

混流式水轮机转轮设计方法的研究

动力机械及工程专业

研究生 廉玲军 指导教师 张礼达

本文根据四川省科技厅应用基础课题“高性能水轮机转轮创新理论设计研究”[项目号(04JY029-054)]提出的研究内容,研究设计混流式水轮机转轮叶片的方法。其研究思想是:基于 S_1 和 S_2 两类相对流面理论,本文建立了混流式水轮机转轮内部流动的准三维计算与叶片设计的模型。以 $\vec{V}_{\theta r}$ 及厚度分布为已知条件,利用周向平均处理方法,从三维欧拉方程导出子午面上的流函数运动方程,并假定叶片骨面为周向平均流面,利用周向平均的一个 S_{2m} 流面和一组 S_1 流面的迭代计算得到所设计的叶片。利用八节点曲边四边形等参单元对计算区域进行了离散,采用 Galerkin 加权余量法,对 S_{2m}/S_1 流面的方程建立了有限元方程,采用松弛法进行迭代计算;采用了 Matlab 软件,按本文建立的模型编制了准三维设计程序。最后将该方法应用于混流式水轮机转轮的叶片设计,计算结果表明,按本文模型进行设计,可以得到满足给定负荷分布及厚度分布的转轮,为转轮设计提供了一种新的有效的计算模型和方法。该设计方法也可推广应用于转轮内的流动分析、转轮改型、优化及其它流体机械转轮的设计都是十分有效的。

关键词:混流式转轮,准三维设计, S_1/S_{2m} 流面,有厚叶片

The Method Researching of the Runner Hydraulic Design for the Francis Turbine

Major: Power Machinery and Engineering

M.D. Candidate: *Lian Ling-Jun* Supervisor: *Zhang Li-Da*

This paper was based on the applied basic problem of the office of science and technology, Sichuan province. Which is “Design and Research of the Innovative Theory on the New Type Turbine Runner.” The task’s item number is (04JY029-054) . According to the studying content, we have designed a Francis turbine runner. Which design idea is: Based on the relative stream surface and two types of theory, this paper set up a Francis turbine runner of the quasi-ternary internal mobile computing and blade design of the universal model. And the thickness distribution for the known conditions, the use of weeks to the average treatment methods, three-dimensional Euler equations derived from the surface meridional stream function equations of motion and assume that the blade bone surface for weeks to an average stream surface, using an average of a week to the stream surface and a set of stream surface of the iterative calculation to meet the needs of a given distribution and thickness of the blade has been designed. Using eight-node quadrilateral isoparametric curved element for calculating the discrete region, using Galerkin weighted residual method, surface convection equation set up the finite element equation, using iterative relaxation method; use of a powerful computing capabilities, The calculation results, programming visualization and high efficiency of Matlab programming software, set up by this paper, the model produced a quasi-three-dimensional design program. Finally the method is applied to a Francis turbine runner blades design, calculation results show that the design model according to this article, can be met given the load distribution and thickness distribution of the wheel for the wheel design

provides a new and effective The calculation model and method. The design method can also be applied to wheels of flow analysis, wheel retrofit, optimization and other fluid mechanical wheel design is very effective.

Keyword: the Francis runner, quasi-3D design, S_{2m1}/S_1 stream surface, blade with thickness

声 明

本人声明所提交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得西华大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在西华大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归西华大学所有，特此声明。

作者签名：康玲 2009年 6月 5日

导师签名：张永清 2009年 6月 8日

西华大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留，使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，西华大学可以将本论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复印手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

- 1、保密 ，在 年解密后适用本授权书；
- 2、不保密 ，适用本授权书。

(请在以上 内划)

学位论文作者签名：

康玲军

日期：2009.6.5

指导教师签名：

张礼贵

日期：

2009.6.8.

第一章 绪论

1.1 课题研究的目的是和意义

水能既是洁净能源又是可再生能源,在我国能源的组成中占有非常重要的地位。我国蕴藏着极其丰富水力资源,根据普查,我国水力资源的技术可开发装机 5.41 亿千瓦,经济可开发装机 4.02 亿千瓦,居世界首位,但是目前仅开发了不到 20%^[1]。当今水力发电在国内得到优先开发,根据我国能源规划,我国将加快流域的水电梯级开发力度,在 2020 年以前,使水力发电在中国电力结构中提高到整个电力的 25%以上。许多大型和巨型电站在建或即将兴建,如三峡、水布娅、小湾、向家坝、溪洛渡、龙滩、锦屏二级等单机出力都是 400MW~750MW 的超大型混流式水轮机,转轮直径均在 6~9m 的范围,它们的建成,将使我国水电事业跃上一个新的台阶。

水电站单机容量和结构尺寸朝着巨型化方向发展对机组在设计合理性、制造工艺先进性、运行稳定性等方面提出了巨大的挑战。而水轮机是水电站的核心设备,其最重要的三个性能指标是:效率、空化和稳定性,分别关系到水能的利用程度、机组的寿命和机组能否安全正常运行。转轮是水轮机最为关键的部件,其性能的高低直接影响到水轮机的三个性能的好坏;同时也是最容易因设计不当或运行不合理等原因而在各种电站事故中遭到破坏的部件之一。水力机组在运行过程中经常由于过流部件中流场的速度分布不均匀和周期性脱流的旋涡所诱发出的压力脉动而引起振动,如尾水管涡带、卡门涡列等因素产生的周期性干扰激振力,会使转轮叶片产生振动,尤其当激振力的频率与转轮的固有频率相同或相近而发生共振时,激起较大振幅的振动,产生叶片的破坏。

另外,我国现在自行研究和设计的混流式水轮机转轮在水力性能方面与一些发达的国家相比还有一定的差距,尤其是水轮机的空化性能和稳定性;在新转轮设计方法上,新型的、现代化的设计方法才刚刚起步。因此,

深入进行转轮叶片设计方法的研究,改进水轮机转轮传统的设计方法,设计出性能优良的水轮机转轮对于提高水力发电机组的效率和运行稳定性、适应现代化水电机组朝大型化发展的趋势等具有重要的意义。

1.2 国内外研究现状及发展趋势

水轮机是把水的能量转化为旋转机械能的动力机械,它属于流体机械中的透平机械。在计算机不发达的 60 年代,流体机械转轮的设计主要是半经验的二维计算方法。对混流式水轮机,基于罗伦兹通流理论,根据 z 轴面流动规律的不同假设有一维理论和二维理论设计方法。70 年代以后,随计算机的发展,原先应用于可压缩流体的叶轮机械中的 S_1/S_2 两类流面理论逐步在水力机械转轮设计中得到应用。该理论是我国著名学者吴仲华先生在五十年代初提出来的,在此基础上建立了流体机械三维流动的普遍理论,从而奠定了流体机械流动理论的研究基础。两类相对流面理论上可以通过两类相对流面的交替迭代计算,逐次逼近三维流动的准确解;但是,精确求解 S_1 和 S_2 流面的流动比较复杂,目前发展还很不完善;通常将它们简化成一个平均 S_{2m} 流面与一组 S_1 旋成流面而构成准三维问题,准三维方法中一般假定 S_1 相对流面为回转面, S_2 相对流面为叶片中面。目前,绝大多数新的流体机械转轮设计方法是以两类相对流面理论为基础发展起来的,准三维数值计算方法也是转轮优化设计的有效方法。

从欧拉方程出发,根据连续方程引入流函数,则 S_{2m} 流面上的流动控制方程可转化为关于流函数的二阶椭圆型偏微分方程——Poisson 方程。该方程可以用有限差分法、有限体积法和有限元法等方法求解。这种基于 S_{2m} 流面的关于流函数的反问题计算方法一般是给定 $V_\theta r$ 分布及叶片厚度分布^[9]。吴仲华教授等根据 S_{2m} 流面流函数方程,在非正交曲线坐标系下进行了轴流式叶轮的设计,并对所设计叶轮进行了全三维流动分析,计算结果表明所设计叶轮满足要求。

葛满初^[7]从欧拉方程出发,导出了 S_1 流面上以计算网格的非正交曲线坐标为独立变量的流函数方程反问题的通用控制方程组,提出了流函数有

旋方程的直接反问题的数学物理模型, 给定叶片表面的速度及周向厚度的分布规律, 对亚音速、跨音速的 S_1 流面的反问题应用差分方法进行了研究, 并对典型的压气机叶栅进行计算。葛满初^[7]在无粘正问题和反问题计算的基础上, 用分区的物理模型, 发展了考虑粘性作用的 S_1 流面的反问题的计算方法。

刘高联教授建立了旋成面叶栅各类杂交命题统一的变域变分原理。利用泛函的变域变分公式来构造叶片上的边界条件, 建立以流函效和叶型几何坐标为未知量的泛函^[8]。通过求泛函极值得到流函数及叶型坐标的非线性代数方程组, 迭代求解实现叶栅的反问题计算。该方法的叶栅边界条件提法灵活多样, 能考虑流层厚度的变化, 公式简单, 易于推广至三维设计, 是一种实用的新方法。其不足之处是所求解的代数方程组为高次方程组, 迭代不易收敛。

R. D. Cedar和P. Stow结合 S_2 流面流动计算提出了 S_1 流面反问题计算的当量源法^[9]。其基本思想是与边界层计算的当量源法一样, 在设计中不修正叶片计算几何边界, 而是用置于叶片表面的面源来模拟叶片表面的计算修正(Surface Transpiration Model), 使叶型设计过程中计算网络保持不变。从而与正问题计算相结合构成了给定叶型表面速度分布的反问题计算模型。I. K. Jenions应用当量源法建立了一套完整的基于 S_1 流面的反问题计算的准三维设计系统。当量源法将流动分析、反问题设计和边界层计算结合起来, 设计过程中不须变动计算网格, 使得计算十分便利。不足之处就是当初始叶型和最终设计叶型相差较大时, 计算精度降低且易使设计叶型不光滑。M. Hart在Cedar等方法基础上, 引入光顺的方法修正计算数据, 根据等环量条件保证叶型的封闭性, 从而允许初始叶型与最终设计叶型间有较大偏差。

W. Jansen和A. M. Ki rscher针对离心叶轮设计, 提出了应用流线曲率法进行 S_{2m} 流面反问题计算的给定荷载设计方法^[9]。该方法的求解是一包含经验修正的迭代计算过程, 流线曲率法公式简单, 物理意义明确。特别对于上、下游边界条件难于准确给定的复杂的不规则计算域, 流线曲率法具有明显的优越性。在流体机械转轮的正、反命题计算中, 流线曲率法得

到了广泛应用。但对于有旋流动，则计算稳定性较差。

我国混流式水轮机的发展，主要是经历了一个由引进到自主开发的过程。在上个世纪的几十年中，我国水轮机设计资料主要沿用前苏联和东欧国家以及西方国家的一些资料；在“七五”后期，我国自行设计和研制了一批优秀的混流式转轮模型，其水力性能已达到国际先进水平。近些年来，我国的混流式水轮机有了一个飞速的发展，开发出一系列性能优良的混流式水轮机水力模型，虽然与德国、美国和瑞典等国相比，我国混流式转轮模型的效率要低 1~2%，比转数也略低些，但庆幸的是我国逐步改变了过去一直沿用的开发新转轮的方法，即：根据经验，设计不同的方案，然后对各种方案进行模型实验，根据实验结果的比较，进一步改进方案或确定最终设计方案，而 CFD 技术的重要性正逐步被认识，并向实用阶段发展。

1.3 课题的主要研究内容、途径和技术路线

1.3.1 主要研究内容

长期以来，在水轮机转轮叶片水力设计上应用比较广泛的是一维和二维理论方法，但是这两种方法所应用的设计理论和设计方法并不完善，特别是不能预估所设计转轮的各种性能，为了得到一个优质转轮，不仅要有丰富的经验而且必须依靠模型试验，造成研制周期长、费用高、测点位置有限制等缺点。

针对上述叶片设计理论的不足，近些年来国外把应用于可压缩流体叶轮机械的三维理论推广到水力机械已取得很大进展。本文根据准三维流动理论，研究混流式水轮机转轮叶片的设计方法。利用在两个相对流面间进行迭代求解准三维设计方法，设计出混流式水轮机转轮叶片。

1.3.2 途径

(1) 通过查阅国内外相关文献，收集水轮机转轮设计方法以及方法中的相关理论、原理等资料。

(2) 到水轮机生产制造单位和水电站进行调研，收集水轮机转轮设

计及运行的相关技术资料，了解水轮机转轮实际制造与理论设计间的差别，掌握其实际运行情况，为设计方法的改进打好铺垫。

(3) 学习 CFD 基础理论知识，为论文顺利的进行做好准备。

(4) 基于两类相对流面的准三维设计方法，首先在给定的一组初始旋成流面上进行反问题计算，得到所设计叶片，然后进行平均流面的正问题计算，来修正初始的旋成流面，如此反复迭代，直到收敛，从而计算出水轮机转轮。

1.3.3 技术路线

基于两类相对流面 (S_1, S_2) 的准三维设计方法，以 $\bar{V}_{\theta r}$ 及厚度分布为已知条件，利用周向平均处理方法，从三维欧拉方程导出子午面上的流函数运动方程，并假定叶片骨面为周向平均流面，利用周向平均的一个 S_{2m} 流面和一组 S_1 流面的迭代计算以满足给定的 $\bar{V}_{\theta r}$ 及厚度分布得到所设计的叶片。

第二章 转轮叶片设计的基础理论

长期以来,在混流式转轮叶片水力设计中,广泛采用叶片无穷多,叶片厚度无限薄的轴对称流的假定。这样,转轮中的水流可用一个轴面上的流动规律来代替,在以轴面流线为母线的回转面上绘型,即可确定叶片的骨面。由于对轴面上水流速度分布有着不同的假定,目前在工程中广泛使用3种设计方法,即假定轴面上同一过水断面上速度分布为等速流的一维理论设计方法;假定轴面上水流为有势流的二维理论设计方法和给定轴面上速度分布符合某种规律的二维有旋流的设计方法。在混流式转轮的研制方面,这些方法和实践经验结合,设计出许多好的转轮,但这些方法存在一些缺陷。一般说,主要缺点是对流场的假定与实际情况有较大的偏离^[2]。70年代以后,随计算机的发展,基于两类相对流面的准三维方法在流体机械转轮设计中逐步得到了应用。目前,绝大多数新的流体机械转轮设计方法是以两类相对流面理论为基础发展起来的,准三维数值计算方法也是转轮优化设计的有效方法^[3]。

2.1 一维设计理论

在一维设计理论中,假定水流是理想流体,即不考虑液体的粘性影响;一维理论设计方法还假定叶片无限多、无限薄。这样,液流运动是轴对称的,故可用任一轴面的流动来表示其他轴面的流动。此外还假定沿过水断面上的轴面速度 V_m 是均匀分布的。这样,水流在转轮中的轴面速度只要用一个能表明质点所在过水断面位置的坐标即可确定。如图2-1所示,过水断面BC上任一点的轴面速度 V_m 都相等,要确定断面BC上A点的速度,只要用一个坐标决定过水断面BC的位置即可^[1]。一维设计理论是最易掌握的,也是目前水力机械设计中最常用的设计方法。积累里大量的实验数据,具有其它设计理论不可替代的作用。文献[4, 5]对之进行了详细的阐述。一维设计理论一般适用于离心泵叶轮和低比转速水轮机转轮的设计。

一维设计理论设计思路主要是:首先构造好符合一定要求的叶轮轴面图。这时已经作好若干过流断面,根据这些过流断面得到若干回转流面;确定叶轮进口边,得到叶片进口角,选择叶片出口角,利用逐点算法或

保教变换法得到叶片骨线。按给定叶片厚度分布规律将叶片骨线加厚，最后得到三维实体叶片^[6]。

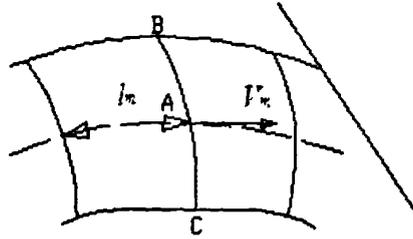


图 2-1 一维理论设计示意图

Fig.2-1 Figure of one-dimensional theory

2.2 二维设计理论

二维理论设计方法同样假定叶片无限多、无限薄，则液流运动是轴对称的，但都认为轴面速度沿过水断面是不均匀分布的。因此轴面上任一点的运动必须由两个坐标来确定，如图2-2所示。这两个坐标为过水断面的位置 l_m 和A点离上冠的长度 δ 。故二维理论多用于设计中高比转速转轮，在实际工作中用得较多。

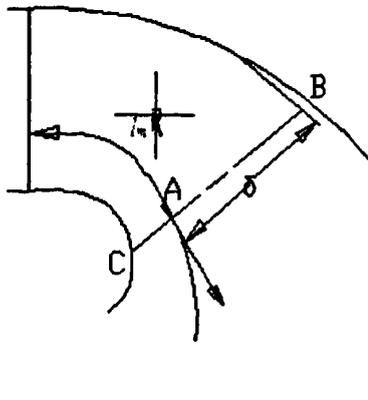


图 2-2 二维理论设计示意图

Fig.2-2 Figure of two-dimensional theory

2.2.1 轴对称设计理论 (1)

如果认为转轮叶片数无穷多，则流动与圆周角无关，即 $\partial/\partial\varphi = 0$ 。这

时转轮内部流动为轴对称流动。通过作图法求解该流动，得到轴面流线和轴面流速，于是回转 S_1 流面形状和轴面流速已知（图2-3）

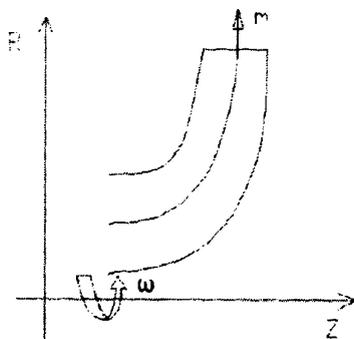


图 2-3 轴面流线
Fig.2-3 Axial streamline

$$\frac{dm}{Rd\varphi} = \frac{W_m}{W_u} = \frac{W_m}{V_u - R\omega} \quad (2-1)$$

得到

$$\varphi = \int_0^m \frac{V_u R - R^2 \omega}{R^2 W_m} dm + \varphi_1 \quad (2-2)$$

只要给定流体角动量或速度矩 $V_u R = f(m)$ 已知关系，就可积分得到叶片骨线。然后按预定叶片厚度加厚叶片骨线就可以得到有厚度叶片。该方法主要用于中高比转速水轮机转轮和混流泵叶轮的叶片设计。

2.2.2 轴对称设计理论（2）

(1) 辅助坐标

取图2-4所示的坐标系，定义辅助坐标 $\alpha = \varphi - f(R, Z)$ ，式中 $f(R, Z)$ 为叶片骨面坐标， α 的函数形式为

$$\alpha = n \frac{2\pi}{Z} \quad (2-3)$$

其中 n 为整数， $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ 。

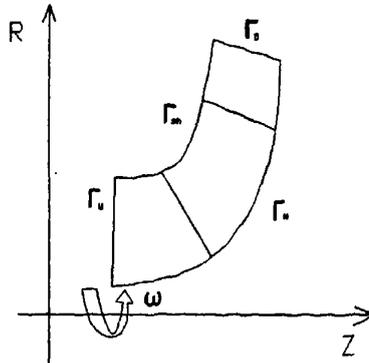


图 2-4 坐标系
Fig.2-4 Coordinate system

(2) 流动控制方程

假设流动是轴对称的，平均流动的涡集中在 α 上，即叶片骨面上。这个涡称为束缚涡，涡量强度为：

$$\bar{\Omega} = \nabla(V_u R) \times \nabla \alpha \quad (2-4)$$

其中角动量 $V_u R$ 沿流线是预先给定的，涡量强度 $\bar{\Omega}$ 等于平均流速的旋度，即

$$\bar{\Omega} = \nabla \times \bar{V} \quad (2-5)$$

于是 $\bar{\Omega}$ 的圆周方向的分量为：

$$\frac{\partial V_R}{\partial Z} - \frac{\partial V_Z}{\partial R} = \frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial (V_u R)}{\partial R} - \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial (V_u R)}{\partial Z} \quad (2-6)$$

该方程表示了流场与叶片形状和平均角动量 $V_u R$ 的关系。

流动还要满足连续性方程，为此引入流函数：

$$\begin{cases} V_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \\ V_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \end{cases} \quad (2-7)$$

将该式代入 $\bar{\Omega}$ 的圆周方向的分量表达式，得到流函数方程：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = -R \left(\frac{\partial f}{\partial Z} \frac{\partial (V_u R)}{\partial R} - \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial (V_u R)}{\partial Z} \right) \quad (2-8)$$

在无叶区右端项为零。

为了能够求解该方程，必须给定边界条件。在前后盖板流线，于是

$$\begin{cases} \psi|_{\Gamma_s} = Q_{th}/2\pi \\ \psi|_{\Gamma_H} = 0 \end{cases} \quad (2-9)$$

在上下游边界上

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n} |_{\Gamma_U} = -|\overline{V_U}| \sin(\overline{V_U}, \overline{n_U}) \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n} |_{\Gamma_D} = -|\overline{V_D}| \sin(\overline{V_D}, \overline{n_D}) \end{cases} \quad (2-10)$$

式中 $(\overline{V_U}, \overline{n_U})$ 和 $(\overline{V_D}, \overline{n_D})$ 分别表示速度 $\overline{V_U}$ 与法向量 $\overline{n_U}$ 以及速度 $\overline{V_D}$ 与法向量 $\overline{n_D}$ 的夹角。

(3) 叶片形状的确

对理想流体，流体相对流速要与叶片骨面相切。该条件可表示为

$$\overline{W} \cdot \nabla \alpha = 0 \quad (2-11)$$

平均相对流速 $\overline{W} = \overline{V} - \overline{U}$ 。将该式展开，得到叶片骨面微分方程

$$V_z \frac{\partial f}{\partial Z} + V_R \frac{\partial f}{\partial R} = \frac{V_u R}{R^2} - \omega \quad (2-12)$$

它是一阶偏微分方程，其特征线就是轴面流线。沿轴面流线可积分上式，得到叶片骨面形状。为此必须给定叶片进口边上的 f 值，作为上式积分的初值，该初值称为叶片的堆叠条件 (stacking condition)。

当求出流场以后，根据给定了的叶片堆叠条件，可以积分叶片骨面微分方程得到叶片骨面。为了使计算收敛，要采用亚松弛技术，即

$$f_{new} = f_{old} + c(f_{new} - f_{old}) \quad (2-13)$$

式中 c 为松弛因子， f_{old} 为上一次计算的 f ， f_{new} 为本次计算的 f 值。

(4) 叶片表面压力差的估计

叶片骨面两侧的压力差可表示为

$$\Delta p = \frac{2\pi}{Z} \rho \bar{W} \cdot \nabla (V_u R) \quad (2-14)$$

(5) 计算过程

一般采用有限差分法求解流函数方程和叶片骨面微分方程。由于求解六函数方程时，要知道 f 值，因此，必须假定 f 分布，然后再用叶片骨面方程更新 f ，直到收敛为止。

在轴对称设计理论(1)中，绝对流动时无旋的。在轴对称设计理论(2)中，绝对流动是有旋的，因此，前者可称为无旋轴对称设计理论，后者可称为有旋轴对称设计理论^[5]。

2.3 准三维设计理论

70年代以后，随着计算机技术的迅猛发展，吴仲华教授在1952提出的两类流面理论逐步在流体机械叶轮设计中得到应用，目前国内外流体机械叶轮的设计方法绝大多数是以该理论发展起来的。随着计算机技术在常规水力机械转轮设计中的应用，显示出了水力机械转轮优化设计的光辉前景。

2.3.1 两类相对流面理论概述

基于两类相对流面的通用理论，是吴仲华教授于50年代初创立的，起初应用于可压缩流体的叶轮机械（如燃气轮机、压气机等），70年代开始扩大至水力机械，而今在水力机械的设计开发、研究等各个方面都已普遍应用。

基于两类相对流面理论基本思路：在转轮的相对运动三维流场中取多个相对流面，建立相对流面上理想液体运动的基本方程式，把一个三维流动转化为多个相对流面上的二维流动来求解。即可降低数学难度，又可降低对计算机的要求。

相对流面分为： S_1 流面，即由过叶栅中或叶栅前圆周线上的相对运动的流线组成（如图2-3中曲面C1D1D2C2）； S_2 流面，由过叶栅前半径线上的相对运动的流线组成（如图2-5中曲面A1B1B2A2）。

对于 S_1 ，将接近于回转面，可显示叶型型线对流动的影响；对 S_2 流面，将接近于叶片中面，可显示轴面流道型线对流动的影响。

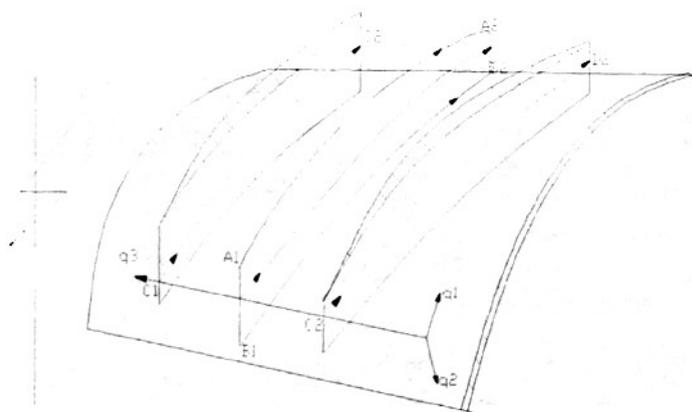


图 2-5 两类相对流面图

Figure 2-5 tow relatively flow surface drawing

可见，两类相对流面之间以及它们的流动之间是相互关联的。由 S_1 流面上的流线可确定 S_2 流面；反之，由 S_2 流面上的流线也可确定 S_1 流面。因此，两类相对流面上的流动计算需要交替进行。通常先进行 S_2 流面上的流动计算，为 S_1 流面的流动计算提供必要的的数据，而 S_1 流面的流动计算又为新一轮 S_2 流面的流动计算提供必要数据即，为求得三维流动的解，需在两类相对流面之间进行迭代。判定迭代终止得准则是：两类流面交线上的解是否一致^[8]。

在水力机械转轮叶片设计中， S_1 流面和 S_2 流面都是空间曲面，在圆柱坐标系下，流面可以表示为：

$$S(R, \varphi, Z) = 0 \quad (2-15)$$

其微分形式为：

$$\frac{\partial S}{\partial R} dR + \frac{\partial S}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial S}{\partial Z} dZ = 0 \quad (2-16)$$

在 S_1 流面和 S_2 流面上，流面的法向量为 \vec{n} ：

$$\vec{n} = n_R \vec{e}_R + n_\varphi \vec{e}_\varphi + n_Z \vec{e}_Z \quad (2-17)$$

则 \vec{n} 应与梯度共线, 梯度为:

$$\nabla S = \frac{\partial S}{\partial R} e_R + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial S}{\partial Z} e_Z \quad (2-18)$$

由此得:

$$\frac{n_R}{\frac{\partial S}{\partial R}} + \frac{n_\varphi}{\frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi}} + \frac{n_Z}{\frac{\partial S}{\partial Z}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Z}\right)^2}} \quad (2-19)$$

由于流体都是理想流体, 所以流面必与相对速度的矢量 \vec{W} 相切, 故有 $\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$, 由此可写出:

$$W_R n_R + W_\varphi n_\varphi + W_Z n_Z = 0 \quad (2-20)$$

式中 n_R 、 n_φ 、 n_Z 分别是流面沿 R 、 φ 、 Z 方向的法向量; W_R 、 W_φ 、 W_Z 分别是相对流速沿 R 、 φ 、 Z 方向的分量。

把式(2-21)代入式(2-18)中, 则有:

$$n_R dR + n_\varphi d\varphi + n_Z dZ = 0 \quad (2-21)$$

由两类相对流面的连续性方程、运动方程和以上各式, 组成了进行两类相对流面上流动计算所需的基本方程^[8]。

2.3.2 转轮内部周向平均的 S_{2m} 流面流动方程^[10]

三维流动的流动参数在圆周上是不均匀分布的, 对转轮内实际流动, 其流动参数在相邻叶片间的分布是不均匀的, 如果把流动参数在相邻两叶片之间的圆周上进行平均化处理, 则此种沿圆周的不均匀性将消除。所谓对流动进行周向平均处理就是求出相邻叶片间圆周方向流动参数的平均值并以该平均值为 S_2 流面上的流动参数。这样抽象所得的 S_2 流面即为平均 S_{2m} 流面。

(1) 周向平均的 S_{2m} 流面方程

在正交曲线坐标系中, 设叶片压力面和吸力面的方程分别为:

$$q_{3p} = \theta_p(q_1, q_2), \quad q_{3s} = \theta_s(q_1, q_2) \quad (2-22)$$

此处下角标 p 表示压力面, s 表示吸力面。对任意空间函数 $f(q_1, q_2, q_3)$, 定义其在相邻两叶片之间圆周上平均值 \bar{f} 为:

$$\bar{f}(q_1, q_2) = \frac{1}{\Theta} \int_{\theta_p}^{\theta_s} f(q_1, q_2, q_3) dq_3 \quad (2-23)$$

式中 Θ —— 同一圆周上相邻两叶片之间的角距离，即：

$$\Theta = \theta_p(q_1, q_2) - \theta_s(q_1, q_2) \quad (2-24)$$

其中 θ_s 和 θ_p 分别为相邻叶片吸力面和压力面的角坐标。

以 f' 表示函数 f 与其平均值 \bar{f} 之差，称为 f 的脉动值。显然， f' 在一般情况下也是三元函数。这样，标量函数 f 可表示为：

$$f(q_1, q_2, q_3) = \bar{f}(q_1, q_2) + f'(q_1, q_2, q_3) \quad (2-25)$$

由式 (2-23) 和 (2-25) 可得标量函数平均化的规则：

$$\left. \begin{aligned} \overline{\bar{f}} &= \bar{f}, & \overline{f'} &= 0, & \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_3} &= 0 \\ \overline{f_1 + f_2} &= \overline{f_1} + \overline{f_2} \\ \overline{f_1 f_2} &= \overline{f_1 f_2} + \overline{f_1' f_2'} \end{aligned} \right\} \quad (2-26)$$

由此还可得两个矢量函数 f_1 、 f_2 的标量积和矢量积的平均值的表达式：

$$\left. \begin{aligned} \overline{f_1 \cdot f_2} &= \overline{f_1 \cdot f_2} + \overline{f_1' \cdot f_2'} \\ \overline{f_1 \times f_2} &= \overline{f_1 \times f_2} + \overline{f_1' \times f_2'} \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

为求偏导数 $\partial f / \partial q_i$ 的平均值 $\overline{(\partial f / \partial q_i)}$ ，先求 $\partial f / \partial q_i$ ，并取 $i = 1, 2$ 。

由式 (2-25) 可有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial q_i} &= \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{1}{\Theta} \right) \int_{\theta_p}^{\theta_s} f dq_3 + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\int_{\theta_p}^{\theta_s} f dq_3 \right) \\ &= -\frac{1}{\Theta} \bar{f} \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\int_{\theta_p}^{\theta_s} f dq_3 \right) \end{aligned} \quad (2-28)$$

又根据积分号下球导数的法则，可写出：

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\int_{\theta_p}^{\theta_s} f dq_3 \right) = \int_{\theta_p}^{\theta_s} \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_3 + f(q_1, q_2, \theta_p) \frac{\partial \theta_p}{\partial q_i} - f(q_1, q_2, \theta_s) \frac{\partial \theta_s}{\partial q_i} \quad (2-29)$$

因此由平均值定义:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial q_i}} = \frac{1}{\Theta} \int_{\theta_p}^{\theta_s} \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_3 \quad (2-30)$$

得:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial q_i}} = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial(\Theta \bar{f})}{\partial q_i} - \frac{1}{\Theta} \Delta \left(f \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \right) \quad (i=1,2) \quad (2-31)$$

此处符号 Δ 表示同一圆周上压力面处的函数值与吸力面处的函数值之差,

即:

$$\Delta \left(f \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \right) = f(q_1, q_2, \theta_p) \frac{\partial \theta_p}{\partial q_i} - f(q_1, q_2, \theta_s) \frac{\partial \theta_s}{\partial q_i} \quad (2-32)$$

设 n_p 、 n_s 为叶片压力面和吸力面的法线矢量, 此时由流面梯度式:

$$\frac{n_1}{-\frac{\partial \theta}{H_1 \partial q_1}} = \frac{n_2}{-\frac{\partial \theta}{H_2 \partial q_2}} = \frac{n_3}{-\frac{1}{H_3}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{H_1 \partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{H_2 \partial q_2} \right)^2 + \frac{1}{H_3^2}}} \quad (2-33)$$

可有:

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial q_i} = -\frac{H_i n_{ip}}{H_3 n_{3p}}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial q_i} = -\frac{H_i n_{is}}{H_3 n_{3s}} \quad (2-34)$$

因为 n_p 、 n_s 不是单位法线向量, 可取 $n_{3p} = n_{3s} = n_3$, 故可写成:

$$\frac{\partial \theta_p}{\partial q_i} = -\frac{H_i n_{ip}}{H_3 n_3}, \quad \frac{\partial \theta_s}{\partial q_i} = -\frac{H_i n_{is}}{H_3 n_3} \quad (2-35)$$

于是:

$$\begin{aligned} \Delta \left(f \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \right) &= -f(q_1, q_2, \theta_p) \frac{H_i n_{ip}}{H_3 n_3} + f(q_1, q_2, \theta_s) \frac{H_i n_{is}}{H_3 n_3} \\ &= -\frac{H_i}{H_3 n_3} \Delta(f n_i) \end{aligned} \quad (2-36)$$

代入式 (2-31) 可得:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial q_i}} = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial(\Theta \bar{f})}{\partial q_i} + \frac{H_i}{\Theta H_3 n_3} \Delta(f n_i) \quad i=1, 2 \quad (2-37)$$

由式(2-25)可直接写出 $\overline{\partial f / \partial q_3}$ 的平均值:

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial q_i} = \frac{1}{\Theta} \int_{\theta_i}^{\rho_i} \frac{\partial f}{\partial q_3} dq_3 = \frac{1}{\Theta} \Delta(f) \quad (2-38)$$

而 $\partial(\Theta \bar{f}) / \partial q_3 = 0$, 故得标量函数偏导数平均值的表达式的最后形式为^[7]:

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial q_i} = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial(\Theta \bar{f})}{\partial q_i} + \frac{H_i}{\Theta H_3 n_3} \Delta(f n_i) \quad i=1, 2, 3 \quad (2-39)$$

在图2-4所示的正交曲线坐标系中, 设周向平均的 S_{2m} 流面方程为

$$\varphi_m = q_3 - q_3(q_1, q_2) \quad (2-40)$$

其单位法向矢量 \vec{n}_m 为

$$\vec{n}_m = \frac{\nabla \varphi_m}{|\nabla \varphi_m|} \quad (2-41)$$

根据流体的速度与流面相切条件, S_{2m} 流面方程为

$$v_3 - \omega r = \frac{H_3 \partial \varphi_m}{H_1 \partial q_1} v_1 + \frac{H_3 \partial \varphi_m}{H_2 \partial q_2} v_2 \quad (2-42)$$

式中 H_1 、 H_2 、 H_3 是拉梅系数。

(2) 平均流动的连续方程

不计粘性, 水力机械转轮内部流动的相对运动的连续方程为:

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (2-43)$$

式中 $\vec{\omega}$ 为相对速度矢, 进行平均化处理:

$$\overline{\nabla \cdot \vec{\omega}} = 0 \quad (2-44)$$

将得到平均连续性方程。

由于:

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(w_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(w_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(w_3 H_2 H_1)}{\partial q_3} \right] \quad (2-45)$$

故有:

$$\overline{\nabla \cdot \vec{\omega}} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (w_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (w_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (w_3 H_2 H_1) \right] \quad (2-46)$$

利用式(2-39)对上式进行变换, 可得:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(\overline{w_1 H_2 H_3}) = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial q_1}(\Theta \overline{w_1 H_2 H_3}) + \frac{H_1}{\Theta H_3 n_3} \Delta(H_2 H_3 w_1 n_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(\overline{w_2 H_1 H_3}) = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial q_2}(\Theta \overline{w_2 H_1 H_3}) + \frac{H_2}{\Theta H_3 n_3} \Delta(H_1 H_3 w_2 n_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3}(\overline{w_3 H_2 H_1}) = \frac{1}{\Theta} \frac{\partial}{\partial q_3}(\Theta \overline{w_3 H_2 H_1}) + \frac{H_3}{\Theta H_3 n_3} \Delta(H_2 H_1 w_3 n_3)$$

代入后，考虑到在同一圆周上 H_1, H_2, H_3 为常数，且不论是压力面或吸力面，在叶片表面都有 $w_1 n_1 + w_2 n_2 + w_3 n_3 = \overline{w} \cdot \vec{n} = 0$ ，故得：

$$\overline{\nabla \cdot \overline{w}} = \frac{1}{\Theta} \nabla \cdot (\Theta \overline{w})$$

因此由式 (2-44) 得以矢量形式表示的平均流动的连续方程：

$$\nabla \cdot (\Theta \overline{w}) = 0 \quad (2-47)$$

式中 \overline{w} —— 平均流动的相对速度矢量， $\overline{w} = \overline{w_1 n_1} + \overline{w_2 n_2} + \overline{w_3 n_3}$ 。

考虑到 $\partial(\Theta \overline{w_3 H_1 H_2}) / \partial q_3 = 0$ ，散度的表达式为：

$$\nabla \cdot (\Theta \overline{w}) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\Theta \overline{w_1 H_2 H_3}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (\Theta \overline{w_2 H_1 H_3}) \right] \quad (2-48)$$

其实， Θ 就是相邻两叶片之间的角距离，引入排挤系数 B_f ，有 $\Theta = 2\pi B_f$ ，故以标量形式表示的连续方程为：

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 B_f \overline{w_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 B_f \overline{w_2}) = 0 \quad (2-49)$$

式中：

$$B_f = \frac{1 - n_B \delta_\theta}{2\pi}$$

n_B —— 叶片数； δ_θ —— 叶片的周向厚度^[7]。

(3) 平均流动的运动方程

定常相对运动的兰姆型运动方程为：

$$\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla E_r \quad (2-50)$$

对上式进行平均化处理，按矢量积平均值表达式 (2-27)，可写出：

$$\overline{\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})} + \overline{\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})} = \overline{\nabla E_r} \quad (2-51)$$

式中 $\overline{\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})}$ ，表示两个脉动量的叉积的平均值，当不计流动周向不均匀性对 S_{2m} 流面流动的影响时， $\overline{\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})}$ 为零，故有：

$$\overline{\vec{w} \times (\nabla \times \vec{v})} = \overline{\nabla E_r} \quad (2-52)$$

由于旋度 $\nabla \times \vec{v}$ 的三个分量的表达式为：

$$\left. \begin{aligned} rot_1 v &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial(v_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(v_2 H_2)}{\partial q_3} \right] \\ rot_2 v &= \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial(v_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(v_3 H_3)}{\partial q_1} \right] \\ rot_3 v &= \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(v_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(v_1 H_1)}{\partial q_2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-53)$$

故可以写出：

$$\begin{aligned} \overline{\nabla \times \vec{v}} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[\overline{\frac{\partial}{\partial q_2} (v_3 H_3)} - \overline{\frac{\partial}{\partial q_3} (v_2 H_2)} \right] e_1 \\ &+ \frac{1}{H_3 H_1} \left[\overline{\frac{\partial}{\partial q_3} (v_1 H_1)} - \overline{\frac{\partial}{\partial q_1} (v_3 H_3)} \right] e_2 \\ &+ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\overline{\frac{\partial}{\partial q_1} (v_2 H_2)} - \overline{\frac{\partial}{\partial q_2} (v_1 H_1)} \right] e_3 \end{aligned} \quad (2-54)$$

对方括号中各项应用式 (2-41)，代入得：

$$\overline{\nabla \times \vec{v}} = \frac{1}{\Theta} \nabla \times (\overline{\Theta \vec{v}}) + \frac{1}{\Theta H_3 n_3} \Delta (\overline{n \times \vec{v}}) \quad (2-55)$$

由算子 ∇ 的运算规则可写出:

$$\nabla \times (\Theta \bar{v}) = \nabla \Theta \times \bar{v} + \Theta \nabla \times \bar{v} \quad (2-56)$$

由式(2-38)可得:

$$\nabla \Theta = -\frac{1}{H_3 n_3} (n_p - n_s) = -\frac{1}{H_3 n_3} \Delta(n)$$

故:

$$\nabla \times (\Theta \bar{v}) = \Theta \nabla \times \bar{v} - \frac{1}{H_3 n_3} \nabla (n \times \bar{v})$$

代入式(2-55)得:

$$\overline{\nabla \times v} = \nabla \times \bar{v} + \frac{1}{\Theta H_3 n_3} \Delta(n \times v) \quad (2-57)$$

式中 v' ——绝对速度的脉动量, $v' = v - \bar{v}$ 。

∇E_r 的表达式为:

$$\nabla E_r = \frac{\partial E_r}{H_1 \partial q_1} e_1 + \frac{\partial E_r}{H_2 \partial q_2} e_2 + \frac{\partial E_r}{H_3 \partial q_3} e_3 \quad (2-58)$$

应用式(2-39)可得:

$$\overline{\nabla E_r} = \frac{1}{\Theta} \nabla (\Theta \overline{E_r}) + \frac{1}{\Theta H_3 n_3} \Delta(E_r, n)$$

由于:

$$\nabla (\Theta \overline{E_r}) = \Theta \nabla \overline{E_r} - \frac{1}{\Theta H_3 n_3} \Delta(E_r, n)$$

故:

$$\overline{\nabla E_r} = \nabla \overline{E_r} + \frac{1}{\Theta H_3 n_3} \Delta((E_r - \overline{E_r})n)$$

如果认为压力面和吸力面的对应点在同一 S_1 流面上,则两点的相对运动伯努里积分值相等,即 $E_p = E_n$,故 $\Delta[(E_r - \overline{E_r})n] = 0$ 。在这种情况下,有:

$$\overline{\nabla E_r} = \nabla \overline{E_r} \quad (2-59)$$

把式 (2-57)、式 (2-59) 代入 (2-52)，可有：

$$-\overline{w} \times (\nabla \times \overline{v}) = \overline{F} - \nabla \overline{E_r} \quad (2-60)$$

式中：

$$F = \overline{w} \times \frac{1}{\Theta H_3 n_3} \Delta(n \times v) \quad (2-61)$$

这就是以矢量形式表示的平均流动的运动方程，式中矢量 F 相当于在圆周上均匀分布的单位质量力，是由于对三维流动平均化处理而产生的，它代表叶片对平均流动的作用^[7]，它与 S_{2m} 垂直。对方程 (2-60) 两边同时叉乘 \overline{n}_m ，并作适当的变换，方程 (2-60) 变换为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^2} \left[\frac{\partial \overline{E_r}}{\partial q_2} \left(\overline{w}_1 + \overline{w}_3 \frac{H_3 \partial \varphi_m}{\partial q_1} \right) - \frac{\partial \overline{E_r}}{\partial q_1} \left(\overline{w}_2 + \overline{w}_3 \frac{H_3 \partial \varphi_m}{\partial q_2} \right) \right] + \\ & \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_2 \overline{V}_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (H_1 \overline{V}_1)}{\partial q_2} \right] - \frac{\partial (H_3 \overline{V}_3)}{H_3 H_2 \partial q_2} \frac{H_3 \partial \varphi_m}{H_1 \partial q_1} + \frac{\partial (H_3 \overline{V}_3)}{H_3 H_1 \partial q_1} \frac{H_3 \partial \varphi_m}{H_2 \partial q_2} = 0 \end{aligned} \quad (2-62)$$

在柱坐标下，上式变为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^2} \left[\frac{\partial \overline{E_r}}{\partial r} \left(\overline{w}_z + \overline{w}_\theta \frac{r \partial \varphi_m}{\partial z} \right) - \frac{\partial \overline{E_r}}{\partial z} \left(\overline{w}_z + \overline{w}_\theta \frac{r \partial \varphi_m}{\partial r} \right) \right] \\ & - \frac{\partial V_{\theta r}}{\partial r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} + \frac{\partial V_{\theta r}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} - \frac{\partial \overline{V}_z}{\partial r} + \frac{\partial \overline{V}_r}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2-63)$$

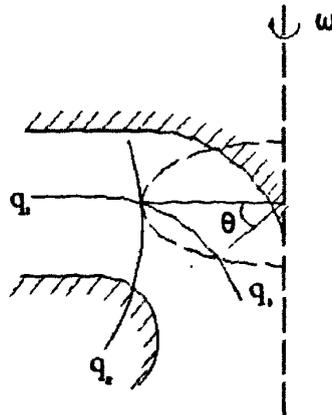


图 2-6 正交曲线坐标系

Fig.2-6 Orthogonal curvilinear coordinate system

由连续性方程 (2-49) 引出流函数 ψ ，并略去“-”，于是：

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = rB_f V_z \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -rB_f V_r \quad (2-64)$$

把上式代入 (2-63) 中，得到流函数方程为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^2} \left[\frac{\partial \bar{E}_r}{\partial r} \left(\frac{-}{w_z} + \frac{-}{w_\theta} r \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right) - \frac{\partial \bar{E}_r}{\partial z} \left(\frac{-}{w_z} + \frac{-}{w_\theta} r \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \right) \right] \\ & - \frac{\partial V_\theta r}{\partial r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta r}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{rB_f} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{rB_f} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (2-65)$$

2.3.3 S_1 流面流动方程

对于 S_1 流面，取 q_1 、 q_2 为自变量，流面方程为：

$$q_2 = q_2(q_1, q_2) \quad (2-66)$$

因此有：

$$S(q_1, q_2, q_3) = q_2 - q_2(q_1, q_3) = 0 \quad (2-67)$$

于是可写出：

$$\frac{\partial S}{H_1 \partial q_1} = -\frac{\partial q_2}{H_1 \partial q_1}, \quad \frac{\partial S}{H_2 \partial q_2} = \frac{1}{H_2}, \quad \frac{\partial S}{H_3 \partial q_3} = -\frac{\partial q_2}{H_3 \partial q_3} \quad (2-68)$$

由梯度公式，可得 S_1 流面法向单位矢量 n 的三个分量的表达式：

$$\frac{n_1}{-\frac{\partial q_2}{H_1 \partial q_1}} = \frac{n_2}{\frac{1}{H_2}} = \frac{n_3}{-\frac{\partial q_2}{H_3 \partial q_3}} = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{\partial q_2}{H_1 \partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2} + \left(\frac{\partial q_2}{H_3 \partial q_3}\right)^2}} \quad (2-69)$$

代入式 (2-20)，得 S_1 流面上相对速度分量 w_2 与 w_1 、 w_3 的关系式：

$$w_2 = H_2 \left(w_1 \frac{\partial q_2}{H_1 \partial q_1} + w_3 \frac{\partial q_2}{H_3 \partial q_3} \right)$$

(2-70)

上式就是 S_1 流面上的流线方程。

当 S_1 流面为回转面时, S_1 流面与轴平面的交线 m 将是轴面流线, m 与 z 轴的夹角为 α , 于是取轴面流线 m 为正交曲线坐标 q_1 的坐标线, 此时在 S_1 流面上有:

$$q_2 = \text{常数}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial q_2}{\partial q_3} = 0$$

因而沿 S_1 流面的偏导数等于沿坐标线的偏导数, 即:

$$\frac{\bar{\partial}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad \frac{\bar{\partial}}{\partial q_3} = \frac{\partial}{\partial q_3}$$

又因为此时 q_2 坐标线式 S_1 流面的法线, 故有:

$$w_2 = w_n = 0$$

同时若把坐标原点取在 S_1 流面上, 则在此 S_1 流面上有:

$$H_1 = 1, \quad \frac{\partial H_1}{\partial q_1} = 0$$

这些特点将使 S_1 流面上的基本方程可有显著简化。

在这里, 我们可有: 当 S_1 流面为回转面时, 取轴面流线长度 m 和角坐标 θ 为独立自变量, 故用 $\frac{\partial}{\partial m}$ 、 $\frac{\partial}{r \partial \theta}$ 代替 $\frac{\partial}{H_1 \partial q_1}$ 、 $\frac{\partial}{H_3 \partial q_3}$, 用 w_m 、 w_θ 代替 w_1 、 w_3 , 及用 $\frac{\partial}{\partial n}$ 代替 $\frac{\partial}{H_2 \partial q_2}$ 。

对于 ρ 为常数的不可压缩流体, 由质量守恒得连续方程:

$$\frac{\bar{\partial}(w_1 r H_3)}{\partial q_1} + \frac{\bar{\partial}(w_3 r H_1)}{\partial q_3} = 0 \quad (2-71)$$

则有:

$$\frac{\partial(w_m r)}{\partial m} + \frac{\partial(w_\theta r)}{\partial \theta} = 0 \quad (2-72)$$

式中 τ ——相邻两 S_1 流面间的法向厚度，其值由求解 S_2 流面正问题来确定。

由 q_2 方向压强梯度引起的单位质量力 F 的三个分量：

$$F_m = 0, \quad F_n = -\frac{1}{\rho}, \quad F_\theta = 0 \quad (2-73)$$

所以有兰姆型运动方程：

$$\left. \begin{aligned} w_\theta \left(\frac{\partial w_m}{r \partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial m} \right) - \left(\frac{w_\theta^2}{r} + 2\omega w_\theta \right) \frac{\partial r}{\partial m} &= -\frac{\partial E_r}{\partial m} \\ -w_m^2 \frac{da}{dm} - \left(\frac{w_\theta^2}{r} + 2\omega w_\theta + \omega^2 r \right) \frac{\partial r}{\partial n} &= F_n \\ w_m \left(\frac{\partial w_\theta}{\partial m} - \frac{\partial w_m}{r \partial \theta} \right) + \left(\frac{w_\theta}{r} + 2\omega \right) w_m \frac{\partial r}{\partial m} &= -\frac{\partial E_r}{r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2-74)$$

因此可有欧拉型运动方程：

$$\left. \begin{aligned} w_\theta \frac{\partial w_m}{r \partial m} + w_\theta \frac{\partial w_m}{r \partial \theta} - \left(\frac{w_\theta^2}{r} + 2\omega w_\theta + \omega^2 r \right) \frac{\partial r}{\partial m} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m} \\ -w_m^2 \frac{da}{dm} - \left(\frac{w_\theta^2}{r} + 2\omega w_\theta + \omega^2 r \right) \frac{\partial r}{\partial n} &= F_n \\ w_m \frac{\partial w_\theta}{\partial m} + w_\theta \frac{\partial w_\theta}{r \partial \theta} + \left(\frac{w_\theta}{r} + 2\omega \right) w_m \frac{\partial r}{\partial m} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2-75)$$

流函数定义为：

$$w_m = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad w_\theta = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \quad (2-76)$$

式中 τ ——流层的法向厚度。

对式(2-75)做适当的变化，并把(2-76)代入可得 S_1 流面的流函数方程为：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) \\ & = \left(2\omega - \frac{1}{r\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) \frac{\partial r}{\partial m} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_i - \omega \lambda_i) \end{aligned} \quad (2-77)$$

这里设转轮来流均匀, 即 $E_i = \text{常数}$ 、 $\lambda_i = \text{常数}$, 则上式可写成:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) = \left(2\omega - \frac{1}{r\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) \frac{\partial r}{\partial m} \quad (2-78)$$

第三章水力机械流动计算的有限元法及 MATLAB 简介

3.1 有限元法简介

有限元法是Ritz法和Galerkin法的发展。在有限元法中仍然是用到变分法的加权余量法的一些结果。

有限元法的基本特点是把求解域划分成一系列的子域（即单元），在域上建立近似函数，不涉及总体边界条件，因此避免了在Ritz和Galerkin法中需求适合总体边界条件的坐标函数的困难，使本法具有很强的适应性，成为数值求解微分方程的有力工具。

这里主要介绍三结点三角形单元有限元法，8结点四边形和6结点三角形的二维等参单元，以及三维单元可参照相关文献[4]、[13]、[14] [16]、[18]等。

3.1.1 三结点三角形单元的有限元法

由于三结点三角形单元有限元法的运算比较简单，以此开始讨论，将更能显示出有限元法的实质和过程。

下面以 S_2 流面上的流函数方程为背景，讨论用三结点三角形单元有限元法求解椭圆型方程的第一边值问题：

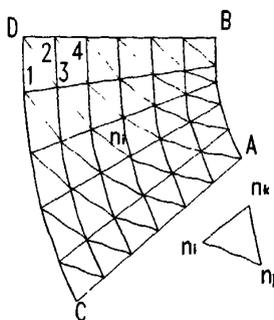


图3-1 单元生成
Fig 3-1 Cell creation

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial u}{\partial y}\right) + ru = f \quad (x,y) \in D \\ u|_r = \varphi(x,y) \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

式中 p 、 q 、 r 、 f —— x 、 y 的函数。

(一) 单元生成

所谓单元生成,对于三角形单元,就是把求解域划成一系列的三角形子域(图3-1),要求各子域不重、不间断,并尽可能三条边等长。对于预计待求函数变化剧烈的部位,单元布置密些,以利提高计算精密。

三角形的顶点叫“结点”。在求解域边界上的结点叫“边结点”,其余叫“内结点”。在第一边值问题中,边界结点的函数值是给定的。有边结点的单元叫“边单元”。

所有的结点和单元都编号。结点的编号分总体和局部的两种。总体编号应不重不间断,每个结点一个,如1、2、3、…。局部编号可重复,例如对每个单元的三个顶点都可分别以 i 、 j 、 k 表示。单元只有总体编号。

为减少计算机内存,应使相邻结点的总体编号的差值为最小。故在图3-1中,由于沿流动方向的结点多于横向的,结点的总体编号先沿横向推进,然后再沿流动方向推进。

对于图3-1,结点总数为 nm ,单元总数为 $2(n-1)(m-1)$,单元编号 e 与单元顶点总体编号 n_i 、 n_j 、 n_k (对应的局部编号为 i 、 j 、 k)的以下关系:

$$\text{当 } \frac{e}{2} \text{ 取整 } \left(\frac{e}{2}\right) = 0, e \text{ 为偶数时:}$$

$$\text{令: } a = \text{取整} \left[\frac{e}{2(m-1)} \right] \quad b = a - \frac{e}{2(m-1)}$$

$$s = \begin{cases} a+2 & \text{若 } b \neq 0 \\ a+1 & \text{若 } b = 0 \end{cases}$$

$$l = \frac{e}{2} - (s-2)(m-1)$$

$$\text{则: } n_i = (s-1)m + l, \quad n_j = (s-2)m + l, \quad n_k = (s-1)m + l + 1$$

$$\text{当 } \frac{e}{2} \text{ 取整 } \left(\frac{e}{2}\right) \neq 0, e \text{ 为奇数时:}$$

$$\text{令: } a = \text{取整} \left[\frac{e}{2(m-1)} \right]$$

$$s = a + 2$$

$$l = \frac{e+1}{2} - (s-2)(m-1)$$

$$\text{则: } n_i = (s-1)m + l, \quad n_j = (s-2)m + l, \quad n_k = (s-1)m + l + 1$$

(二) 单元插值函数的构造

单元插值函数就是单元上的近似函数。对于三结点三角形单元，取线性函数为其插值函数，对单元 e ，其形式为：

$$u^{(e)}(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \quad (3-2)$$

把三个顶点的坐标 (x_i, y_i) 、 (x_j, y_j) 、 (x_k, y_k) 及函数 $u_i = u(x_i, y_i)$ 、 $u_j = u(x_j, y_j)$ 、 $u_k = u(x_k, y_k)$ 代入，得关于 β_1 、 β_2 、 β_3 的线性方程组：

$$\beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i = u_i$$

$$\beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j = u_j$$

$$\beta_1 + \beta_2 x_k + \beta_3 y_k = u_k$$

其系数矩阵的行列值为：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2\Delta_e \quad (3-3)$$

式中 Δ_e —— 单元的三角形面积，当 i 、 j 、 k 按反时针布置时 Δ_e 有正值。

于是由克莱姆法则得：

$$\beta_1 = \frac{1}{2\Delta_e} (a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\Delta_e} (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2\Delta_e} (c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, a_j = x_k y_i - x_i y_k, a_k = x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_k, b_j = y_k - y_i, b_k = y_i - y_j \\ c_i &= x_k - x_j, c_j = x_i - x_k, c_k = x_j - x_i \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

这样, 插值函数 (3-2) 可写成:

$$u^{(e)}(x, y) = N_i(x, y)u_i + N_j(x, y)u_j + N_k(x, y)u_k \quad (3-5)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k(x, y) &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

对于给定的单元, 结点的坐标是已知的, 于是由式 (3-3) 求得 a_i 、 b_i 、 c_i 、 a_j 、 b_j 、 c_j 、 a_k 、 b_k 、 c_k , 故式 (3-6) 的 $N_i(x, y)$ 、 $N_j(x, y)$ 、 $N_k(x, y)$ 是已知函数, 而 u_i 、 u_j 、 u_k 是待求的未知函数, 因此式 (3-5) 形式上类似于伽辽金法中的近似函数, 不过这是建立在单元上的近似函数。

函数 N_i 、 N_j 、 N_k 称为形状函数或形函数, 具有下列特性:

- (1) 它们与插值函数一样, 同为线性函数。
- (2) $N_a(x_r, y_r) = \delta_{ar} (a, r = i, j, k)$, 此处克隆涅克 δ_{ar} 为:

$$\delta_{ar} = \begin{cases} 1 & a = r \\ 0 & a \neq r \end{cases}$$

即:

$$N_i(x_i, y_i) = 1, N_i(x_j, y_j) = N_i(x_k, y_k) = 0$$

$$N_j(x_j, y_j) = 1, N_j(x_i, y_i) = N_j(x_k, y_k) = 0$$

$$N_k(x_k, y_k) = 1, N_k(x_i, y_i) = N_k(x_j, y_j) = 0$$

$$(3) N_i(x, y) + N_j(x, y) + N_k(x, y) = 1$$

第一特性可由式 (3-6) 直接得到, 下面来证明后两个特性。

如图3-2在三角形单元内任取一点 $P(x, y)$, 得三个小角形 ΔPjk 、 ΔPki 、 ΔPij , 设其面积分别为:

$$\Delta_i = \Delta Pjk, \quad \Delta_j = \Delta Pki, \quad \Delta_k = \Delta Pij$$

令:

$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_e}, L_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_e}, L_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_e}, \quad (3-7)$$

式中 Δ_e —— 三角形单元面积

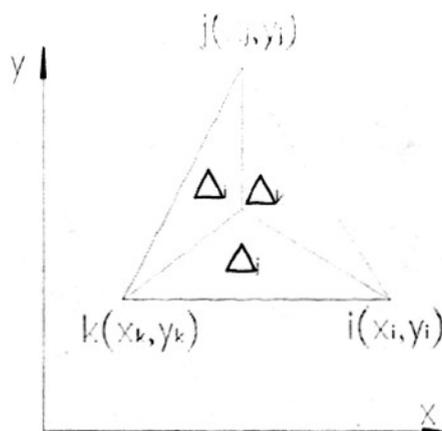


图3-2 面积坐标
Figure 3-2 Area coordinate

则单元上的点，除了可用 x, y 确定外，还可用面积比 L_i, L_j, L_k 来确定，故称 L_i, L_j, L_k 为面积坐标。

x, y 在整个求解域上有效，称“总体坐标”，而 L_i, L_j, L_k 只在本单元上有效，“局部坐标”。

由 $\Delta_e = \Delta_i + \Delta_j + \Delta_k$ ，故：

$$L_i + L_j + L_k = 1 \quad (3-8)$$

三个小三角形的面积 $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$ 还可用行列式表示并展开如下：

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y]$$

$$\Delta_j = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_k y_j - x_j y_k) + (y_k - y_j)x + (x_i - x_k)y]$$

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y]$$

因此，注意到式 (3-4)，得：

$$\Delta_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i x + c_i y)$$

$$\Delta_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j x + c_j y)$$

$$\Delta_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k x + c_k y)$$

代入式 (3-7), 得:

$$\left. \begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_i + b_i x + c_i y) \\ L_j &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_j + b_j x + c_j y) \\ L_k &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

把上式与式 (3-6) 比较, 可知对于三结点三角形单元有:

$$L_i = N_i(x, y), \quad L_j = N_j(x, y), \quad L_k = N_k(x, y)$$

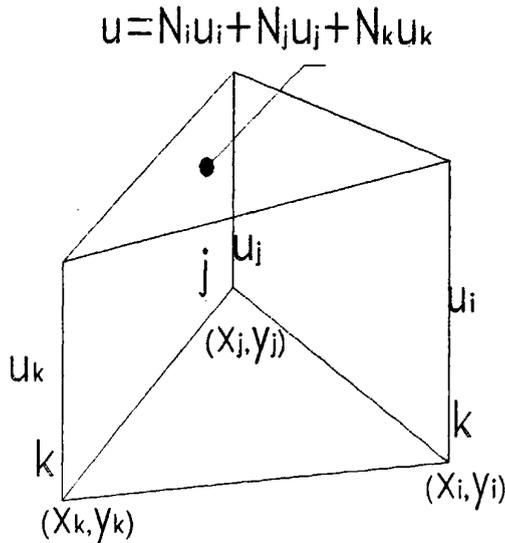


图3-3 线性插值函数

Fig 3-3 Linearity function of insert value

由图3-2可知当P与i重合时, $\Delta_i = \Delta_e$, $\Delta_j = \Delta_k = 0$, 故当 $\Delta_i = 1$ 时, $\Delta_i = \Delta_k = 0$; 同样与P与j、k重合时, 可得 $L_i = 1$ 、 $L_i = L_k = 0$ 及 $L_k = 0$ 、 $L_i = L_j = 0$ 。这就证明了 形状函数的第二个特性, 而由式 (3-7) 立

即可证明形状函数的第三个特性。

形状函数的后两个特性可通过运算直接验证。

线性插值函数在三结点三角形单元上的分布如图3-3所示。

式(3-5)还可用矩阵表示如下：

$$u^{(e)}(x, y) = [N]^T [u] = [u]^T [N] \quad (3-10)$$

$$[N] = [N_i, N_j, N_k]^T;$$

式中： $[n] = [n_i, n_j, n_k]^T$

由式(3-5)、式(3-6)得：

$$\frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta_e} (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k)$$

$$\frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta_e} (c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k)$$

写成矩阵形式，则有：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta_e} [B]^T [u] = \frac{1}{2\Delta_e} [u]^T [B] \\ \frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} &= \frac{1}{2\Delta_e} [C]^T [u] = \frac{1}{2\Delta_e} [u]^T [C] \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

$$[B] = [b_i, b_j, b_k]^T;$$

式中： $[C] = [c_i, c_j, c_k]^T$

可见对于三结点三角形单元，不能显示待求函数的偏导数在单元上的变化；偏导数在单元上为常数。

(三) 单元分析

由上章的变分原理，对方程(3-1)，可写出单元e的泛函 $I^{(e)}$ ：

$$I^{(e)} = \iint_{\Delta_e} [p \left(\frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \right)^2 + q \left(\frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \right)^2 + r (u^{(e)})^2 - 2fu^{(e)}] dx dy \quad (3-12)$$

当单元足够小时，可取p、q、r、f在单元上为常数，例如分别为三个顶点值的平均值，记为 p_e 、 q_e 、 r_e 、 f_e 。这样，由偏导数的表达式(3-11)，可写出：

$$\iint_{\Delta_e} p \left(\frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{p_e}{4\Delta_e} [u]^T [B][B]^T [u]$$

$$\iint_{\Delta_e} q \left(\frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \right)^2 dx dy = \frac{q_e}{4\Delta_e} [u]^T [C][C]^T [u]$$

令:

$$[K_1] = \frac{p_e}{4\Delta_e} [B][B]^T = \frac{p_e}{4\Delta_e} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j^2 & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$[K_2] = \frac{q_e}{4\Delta_e} [C][C]^T = \frac{q_e}{4\Delta_e} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j^2 & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

则:

$$\iint_{\Delta_e} p \left(\frac{\partial u^{(e)}}{\partial x} \right)^2 dx dy = [u]^T [K_1][u] \quad , \quad \iint_{\Delta_e} q \left(\frac{\partial u^{(e)}}{\partial y} \right)^2 dx dy = [u]^T [K_2][u] \quad (3-15)$$

由 $u^{(e)}$ 的表达式 (3-10) 可写出:

$$\iint_{\Delta_e} r (u^{(e)})^2 dx dy = [u]^T \iint_{\Delta_e} r_e [N][N]^T dx dy [u] = [u]^T \iint_{\Delta_e} r_e \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j^2 & N_j N_k \\ N_k N_i & N_k N_j & N_k^2 \end{bmatrix} dx dy [u]$$

令:

$$[K_3] = \begin{bmatrix} t_{ii} & t_{ij} & t_{ik} \\ t_{ji} & t_{jj} & t_{jk} \\ t_{ki} & t_{kj} & t_{kk} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

式中:

$$t_{ij} = \iint_{\Delta_e} r_e N_i N_j dx dy$$

而由后面即将证明的公式 (3-31):

$$\iint_{\Delta_e} r_e N_i^a N_j^b N_k^c dx dy = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta_e$$

可得:

$$t_{ij} = \frac{1}{12} r_e \Delta_e (1 + \delta_{ij}) \quad (3-17)$$

式中: δ_{ij} ——克隆涅符号:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

于是:

$$\iint_{\Delta_e} r(u^{(e)})^2 dx dy = [u]^T [K_3] [u] \quad (3-18)$$

由 $u^{(e)}$ 的表达式 (3-10) 还可写出:

$$\iint_{\Delta_e} f(u^{(e)})^2 dx dy = [u]^T \iint_{\Delta_e} f[N] dx dy$$

令:

$$[G^{(e)}] = [g_i^{(e)}, g_j^{(e)}, g_k^{(e)}]^T \quad (3-19)$$

式中

$$g_s^{(e)} = f_e \iint_{\Delta_e} N_s dx dy \quad s = i, j, k$$

而由式 (3-31) 可得:

$$g_s^{(e)} = \frac{1}{3} f_e \Delta_e \quad s = i, j, k \quad (3-20)$$

于是:

$$\iint_{\Delta_e} f u^{(e)} dx dy = [u]^T [G^{(e)}] \quad (3-21)$$

把 (3-15)、式 (3-18) 代入上面 $I^{(e)}$ 的表达式, 得:

$$I^{(e)} = [u]^T [K^{(e)}] [u] - 2[u]^T [G^{(e)}] \quad (3-22)$$

式中: $[K^{(e)}]$ ——单元的系列矩阵 (在弹性力学中叫单元的“刚度矩阵”):

$$[K^{(e)}] = [K_1] + [K_2] + [K_3] \quad (3-23)$$

由矩阵 $[K_1]$ 、 $[K_2]$ 、 $[K_3]$ 的表达式 (3-13)、式 (3-14)、式 (3-16) 可以看出, 单元的系数矩阵 $[K^{(e)}]$ 有以下性质:

(1) 它是对称矩阵, 而且主元素大于零;

(2) 当 $r_e = 0$ 时, 它是奇异矩阵, 因为此时 $[K^{(e)}] = [K_1] + [K_2]$, 而对于矩阵 $[K_1]$ 、 $[K_2]$, 其行列式的各行或各列的元素之和都等于零。

(四) 总体合成

设求解域的单元总数为 M 、结点总数为 N , 则总体泛函为:

$$I = \sum_{e=1}^M I^{(e)} = \sum_{e=1}^M [u]^T [K^{(e)}] [u] - 2 \sum_{e=1}^M [u]^T [G^{(e)}]$$

可写成:

$$I = [u]^T [K] [u] - 2[u]^T [G] \quad (3-24)$$

式中: $[u]$ —— N 维列阵:

$$[u] = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T \quad (3-25)$$

$[K]$ —— 总体系数矩阵, 为 N 阶方阵; 由各单位的系数矩阵叠加而成。设:

$$[K] = [K_{ij}], [K^{(e)}] = [K_{ij}^{(e)}]$$

则:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^M K_{ij}^{(e)} \quad i, j = 1 \sim N \quad (3-26)$$

$[G]$ —— N 维的列阵, 由各单元的 $[G^{(e)}]$ 叠加而成。设:

$$[G] = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T \quad (3-27)$$

则

$$g_i = \sum_{e=1}^M g_i^{(e)} \quad i = 1 \sim N \quad (3-28)$$

式 (3-24) 为二泛型泛函, 由泛函达极值的必要条件:

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = 0 \quad i = 1 \sim N$$

得关于结点上待求函数值 $u_i (i = 1 \sim N)$ 的线性代数方程组:

$$[K][u] = [G] \quad (3-29)$$

在引入强迫边界条件后求解此方程组, 便得式 (3-1) 椭圆型方程第一边值问题的数值解。

关于总体系数矩阵 $[K]$, 要指出它有下列性质:

- (1) 主元素大于零;
- (2) 在强迫边界条件引入前为对称阵, 强迫边界条件引入后对称性可能破坏;
- (3) 是稀疏矩阵。只要结点的总体编号按一定规则进行, 就能使非零元素集中在主对角线两侧, 呈带状。对于图4-1所示的单元划分和结点编号, 非零元素的带宽为 $(2m+1)$ 。

(4) 当式 (3-1) 中 $r=0$ 时, $[K]$ 将是奇异矩阵, 需由引入强迫边界条件来消除性, 并使 $[K]$ 正定。

(五) 强迫边界条件的引入

对于第一边界条件:

$$u|_r = \varphi(x, y)$$

边结点上的函数值是给定的, 泛函达极值的条件 $\frac{\partial I}{\partial u} = 0$ 及相应的代数方程已无意义, 因此必须对式 (3-29) 的方程组进行修改。下面通过一个四维的代数方程组来说明修改的方法。

设由 $\frac{\partial I}{\partial u} = 0$ ($i = 1 \sim 4$) 得四维的线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

若已知 $u_2 = \varphi_2$ 、 $u_4 = \varphi_4$, 则由上式可得二维的方程组:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - (K_{12}\varphi_2 + K_{14}\varphi_4) \\ g_3 - (K_{32}\varphi_2 + K_{34}\varphi_4) \end{bmatrix}$$

为避免重新排列数组, 把上式恢复成四维的:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - (K_{12}\varphi_2 + K_{14}\varphi_4) \\ \varphi_2 \\ g_3 - (K_{32}\varphi_2 + K_{34}\varphi_4) \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

显然两者是等价的。

由此可得引入强迫边界条件的方法, 对于图4-1, 结点总数 $N=nm$, 其过程按边线 AB、CD、CA、DB 的顺序为:

第一步修改 g_i ($i = 1 \sim N$);

$$\left. \begin{aligned}
 & l = sm \\
 & g_i = \begin{cases} \varphi_l & \text{若 } i = l \\ g_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N K_{ij} \varphi_l & \text{若 } i \neq l \end{cases} \quad s = 1 \sim n \\
 & l = (s-1)m + 1 \\
 & g_i = \begin{cases} \varphi_l & \text{若 } i = l \\ g_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N K_{ij} \varphi_l & \text{若 } i \neq l \end{cases} \quad s = 1 \sim n \\
 & g_i = \begin{cases} \varphi_s & \text{若 } i = s \\ g_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N K_{ij} \varphi_s & \text{若 } i \neq s \end{cases} \quad s = 2 \sim (m-1) \\
 & l = (n-1)m + s \\
 & g_i = \begin{cases} \varphi_l & \text{若 } i = l \\ g_i - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N K_{ij} \varphi_l & \text{若 } i \neq l \end{cases} \quad s = 2 \sim (m-1)
 \end{aligned} \right\} i = 1 \sim N$$

第二步修改 $K_{ij}(i, j = 1 \sim N)$:

$$l = sm$$

$$K_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j = l \\ 0 & \text{若 } i \neq j \text{ 但 } i = j \text{ 或 } j = l \end{cases} \quad s = 1 \sim n$$

$$l = (s-1)m + 1$$

$$K_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j = l \\ 0 & \text{若 } i \neq j \text{ 但 } i = j \text{ 或 } j = l \end{cases} \quad s = 1 \sim n$$

$$K_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j = s \\ 0 & \text{若 } i \neq j \text{ 但 } i = s \text{ 或 } j = s \end{cases} \quad s = 2 \sim (m-1)$$

$$l = (n-1)m + s$$

$$K_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j = l \\ 0 & \text{若 } i \neq j \text{ 但 } i = l \text{ 或 } j = l \end{cases} \quad s = 2 \sim (m-1)$$

$i, j = 1 \sim N$

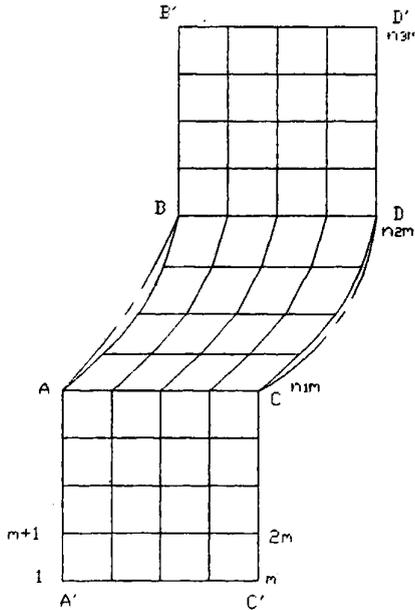


图3-4 周期性条件

Fig3-4 Qualification of periodicity

除了给定边结点上函数值的强迫边界条件外，在求解 S_1 流面上流函数方程和势函数方程时还会出现一种强迫边界条件，就是周性条件。如图4-4

所示的S₁流面求解域，在C'C与A'A、D'D与B'B之间应满足周期性条件，即对于流函数 ψ ，设流层的流量为Q，则有：

$$\begin{aligned} \psi|_{C'C} - \psi|_{A'A} &= Q, \\ \psi|_{D'D} - \psi|_{B'B} &= Q \end{aligned}$$

对于势函数 φ ，设沿A'C和B'C的速度环量为 $\Gamma_{A'C}$ 和 $\Gamma_{B'D}$ ，则有：

$$\begin{aligned} \varphi|_{C'C} - \varphi|_{A'A} &= \Gamma_{A'C}, \\ \varphi|_{D'D} - \varphi|_{B'B} &= \Gamma_{B'D}. \end{aligned}$$

周期性条件的特点是没有给定边界上待求函数的值，但给定了一些边结点上待求函数值与另一些边结点上待求函数值的关系。仍以方程组(3-30)来说明引入周期性条件的过程。

设 $u_2 = u_1 + a$ 及 $u_4 = u_3 + b$ ，并取 u_1 、 u_3 为独立变量，此时已转化为二次函数泛函 $I(u_1, u_2, u_3, u_4)$ 只是 u_1 和 u_3 的函数：

$I(u_1, u_2(u_1), u_3, u_4(u_3)) = I^*(u_1, u_3)$ ，使泛函达极值的必要条件相应为：

$$\frac{\partial I^*}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial I^*}{\partial u_3} = 0$$

。由复全函数求导规则，可写出：

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^*}{\partial u_1} &= \frac{\partial I}{\partial u_1} + \frac{\partial I}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} = \frac{\partial I}{\partial u_1} + \frac{\partial I}{\partial u_2} \\ \frac{\partial I^*}{\partial u_3} &= \frac{\partial I}{\partial u_3} + \frac{\partial I}{\partial u_4} \frac{\partial u_4}{\partial u_3} = \frac{\partial I}{\partial u_3} + \frac{\partial I}{\partial u_4} \end{aligned}$$

因此为引入周期性条件，式(3-30)需改为：

$$\begin{bmatrix} K_{11} + K_{21} & K_{12} + K_{22} & K_{13} + K_{23} & K_{14} + K_{24} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ K_{31} + K_{41} & K_{32} + K_{42} & K_{33} + K_{43} & K_{34} + K_{44} \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_2 \\ a \\ g_3 + g_4 \\ b \end{bmatrix}$$

由此得引入周期性条件的方法，对于图4-4所示求解域的边结点编号并设 $u|_{A'A} - u|_{C'C} = a$ ， $u|_{B'B} - u|_{D'D} = b$ ，其修改过程按C'C与A'A、D'D与B'B的顺序为：

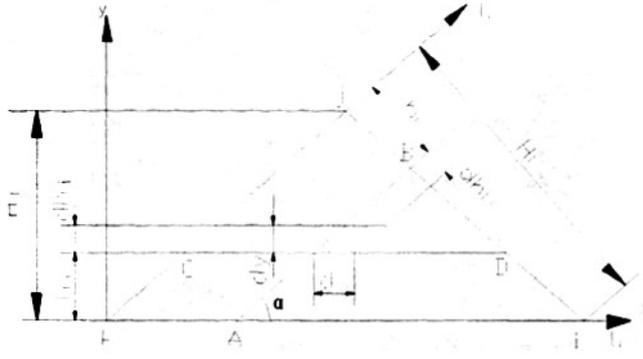


图3-5 二重积分 $\iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_k^c dx dy$

Fig 3-5 Double integral equation $\iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_k^c dx dy$

$$\left. \begin{array}{l} i = (s-1)m + 1 \\ l = sm \\ g_i = g_i + g_l \end{array} \right\} s = 1 \sim n_1$$

$$\left. \begin{array}{l} i = (s-1)m + 1 \\ l = sm \\ K_{ij} = K_{ij} + K_{lj} \end{array} \right\} s = 1 \sim n_1 \quad j = 1 \sim n_3m$$

$$\left. \begin{array}{l} i = (s-1)m + 1 \\ l = sm \\ K_{ii} = -1 \\ K_{ll} = 1 \end{array} \right\} s = 1 \sim n_1$$

$$\left. \begin{array}{l} i = (s-1)m + 1 \\ l = sm \\ g_i = g_i + g_l \end{array} \right\} s = n_2 \sim n_3$$

$$\left. \begin{array}{l} i = (s-1)m + 1 \\ l = sm \\ K_{ij} = K_{ij} + K_{lj} \end{array} \right\} s = n_2 \sim n_3 \quad j = 1 \sim n_3m$$

$$\left. \begin{array}{l} i = (s-1)m + 1 \\ l = sm \\ K_{ii} = -1 \\ K_{ll} = 1 \end{array} \right\} s = n_2 \sim n_3$$

(六) 函数和导数的计算

对线性代数方程组式(4-29)引入强迫边界条件后,通常用高斯消去法求解,得结点上待求函数值,然后按式(4-11)计算导数值。对于三结点三角形单元,由于按式(4-11)算得的是单元上导数的平均值,称为单元导数,可取结点周围单元导数为该结点的导数值。

(七) 关于二重积分 $\iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_k^c dx dy$

由图4-5可写出在AB和CD上分别有:

$$L_i = \frac{\Delta_{Bjk}}{\Delta} = \frac{h_i}{H_i}, \quad L_j = \frac{\Delta_{Cki}}{\Delta} = \frac{h_j}{H_j}$$

故:

$$dh_i = H_i dL_i, \quad dh_j = H_j dL_j$$

$$dxdy = \frac{dh_i}{\sin a} dh_j = \frac{H_i}{\sin a} H_j dL_i dL_j = 2\Delta dL_i dL_j$$

$$\iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_k^c dxdy = 2\Delta \iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_k^c dL_i dL_j$$

把二重积分在斜交的面积坐标上化为二次积分：先保持 L_i 不变，自A点 $L_j = 0$ 沿AB积分至B点 $L_j = 1 - L_i$ ，然后自j点 $L_i = 0$ 沿ji积分至i点 $L_i = 1$ ，即：

$$\iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_k^c dL_i dL_j = \int_0^1 L_i^a \int_0^{1-L_i} L_j^b (1-L_i-L_j)^c dL_j dL_i$$

运用分部积分c次，得：

$$\int_0^{1-L_i} L_j^b (1-L_i-L_j)^c dL_j = \frac{b!c!}{(b+c+1)!} (1-L_i)^{b+c+1}$$

故：

$$\iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_k^c dxdy = \frac{b!c!}{(b+c+1)!} 2\Delta \int_0^1 L_i^a (1-L_i)^{b+c+1} dL_i$$

运用分部积分 $(b+c+1)$ 次，可得：

$$\int_0^1 L_i^a (1-L_i)^{b+c+1} dL_i = \frac{a!(b+c+1)!}{(a+b+c+2)!}$$

故：

$$\iint_{\Delta} L_i^a L_j^b L_k^c dxdy = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta \quad (3-31)$$

3.1.2 关于有限元法的收敛要求和多项式插值函数的构造

(一)收敛性要求

当求解上单元数目不断增多、单元尺寸不断小时，有限元的解应当能收敛于精确解。有限元法的数学理论表明，作为单元近似函数的插值函数为此满足下列两项要求：

(1)设在泛函表达式的积分式中导数的最高阶数为 r ，则插值函数必须具有常数项的直至 r 阶的导数，这叫完备性条件。

对于二次泛函，泛函表达式中只含待求函数的一阶导数，故单元的插值函数根据完备性条件必须具有常数项和线形项。显然，三结点三角形单元的线型插值函数是满足完备性条件的。

(2)在单元的公共边上，相邻的插值函数应有相同的函数和直至 $(r-1)$ 阶的导数值，这叫协调性条件，即在公共边上插值函数和直至 $(r-1)$ 阶导数是连续的。

对于二次泛函，协调性条件要求相邻单元的插值函数在公共边上连续。显然，三结点三角形单元的线型插值函数是满足协调性条件的。

(二)多项式插值函数的组成

通常采用下面的多项式作为求解二维问题的插值函数：

$$u(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \dots$$

式中 $\beta_i (i = 1, 2, \dots)$ —— 待定系数。

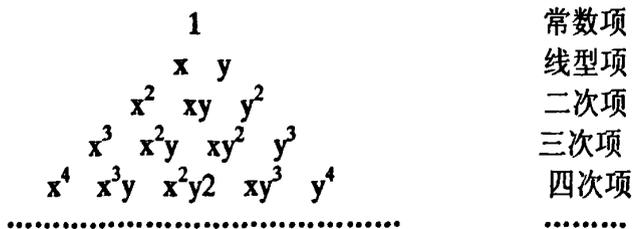


Figure 4-6 PASCAL triangle

图4-6 PASCAL三角形

在构造插值多项式函数时，除应满足上述完备性条件和协调性条件外，还要考虑插值函数的各向同性，即插值函数不因坐标选择不同而改变。

为此可按上图的PASCAL三角形来构造插值函数。

多项式的项数，取等于单元的结点总数，这样，多项式的待定系数 β_i 可由结点上的待求函数值来确定。

3.2 MATLAB 基础简介

3.2.1 MATLAB 的历史

(一)MATLAB 的历史

MATLAB 的产生是与数学计算紧密联系在一起。MATLAB 是 Matrix 和 Laboratory 的前三个字母的组合,意为“矩阵实验室”。20 世纪 80 年代初, Celve Moler 和 John Little 采用 C 语言编写了 MATLAB 的核心,合作开发了 MATLAB 的第二代专业版,大大提高了它的运行效率。不久,他们成立了 MathWorks 公司并将 MATLAB 正式推向商业市场。它是一种面向科学和工程计算的高级计算机语言,现已成为国际科技界公认的优秀的应用软件,在世界范围内广为流行和使用。该软件的特点是:强大的计算功能、计算结果和编程可视化及极高的编程效率,这是其他软件无与伦比之处。MATLAB 包含的几十个工具箱,涉及自动控制、人工智能、电力系统、系统辨识、模式识别、动态仿真、信号分析、图像处理、数值计算和分析等学科,广泛应用于通信、工业控制、电子、电力、机械、汽车、建筑、财经、生命科学等诸多工程技术领域。

(二)MATLAB 的发展

MathWorks 公司正式推出 MATLAB 以后,经二十多年的研究,不断完善 MATLAB 的功能,使其在原有的基础上增加了许多功能。目前 MATLAB 已经成为国际上公认的优秀数学软件之一。现在 MATLAB 已经推出 6.5 版本,占据了数值计算软件市场的主导地位。

3.2.2 MATLAB 系统构成

MATLAB 系统由以下 5 部分构成:

- MATLAB 语言;
- MATLAB 工作环境;
- MATLAB 数学函数库;
- MATLAB 图形处理系统;
- MATLAB 应用程序接口 (API)。

下面对这五个部分进行详细的介绍。

(一)MATLAB 语言

MATLAB 是一个可视化的计算程序,被广泛使用于从个人计算机到超

级计算机范围内的各种计算机上。MATLAB 包括命令控制、可编程，有上百个预先定义的命令和函数。这些函数能通过用户自定义函数进一步扩展。

(二) MATLAB 工作环境

MATLAB 的工作环境是一个集成化的工作空间，它可以让用户输入输出数据，并提供了 M 文件的集成编译和调试环境。它包括命令窗口、M 文件编辑调试器、MATLAB 工作空间和在线帮助文档。

(三) MATLAB 数学函数库

MATLAB 有许多强有力的数学函数，如正弦、指数运算、求解微分方程、傅立叶变换等复杂的函数。例如，MATLAB 能够用一个单一的命令求解线性系统，能够完成大量的高级矩阵处理。

(四) MATLAB 图形处理系统

MATLAB 有强有力的二维、三维图形工具。MATLAB 能与其他程序一起使用。例如，MATLAB 的图形功能可以在一个 FORTRAN 程序中完成可视化计算。MATLAB 还提供了图形用户界面定制。

(五) MATLAB 应用程序接口 (API)

MATLAB 应用程序接口 (API) 是一个让 MATLAB 语言同 C、FORTRAN 等其他高级编程语言进行交互的函数库，该函数库的函数通过动态连接库 (DLL) 来读写 MATLAB 文件。它的主要功能包括在 MATLAB 中调用 C 和 FORTRAN 程序，以及在 MATLAB 和其他应用程序程序间建立客户/服务器关系。

3.2.3 使用 MATLAB 软件优越性

作为一种科学计算语言，MATLAB 具有极强的适应能力，它用简洁的代码和函数库为编程研究人员提供了直观简单的程序开发环境。MATLAB 不仅仅在工程领域有重要的影响，其生命力开始延伸到经济等领域。MATLAB 已成为适合多学科、多种工作平台的功能强大、界面友好、语言自然并且开放性强的的大型优秀应用软件，同时也成为国内外高等院校高等数学、数值分析、数字信号处理、自动控制以及工程应用等课程的基本教学和学习工具。MATLAB 软件主要具有以下优势：

(1) 友好的工作平台

随着 MATLAB 的商业化与软件的不断升级, MATLAB 的用户界面也越来越精致, 更加接近于 Windows 的标准界面, 人机交互更强, 操作也更简单。

(2) 简单易用的程序语言

MATLAB 语言的语法特征类似于 C 语言, 具备了比较完备的程序调试功能, 有利于非计算机专业的技术人员使用。

(3) 强大的科学计算和数据处理能力

MATLAB 提供了数以千计的, 涉及众多工程技术领域的函数指令。通常只须调用一个函数指令就可以完成许多工程应用中的复杂计算。如今, MATLAB 的计算功能优势已不局限于矩阵运算, 它还体现在数值计算、工程优化、动态仿真等诸多方面。

(4) 出色的图形处理功能

MATLAB 所具备的图形图像处理功能主要体现在: 二维曲线处理、三维曲线处理、图形的光照处理、色度处理、四维数据表现, 图形动画等。

(5) 应用广泛的模块集和工具箱

MATLAB 对许多专业领域都开发了功能强大的模块集或工具箱。一般说来, 用户可以直接利用工具箱完成计算、仿真、应用等工作, 而不需要编写复杂的程序代码。MATLAB 工具箱所涉及的工程应用领域有: 样条拟合、优化算法、神经网络、信号处理、图像处理、系统辨识、控制系统分析、电力系统仿真、模糊逻辑等。

(6) 实用的程序接口和发布平台

新版本的 MATLAB 提供了较好的代码编译器, 可以把 M 文件编译成 C/C++ 程序代码, 以便于代码的移植。另外, MATLAB 还提供了与 VC++、VB、Excel 等软件的接口, 使得这些软件之间的互访成为可能。

(7) 模块化的设计和系统级的仿真

Simulink 是 MATLAB 的一个分支产品, 主要用来实现对工程问题的模型化和动态仿真。在 Simulink 所提供的仿真环境下, 可以完成对信号处理、通信设计、电力系统仿真、系统控制仿真等功能[38]。

鉴于该软件上述优越性和计算结果可视化的特点, 本课题选择作为数值计算软件, 根据两个流面方程, 建立有限元模型, 编制程序计算。具体

的软件应用方面的知识, 这里不再赘述, 参见文献[20]、[21]、[22]、[23]等。

第四章 混流式水轮机转轮叶片设计数值方法

水力机械转轮的设计一般包含两部分，一是确定轴面流道及转轮进出口边的轴面投影；另一是按一定的理论进行叶片设计。

4.1 转轮设计参数的确定

在混流式水轮机转轮水力设计之前，首先应给定下列参数：

- 1、转轮的各种工作水头（最大、最小及计算）及相应功率；
- 2、设计转轮的最优单位转速 n_1' 和最优单位流量 Q_1' ；
- 3、转轮叶片数 z 以及导叶相对高度 \bar{b}_0 ；
- 4、转轮子午面流道形状及转轮进出口边的轴面投影；
- 5、转轮区的 $\bar{V}_\rho r$ 分布及厚度分布；
- 6、初始转轮叶片，本文将利用二维设计理论设计初始叶片。

上述的这些基本结构参数和水力参数在水力设计之前必须合理选定，因为它们在很大程度上决定了新转轮的过流能力，效率和抗空化能力。

4.1.1 功率 N

具有一定水头和流量的液流通过水轮机对水轮机做功，该液流在单位时间内所做的功称为功率。

$$N = \gamma QH \quad (4-1)$$

式中： Q ——流量 (m^3/s)

H ——水头 (m)

γ ——水的重度 ($9.8kN/m^3$)

4.1.2 效率 η

输入水轮机的液流功率（能量）并不能全部为水轮机所利用。以效率 η 表示它所利用的程度，即水轮机轴输出的功率 N_t 与输入液流功率 N 之比称为水轮机的效率

$$\eta = \frac{N_t}{N} = 90 \sim 95\% \quad (4-2)$$

4.1.3 比转速的确定

在相同水头条件下，合理提高水轮机的比转速是水轮机发展的一个

趋势。水轮机的功率和水头是水电设计部门提供的原始资料。在给定条件下提高比转速意味着提高水轮机的过流能力和机组转速,从而减小水轮机和发电机的尺寸。

比转速的计算公式如下:

$$n_s = 1.167 \frac{n\sqrt{N}}{H^{5/4}} \quad (m \cdot kW) \quad (4-3)$$

式中 n 为转速 (r/min); N 为水轮机功率,亦称出力 (kW); H 为水轮机工作水头 (m)。

由水轮机的相似理论可以证明,对几何形状相似而又在相似工况下工作的水轮机转轮,他们的比转速相等。在给定的水头和出力下,由式(4-3)可见,选用比转速高的水轮机,它的转速就高;或在给定的水头和转速条件下,比转速高的水轮机发出的出力就大。

高比转速水轮机会带来明显的经济效益,但它的使用水头范围受强度和汽蚀性能的限制。混流式水轮机比转速高,但只能用于较低的水头。几种不同比转速水轮机的使用水头范围大致如4-1所示。

表4-1 水轮机的比转速和使用水头范围

Table 4-1 Specific rotation speed and range of water head

水轮机型式	比转速 n_s	使用水头 H
高比转速轴流式	950~750	5~12
中比转速轴流式	750~550	12~22
低比转速轴流式	550~295	22~70
高比转速混流式	400~250	20~50
中比转速混流式	250~150	50~120
低比转速混流式	150~70	120~700
冲击式	50~10	950~750

4.1.3 最优单位转速 n'_{10} 和最优单位流量 Q'_{10}

最优单位转速 n'_{10} 和最优单位流量 Q'_{10} 的选取可以从已有的资料曲线中通过插值求得,下图(4-1)给出了最优单位转速 n'_{10} 和最优单位流量 Q'_{10}

与水轮机比转速 n_s 的关系曲线图。图(4-2)则为最优单位转速 n'_{10} 和最优单位流量 Q'_{10} 与水轮机导叶相对高度 \bar{b}_0 关系的统计曲线, 这些统计曲线可供选择计算工况时参考^[50]。

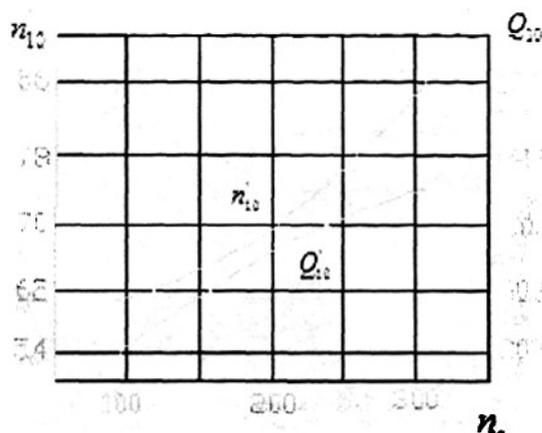


图4-1 最优工况和 n_s 的关系曲线图

Fig4-1 figure of correlation curve of optimum operating condition and n_s

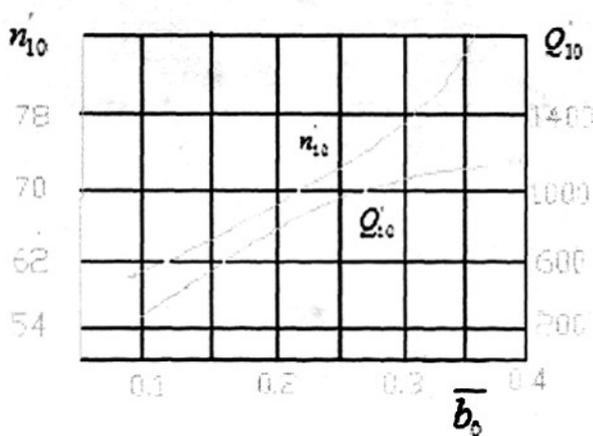


图4-2 最优工况和 \bar{b}_0 的关系曲线图

Fig4-2 figure of correlation curve of optimum operating condition and \bar{b}_0

4.2 转轮流道的主要几何参数的确定

转轮流道的形状及其几何参数直接影响水轮机的水力性能。不同比转速水轮机的流道具有各自的形状及其相应的几何尺寸。为得到较高的比转速,亦即要使水轮机具有较高的单位转速和较大的单位流量,就应在确定流道的主要几何参数和转轮叶片的设计参数时采取相应的措施。

转轮流道的形状不仅对水轮机的过流能力有很大影响而且还直接影响水轮机的效率和汽蚀性能。转轮流道的形状与转轮的轴面投影及叶片数有关,而转轮的轴面投影则由导叶的相对高度、上冠和下环的流面形状以及转轮叶片进出口边的位置和形状来确定。因此,正确地确定转轮过流通道的几何参数是转轮设计中的一项重要内容。

设计转轮时,应分析研究现有的性能优良及比转速相近的转轮的流道,参考《型谱》中各型混流式转轮的流道形状和尺寸,来确定新转轮的流道。

4.2.1 导叶相对高度 \bar{b}_0

导叶相对高度 \bar{b}_0 是指导叶高度 b_0 和转轮直径 D_1 的比值,是导水机构很重要的一个几何参数。导叶相对高度 \bar{b}_0 直接决定了转轮流道进口过水断面面积的大小。 \bar{b}_0 越大,则转轮流道的过水断面面积也越大。因此,加大 \bar{b}_0 是提高转轮过流量的有效办法之一。在一定水头下,总希望尽量采用较大的 \bar{b}_0 值。但它的增加受到转轮叶片和导叶强度条件的限制。另外, \bar{b}_0 的选择还必须与比转速相适应,使导叶相对开度 \bar{a}_0 在计算工况时保持在30—70%范围内。因为 \bar{a}_0 过大或过小都会使导水机构内的水力损失增加,降低水轮机的效率。

\bar{b}_0 可从表4-2或图4-3中按水头选取^[61]。

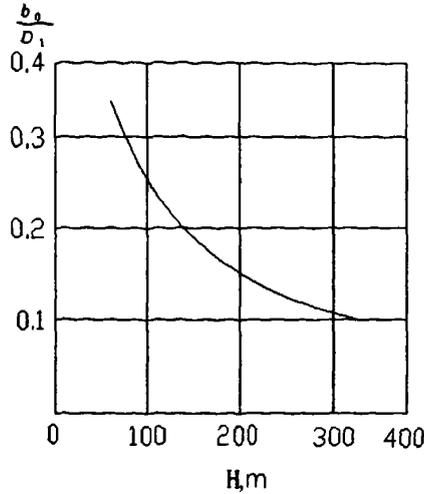


图4-3 b_0 与 H 的关系曲线

Fig4-3 relational curve of b_0 and H

表4-2 混流式水轮机的 b_0 与 H_{max} 的关系

Table 4-2 Relation of hub and max head

$H_{max}(m)$	45	65	105	160	200	250	320
b_0	0.365	0.30	0.25	0.20	0.16	0.12	0.10

4.2.2 转轮叶片数 z

转轮叶片数影响着水轮机的能量和汽蚀性能。叶片数 z 减少时，叶片对水流的排挤作用较小，故过流量增加。试验表明，当叶片数从18减到16和14时，过流量分别增加4-6%。但叶片数减少时，叶片有限数的影响增加，最高效率有些降低，而汽蚀性能可能变坏也可能改善，这将具体根据是每个叶片的环量增加而压力差增加的影响大，还是叶片内平均相对速度降低而压力提高的影响大来确定。

不同转速与叶片数的关系如下表4-3^[51]，可以据此来选择合理的叶片数。

表4-3 比转速 n_s 与叶片数 z 的关系

Table4-3 Relation of vane number of runner and turbine's specific speed

n_s	60~80	120~150	180~200	200~250	250~300	300~350
z	21~19	19~17	17~15	15~14	14	14~12~9

4.2.3 转轮上冠曲线形状

转轮上冠通常采用曲线型和直线型两种(图4-4)^[52]。直线型上冠具有较好的工艺性,但其效率特别是在负荷超过最优工况时低于曲线型上冠。此外采用曲线型上冠可增加转轮流道在出口附近的过水断面面积,因而使水轮机的单位流量增加。试验证明,转轮上冠曲线的倾斜角 θ 越小单位流量越大。当然 θ 不能过小,否则会破坏整个流道的光滑性。不同上冠曲线的转轮的工作特性曲线 $\eta = f(Q_1)$,如图4-5^[52]所示。由此可见,倾斜度小的上冠曲线应得到更广泛的应用。当然,无论采用哪一种上冠曲线,都应当使泄水锤部分与轴心线的交角不过大,以免引起水流剧烈的撞击。

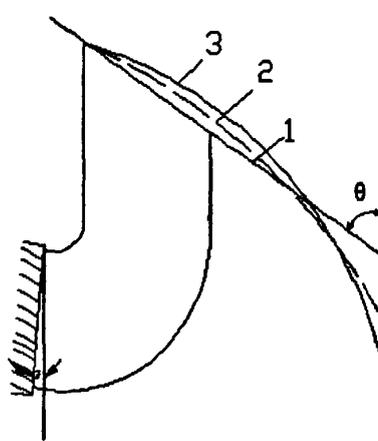


图4-4 转轮上冠曲线形状

Fig4-4 curve shape of runner crown

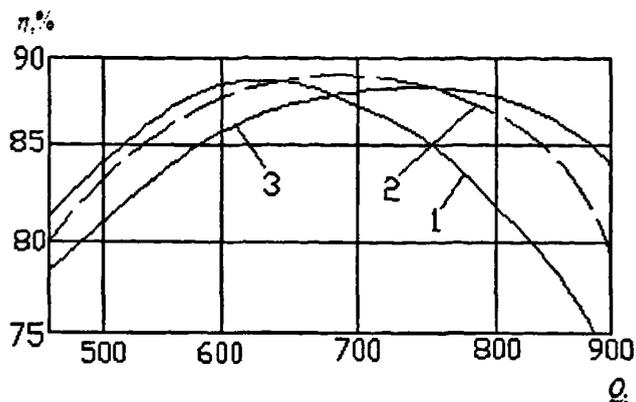


图4-5 不同上冠形状对水轮机工作特性曲线 $\eta = f(Q_i)$ 的影响

Fig4-5 working curves of turbine effect on shape of different runner crown

4.2.4 下环形状和转轮的出口直径 D_2

下环形状及转轮出口直径 D_2 (图4-6)对转轮出口附近的过水断面面积影响很大。因而它影响转轮的过水能力及汽蚀性能。低比转速水轮机的转轮(图4-6)下环呈曲线型,其圆弧半径在很大程度上取决于转轮出口直径 D_2 。如转轮出口相对直径 D_2/D_1 比较大,则转轮出水截面积越大,转轮的单位流量越大。并且因出口附近的速度降低使动力真空减小而改善汽蚀性能。因此在结构允许的情况下 D_2/D_1 应取大一些,但 D_2/D_1 过大会导致水流在转轮内特别是靠近下环部分发生急剧的转弯,引起转轮内水力效率的显著下降。实践表明,对 $n_s = 60 \sim 120$ 的低比转速转轮,采用 $D_2/D_1 = 0.6 \sim 0.7$ 时将具有良好的汽蚀性能和效率。

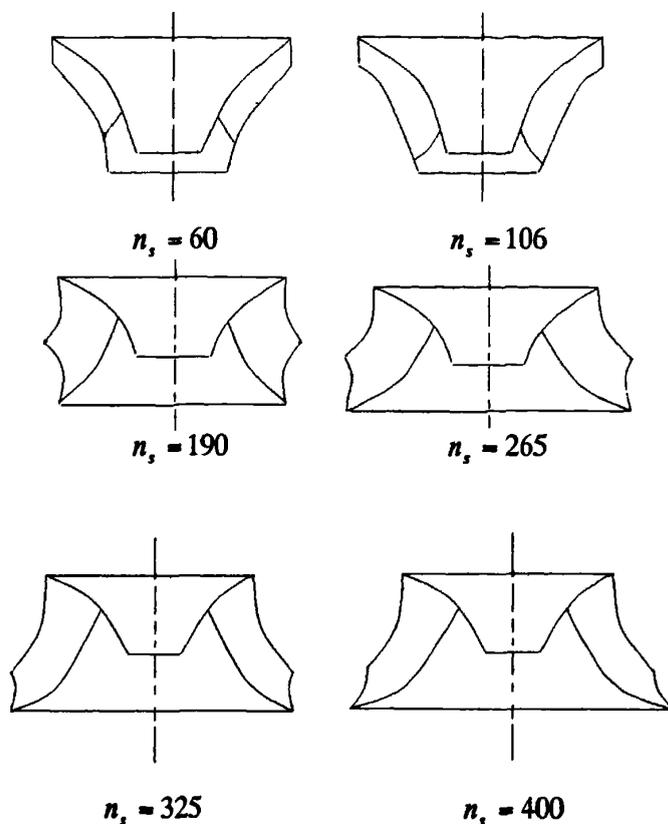


图4-6 混流式水轮机转轮的轴面投影

Fig4-6 axis plane projection of the runner of the francis turbine

比转速较高的混流式转轮，下环通常采用具有锥角(图4-4) a 的直线型。锥角 a 越大出水截面积越大，可提高过流能力和改善汽蚀性能，但 a 过大会引起脱流，使水力损失增大效率下降。图4-7和图4-8绘出了具有不同下环锥角 a 的转轮的汽蚀和能量特性的曲线。从这些图中可以看出：

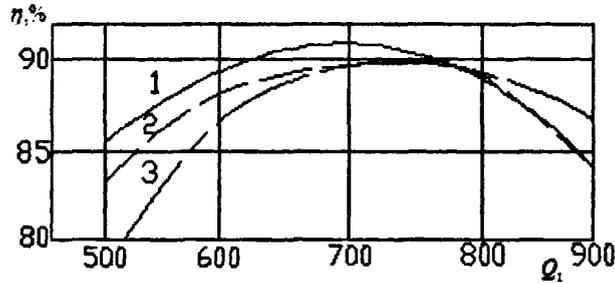
(1) 下环锥角 a 加大则曲线 $\eta = f(Q_1')$ 和 $\eta = f(N_1')$ 均右移， a 角越大，曲线右移越多。此时最高效率移向较大流量区域，而在小于最优工况的低负荷区效率下降。因而若转轮需长期在部分负荷下工作，则锥角 a 不宜太大，以免平均的运行效率下降。

(2) 下环锥角 a 由 3° 增加到 6° 时，在实际上不改变水轮机最高效率的情况下可使转轮的过流能力 Q_1' 增加 2.5%，而其出力可增加 2% 左右。当 a

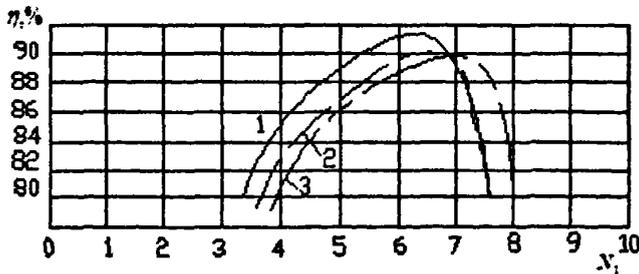
角由 6° 增至 13° 时, 虽然 Q_1' 和 N_1' 增加更多但最高效率开始下降。因此锥角 a 不宜过大, 一般不应大于 13° 。

(3)从图4-8可以看出, a 角的增加能使汽蚀系数下降, 改善汽蚀性能。这是因为 a 角加大后增加了转轮出口附近的过水截面积, 降低了流速而形成的。

根据实践在表4-4和表4-5^[3]中给出了 D_2/D_1 、锥角 a 与比转速 n_s 的关系。采用这些数据是有利的, 但随着生产和技术的发展, 这些关系是可以变化的。



(a)



(b)

图4-7 不同下环锥角转轮的 $Q_1'-\eta$ 和 $N_1'-\eta$ 曲线

1-- $a=3^\circ$; 1-- $a=6^\circ$; 1-- $a=13^\circ$

Fig4-7 $Q_1'-\eta$ and $N_1'-\eta$ curves of different cone angle of bottom ring

1-- $a=3^\circ$; 1-- $a=6^\circ$; 1-- $a=13^\circ$

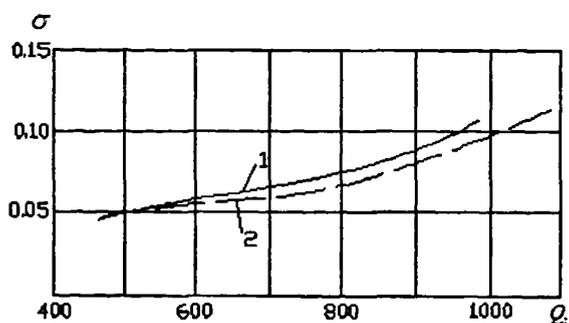


图4-8 不同下环锥角转轮的 $Q_1' - \sigma$ 曲线

1-- $a = 3^\circ$; 2-- $a = 6^\circ$

Fig4-8 $Q_1' - \sigma$ curves of different cone angle of runner bottom ring

1-- $a = 3^\circ$; 2-- $a = 6^\circ$

表4-4 转轮进出口之间的关系

Table4-4 Relation between import and export

n_s	60~100	100~150	150~200	200~300	300~400
D_2/D_1	0.60~0.75	0.70~0.95	0.90~1.05	1.00~1.10	1.00~1.10

表4-5 转轮下环锥角

Table4-5 Cone Angle of bottom ring

水头 (m)	100~180	70~120	40~70	25~45	20~30
n_s	120~180	180~200	200~250	250~300	350
a (度)	3~6	6~10	6~10	10~13	13

4.2.5 转轮进出口边及叶片的轴面投影

转轮进出口边和叶片的轴面投影具体地决定了转轮过流通道的工作段。如图4-9所示，为了它必须确定1、2、3和4各点的位置及曲线1~3和2~4的形状。

记3点的直径为 D_{f3} 一般为了使液流在转轮中有平滑的拐弯, 通常取:
 $D_{f3} = 1.005D_1$ 或 $D_{f3} = D_1$ 。

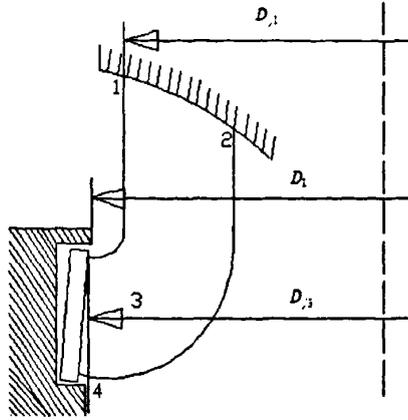


图4-9 转轮轴面投影

Fig 4-9 axis plane projection of the runner

记1点曲直径为 D_{f1} , 它取决于该点的叶片进口角 β_1 。一般情况 β_1 有三种可能: $\beta_1 > \frac{\pi}{2}$ 、 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ 、 $\beta_1 < \frac{\pi}{2}$ (图4-10)。

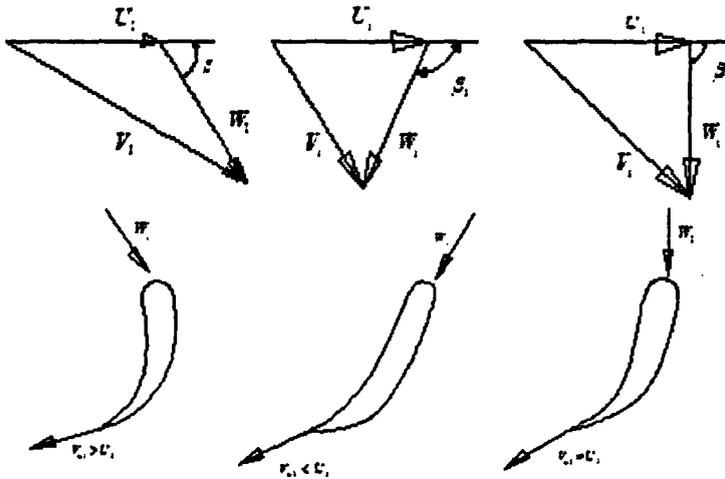


图4-10 转轮进口速度三角形

Fig4-10 velocity triangle of runner inlet

β_1 太小会使叶片过分弯曲而增加水流在转轮中的水力损失, β_1 过大

$\frac{\pi}{2}$

则会引起叶片厚度对流动严重的排挤。因此，转轮设计中总希望 β_1 角在左右。低比转速水轮机为了适应转轮前后环量变化大的要求，需要较弯曲叶型，因此通常取小于 $\frac{\pi}{2}$ ，而又接近号 $\frac{\pi}{2}$ 。

转轮由出口水流为法向时，因 $V_{u2} = 0$ ，水轮机基本方程为

$$\eta_h gH = U_1 V_{u1} \dots\dots\dots (4-4)$$

当 $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ 时， $U_1 = V_{u1}$ ，则：

$$\eta_h gH = U_1^2 = (R_{f1} \omega)^2$$

所以

$$R_{f1} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\eta_h gH} \dots\dots\dots (4-5)$$

上式为叶片进口角 β_1 为 $\frac{\pi}{2}$ 时点1的半径。

若要 $\beta_1 < \frac{\pi}{2}$ ， $U_1 < V_{u1}$ ，则

$$R_{f1} < \frac{1}{\omega} \sqrt{\eta_h gH}$$

若要 $\beta_1 > \frac{\pi}{2}$ ， $U_1 > V_{u1}$ ，则

$$R_{f1} > \frac{1}{\omega} \sqrt{\eta_h gH}$$

根据以上三式确定1点的位置。

进口边1~3一般采用的形状为：对中比转数的转轮为由点1引垂线向下，然后用圆弧与点3相联；对低比转速的转轮为1点与3点在同一垂线上即 $D_p = D_{f1}$ ；对高比转速转轮则为由点1引略向外倾斜的直线然后用圆弧与点3相联(图4-6)。

出口边2~4的位置和形状参照已有相近比转速的转轮可决定。在初步绘制时，可以取叶片的轴面流线在叶片部分近似相等，其中包括3~4和1~2两条轴面流线相等。叶片沿流线的长度可根据下述因素考虑决定：叶片越长即出口边往后移，则叶片表面积越大，在同样的负荷下，可减少叶片正背两面的平均压力差使叶片背面的最小压力值提高，有利于改善汽蚀性

能。同时对转轮的强度也有好处。但会引起摩擦阻力的增加，降低过流能力和水力效率。出口边向前移可提高过流能力，但会降低汽蚀和强度条件。因此，必须根据具体条件选择出口边的位置以保证综合指标最好。

4.2.6. 叶片间流道形状和叶片开口

根据上面的讨论，可以作出转轮叶片部分的流道的轴面投影。在该轴面流道上沿轴面流线的过水断面面积的变化规律很重要，它对能量和汽蚀性能有很大影响。在整个流道中过水截面积的变化应该平滑不允许有忽大忽小的现象。如出现这种现象则必须修改上冠和下环的形状。为了保证水流在转轮中不因脱流而造成很大能量损失，转轮流道应保持收缩形。但在中高比转速水轮机中有时为了改善汽蚀性能，则希望在转轮出口处附近略有扩散。

叶片出口边过水面积的大小通常用“叶片出口边开口”来衡量。一个叶片的尾端到相邻叶片的最短距离 a_2 叫作叶片出口边开口。 a_2 近似地有下列关系：

$$a_2 = t \cdot \sin \beta_{2b}$$

式中 t 为栅距， β_{2b} 是叶片出口边安放角。此式表明，开口 a_2 与出口边直径 D_2 和叶片角有关，即直径 D_2 越大或叶片出口安放角 β_{2b} 越大开口越大。试验表明，开口越大过流能力越大。在设计及产品试验中，检查叶片开口是一项重要的内容。

在建成电站中用切割叶片出水边的办法来提高水轮机过水能力，从而提高单机出力常常是有效的。因切割出水边后就增大了转轮的过水截面面积。但应指出，整个叶片的最低压力区也在靠近出水边的地方。切割叶片后一方面因叶片面积减少，增加单位面积叶片上的负荷，导致最低的压力值更加低，另一方面把原来的压力最低点切掉后必然会改变叶片上的压力分布，有可能使压力分布趋于不均匀，则又会进一步降低最低压力值。因此，对于切割叶片出水边的办法必须持慎重态度，应经过充分试验后才能在运行机组上采用。

4.3 混流式水轮机转轮准三维设计

流体机械过流部件中的流动是非定常的三维粘性流动，设计中考虑所有这些因素还不可能，目前绝大多数新的流体机械转轮的工程设计方法是以两类相对流面理论为基础发展起来的。

准三维反问题计算以 S_1 流面和 S_{2m} 流面计算为基础，由于转轮内流动的周向不均匀性，通常采用基于 S_1 流面的准三维设计方法， S_1 流面通过 S_{2m} 流面计算给定，平均 S_{2m} 流面计算时，通常根据经验给定转轮进、出口来流条件，这种方法忽略了导叶和转轮间流动的相互影响。对于反问题，由于叶片形状未知，准确给定转轮进、出口流动条件存在困难。

本文基于两类流面理论，建立了以 $\overline{V_\theta r}$ 及厚度分布为已知条件的准三维流动分析和转轮设计的通用模型。设叶片的骨面为流面，由平均的 S_{2m} 流面和一组 S_1 流面的迭代计算以满足给定的 $\overline{V_\theta r}$ 及厚度分布得到所设计的新叶片。给定 $\overline{V_\theta r}$ 分布的正、反问题迭代叶型设计方法简便合理，考虑了转轮内流动的周向不均匀性，保证了转轮的出力，有效地考虑了转轮相关部件间的相互影响，克服了设计中给定转轮进、出口流动条件的困难。通过 S_{2m} 流面计算给定初始叶型的 S_1 流面反问题与平均 S_{2m} 流面正问题迭代，使得设计计算更为合理。

4.3.1 基于 S_1 流面的准三维反问题计算数学模型

一、转轮内部周向平均的 S_{2m} 流面流动控制方程

所谓对流动进行周向平均处理就是求出相邻叶片间圆周方向流动参数的平均值并以该平均值为 S_2 流面上的流动参数。这样抽象所得的 S_2 流面即为平均 S_{2m} 流面。假设转轮内部相对流动定常，水流无粘性不可压，对转轮内实际三维流动进行周向平均处理，可得周向平均流动的 S_{2m} 流面方程、连续方程和运动方程如下：

$$v_3 - \omega r = \frac{H_3 \partial \overline{\varphi_m}}{H_1 \partial q_1} v_1 + \frac{H_3 \partial \overline{\varphi_m}}{H_2 \partial q_2} v_2 \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 B_f \overline{w_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 B_f \overline{w_2}) = 0 \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^2} \left[\frac{\partial \bar{E}_r}{\partial r} \left(\bar{w}_z + \bar{w}_\theta \frac{r \partial \varphi_m}{\partial z} \right) - \frac{\partial \bar{E}_r}{\partial z} \left(\bar{w}_z + \bar{w}_\theta \frac{r \partial \varphi_m}{\partial r} \right) \right] \\ & - \frac{\partial V_\theta r}{\partial r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta r}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} - \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r} + \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (4-8)$$

上式(4-6)中 H_1 、 H_2 、 H_3 是拉梅系数；式(4-7)中：

$$B_f = \frac{1 - n_B \delta_\theta}{2\pi r}$$

n_B ——叶片数； δ_θ ——叶片的周向厚度；

由连续性方程(4-7)引出流函数 ψ ，并略去“-”，于是：

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r B_f V_z \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -r B_f V_r \quad (4-9)$$

把上式代入(4-8)中，得到 S_{2m} 流面运动方程的流函数方程为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{w^2} \left[\frac{\partial \bar{E}_r}{\partial r} \left(\bar{w}_z + \bar{w}_\theta \frac{r \partial \varphi_m}{\partial z} \right) - \frac{\partial \bar{E}_r}{\partial z} \left(\bar{w}_z + \bar{w}_\theta \frac{r \partial \varphi_m}{\partial r} \right) \right] \\ & - \frac{\partial V_\theta r}{\partial r} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} + \frac{\partial V_\theta r}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r B_f} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r B_f} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (4-10)$$

至此式(4-6)、(4-7)和(4-10)构成了求解 S_{2m} 流面流动的基本方程。

方程中的流动参数为轴向平均值，方程的导数为真实子午面的导数。

考虑叶片的厚度对流场的影响，引入排挤系数 $B_f = (1 - n_B \delta_B) / 2\pi r$ ，代入式(4-7)并化简得：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{W}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \bar{W}_z) = \Omega; \\ & \Omega = \frac{n_B}{2\pi r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\delta_\theta \bar{W}_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta_\theta \bar{W}_z) \right] \end{aligned} \quad (4-11)$$

上式中的 δ_θ 与真实叶片的厚度 δ_n 的关系是：

$$\delta_\theta = \delta_n \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2}$$

Ω 代表叶片厚度对流场的作用，可用速度势 Φ 来描述， Φ 满足：

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Omega \quad (4-12)$$

考虑叶片厚度后，轴向平均流场的速度为：

$$\begin{cases} \overline{V}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \overline{V}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases} \quad (4-13)$$

S_{2m} 流面的求解区域如图 4-10 所示，其边界条件给定如下：

(1) 上冠，下环为流面，其法向速度为零：

$$\begin{cases} \varphi = 0, & \frac{\nabla \Phi}{\partial n} = 0 & \text{上冠} \\ \varphi = \frac{Q}{2\pi}, & \frac{\nabla \Phi}{\partial n} = 0 & \text{下环} \end{cases} \quad (4-14)$$

(2) 进口断面 AB 取在离转轮进口边足够远的地方，略去叶片对进口断面流动的影响，其边界条件为：

$$\varphi = f(z) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (4-15)$$

其中 $f(z)$ 由试验或计算给出。

(3) 对于出口断面 DC，可以不计叶片对其流动的影响，可设 $\overline{V}_r = 0$ ，即：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (4-16)$$

(4) 在混流式转轮叶片的设计中，一般认为转轮出口边位于同一周截面

上, 因此 S_{2m} 流面方程 (4-6) 的边界条件为:

$$\varphi(r, z)|_{\text{outlet}} = 0 \quad (4-17)$$

用八节点曲边四边形等参单元将 S_{2m} 流面的流动区域 (如图4-2所示) 剖分为 N 个 Π_i 子单元, 每个单元内的流函数为,

$$\varphi = \sum_j^8 M_j \Phi_j \quad (4-18)$$

式中 M_j 为形函数, Φ_j 为单元节点数, 在每个单元 Π_i 采用 Galerkin 加权余量法, 则对 S_2 流面的方程 (4-9) 建立的有限元方程为:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \iint_{\Pi_i} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - F(r, z) \right] M_i dr dz \right\} = 0 \quad (4-19)$$

其中: F —— 方程 (4-9) 中的右端项。

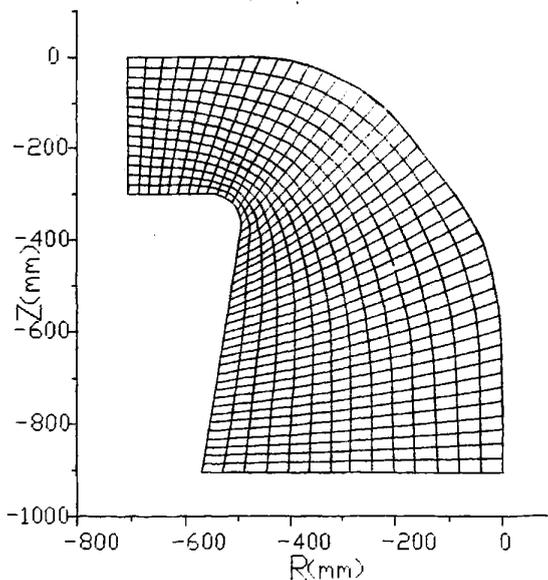


Figure 4-10 finite element gridding of S2 flow surface

图4-10 S_{2m} 流面的有限元网格

由于方程 (4-10) 中的右端项 F 和流函数 φ 有关, 因此, 需要进行迭代求解。第一次迭代时, 假定 F 为零, 由此可解出整个流场的 φ_n , 根据 φ_n 可计算出方程 (4-9) 小的右端 F 项, 从而可解出新的流函数值 φ_{n+1} 。重复上述过程, 直到所有节点上的流函数 φ 满足下面的收敛条件:

$$\frac{\varphi_{n+1} - \varphi}{\varphi_{n+1}} < \varepsilon \quad (4-20)$$

本文取 $\varepsilon = 10^{-3}$ 。

二、 S_1 相对流面流动控制方程

就水力机械转轮内的真实流动而言, S_1 相对流面是一空间曲面。一般认为 S_1 流面是二维的回转面。在大多数情况下, S_1 流面与回转面偏差不大, 满足由位于叶片上游或叶片中间的圆弧上的流体微团形成 S_1 流面的条件, 为使计算简化, 在工程实际中一般假设 S_1 相对流面为回转面, 其形状通过求解平均 S_{2m} 相对流面流动给定。

现假定 S_1 流面为旋成面且来流为轴对称, 则 S_1 流面的流动为无旋流动, 对于 ρ 为常数的不可压缩流体, 由质量守恒得连续方程:

$$\frac{\partial(\underline{w}_1 r H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\underline{w}_3 r H_1)}{\partial q_3} = 0 \quad (4-21)$$

则有:

$$\frac{\partial(w_m \tau)}{\partial m} + \frac{\partial(w_\theta \tau)}{\partial \theta} = 0 \quad (4-22)$$

式中 τ —— 相邻两 S_1 流面间的法向厚度, 其值由求解 S_2 流面正问题来确定。

S_1 流面的欧拉型运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} w_\theta \frac{\partial w_m}{r \partial m} + w_\theta \frac{\partial w_m}{r \partial \theta} - \left(\frac{w_\theta^2}{r} + 2\omega w_\theta + \omega^2 r \right) \frac{\partial r}{\partial m} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial m} \\ -w_m^2 \frac{da}{dm} - \left(\frac{w_\theta^2}{r} + 2\omega w_\theta + \omega^2 r \right) \frac{\partial r}{\partial n} &= F_n \\ w_m \frac{\partial w_\theta}{\partial m} + w_\theta \frac{\partial w_\theta}{r \partial \theta} + \left(\frac{w_\theta}{r} + 2\omega \right) w_m \frac{\partial r}{\partial m} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

流函数定义为:

$$w_m = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad w_\theta = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \quad (4-24)$$

式中 τ —— 流层的法向厚度。

对式(4-22)做适当的变化,并把(4-23)代入可得 S_1 流面的流函数方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) \\ & = \left(2\omega - \frac{1}{r\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) \frac{\partial r}{\partial m} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_i - \omega \lambda_i) \end{aligned} \quad (4-25)$$

这里设转轮来流均匀,即 $E_i = \text{常数}$ 、 $\lambda_i = \text{常数}$,则上式可写成:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) + \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) = \left(2\omega - \frac{1}{r\tau} \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) \frac{\partial r}{\partial m} \quad (4-26)$$

S_1 流面的计算区域如图(4-11)所示,其边界条件给定如下:

(1)在该计算区域中满足叶片表面为流线,而 bc 和 fg 为叶型表面,故应该是两条流线,所以

$$\psi|_{bc} = 0, \quad \psi|_{fg} = Q \quad (4-27)$$

式中: Q ——跨叶片间流道的流量

(2)在 ab,ef 和 cd,gh 上满足周期性条件:

$$\begin{aligned} \psi|_{ef} &= \psi|_{ab} + Q \\ \psi|_{gh} &= \psi|_{cd} + Q \end{aligned} \quad (4-28)$$

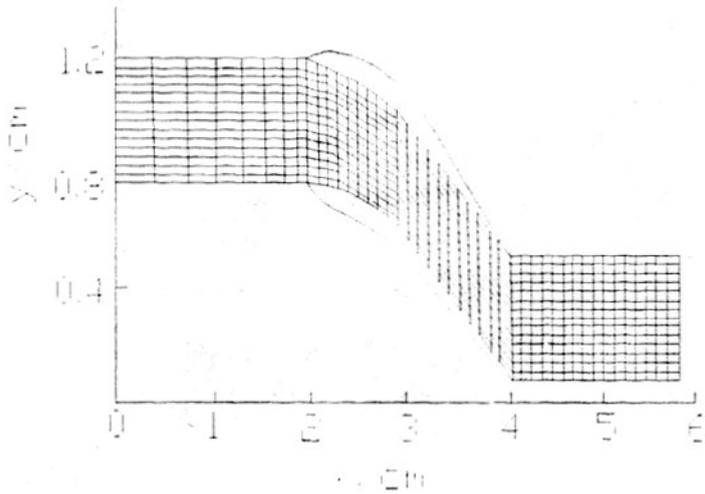


Figure 4-11 finite element gridding of S1 flow surface

图4-11 S1流面有限元网格

(3) 在进出口边界上, 根据流动均匀化的假定可推得:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{ac} = \frac{Q \tan \beta_1}{\theta_1 r_1} \quad (4-29)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{ab} = -\frac{Q \tan \beta_2}{\theta_2 r_2}$$

式中: θ_1 ——相邻叶片的张角,

β_2 ——应由广义Kutta条件确定

(4) 为了确定出口环量, 在叶片出口边应满足库塔条件, 理论上应使叶片两出口边上的所有对应点的任何方向速度均相等, 这样的数值处理是很困难的。因此只假定沿叶片出口边的切线方向这一主要流动方向速度相等, 在这里我们取为叶片出水处正背面的速度相等, 即:

$$W_{TF} = W_{TS} \quad (4-30)$$

上式的迭代公式是:

$$W_{\alpha}^n = W_{\alpha}^{n-1} G + (1-G) W_{\theta}^n \quad (4-31)$$

式中: G ——松弛因子, n ——迭代次数

和 S_{2m} 流面类似, 用八节点曲边四边形等参单元将 S_1 流面的计算区域离散如图 (4-3) 所示, 采用Galerkh加权余量法, 推得 S_1 流面的有限元方程组为

$$\sum_{i,j}^8 k_{ij}^e \psi_j = - \sum_{i,j} \int_{\Omega_c} FN_i dmd\theta + \oint_r \frac{N_i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (4-32)$$

式中: k_{ij}^e 为单元的刚度矩阵, 可表示为

$$k_{i,j}^e = \iint_{\Omega_c} \left(k_m \frac{\partial N_i}{\partial m} \frac{\partial N_j}{\partial m} + k_\theta \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \right) dmd\theta \quad (4-33)$$

F —— 方程 (4-25) 的右端项。

方程(4-9), (4-10), (4-24), (4-30) 及(4-31)构成了准三维流动计算的基本方程组。在适当的边界条件下, 迭代求解一个 S_{2m} 流面流动和一组 S_1 流面流动即可得到转轮内的准三维流动。控制方程(4-10)和 (4-30) 均为拟线性的二阶偏微分方程, 采用有限元方法求解。

三、基于 S_1 流面的混流式水轮机转轮叶片造型

利用已知数据, 得到满足预定性能参数要求的叶片的过程为叶片造型。一般分为两步进行, 即叶片骨面的生成和按照给定的叶片厚度分布规律加厚, 其中骨面生成最为关键。在本文中 $\bar{V}_\theta r$ 及厚度分布为已知条件, 并假定叶片骨面为周向平均流面来建立叶片设计模型。

设叶片的骨面方程为:

$$s(r, \theta, z) = \theta - \varphi(r, z) \quad (4-34)$$

由流面与速度相切条件有

$$\bar{W}_\theta \cdot \nabla s = 0$$

即:

$$\bar{W}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \bar{W}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\bar{W}_\theta}{r} \quad (4-35)$$

上式为叶片计算的基本方程, 对于基于 S_1 流面给定周向平均速度矩分布的转轮叶片设计, 首先给定初始叶型, 根据初始叶型通过平均 S_{2m} 流面计算给定 S_1 流面。一般经初次设计后, S_1 流面计算得到的轴向平均的 $\bar{V}_\theta r$ 与给定的 $\bar{V}_\theta r$ 分布并不一定相符, 故需对初始叶型进行迭代修正。设满足给定的 $\bar{V}_\theta r$ 的叶片角坐标 $\varphi(r, z)$ 满足方程 (4-35), 所以

$$\bar{W}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \bar{W}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\bar{V}_\theta r|_s}{r} - \omega \quad (4-36)$$

式中: $\overline{V_\theta r}|_g$ -----预先给定的速度距分布

对 φ 做一次近似其修正量为 $\Delta\varphi$, 则叶形修正方程为:

$$\frac{d(\Delta\varphi)}{dm} = \frac{-\overline{V_\theta r}|_i + \overline{V_\theta r}|_g}{r^2 \overline{W_m}} \quad (4-37)$$

式中: $\overline{V_\theta r}|_i$ -----预先给定的速度距分布, $\overline{W_m}$ 由 S_{2m} 流面计算确定,

至此, 方程(4-36)和(4-37)为本文建立的基于 S_1 流面计算的叶片设计模型。设计计算中, 给定 $\overline{V_\theta r}$ 和厚度分布后, 迭代求解方程(4-9), (4-10), (4-24), (4-30) 和(4-31)及方程(4-36)和(4-37)即可实现准三维的流动计算与叶片设计。设计步骤为:

(1) 基于 S_1 流面的反问题迭代计算方法, 在计算中首先需给定转轮初始叶片; 同时还应给定转轮子午面流道形状及转轮进出口边的轴面投影和转轮的基本设计参数, 如单位流量 Q' 、单位转速 n' 及叶片数 Z ; 给定转轮区的 $\overline{V_\theta r}$ 分布及厚度分布。

(2) 首先求解方程(4-9), (4-10), 直到相邻两次内循环的流函数的相对误差小于给定值, 得到 S_{2m} 流面的流动。 S_{2m} 流面计算的迭代收敛叶片作为 S_1 流面反问题计算的初始叶片。这种初始叶片的设计给定方法, 考虑了叶片形状对转轮来流的影响, 使得计算给定的初始 S_1 流面更为准确, 同时也大大地减小了 S_1 流面与 S_{2m} 流面迭代计算的工作量。

(3) 然后选择一组 S_1 流面, 按方程 (4-24), (4-30) 和(4-31)进行流动计算, 求得转轮内周向平均的 $\overline{V_\theta r}$; 再按照方程(4-36)和(4-37)对叶片骨面的角坐标进行修正; 最后按照给定的叶片厚度分布, 沿流面双边加厚得到新的转轮; 如此这样重复迭代解方程(4-24), (4-30)和(4-31)及方程(4-36)和(4-37), 直到相邻两次内循环的角坐标的差小于给定值, 最终实现转轮的修形与设计。

(4) 按上述方法给定 S_1 流面计算的初始叶片后, 进行 S_1 流面的叶片迭代设计计算, 并利用按照方程(4-36)和(4-37)对叶片骨面的角坐标进行修

正；而后以 S_1 流面设计叶片为基础，进行 S_{2m} 流面正问题计算。重复步骤（2）~（3），如此循环迭代，使 S_{2m}/S_1 流面正反问题迭代计算满足给定收敛精度。当 S_{2m} 流面与一组 S_1 流面计算的相对速度的相对误差小于给定值时，就可以认为已达到了收敛。

第五章 算例分析

为了验证上述设计模型和设计方法,本文选择中高比速混流式水轮机转轮进行计算。

5.1 基本设计参数

5.1.1 转轮基本参数

表 5-1 转轮基本参数

Table 5-1 Basic parameter of the runner

目录	水头 (m)	导叶相对高度	流量 (m ³ /s)	额定转速 (rpm)	比转速 (m.Kw)	转轮直径 (m)	转叶片
数据	H = 1.00	$\bar{b}_0 = 0.20$	Q = 0.90	n = 85.0	$n_s = 235$	D = 1.00	z = 1

5.1.2 确定翼型的最大厚度和选择厚度变化规律

混流式转轮叶片的最大应力出现在上冠流面处,因此确定叶片在该处的最大厚度 δ_{\max} 是很重要的。现用下述经验公式初步计算出 δ_{\max} 。

$$\delta_{\max} = kD_1 \sqrt{\frac{H_{\max}}{Z}} + 2 \quad (mm)$$

式中: δ_{\max} ——转轮叶片的最大厚度(mm);

k ——系数,其大小和水轮机比转速有关, $k = 5 \sim 10$,高比转速取大值,低比转速取小值;

D_1 ——转轮直径(m);

H_{\max} ——最大水头(m);

Z ——转轮叶片数。

为了叶片的应力均匀和改善水力性能,不同流面的翼型可采用不同的最大厚度。从上冠流面至下环流面,翼型最大厚度的变化可采用如图 10—24 所示的规律。表示最大厚度变化规律的曲线应光滑,以免引起液流混乱和出现应力集中。

合理的沿翼型骨线的厚度变化规律应由流体动力翼型实验确定。在本文采用苏联全苏水力机械研究所专为水力机械研究得到的翼型 BNTM 3015,翼型厚度坐标如下表 5-2 所示。

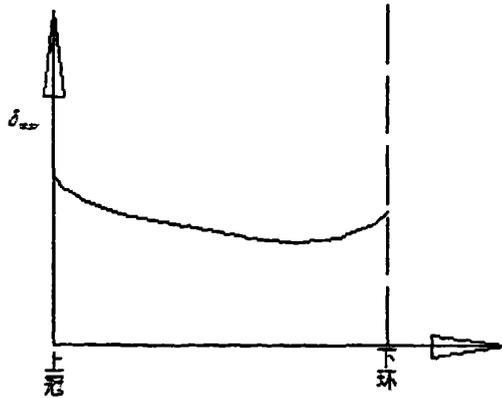


图 5-1 翼型最大厚度从上冠到下环的变化示意图

Fig 5-1

实验表明，翼型的最大厚度适当靠近头部，可使翼型的压力分布比较均匀以及汽蚀性能较好。翼型头部可设计成圆头形状，回头半径 $R \sim \frac{1}{2} \delta_{max}$ 。翼型出水边应在工艺和强度条件许可下尽量作得比较薄，以有利于减轻水轮机的振动和提高工作稳定性。一般 $D_1 < 500mm$ 的模型转轮叶片，其轴面图上叶片出口边的厚度名 $\leq 0.5 \sim 1(mm)$

表 5-2 BNGM 3015 翼型坐标

BNGM 3015	y_B	0	2.16	3.3.2	3.60	4.18	4.69	5.65	6.49	7.62
	y_H	0	-1.84	-2.68	-2.84	-3.16	-3.41	-3.79	-4.15	-4.52
x/l		0	1.25	2.5	3.0	4.0	5.0	7.0	10	15
BNGM 3015	y_B	9.85	10.23	10.23	9.6	8.5	6.92	4.9	3.87	0
	y_H	-4.85	-4.77	-4.77	-3.6	-2.74	-1.92	-1.1	-0.77	0
x/l		40	50	60	70	80	85	90	95	100

5.2 计算结果及其分析

5.2.1 流面计算区域的离散

采用八节点曲边四边形等参单元的准三维计算网格， S_{2m} 计算网格如图 5-2， S_1 流面计算网格如图 5-3。

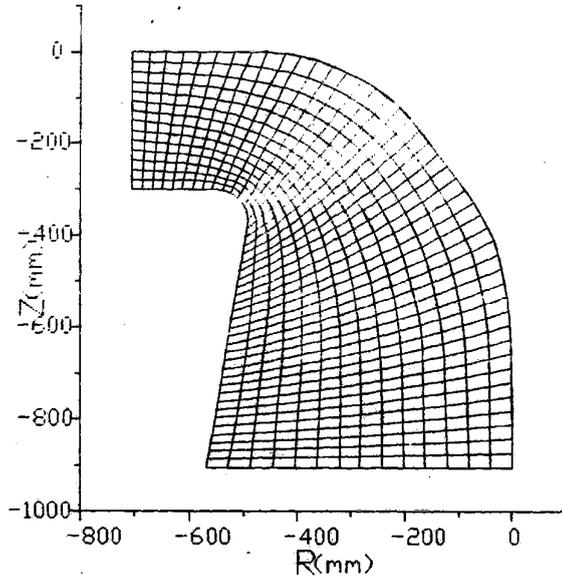


Figure 5-2 finite element gridding of S_2 flow surface

图 5-2 S_{2m} 流面的有限元网格

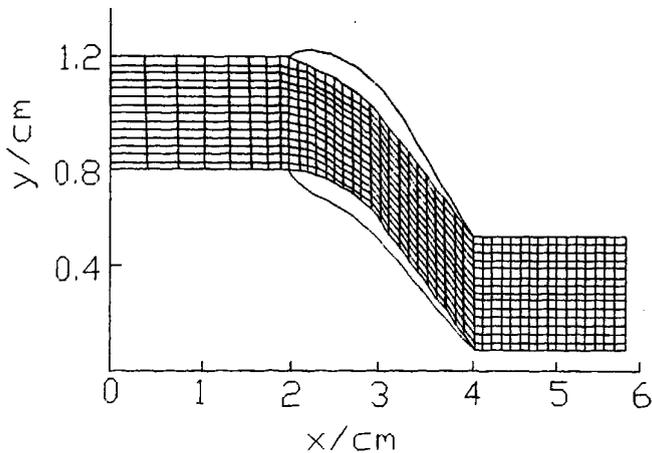
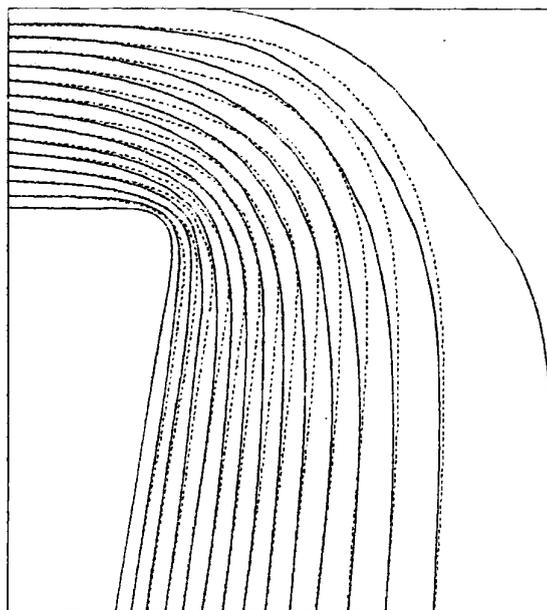


Figure 5-3 finite element gridding of S_1 flow surface

图 5-3 S_1 流面有限元网格

5.2.2 结果及分析

本文采用的基于 S_1 流面的混流式水轮机转轮叶片准三维的设计方法, 考虑了速度矩分布、来流有旋、环量分布不均匀及叶片本身对转轮设计的影响。由 S_{2m} 流面的周向平均流动的控制方程可知, 方程中左端的前一项表示来流有旋对周向平均流动的影响, 最后两项表示叶片本身对周向平均流动的影响。图 5-4 给出了二维有势流动(实线)及准三维设计有旋流动(虚线)的轴面流线分布规律。从图 5-4 可见, 二者的差别是明显的, 说明来流旋涡及叶片本身对流场有重要作用。从图中可以看出, 二维势流的轴面流线向下环方向排挤, 使轴面流动的不均匀性加剧, 刚好与导叶出口 $\overline{V_{\theta r}}$ 的不均匀性作用相反; 而准三维设计的轴面流线表示的是叶片涡和来流涡综合作用的轴面流线分布, 由图中可以看出, 在叶片涡及来流涡的综合作用下, 轴面流线向上冠方向排挤, 减小了轴面速度分布的不均匀性, 表现为下环附近的流速有所下降, 上冠附近的流速有所上升, 这可以从轴面流速分布图中看出, 图 5-5 和图 5-6 分别给出了准三维和二维势流的轴面速度的分布。



实线 —— 表示二维势流, 虚线 --- 表示准三维

图 5-4 转轮轴面流线分布

Fig5-4 Axle to the distribution of flow lines

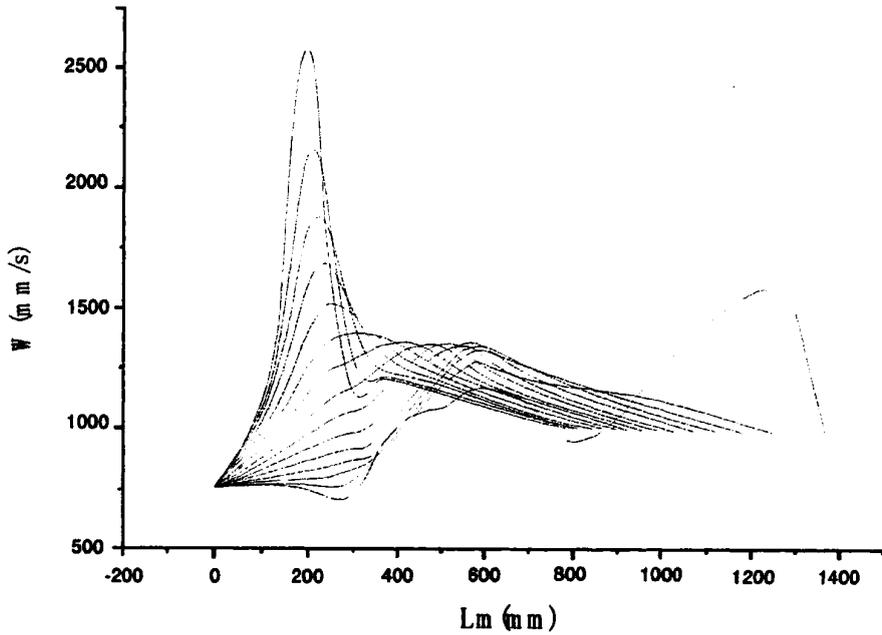


图 5-5 准三维叶片的轴面流速分布

Fig5-4 Quasi-3D implementation of the axis of the blade surface velocity distribution

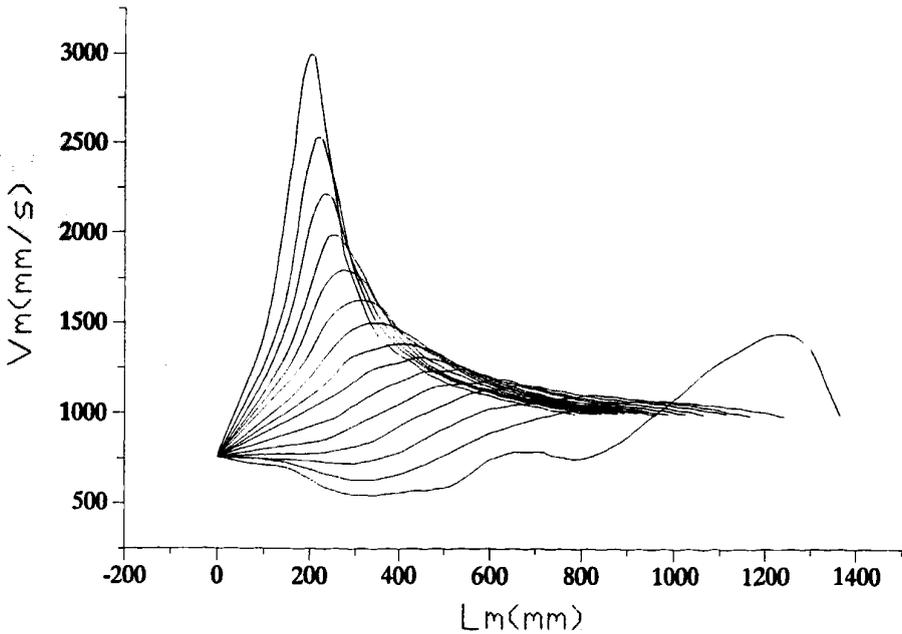


图 5-6 二维势流的轴面流速分布

Fig 5-6 2D potential flow velocity distribution of the axial

图 5-7 为转轮区内沿上冠、下环及中间流线的 $\bar{V}_\theta r$ 分布的给定值和本文方法设计的叶片所实现的值。由此可见二者十分接近。说明该准三维设

计方法所设计转轮能够满足设计者给定的负荷分布和厚度分布,明显提高了设计过程对叶片性能的可控性。

图 5-8 为按本文模型设计所得到的叶片压力面水平截面图,从图可直知,曲线光滑,变化规律合理,表明叶片也是光滑的。图 5-9 为该方法的叶型在保角平面上的实现。计算实践表明,该模型收敛性好,该准三维设计一般在 S_1 流面和 S_{2m} 流面之间迭代 5 至 6 次即可达到 0.005 弧度(前后两次设计的叶片角坐标的最大误差)的精度。本文模型的另外一个特点是既可进行正问题的流动分析,也可进行反问题设计,计算十分方便。若和性能预估及优化设计结合起来,本文模型用于转轮的设计将是十分有效的。

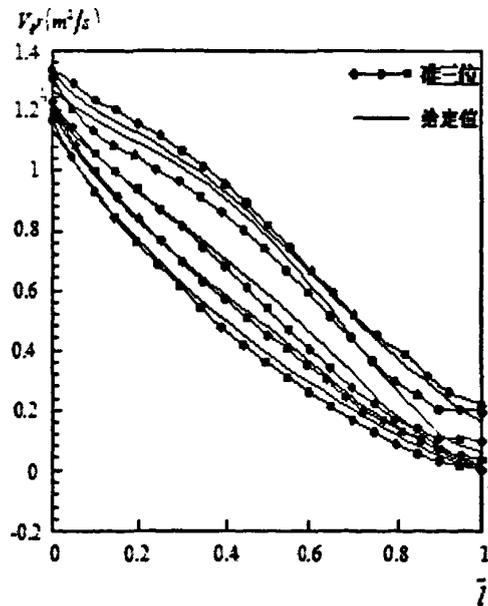


图5-7 准三维叶片实现的环量分布与给定值的比较

Fig5-7 Implementation of quasi-3D blade circulation distribution and the given values

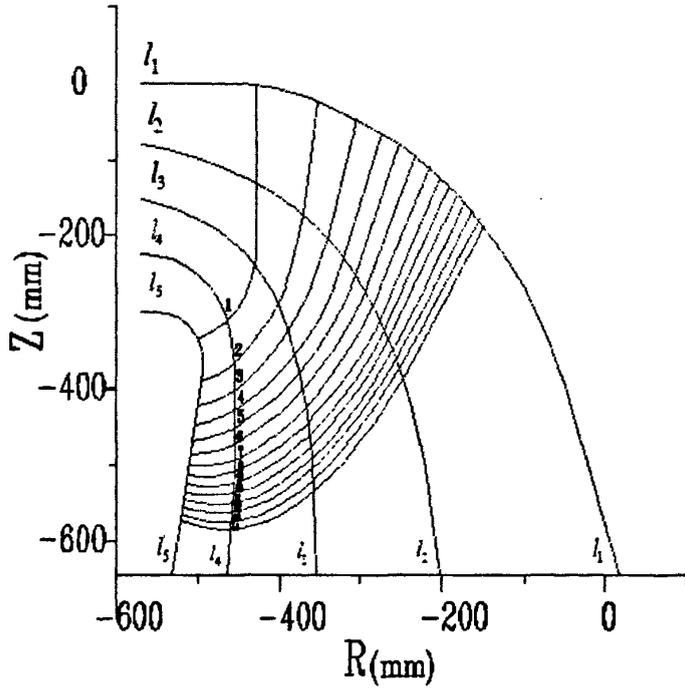
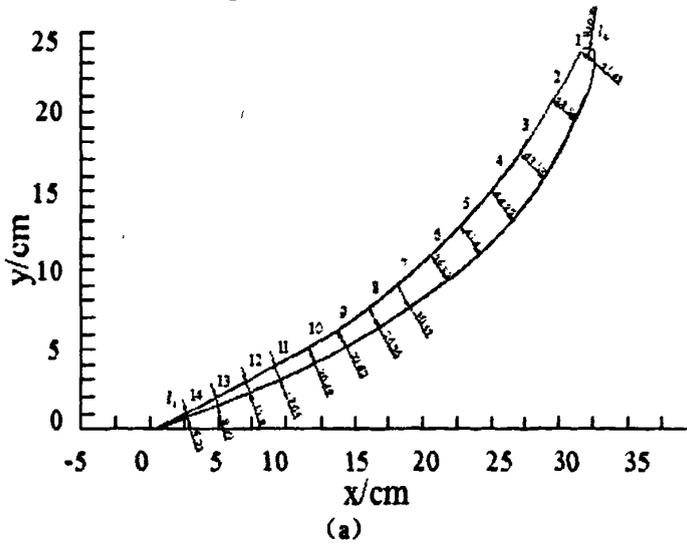
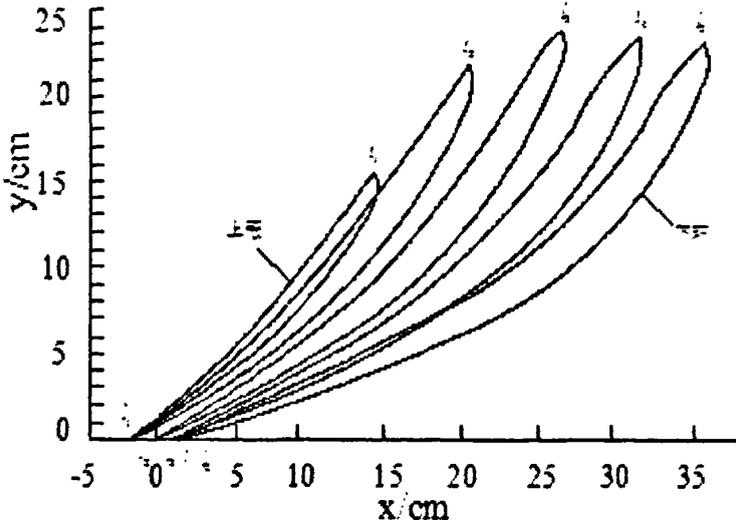


图 5-8 叶片轴截面图
Fig 5-8 Leaf-axis sections





(b)

图 5-9 准三维方法的叶型在保角变换平面上的实现

Fig 5-9 Quasi-3D methods of leaf type in conformal mapping plane implementation

图 5-10 给出了叶片的光滑性检查(沿第 1、第 6 和第 11 条准流线的叶片截线)。计算流程图如图 5-11 所示。

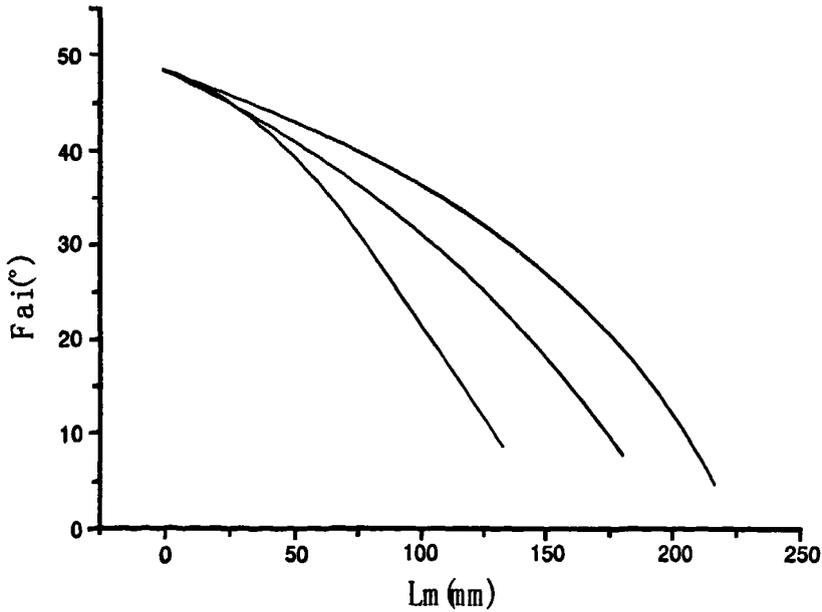


图 5-10 叶片光滑性检查

Fig 5-10 Leaves smooth check

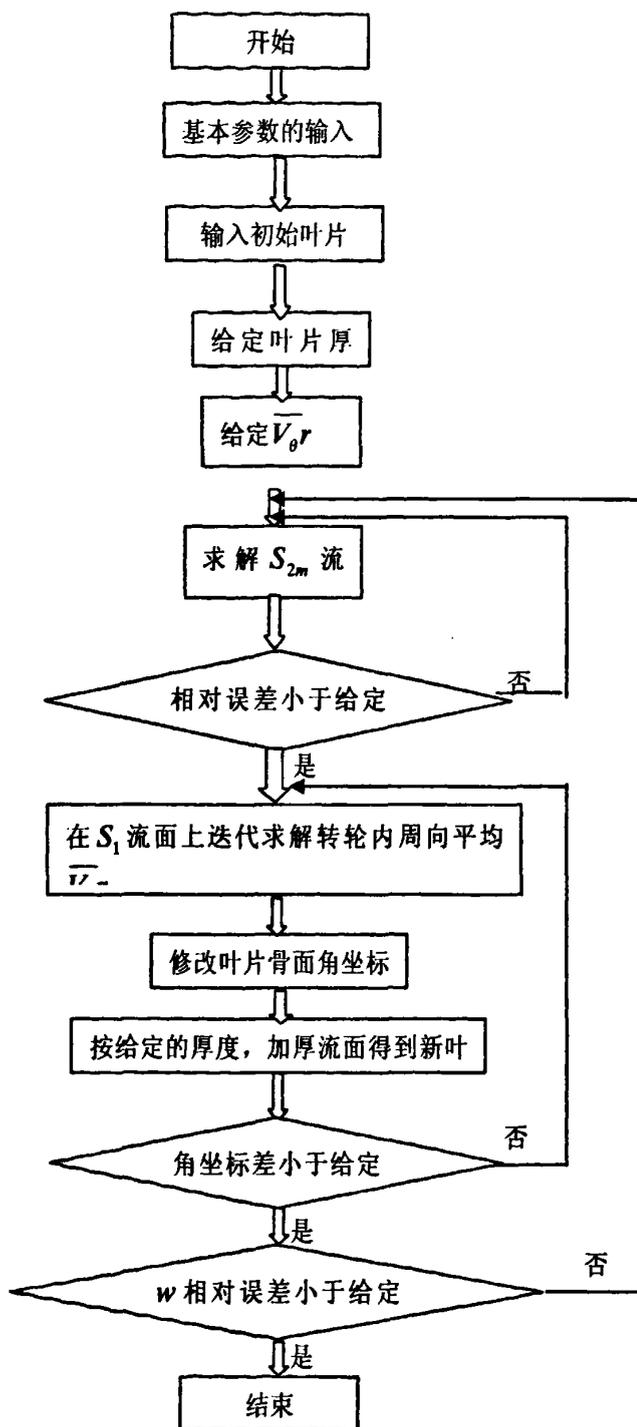


图 5-11 计算流程图
Fig 5-11 Calculation flow chart

第六章 结论

通过以上对准三维的计算与分析, 本文得到以下结论:

1、本文建立了基于 S_1 流面的准三维有旋流动的反问题设计模型, 给定 $\overline{V_\theta}$ 和厚度分布, 该模型计算稳定、收敛快, 计算和设计十分灵活, 算例证明其有效性, 可以用于工业设计。

2、与常规的设计方法(二维)相比较, 按本文设计方法得到的转轮叶片, 可较好地考虑有限叶片数影响, 能够得到满足设计者给定的负荷分布与厚度分布, 从而实现了设计过程对叶片性能的控制, 为设计出性能优良的转轮提供了方法和模型。

3、基于 S_1 流面叶片设计的准三维方法, 能够较为充分地考虑转轮内流动周向不均匀性的影响, 设计更为可靠。此外, 该方法与正问题计算紧密相连, 将正问题计算换成三维方法或粘性计算, 则该模型可实现全三维设计或粘性设计。

4、本模型实现反问题设计的同时也给出了转轮内的三维流场, 易于与优化方法相结合, 便于进行性能预估和优化设计。

本文在水轮机转轮的准三维反问题设计计算方面作了有益的探索, 在使用方面作了很多工作, 但距实际应用还有很多工作要做, 在设计和计算中除需要进一步转轮进出口边界条件、来流有旋及转轮内部流动的轴向不均匀性外, 还应与基于 S_{2m} 流面的正问题计算结合起来, 进行真实叶片的设计。此外, 在求解区域的离散、流函数方程求解的边界条件的给定及叶片出口边的形状等还不是太理想, 这些都有待今后进一步完善。

参考文献

- [1] 索丽生. 科学开发水能资源 促进水资源可持续利用和经济社会的可持续发展——在联合国水电与可持续发展论坛上的讲话. 中国农村水电及电气化信息网 (<http://www.shp.com.cn>). 2004, 10, 28
- [2] 陈冬冬, 张礼达. 斜流式水轮机的研究与开发——转轮水力设计方法研究[D]. 西华大学, 2005.
- [3] 程良骏. 水轮机. 北京:机械工业出版社, 1982. 4
- [4] 查 森. 叶片泵原理及水力设计[D]. 北京:机械工业出版社, 1988.
- [5] 李文广. 水力机械流动理论. 北京:中国石化出版社, 2000. 6
- [6] 高中信. 混流式叶轮的准三维 S_2 流面有限元设计方法[J]. 水利学报, 1992: 63-69 (4).
- [7] 林汝长. 水力机械流动理论. 北京:机械工业出版社, 1995. 1
- [8] 葛满初. 非正交曲线坐标 S_1 流面函数反问题松弛计算. 工程热物理学报, 1985(4): 336-341.
- [9] Jennious IK, Stow P. A Quasi-three Dimensional Turbomachinery Blade Design System: Part I-Through Flow Analysis. ASME Paper 84-GT-26, 1984; Part g-Computerised System, ASME Paper 84-GT-27, 1984.
- [10] Hirsch C. Warzee G. A Finite Element Method for Through Flow Calculations in Turbomachinery. ASME J. Fluids Engng, Sep. 1976.
- [11] 罗兴铸, 陈乃祥, 林汝长. 有厚叶片的 S_2 流面反问题计算[J]. 水利学报, 1995 (7): 8-15.
- [12] 罗兴铸, 廖伟丽, 梁武科, 陈乃祥, 林汝长. 混流式水轮机转轮 S_1 流面上叶片设计的准三元方法[J]. 水动力研究与进展 A 辑, 1997, 12 (3): 251-256.
- [13] 张昌期. 水轮机——原理与数学模型[M]. 北京:机械工业出版社, 1985.
- [14] Jansen W. Kirschner A K. Iipeller Design Method for Centrifugal Compress. NASA SP304, 1975.
- [15] 王尚锦. 离心压缩机三元流动理论及应用. 西安:西安交通大学出版社, 1991.
- [16] 青文. 小水电渐成世界水电主角. 中国农村水电及电气化信息网

(<http://www.shp.com.cn>) .2004, 12, 17

- [17] Qian Hanxin, et al Experimental study on characteristics in the leading parts for a Francis turbine with high specific speed. The 4Th Asian Inter. Conf. on Fluid Machinery Symp, China 1993.
- [18] 彭国义. 水力机械转轮反问题数值研究与进展. 甘肃工业大学学报, 1997. 12, 第 23 卷, 第 4 期.
- [19] Ch. Hirsch. G_ Warsee, A finite element method for through flow calculations in turbomachines. ASME, J. Fluids Engng. Sep 1976.
- [20] 曹昆, 姚志民. 水轮机原理及水力设计. 北京: 清华大学出版社, 1991. 6
- [21] 张礼达. 流体机械优化设计及应用. 成都: 四川科学技术出版社, 1999. 3
- [22] 高建铭, 姚志民. 水轮机的水力计算. 北京: 电力工业出版社, 1982. 4
- [23] 张克危. 流体机械原理. 北京: 机械工业出版社, 2000. 5
- [24] 天津电气传动设计研究所编. 水轮机设计与计算. 北京: 科学出版社, 1971
- [25] Cedar. R. D, P. Stow. A Compatible Mixed Design and Analysis Finite Element Method for the Design of Turbomachinery Blades. In t. J. Numer. Methods in Fluids, Vol. 5, 1985:331-345
- [26] Jennious. I. K, P. Stow. A Quasi-Three-Dimension Turbomachinery Blade Design System: Part I -Throughflow Analysis. Trans. ASME J. Engng. for Gas Turbines and Power, Vol. 107, 1985:301 — 307
- [27] Jennious. I. K, P. Stow. A Quasi-Three-Dimension Turbomachinery Blade Design System: Part II-Throughflow Analysis. Trans. ASME J. Engng. for Gas Turbines and Power, Vol. 107, 1985:308-316
- [28] 中国水力发电过程学会水力机械专业委员会, 中国动力工程学会水轮机专业委员会, 中国电机工程学会水电设备专业委员会. 第十一次学术讨论会论文集. 海洋出版社, 1993
- [29] 章本照, 印建安, 张宏基. 流体力学数值方法. 北京: 机械工业出版社, 2003. 7
- [30] 周雪漪. 计算水力学. 北京: 清华大学出版社, 1995. 9
- [31] Daryl L. Logan. 有限元方法基础教程(第三版). 北京: 电子工业出版社, 2002. 8
- [32] 王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003. 7

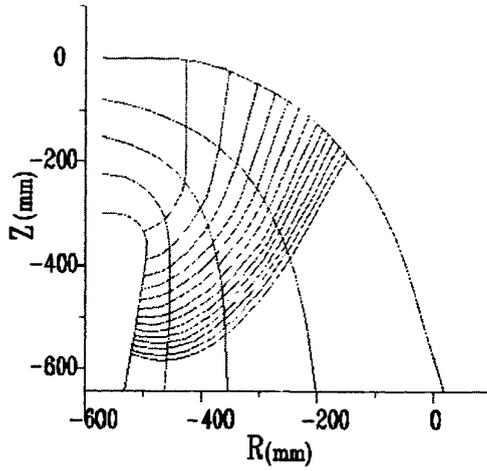
- [33] 吴子牛. 计算流体力学基本原理. 北京:科学出版社, 2001. 2
- [34] 苏铭德, 黄素逸. 计算流体力学基础. 北京:清华大学出版社, 1997. 3
- [35] 焦德勇, 冯国泰. 叶轮机械内流场数值计算. 哈尔滨工业大学出版社, 1990. 12
- [36] Shoichiro Nakamura. 科学计算引论——基于 MATLAB 的数值计算(第二版). 北京:电子工业出版社, 2002. 6
- [37] 张志涌等. 精通 MATLAB6. 5 版. 北京:北京航空航天大学出版社, 2003. 3
- [38] 夸克工作室. 有限元分析基础篇 ANSYS 与 MATLAB. 北京:清华大学出版社, 2002. 2
- [39] (德)P. I. Kattan. MATLAB 有限元分析与应用. 北京:清华大学出版社, 2004. 4
- [40] 张礼达, 余波等. 斜流式水轮机设计研究论文. 第 16 届全国水动力学研讨会文集, 海洋出版社, 2002. 8
- [41] 张礼达, 余波, 陈冬冬. 斜流式水轮机转轮设计理论研究. 第 18 届全国水动力学研讨会文集, 海洋出版社, 2004. 8
- [42] 吴景春, 吴玉林, 梅祖颜. 混流式水轮机转轮内部流动的准三元有限元解. 动力工程, 1989, 9. 第 4 期.
- [43] 彭国义, 罗兴琦等. 轴流式水轮机转轮的准三元有旋流动设计. 水利学报, 1996. 10, 第 10 期.
- [44] 高忠信. 混流式叶轮的准三维 S2 流面有限元设计方法. 水利学报, 1992. 4, 第 4 期.
- [45] 齐学义, 李纯良等. 三元流场中速度梯度方程的分析. 甘肃工业大学学报, 1998. 9, 第 24 卷, 第 3 期.
- [46] 罗兴琦, 林汝长等. 流体机械叶轮设计的研究与发展. 力学进展, 1997. 8, 第 27 卷, 第 3 期.
- [47] 吴克启, 蔡兆林. 利用平面叶栅资料的斜流叶轮准三元设计法. 华中工学院学报, 1986. 12, 第 14 卷, 第 6 期.
- [48] 区颖达, 吴克启, 蔡兆林. 流体机械倾斜流面叶栅的变换理论及试验. 华中理工大学学报, 1992. 12, 第 20 卷, 第 6 期.
- [49] 哈尔滨大电机研究所. 水轮机设计手册. 北京:机械工业出版社, 1976.
- [50] 高建铭. 水轮机的水力计算. 北京:机械工业出版社, 1982.

- [51] 天津电气传动设计研究所. 水轮机设计与计算. 北京: 科学出版社, 1971.
- [52] 华东水利学院. 水轮机(下册). 北京: 电力工业出版社, 1980.

附 录 1(攻读硕士期间发表的论文)

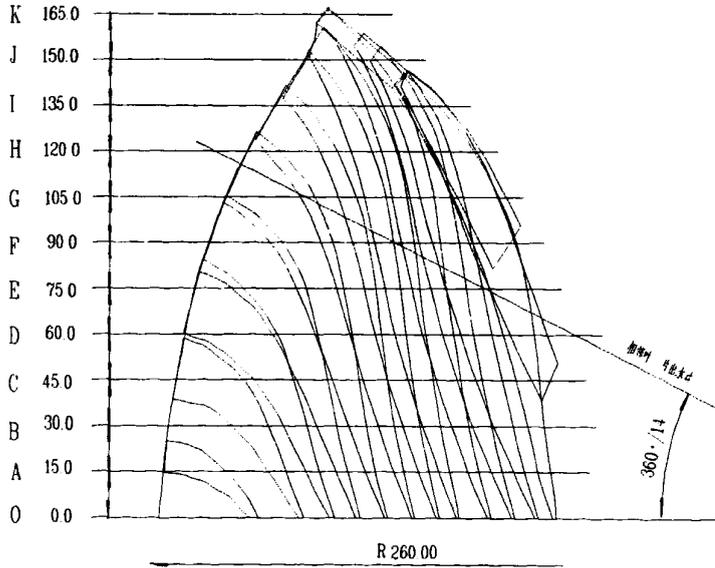
- [1] 廉玲军, 张礼达, 余波。韩涛。基于UG的混流式水轮机叶片实体建模方法研究. 中国农村水利水电, 2008, (10): 129-131.
- [2] 张礼达, 廉玲军, 任腊春. 混流式水轮机转轮叶片的延伸. 第二十一届全国水动力学研讨会暨第八届全国水动力学学术会议暨两岸船舶与海洋工程水动力学研讨会文集. 海洋出版社, 2008.05.
- [3] 张礼达, 任腊春, 陈荣盛, 毛金铎, 廉玲军, 王旭. 风力机叶片材料特性分析与评价. 现代零部件, 2008, (6): 61-63.

附录 2(部分叶片木模图)



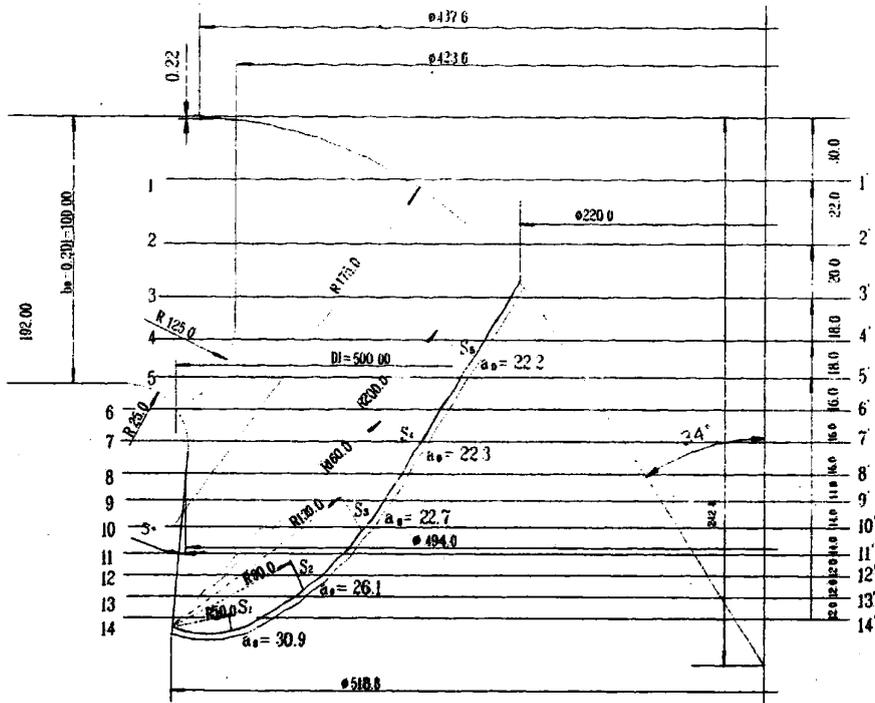
附图 1 叶片轴面截线

Fig1 axial-surface transversal of blade

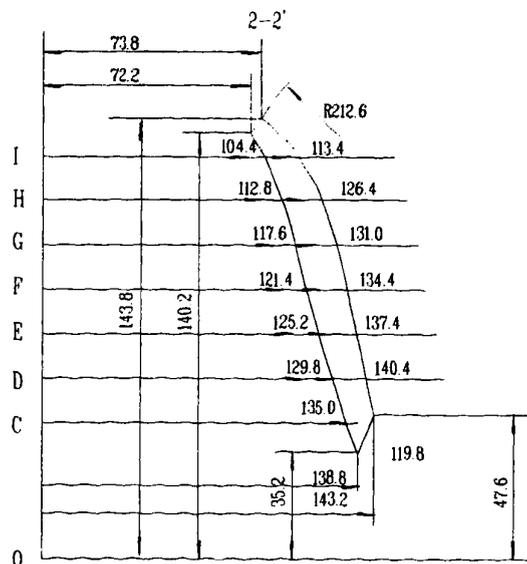


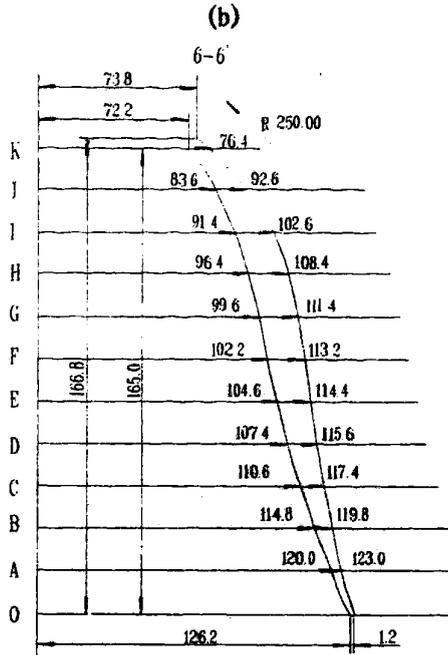
附图 2 叶片水平截线

Fig2 horizontal transversal of blade

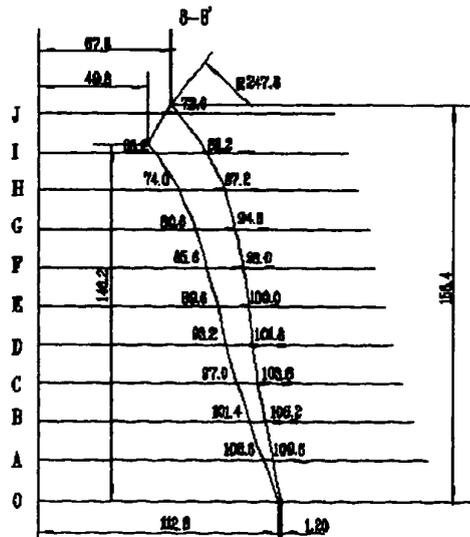


(a)





(c)



(d)

附图 3 叶片木模图 ((a) (b) (c) (d))

Fig3 wooden patterns of blade

致 谢

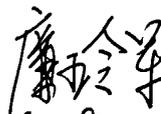
本课题的研究是在我的恩师张礼达教授的悉心指导和亲切关怀下完成的。张老师以其严谨求实的治学态度、渊博的知识、高度的敬业精神、兢兢业业、孜孜以求的工作作风和大胆创新的进取精神对我产生重要影响。从课题的选择到论文的最终完成，张老师都始终给予我细心的指导和不懈的支持。三年多来，张老师不仅在学业上给我以精心指导，同时还在思想、生活上给我以无微不至的关怀，在此谨向张老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意。

本文的工作也得到了余波老师的热情帮助和指教以及任腊春、陈荣盛、毛金铎和王旭等同学对我的无私帮助，他们在生活和工作中给了我莫大的关心和支持，使我得以顺利完成论文。在此我也衷心的感谢他们。

另外，我还要特别感谢我的爱人高粱对我论文写作的指导和生活中的无微不至的关心，是她的鼓励给了我战胜困难的勇气和信心，她对我的学习和生活的亲切关心让我感动，她为我完成这篇论文提供了巨大的帮助。

在此，我还要感谢我远在家乡的父母和亲人，他们给予我全力的支持，解除了我生活中的后顾之忧，使我能够全身心地投入到学习和工作中，这也是我能够完成论文的重要条件之一。

最后，我谨向所有关心和帮助过我的老师、同学和朋友表示最诚挚的谢意。

作者：
2009年6月8日