}$ ，

$$\text{从而} \int_{x_n}^{x_n + \delta} f(x) dx < -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{x_n}^{x_n + \delta} dx = -\frac{\varepsilon_0 \delta}{2} \text{ 或 } \left| \int_{x_n}^{x_n + \delta} f(x) dx \right| > \frac{\varepsilon_0 \delta}{2}$$

于是存在正常数 $\frac{\varepsilon_0 \delta}{2} > 0$ ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，有 $\left| \int_{x_n}^{x_n + \delta} f(x) dx \right| > \frac{\varepsilon_0 \delta}{2}$

根据柯西收敛准则的否定叙述， $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 发散，

这与已知条件矛盾

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2003年12月02日

3 微积分在积分不等式中的应用

不等式是数量之间大小的比较，而通过比较可以显示出变量变化之间相互制约的关系。因此，从某种意义上讲，积分不等式也不例外。在数学分析中积分比等式的尤为重要。许多的积分不等式在数学分析中都起到了至关重要的作用。所以对积分不等式的研究无论是实际应用，还是理论分析都有重要的意义。

3.1 微分证明积分不等式

微分在积分不等式中的应用主要是利用微分中值定理、泰勒公式、函数的单调性、极值、最值、凸函数法等来证明积分不等式。以下对这些方法分别做详细的介绍。

3.1.1 Lagrange中值定理证明积分不等式

引理3.1.1.1^[10] (Lagrange中值定理) 如果函数 $y = f(x)$ ，满足下列条件：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导，

则在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

由于 ξ 在 a, b 之间，因此 $f'(\xi)$ 将有一个取值范围，即 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 有一个取值范围，这样就得到了一个不等式。因此，可利用 ξ 在区间 (a, b) 内的特点证明积分不等式。

例3.1.1.1 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的导数，且 $f(a) = f(b) = 0$ 。试证

$$\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx.$$

证 由于 $\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx$,

记 $M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ 。由Lagrange中值定理知

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(a) + f'(\xi)(x-a)|, \\ &\leq M|x-a| \end{aligned}$$

其中 $x \in (a, \frac{a+b}{2})$, $\xi \in (a, x)$.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(b) + f'(\eta)(b-x)|, \\ &\leq M|x-b| \end{aligned}$$

其中 $x \in (\frac{a+b}{2}, b)$, $\eta \in (x, b)$.

因此

$$\begin{aligned} \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M|x-a| dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx; \\ &= \frac{M(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx &\leq \int_{\frac{a+b}{2}}^b M|x-b| dx \\ &= \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx. \\ &= \frac{M(b-a)^2}{8} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &\leq \frac{M(b-a)^2}{8} + \frac{M(b-a)^2}{8}, \\ &= M \cdot \frac{(b-a)^2}{4} \end{aligned}$$

即 $M \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx$.

例3.1.1.2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上具有连续的导数, $f(0) = f(2) = 1$, 且

$|f'(x)| \leq 1$, 证明: $\int_0^2 f(x) dx \geq 1$.

证 由Lagrange中值定理知

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(\xi)x, \\ &= 1 + f'(\xi)x \end{aligned}$$

其中 $(0 < x < 1, 0 < \xi < x)$;

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + f'(\eta)(x-2) \\ &= 1 + f'(\eta)(x-2) \end{aligned}$$

其中 $(1 < x < 2, x < \eta < 2)$.

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &\geq \int_0^1 1dx - \int_0^1 |f'(\xi)x|dx \\ &\geq 1 - \int_0^1 xdx \quad ; \\ &= \frac{1}{2} \\ \int_1^2 f(x)dx &\geq \int_1^2 1dx - \int_1^2 |f'(\eta)(x-2)|dx \\ &\geq 1 - \int_1^2 (2-x)dx \quad . \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

例3.1.1.3 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且 $f'(x) \leq M$, $f(a) = 0$, 求证:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \frac{M}{2}(b-a)^2.$$

证 由Lagrange中值定理知

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(a) \\ &= f'(\varepsilon)(x-a) \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon \in (a, x)$

又 $f'(x) \leq M$, $f(a) = 0$, 故 $f(x) \leq M(x-a)$.

则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b M(x-a)dx \\ &= \frac{M}{2}(b-a)^2 \quad . \end{aligned}$$

3.1.2 Taylor公式证明积分不等式

引理3.1.2.1^[10] (Taylor中值定理) 如果函数 $f(x)$ 中含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数, 对意 $x \in (a, b)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

(3.1.2.1)

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

(3.1.2.2)

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

公式 (3.1.2.1) 称为 $f(x)$ 按 $(x - x_0)$ 的幂展开的带有Lagrange型余项的 n 阶Taylor公式, 而 R_n 表达式 (3.1.2.2) 称为Lagrange型余项.

利用泰勒公式证明积分不等式的一般方法是将函数 $f(x)$ 在所给区间的端点或特定点 (如区间的中点、零点) 展开, 通过分析余项在点 ξ 的性质, 从而得到结果.

例3.1.2.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续的二阶导数, $f(a) = f(b) = 0$,

$$\text{令 } M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \text{ 证明 } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}(b - a)^3.$$

证 对 $\forall x \in [a, b]$, 由Taylor公式知

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a - x) + \frac{f''(\xi)}{2}(a - x)^2, \quad a < \xi < b.$$

注意到 $f(a) = f(b) = 0$, 因此有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_a^b f'(x)(a - x) dx - \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(a - x)^2 dx \\ &= -f(x)(x - a) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(a - x)^2 dx, \\ &= - \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(a - x)^2 dx \end{aligned}$$

移项, 整理得

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \frac{M}{4} \int_a^b (a - x)^2 dx \\ &= \frac{M}{12}(b - a)^3. \end{aligned}$$

例3.1.2.2 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上具有连续的二阶导数, 且 $f(1) = 0$, 证明:

$$\int_0^2 f(x)dx \leq \frac{1}{3} \max_{x \in [0,2]} |f''(x)|.$$

证 由Taylor公式知, 对 $\forall x \in [0,2]$, 将 $f(x)$ 在 $x=1$ 处展开, 得

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x-1)^2, \quad \varepsilon \in (x,1).$$

由 $f(x)=0$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^2 f(x)dx \right| &\leq |f'(1)| \left| \int_0^2 (x-1)dx \right| + \frac{1}{2} \max_{x \in [0,2]} |f''(x)| \int_0^2 (x-1)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{3} \max_{x \in [0,2]} |f''(x)| \end{aligned}$$

故命题成立.

例3.1.2.3 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续的导数, 且 $f(\frac{a+b}{2})=0$,

记 $M = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$, 试证明:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M \frac{(b-a)^3}{24}.$$

证 将 $f(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 点Taylor展开, 并注意到 $f(\frac{a+b}{2})=0$. 得

$$f(x) = f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - \frac{a+b}{2})^2,$$

因此

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= f'(\frac{a+b}{2}) \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})dx + \frac{1}{2!} \int_a^b f''(\xi)(x - \frac{a+b}{2})^2 dx \\ &= \frac{1}{2!} \int_a^b f''(\xi)(x - \frac{a+b}{2})^2 dx \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \frac{1}{2!} \int_a^b |f''(\xi)| (x - \frac{a+b}{2})^2 dx \\ &\leq M \frac{(b-a)^3}{24} \end{aligned}$$

3.1.3 函数的单调性证明积分不等式

单调函数是一类很重要的函数, 常在积分不等式证明中使用, 运用导数可

以判断出函数的单调性.

引理3.1.3.1^[10] 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增;

(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减.

利用函数的增减性证明积分不等式的步骤为:

(1) 通过恒等变换(形)构造合适的辅助函数 $F(x)$ (构造辅助函数一般的方法是, 直接将不等号右端项移至不等号左端, 令不等号右端为零, 左端即为所求的辅助函数);

(2) 求 $F(x)$ 在所给区间上的一阶导数, 然后判别一阶导数在此区间上的符号;

(3) 有时需要求 $F(x)$ 在所给区间端点的函数值或极限, 以便作出比较, 即可得到所要证明的结果.

例3.1.3.1 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且单调递减, $f(x) > 0$. 求证对满足

$$0 < \alpha < \beta < 1 \text{ 的任何 } \alpha, \beta \text{ 有 } \beta \int_0^\alpha f(x) dx > \alpha \int_\alpha^\beta f(x) dx.$$

证 令 $F(x) = x \int_0^\alpha f(t) dt - \alpha \int_\alpha^x f(t) dt, x \geq \alpha,$

由题意可知

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^\alpha f(t) dt - \alpha f(x) \\ &= \int_0^\alpha [f(t) - f(x)] dt \\ &> 0 \end{aligned}$$

因此 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 从而 $F(\beta) > 0 (0 < \alpha < \beta < 1)$.

$$\text{即 } \beta \int_0^\alpha f(x) dx > \alpha \int_\alpha^\beta f(x) dx.$$

例3.1.3.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且单调递增, 证明

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

证 构造辅助函数 $F(t) = \int_a^t xf(x) dx - \frac{a+t}{2} \int_a^t f(x) dx,$

显然 $F(a) = 0$, 对任意的 $t \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned} F'(t) &= tf(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) dx - \frac{a+t}{2} f(t) \\ &= \frac{t-a}{2} f(t) - \frac{1}{2} \int_a^t f(x) dx, \\ &= \frac{1}{2} \int_a^t [f(t) - f(x)] dx \end{aligned}$$

其中 $x \in (a, t)$.

因为 $f(x)$ 单调递增, 则 $F'(t) \geq 0$, 故 $F(t)$ 单调递增, 因此 $F(b) \geq F(a) = 0$.

故

$$\int_a^b xf(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

例3.1.3.3 设 $f(x)$, $g(x)$ 和它们的平方在区间 $[a, b]$ 上可积, 证明不等式 (Schwarz不等式)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

证 构造函数

$$\text{令 } F(t) = \int_a^t f^2(x) dx \int_a^t g^2(x) dx - \left(\int_a^t f(x)g(x) dx \right)^2,$$

则当 $t \geq a$ 时,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_a^t f^2(t)g^2(x) dx + \int_a^t f^2(x)g^2(t) dx - 2f(t)g(t) \int_a^t f(x)g(x) dx \\ &= \int_a^t (f(t)g(x) - f(x)g(t))^2 dx \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

于是可知 $F(t)$ 单调不减, 又 $F(a) = 0$, 所以 $F(b) \geq 0$.

即得证 $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx$.

3.1.4 函数凹凸性证明积分不等式

定义3.1.4.1^[10]

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若对 I 上的任意任意两点 x_1, x_2 和任意实数 $\lambda \in (0, 1)$ 恒有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸函数. 反之, 如果总有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凹函数.

如果函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数, 那么就能利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性. 下面就是曲线凹凸性的判定定理.

引理3.1.4.1^[10] 设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导, 那么

(1) 若在 I 上 $f''(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数;

(2) 若在 I 上 $f''(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 I 上为凹函数.

例3.1.4.1 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续的凸函数, 即对 $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$, 及 $\forall \lambda \in [0, 1]$, 有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

试证明: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

证

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2} \int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]dx \\ &= \int_a^b \frac{f(x) + f(a+b-x)}{2} dx \\ &\geq \int_a^b f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(a+b-x)\right)dx \\ &= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx \\ &= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

从而得左不等式, 下证右不等式

$$\forall x \in [a, b], \text{ 有 } x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b,$$

$$\text{从而 } f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

$$\text{两边积分得 } \int_a^b f(x)dx \leq \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

于是得右不等式.

故命题成立.

3.2 积分证明积分不等式

3.2.1 定积分性质证明积分不等式

运用定积分的性质证明积分不等式是比较简单的做法，在解某些积分不等式时，能得出良好的结果.

例3.2.1.1 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$ ，求证：

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx.$$

证 将区间 $[a, b]$ 进行 n 等分，并设 $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ ， $(i = 0, 1, \dots, n)$.

于是， $\Delta x_i = \frac{(b-a)}{n}$. 利用 $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 是凹函数，则

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln f(x_i) \leq \ln \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(x_i).$$

即 $\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) \Delta x_i \leq \ln\left(\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i\right)$.

由假设条件知， $f(x)$ 与 $\ln f(x)$ 在 $[a, b]$ 上都连续，因此可积，在上式中令 $n \rightarrow +\infty$ ，则由定积分定义及 $\ln f(x)$ 的连续性可得：

$$\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n \ln f(x_i) \Delta x_i \leq \ln\left(\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i\right).$$

故 $\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx$.

例3.2.1.2 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，对任意的 x, y 都有

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|. \text{ 求证: } \left| \int_n^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

证 由于 $\int_n^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx$

因此

$$\begin{aligned}
 \left| \int_n^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx \right| \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \\
 &\leq M \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| x - \frac{k}{n} \right| dx \\
 &= \frac{M}{2n}
 \end{aligned}$$

故命题成立.

3.2.2 Schwarz不等式证明积分不等式

引理3.2.2.1^[11] (Schwarz不等式)

若函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上皆可积, 则

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

例3.2.2.1

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x) > 0$, 且 $\int_a^b f(x)dx = 1$, 试证明:

$$\left(\int_a^b f(x) \cos kx dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin kx dx \right)^2 \leq 1. \quad (k \text{ 为实数})$$

证 由Schwarz不等式知,

$$\begin{aligned}
 \left(\int_a^b f(x) \cos kx dx \right)^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(x)} \cos kx dx \right)^2 \\
 &\leq \int_a^b (\sqrt{f(x)})^2 dx \int_a^b (\sqrt{f(x)} \cos kx)^2 dx \\
 &= \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(x) \cos^2 kx dx \\
 &= \int_a^b f(x) \cos^2 kx dx.
 \end{aligned}$$

同理可得 $\left(\int_a^b f(x) \sin kx dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x) \sin^2 kx dx$.

因此

$$\begin{aligned}
 \left(\int_a^b f(x) \cos kx dx \right)^2 + \left(\int_a^b f(x) \sin kx dx \right)^2 &\leq \int_a^b f(x) (\cos^2 kx + \sin^2 kx) dx \\
 &= \int_a^b f(x) dx \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

例3.2.2.2 设 $a > 0$, 试证明:

$$\int_0^{\pi} x a^{\sin x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\sin x} dx \geq \frac{\pi^3}{4}.$$

证 作变换 $x = t + \frac{\pi}{2}$, 则 $\int_0^{\pi} x a^{\sin x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\sin x} dx$.

由Schwarz不等式可得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x a^{\sin x} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\sin x} dx &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^{\frac{\sin x}{2}}\right)^2 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^{-\frac{\sin x}{2}}\right)^2 dx \\ &\geq \pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx\right)^2 \\ &= \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

故结论成立.

例3.2.2.3 试证明:

$$\frac{1}{4} \pi(a+b) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx \leq \frac{1}{4} \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

证 由Schwarz不等式得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{4} (a^2 + b^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

即积分不等式的右半边为真. 下证积分不等式的左半边为真.

因为

$$\begin{aligned} (a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) - (a \sin^2 x + b \cos^2 x)^2 &= (a-b)^2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

所以

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x \leq \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x},$$

积分便得

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \pi(a+b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^2 x + b \cos^2 x) dx \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

综上, 命题得证.

3.2.3 重积分证明积分不等式

当积分不等式中出现两个积分，可以将两个积分的积分变量换成不同符号，即化为二重积分，从而再求出结果.

例3.2.3.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$ ，证明：

$$\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2.$$

证 记

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \\ &= \int_a^b f(y)dy \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx, \\ &= \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \\ &= \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(y)}dy, \\ &= \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy \end{aligned}$$

两式相加，得

$$\begin{aligned} 2I &= \iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) dxdy \\ &\geq 2 \iint_D dxdy, \\ &= 2(b-a)^2 \end{aligned}$$

其中 $\frac{f(x)}{f(y)} > 0$ ，

即 $\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2$.

例3.2.3.2 设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减且恒大于0的连续函数，求证：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \leq \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

证 令

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 xf(x)dx \int_0^1 f^2(x)dx - \int_0^1 xf^2(x)dx \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 xf(x)dx \int_0^1 f^2(y)dy - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 yf^2(y)dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f^2(y)f(x)(x-y)dxdy \end{aligned}$$

同理 $I = \int_0^1 \int_0^1 f(y)f^2(x)(y-x)dxdy$ 两边相加整理得:

$$2I = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)(x-y)[f(y)-f(x)]dxdy.$$

由于 $f(x) > 0$ 且在 $[0,1]$ 上单调递减, 因此, $(x-y)(f(y)-f(x)) \geq 0$, 从而 $I \geq 0$, 故命题得证.

3.2.4 积分中值定理证明积分不等式

引理3.2.4.1^[11] (积分第一中值定理)

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

引理3.2.4.2^[11] (推广的积分第一中值定理)

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

引理3.2.4.3^[11] (积分第二中值定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(i) 若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减, 且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx;$$

(ii) 若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增, 且 $g(x) \geq 0$, 则存在 $\eta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_\eta^b f(x)dx.$$

引理3.2.4.4^[11] (推广的积分第二中值定理)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 若 $g(x)$ 为单调函数, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx.$$

例3.2.4.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调递增, 求证:

$$\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx.$$

证1 (推广的积分第一中值定理)

因为 $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})f(x)dx \geq 0$.

又

$$\begin{aligned} \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})f(x)dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x - \frac{a+b}{2})f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x - \frac{a+b}{2})f(x)dx \\ &= f(\varepsilon) \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x - \frac{a+b}{2})dx + f(\eta) \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x - \frac{a+b}{2})dx, \\ &= \frac{(b-a)^2}{8} [f(\varepsilon) - f(\eta)] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon \in [a, \frac{a+b}{2}]$, $\eta \in [\frac{a+b}{2}, b]$.

故 $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$.

证2 （推广的积分第二中值定理）

因为 $f(x)$ 单调，由积分第二中值定理得

$$\begin{aligned} \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})f(x)dx &= f(a) \int_a^\varepsilon (x - \frac{a+b}{2})dx + f(b) \int_\varepsilon^b (x - \frac{a+b}{2})dx \\ &= \frac{1}{2} \left[(\frac{b-a}{2})^2 - (\varepsilon - \frac{a+b}{2})^2 \right] [f(b) - f(a)], \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon \in [a, b]$.

而 $(\frac{b-a}{2})^2 - (\varepsilon - \frac{a+b}{2})^2 \geq 0$, $f(b) - f(a) \geq 0$.

又因为 $f(x)$ 单调递增，故 $\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})f(x)dx \geq 0$.

例3.2.4.2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，而且单调不减，证明：对于任何 $a \in (0,1)$ 有

$$\int_0^a f(x)dx \geq a \int_0^1 f(x)dx.$$

证 （推广的积分第一中值定理）

对任意 $a \in (0,1)$ ，由 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx$ ，

得 $\int_0^a f(x)dx - a \int_0^1 f(x)dx = (1-a) \int_0^a f(x)dx - a \int_a^1 f(x)dx$.

函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义，且单调不减，即是说 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续.

从而

$$\begin{aligned}
 \int_0^a f(x)dx - a \int_0^1 f(x)dx &= (1-a) \int_0^a f(x)dx - a \int_0^1 f(x)dx \\
 &= (1-a)f(\varepsilon) \int_0^a 1dx - af(\eta) \int_a^1 1dx, \\
 &= a(1-a)f(\varepsilon) - a(1-a)f(\eta) \\
 &= a(1-a)(f(\varepsilon) - f(\eta))
 \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon \in (0,1)$, $\eta \in (0,1)$,

再 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义, 且单调不减, 而 $\varepsilon \in (0,1)$, $\eta \in (0,1)$,

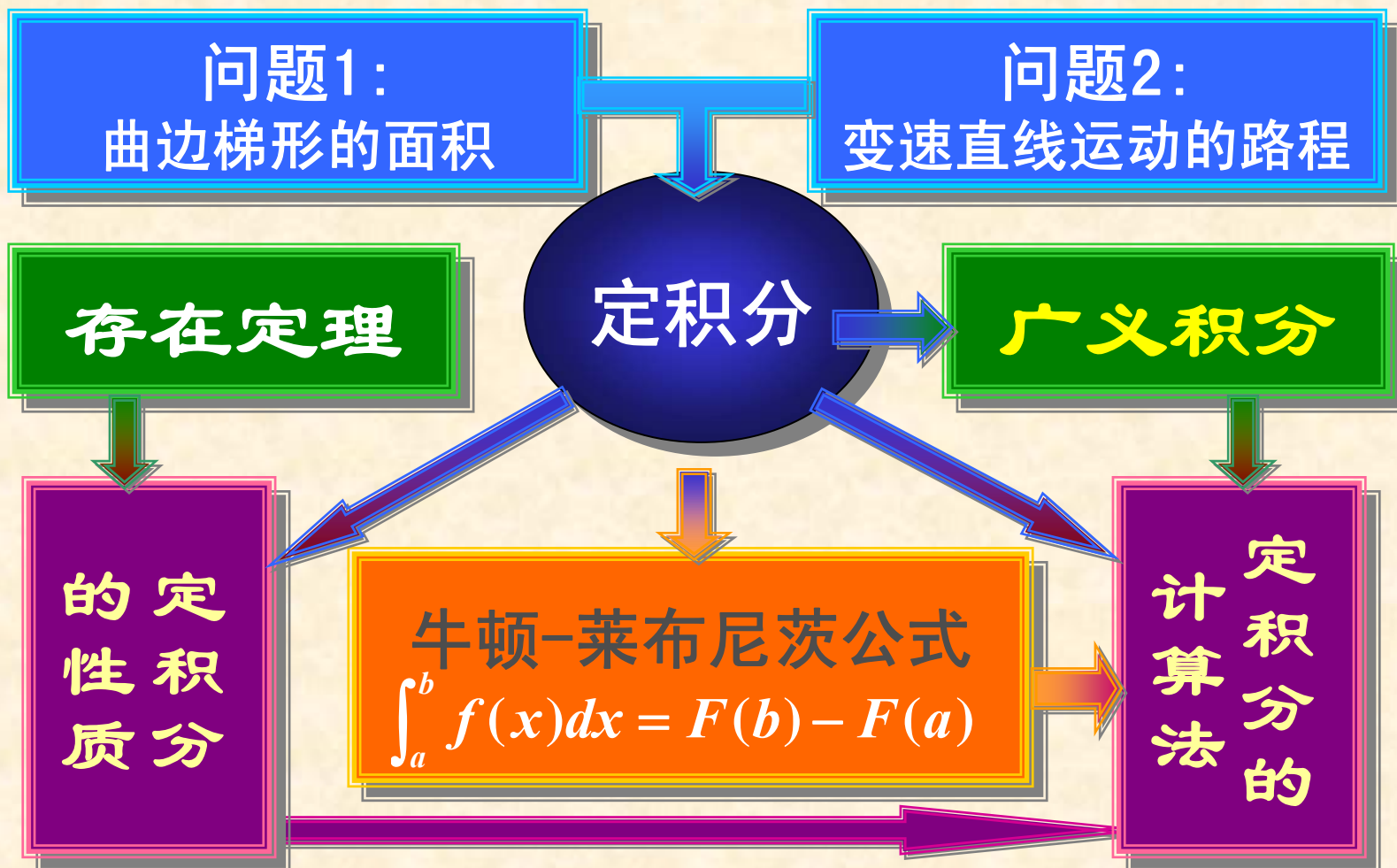
于是 $f(\varepsilon) > f(\eta)$, 即 $\int_0^a f(x)dx \geq a \int_0^1 f(x)dx$.

第五章 习题课

定积分

- 一、主要内容
- 二、典型例题

一、主要内容



1、问题的提出

实例1 （求曲边梯形的面积A）

曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$)、
 x 轴与两条直线 $x = a$ 、 $x = b$ 所围成。

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

实例2 （求变速直线运动的路程）

设某物体作直线运动，已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的一个连续函数，且 $v(t) \geq 0$ ，求物体在这段时间内所经过的路程 S 。

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i$$

方法:分割、求和、取极限。

2、定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中任意
若干若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots [x_{n-1}, x_n],$$

各小区间的长度依次为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ($i = 1, 2, \cdots$),

在各小区间上任取一点 ξ_i ($\xi_i \in \Delta x_i$),

作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots$) 并作和 $S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$,

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, 如果不论对 $[a, b]$

怎样的分法, 也不论在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上点 ξ_i 怎样

的取法, 只要当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 和 S 总趋于确定的极限 I ,

我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分,

记为 $\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.

3、存在定理

可积的两个充分条件：

定理1 当函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续时，
称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

定理2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界，
且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间
 $[a, b]$ 上可积.

4、定积分的性质

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

性质2 $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (k 为常数)

性质3 假设 $a < c < b$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

性质4 $\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a$

性质5 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$,

$$\text{则 } \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b)$$

推论: (1) 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$,

$$\text{则 } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (a < b)$$

$$(2) \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

性质6 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值及最小值,

则
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

性质7 (定积分中值定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,

则在积分区间 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ ,

使
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b)$$

积分中值公式

5、牛顿—莱布尼茨公式

定理1 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则积分上限的函数

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上具有导数, 且它的导数

是 $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$

定理2 (原函数存在定理) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上

连续, 则积分上限的函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 就是

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

定理 3 (微积分基本公式) 如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

也可写成 $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$.

牛顿—莱布尼茨公式

表明: 一个连续函数在区间 $[a, b]$ 上的定积分等于它的任一原函数在区间 $[a, b]$ 上的增量.

6、定积分的计算法

(1) 定义

(2) 性质

(3) 换元法

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

换元公式

(4) 分部积分法

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

分部积分公式

7、广义积分

(1)无穷限的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

当极限存在时，称广义积分**收敛**；当极限不存在时，称广义积分**发散**。

(2)无界函数的广义积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx \end{aligned}$$

当极限存在时，称广义积分**收敛**；当极限不存在时，称广义积分**发散**。

二、典型例题

例1 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$
及 $\int_0^1 f(x) dx$.

定积分是
一个数

解 令 $a = \int_0^1 f(x) dx$, 则 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + ax^3$

$$a = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + a \int_0^1 x^3 dx$$

$$= \arctan x \Big|_0^1 + a \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{a}{4}, \quad \therefore a = \frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{3} x^3, \quad \int_0^1 f(x) dx = a = \frac{\pi}{3}.$$

例2 求极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

解 $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n} \pi}{n + \frac{1}{i}}$

$$\frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n + \frac{1}{i}} \stackrel{?}{=} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

不是

$$\frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n+1} < \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n + \frac{1}{i}} < \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n+1} < \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n + \frac{1}{i}} < \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \pi \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \sin \pi x \, dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n \sin \pi \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \pi \frac{i}{n}}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^n \sin \pi \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \pi \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} \\
&= 1 \cdot \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

由夹逼准则，得

$$\therefore I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\sin \frac{i}{n} \pi}{n + \frac{1}{i}} = \frac{2}{\pi}.$$

练习

1. 设 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x) dx$, 求 $f(x)$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} = (\quad)$.

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$

(B) $2 \int_1^2 \ln x dx$

(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$

(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$

1. 设 $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x) dx$, 求 $f(x)$.

解 令 $a = \int_0^1 f^2(x) dx$, 则 $f(x) = 3x - a\sqrt{1-x^2}$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (3x - a\sqrt{1-x^2})^2 \\ &= 9x^2 - 6ax\sqrt{1-x^2} + a^2(1-x^2) \end{aligned}$$

等式两边积分:

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 [9x^2 - 6ax\sqrt{1-x^2} + a^2(1-x^2)] dx \\ &= 3 - 2a + \frac{2}{3}a^2, \end{aligned}$$

即 $2a^2 - 9a + 9 = 0$.

$$\text{即 } 2a^2 - 9a + 9 = 0,$$

$$(2a - 3)(a - 3) = 0$$

$$\text{解得 } a = \frac{3}{2}, a = 3.$$

$$\therefore f(x) = 3x - \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{及 } f(x) = 3x - 3\sqrt{1-x^2}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} = (B).$$

(2004考研)

$$(A) \int_1^2 \ln^2 x dx$$

$$(B) 2 \int_1^2 \ln x dx$$

$$(C) 2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$$

$$(D) \int_1^2 \ln^2(1+x) dx$$

解
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln(1+x)^2 dx \stackrel{\text{或}}{=} \int_1^2 \ln t^2 dt$$

$$(t = 1 + x)$$

例3 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$.

解 原式 = $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= 2\sqrt{2} - 2.$$

例4 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

解法1. 由 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$, 设 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$,

$$\text{则 } I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = 0.$$

$$\text{故得 } 2I = \frac{\pi}{2}, \quad \text{即 } I = \frac{\pi}{4}.$$

解法2.

$$\begin{aligned}\text{令 } \sin x &= A(\sin x + \cos x) + B(\sin x + \cos x)' \\ &= (A - B)\sin x + (A + B)\cos x\end{aligned}$$

$$\text{则 } \begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \text{解得 } A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\therefore I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} \right] dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

例5 求 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$.

解 令 $e^{-x} = \sin t$,

x	0	$\ln 2$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$

则 $x = -\ln \sin t, dx = -\frac{\cos t}{\sin t} dt$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

例6 求 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x dx$.

解 令 $2x = t$, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2 \sin x \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln \sin x + \ln \cos x) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx \stackrel{x = \frac{\pi}{2} - t}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) (-dt) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2x dx \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{4} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \frac{\pi}{4} \ln 2 + 2I \end{aligned}$$

$$\therefore I = -\frac{\pi}{4} \ln 2.$$

例7 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,

$$\text{证明 } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx .$$

证 $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx$

偶函数

$$\begin{array}{l} \underline{x = \pi - t} \\ \underline{t = \pi - x} \end{array} \int_{\pi}^{-\pi} f(|\cos(\pi - t)|) (-dt) = \int_{-\pi}^{\pi} f(|\cos t|) dt$$

$$= 2 \int_0^{\pi} f(|\cos t|) dt \begin{array}{l} \underline{t = \frac{\pi}{2} - u} \\ \underline{u = \frac{\pi}{2} - t} \end{array} 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f\left(\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right|\right) (-du)$$

偶函数

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin u|) du$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin u|) du = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos u|) du$$

即 $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\cos x|) dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} f(|\cos x|) dx.$$

例8 设 $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$, $f(x)$ 可导,
且 $f(0) = 0$. 证明:

- (1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 为奇函数;
- (2) 若 $f(x) > 0 (x > 0)$, 则 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加;
- (3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^3 是等价无穷小, 求 $f'(0)$.

证 (1) $f(-x) = f(x)$

$$\begin{aligned}\because F(-x) &= \int_0^{-x} [(-x)^2 - t^2] f(t) dt \\ &= \int_0^{-x} (x^2 - t^2) f(t) dt\end{aligned}$$

$$F(x) = \int_0^{-x} (x^2 - t^2) f(t) dt$$

$$\underline{\underline{\text{令 } u = -t}} \int_0^x [x^2 - (-u)^2] f(-u) (-du)$$

$$= -\int_0^x (x^2 - u^2) f(u) du = -F(x)$$

$\therefore F(x)$ 是奇函数

$$(2) \quad F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$$
$$= x^2 \cdot \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$$

$$F'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 \cdot \cancel{f(x)} - \cancel{x^2} f(x)$$

$$F'(x) = 2x \int_0^x f(t) dt$$

$$\because f(x) > 0 \quad (x > 0)$$

$$\therefore \text{当 } x > 0 \text{ 时, } \int_0^x f(t) dt > 0$$

从而当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$

又 $\because F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续

$\therefore F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

$$(3) \quad 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \int_0^x f(t) dt}{x^3}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad (f(0) = 0)$$

$$= f'(0)$$

$$\therefore f'(0) = 1$$

例9 设 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 0$,

$$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt, \quad (n \in \mathbb{N})$$

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}}$.

解
$$F(x) = \int_0^x t^{n-1} f(x^n - t^n) dt = \frac{1}{n} \int_0^x f(x^n - t^n) d(t^n)$$
$$= -\frac{1}{n} \int_0^x f(x^n - t^n) d(x^n - t^n)$$

令 $u = x^n - t^n$
$$-\frac{1}{n} \int_{x^n}^0 f(u) du = \frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du$$

$$\therefore F(x) = \frac{1}{n} \int_0^{x^n} f(u) du$$

$$F'(x) = \frac{1}{n} f(x^n) \cdot nx^{n-1} = f(x^n) \cdot x^{n-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}} = \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) \cdot x^{n-1}}{x^{2n-1}}$$

$$= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n)}{x^n} = \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^n) - f(0)}{x^n} \quad (f(0) = 0)$$

$$= \frac{1}{2n} f'(0)$$

练习3.

设 $f(x)$ 连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 (**A**).

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数;
- (B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数;
- (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 也是周期函数;
- (D) 当 $f(x)$ 是单调增加函数时, $F(x)$ 必是单调增加函数.

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数;

解 $F(x) = \int_0^x f(t) dt + C$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt + C$$

$$\stackrel{u=-t}{=} \int_0^x f(-u)(-du) + C$$

$$= \int_0^x f(u) du + C = F(x).$$

\therefore (A) 

◇ (B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数;

反例: $f(x) = \cos x$ 偶函数

$F(x) = \sin x + 1$ 无奇偶性

◇ (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 也是周期函数;

反例: $f(x) = 1 + \cos x$ 周期函数

$F(x) = x + \sin x$ 非周期函数

◇ (D) 当 $f(x)$ 是单调增加函数时, $F(x)$ 必是单调增加函数. 反例: $f(x) = x$ 单调增

$F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 无单调性.

练习4. 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$, 则 $F(x)$ (**A**).

(A) 为正常数; (B) 为负常数;

(C) 恒为零; (D) 不为常数.

解法1 令 $f(t) = e^{\sin t} \sin t$, 则

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

若 $f(x)$ 连续, $f(x+T) = f(x)$,

$$\text{则 } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

$$F(x) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt \quad \text{为常数}$$

$$= \int_0^{\pi} (e^{\sin t} \sin t - e^{-\sin t} \sin t) dt$$

$$= \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx$$

$$= \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

\therefore 当 $t \in (0, \pi)$ 时, $\sin t > 0$

$\therefore e^{\sin t} - e^{-\sin t} > 0, (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t > 0,$

$\therefore F(x) > 0$ 且 $F(x)$ 为常数. 选(A)

解法1 $F(x) = \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$

$$= -\int_0^{2\pi} e^{\sin t} d(\cos t)$$
$$= -\left[e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt \right]$$
$$= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \cos^2 t dt > 0$$

类似题(提高练习题—2004年考研)

$$\text{设 } f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| \, dt,$$

- (1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;
(2) 求 $f(x)$ 的值域.

$$\text{证(1) } f(x + \pi) = \int_{\underline{x+\pi}}^{x+\frac{3\pi}{2}} |\sin t| \, dt$$

$$\stackrel{t=\pi+u}{=} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin(\pi + u)| \, du = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u| \, du = f(x).$$

$\therefore f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数 .

解 (2) $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt,$

$\because |\sin x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导

又 $\because f(x)$ 以 π 为周期, 故只需在 $[0, \pi]$ 上讨论 $f(x)$ 的值域.

$$\because f'(x) = \left| \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| - |\sin x| = |\cos x| - |\sin x|$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 得驻点 } x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}} |\sin t| dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin t| dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin t dt$$

$$= -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

若 $f(x)$ 连续, $f(x+T) = f(x)$,
 则 $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin t| dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin t| dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4} + \pi} |\sin t| dt \rightarrow \text{以 } \pi \text{ 为周期}$$

$$= -\sqrt{2} + \int_0^{\pi} \sin t dt = -\sqrt{2} + 2.$$

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 |\sin t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t dt = 1$$

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \int_{\pi}^{\pi + \frac{\pi}{2}} 2 |\sin t| dt \\ &= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 2 (-\sin t) dt = 1 \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最小值是 $2 - \sqrt{2}$, 最大值是 $\sqrt{2}$,

故 $f(x)$ 的值域是 $[2 - \sqrt{2}, 2]$.

练习5. 设 $f(x)$ 连续, 常数 $a > 0$, 证明:

$$\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}.$$

分析 显然要用换元法.

$$x = \varphi(t) = ?$$

原则: **先**看被积函数, **再**看限.

令 $t = x^2$ ($x = \sqrt{t}$), 则

$$\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx^2}{2x^2}$$

令 $t = x^2$ $\frac{1}{2} \int_1^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t}$

右端 = $\int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} + \int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} \right]$$

需证: $\int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} \stackrel{?}{=} \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t}$

需证:
$$\int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} \stackrel{?}{=} \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

问: 能否作变换 $u = \frac{t}{a}$? 否

$$\int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} = \int_1^a f\left(au + \frac{a}{u}\right) \frac{du}{u}$$

被积函数未达到要求!

要求: $t + \frac{a^2}{t} = u + \frac{a^2}{u}$, 即 $(t - u) + a^2 \frac{u - t}{ut} = 0$

$$\text{即 } (t-u) + a^2 \frac{u-t}{ut} = 0$$

$$\text{亦即 } (t-u) \left(1 - \frac{a^2}{tu}\right) = 0$$

$$\therefore 1 - \frac{a^2}{tu} = 0, \quad u = \frac{a^2}{t}$$

$$\text{证 } \int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx^2}{2x^2}$$

$$\underline{\underline{\text{令 } t = x^2}} \quad \frac{1}{2} \int_1^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} + \int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} \right]$$

$$\int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t} \stackrel{\text{令 } u = \frac{a^2}{t}}{=} \int_a^1 f\left(\frac{a^2}{u} + u\right) \frac{u}{a^2} \cdot \left(-\frac{a^2}{u^2}\right) du$$

$$= \int_1^a f\left(u + \frac{a^2}{u}\right) \frac{du}{u} = \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

代入上式，得

$$\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x} = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{dx}{x}.$$

例10 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin x}{x^8 + 1} + \sqrt{\ln^2(1-x)} \right] dx$.

解 原式 = $0 + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\ln(1-x)| dx$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^0 \ln(1-x) dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1-x) dx$$

$$= \frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{1}{2}.$$

例11 求 $\int_{-2}^2 \min\{\frac{1}{|x|}, x^2\} dx$.

解 $\because \min\{\frac{1}{|x|}, x^2\} = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x| > 1 \end{cases}$ 是偶函数,

$$\text{原式} = 2 \int_0^2 \min\{\frac{1}{|x|}, x^2\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 x^2 dx + 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} + 2 \ln 2.$$

例12 设 $f(x) = \int_0^x e^{-y^2+2y} dy$, 求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx$.

解 原式 = $\frac{1}{3} \int_0^1 f(x) d(x-1)^3$

$$= \frac{1}{3} [(x-1)^3 f(x)]_0^1 - \int_0^1 (x-1)^3 f'(x) dx]$$

$$= \frac{1}{3} \{ [0 + \underbrace{f(0)}_0] - \int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x} dx \}$$

$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1} d[(x-1)^2]$$

$$\underline{\underline{\text{令 } (x-1)^2 = u}} \quad -\frac{e}{6} \int_1^0 ue^{-u} du = -\frac{1}{6}(e-2).$$

例13 设 $p > 0$, 证明: $\frac{p}{p+1} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1$.

证 $\because \frac{1}{1+x^p}$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

当 $x \in (0,1), p > 0$ 时, 有

$$1 - x^p < \frac{1}{1+x^p} = 1 - \frac{x^p}{1+x^p} < 1$$

而 $\int_0^1 (1-x^p) dx = 1 - \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{p}{p+1}$

$$\therefore \frac{p}{p+1} = \int_0^1 (1-x^p) dx < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < \int_0^1 dx = 1$$

例14 求下列广义积分：

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{1+x} + e^{3-x}}; \quad (2) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}.$$

解 (1) 原式 = $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(1+x)}}{1 + e^{2-2x}} dx$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2} \cdot e^{1-x}}{1 + (e^{1-x})^2} dx = -e^{-2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{1 + (e^{1-x})^2} d(e^{1-x})$$

$$= -e^{-2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan e^{1-x} \Big|_1^b = -e^{-2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\arctan e^{1-b} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4e^2}.$$

$$(2) \quad \because \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}} = \infty,$$

$\therefore x = 1$ 为 $f(x)$ 的瑕点.

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2 - 2x - 1}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \left[- \int_t^2 \frac{d\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{2^2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}} \right]$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 1^+} \arcsin \frac{1 + \frac{1}{x}}{2} \Big|_t^2 = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}.$$

测验题

一、选择题:

1、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = (\quad)$

(A) 0; (B) $\frac{1}{2}$;

(C) $\frac{\pi}{4}$; (D) $\frac{\pi}{2}$.

2、 $\frac{d}{dx} \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt = (\quad)$

(A) $\ln(x^2 + 1)$; (B) $\ln(t^2 + 1)$;

(C) $2x \ln(x^2 + 1)$; (D) $2t \ln(t^2 + 1)$.

3、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = (\quad)$

(A) 0;

(B) 1;

(C) $\frac{1}{3}$;

(D) ∞ .

4. 、定积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ 的值是 (\quad)

(A) e ;

(B) $\frac{1}{2}$;

(C) $e^{\frac{1}{2}}$;

(D) 2 .

5、下列积分中，使用变换正确的是（ ）

(A) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^3 x}$, 令 $x = \arctan t$;

(B) $\int_0^3 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$, 令 $x = \sin t$;

(C) $\int_{-1}^2 \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$, 令 $1+x^2 = u$;

(D) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$, 令 $x = t^{\frac{1}{3}}$.

6、下列积分中，值为零的是（ ）

(A) $\int_{-1}^1 x^2 dx$;

(B) $\int_{-1}^2 x^3 dx$;

(C) $\int_{-1}^1 dx$;

(D) $\int_{-1}^1 x^2 \sin x dx$.

7、已知 $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f'(2) = 5$,

则 $\int_0^2 xf''(x)dx = ()$

(A) 12;

(B) 8;

(C) 7;

(D) 6.

8、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0 \end{cases}$, 则定积分 $\int_0^2 f(x-1)dx$
= ()

(A) $1 + \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$;

(B) $2 - \ln(1 + e^2) + \ln 3$;

(C) $1 + \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \ln 2$;

(D) $1 - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)$.

9、广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = (\quad)$

(A) $\ln 4$;

(B) 0 ;

(C) $\frac{1}{3} \ln 4$;

(D) 发散.

10、广义积分 $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} = (\quad)$

(A) $1 - \ln 3$;

(B) $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$;

(C) $\ln 3$;

(D) 发散.

二、证明不等式：

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \leq \frac{\pi}{6}, \quad (n > 2).$$

三、求下列函数的导数：

1、 $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ ；

2.、由方程 $\int_0^y e^{t^2} dt + \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = 1$ ，确定 y 为 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

四、求下列定积分：

$$1、\int_1^4 \frac{dx}{x(1+\sqrt{x})};$$

$$2、\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$3、\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx;$$

$$4、\int_{-2}^5 |x^2-2x-3| dx;$$

$$5、\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+2^{\frac{1}{x}}};$$

$$6、\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9};$$

$$7、\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}};$$

$$8、\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

五、 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导数, $f(0) = 0$,
且 $0 < f'(x) \leq 1$, 试证:

$$\left[\int_0^1 f(x) dx \right]^2 \geq \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

六、 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导数, 证明:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x) f''(x) dx.$$

测验题答案

一、 1、 C; 2、 A; 3、 C; 4、 D; 5、 C;

6、 D; 7、 B; 8、 A; 9、 C; 10、 D.

三、 1、 $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; 2、 $\pm 2e^{-y^2} \sin x^2$.

四、 1、 $2\ln \frac{4}{3}$; 2、 $\frac{\pi}{4}$; 3、 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$; 4、 $\frac{71}{3}$;

5、 1; 6、 $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; 7、 $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}$; 8、 π .