

## 摘要

黑洞时空中粒子的散射与吸收的研究对我们了解黑洞的信息至关重要。黑洞对量子波的吸收与散射的研究兴起于二十世纪七十年代,近年来,弦理论的研究热潮,使人们对由弦理论得到的黑洞及高维黑洞的吸收截面的研究产生了极大的兴趣。弦理论是目前能够将引力量子化,并能解释宇宙起源与运行以及现代物理中很多难题的理论。由弦理论得到的伸缩子黑洞时空有着与通常广义相对论中的黑洞时空不一样的性质,其原因在于伸缩子的存在。因此,多年来人们对伸缩子时空的各种研究极为关注。研究伸缩子时空的吸收与散射对于黑洞物理、弦理论及相关理论都是有意义的。

本文采用 Unruh 计算吸收截面的方法,对静态爱因斯坦-麦克斯韦伸缩子黑洞时空中的 Dirac 粒子和标量粒子的吸收截面进行了解析计算。利用波函数的连续性和渐近展开方法求解了视界附近、中间区域及远离视界处的波动方程。计算表明,静态 EMDA 黑洞中低能条件下标量粒子的吸收截面为  $\frac{2M(2M-2D)^2(2\pi)^2(1+v^2)\omega}{v^2(1-\exp[-\pi(2M-2D)\omega(1+v^2)/v])}$ 。当  $v \gg 2\pi Mm$  时,标量粒子的吸收截面为  $\frac{16\pi M(M-D)}{v}$ ,此时吸收截面是  $v$  的函数,并且随  $v$  的增大而减小。伸缩子参数  $D$  对吸收截面的影响显著,吸收截面随伸缩子  $D$  的绝对值的增大而减小。而无质量标量粒子的吸收截面为  $8\pi M(2M-2D)$ ,这恰好等于静态 EMDA 黑洞的视界面积。我们知道球对称 Schwarzschild 黑洞对无质量标量粒子吸收截面等于其黑洞的视界面积。我们的结果表明,对于 EMDA 黑洞这个结论仍然成立。

我们还采用计算标量粒子吸收截面类似的方法计算了 Dirac 粒子的吸收截面。结果表明,Dirac 粒子的吸收截面与标量粒子的吸收截面比值恰好为  $1/8$ ,这与 Schwarzschild 时空中的结论完全一样。

**关键词:** 吸收截面, 静态 EMDA 黑洞, 灰体因子, 霍金辐射。

## ABSTRACT

Studying wave scattering and absorbing in the black hole spacetimes is crucial to the understanding of the information of the black hole. Interest in the absorption of quantum waves by black holes was reignited in the 1970s. Recently, study of the absorption cross section in the context of higher-dimensional string theories attract much attention. Superstring theory springing up in recent years is still the only known self-consistent theory which can quantize the gravity and unify the gravity, the electromagnetic interaction, the weak interaction and the strong interaction. This theory can explain the cosmic genesis and evolution, and may address the some open questions of modern physics. The dilaton spacetimes in string theory have qualitatively different properties from those appearing in general relativity because of the appearance of dilaton, and so many author have focus their attentions on investigations of the spacetimes of dilaton black hole. One of the interesting topic is to study the scattering and absorbing of the particles in dilation spacetimes.

In this paper, we will calculate the absorption cross section of the static EMDA black hole for Dirac fermion particles and massive scalar particles by using the Unruh's method that matching the near-horizon wave radial solution and the asymptotic solution via the solution in the intermediate regime. It is shown that the absorption cross section for massive scalar particles is  $\frac{2M(2M-2D)^2(2\pi)^2(1+v^2)\omega}{v^2(1-\exp[-\pi(2M-2D)\omega(1+v^2)/v])}$ . When  $v \gg 2\pi Mm$ , the cross section becomes  $\frac{8\pi M(2M-2D)}{v}$ , which is the monotony decrease function of  $v$ . We also find that the absorption cross section of EMDA black hole depend very strong on the value of dilation  $D$ . As the increase of the absolute values of dilation  $D$ , the absorption cross section decrease. However, for the massless scalar particles at low energies the absorption cross section becomes  $8\pi M(2M-2D)$ , which equals to the horizon area of a EMDA black hole. We knew that the absorption cross section is equal to the horizon area for the Schwarzschild black hole. Our result shows that this interesting property may be extend to the EMDA black hole.

For Dirac particles, using similar method of computing the absorption cross section of scalar particles, we find that the ratio of the low-energy absorption cross section for Dirac fermion to that for minimally coupled scalar is  $1/8$ , which is the

same as the result of the Schwarzschild black hole.

**Key words:** the absorption cross section , static Einstein-Maxwell Dilation Axion black hole, grey body factor, Hawking radiation .

## 湖南师范大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式表明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：刘晨青  
2007年 6月 18日

## 湖南师范大学学位论文授权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定；研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属湖南师范大学。同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权湖南师范大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

- 1、保密口，在 \_\_\_ 年解密后适用本授权书。
- 2、不保密口。

(请在以上相应方框内打“√”)

作者签名：刘晨青 日期：2007年 6月 18日

导师签名：刘建良 日期：2007年 6月 18日

## 第一章 绪论

黑洞是目前理论物理、天体物理和天文学研究的一个热点课题，它涉及物理学基本定律与时空理论之间的内在联系。近年来，黑洞问题的研究吸引了越来越多的物理学家和天文学家的注意，研究范围从静态球对称黑洞，扩展到稳态轴对称黑洞和各种动态黑洞，以及形形色色的奇异黑洞和奇异时空。二十世纪六十年代以来，霍金 (Hawking) 证明了面积不减定理，指出经典黑洞的面积在顺时针方向永不减少；贝根斯坦 (Bekenstein) 和斯马尔 (Smarr) 指出，黑洞各质量、角动量、电荷、转动角速度、表面积、表面引力等之间存在着类似于热力学第一定律的公式；特别是 1973 年霍金发现在黑洞表面和奇异区附近存在着极为有趣的量子辐射，黑洞具有热性质。从此，黑洞理论就逐渐发展成为量子理论、相对论、天体物理、天文学、统计物理和微分几何在内的多学科的交叉学科，并成为当前物理学研究的主要热点之一。

本章我们将介绍黑洞物理一些重要研究结果，并介绍黑洞对粒子的吸收和散射的研究方法及其研究进展。

### §1.1 黑洞

爱因斯坦 (Einstein) 的相对论是二十世纪最伟大的物理学成就之一，包括狭义相对论和广义相对论 [1]- [8]。广义相对论的核心是爱因斯坦引力场方程：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\Gamma_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

此方程的左边是爱因斯坦张量和与时空有关的张量和标量，右边是物质的能量 - 动量张量，满足能量 - 动量守恒定律。爱因斯坦 (Einstein) 引力场方程是数学与物理学的一个漂亮的结合，该方程表明物质分布决定时空的几何性质，时空与物质相互影响，密不可分。

广义相对论预言了一类奇异天体 —— 黑洞的存在 [9]- [12]，黑洞的确切概念源自广义相对论。200 多年前，拉普拉斯 (Laplace) 和米歇尔 (Michell)

根据牛顿运动定律和逃逸速度的概念指出,宇宙中大质量星体发出的光有可能被自己的引力束缚而不能逃逸出来,因而对于外界的观察者而言,空间中出现了一个“黑的空洞”,这就是最初的黑洞的概念.他们具体计算出产生这类暗星产生的条件,尽管他们的论断过程是错误的,因为光子的静止质量为零,而且牛顿运动定律只适用于弱引力场的情况,但是他们得到了正确的结果.

1916年广义相对论产生以后,史瓦西(Schwarzschild)给出了爱因斯坦引力场方程的第一个解——Schwarzschild解:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.2)$$

这里  $M$  为天体的质量,半径为:

$$R_g = 2GM/C^2. \quad (1.3)$$

当星体的半径和质量满足条件

$$R \leq \frac{2GM}{C} \quad (1.4)$$

时,将成为一个 Schwarzschild 黑洞,  $R_g$  为 Schwarzschild 黑洞的半径.

1939年,奥本海默(Oppenheimer)及其合作者根据爱因斯坦的广义相对论再次导出的暗星条件与拉普拉斯等人计算出的结果完全一致.这种暗星后来被称为“黑洞”.黑洞是一个特殊的空间—时间区域,这是一个引力场足够强以致没有任何物质或者信号能够逃脱其吸引的宇宙天体.它的最外围是光所能从黑洞向外到达的最远距离,这个边界称为“事件视界”.它如同一个单向的膜,只允许物质穿过视界并落到黑洞里去,但没有任何物质能够从里面出来.从恒星的生命周期来讲,大质量恒星经历无限坍缩的归宿就是黑洞.

黑洞的种类很多,最简单的是史瓦西黑洞、旋转的黑洞如克尔(Kerr)黑洞、旋转带电的黑洞如克尔-纽曼(Kerr-Newman)黑洞、具有质量多极矩的黑洞如 Manko 黑洞等等.黑洞只需要用三个物理参量——质量  $M$ 、角动量  $J$  和电荷  $Q$  便能够被描述,这一物理特征被称为黑洞“无毛定理”,这说明在黑洞的形成过程中,大量信息被丢失了.

现有的研究表明, 黑洞不是一颗死亡的恒星, 它有着丰富的内涵. 它不仅具有一般的力学性质, 而且具有量子性质和热性质, 黑洞有温度, 有热辐射, 其表面积可以看作熵. 在理论上, 黑洞已成为把引力理论描述的宏观世界和量子力学描述的微观世界熔合在一起的大熔炉, 多年来已发展成为联系广义相对论与量力学、弦理论、粒子物理、热力学和统计物理等诸多学科的交叉学科. 但到目前为止, 黑洞物理本身还有许多问题尚未搞清楚, 比如能否把黑洞看作基本粒子, 黑洞是否稳定等等. 由于黑洞与外部世界没有因果联系, 所以要彻底搞清楚这些问题并不是一件简单的事. 彭若斯 (Penrose) 和霍金 (Hawking) 证明了奇点定理 [10], 并指出: 在广义相对论成立、因果性良好和物质不为零的条件下, 时空一定存在奇点, 他们把奇点看作时间的“端点”. 按照奇点定理, 上述时空至少存在一个时间有开始或与结束的物理过程, 即时间一定是有限的. 奇点定理是目前广义相对论最基本的困难之一. 80 年代以来, 黑洞理论未取得重大进展, 奇点困难一直遗留至今天文观测只是间接说明了有黑洞存在的迹象, 而没有最后确认黑洞存在的事实. 到了上世纪末期, 也就是近十几年来, 黑洞研究再次成为热点. 人们认识到黑洞不应看作是一般的星体, 黑洞问题也不是单纯的天文学问题. 黑洞性质涉及至物理学的基本规律和时空属性. 现有的发现还暗示人们, 热力学与时空性质之间可能存在着深刻的联系. 对黑洞理论的进一步研究与探索, 有可能导致物理学的另一场革命.

在二十世纪六、七十年代, 得益于整体微分几何的引入, 广义相对论作为一个经典的引力理论取得了一些重要的成果, 如奇点定理、面积定理和“无毛定理” [14]- [19] 年, 霍金等人在总结那个时代的黑洞物理学成就时, 提出了黑热力学的四条定律, 即

(1) 第零定律: 稳态黑洞视界的表面重力是一个常数;

(2) 第一定律 ( Bekenstein-Smarr 公式):

$$dM = \frac{\kappa}{\pi} dA + QdJ + vdQ, \quad (1.5)$$

其中  $M$ 、 $J$  和  $Q$  分别是黑洞的能量、角动量与电荷,  $V$  是黑洞两极处的电势,  $Q$  为黑洞视界的转动角速度,  $A$  是视界面积,  $K$  是视界的表面重力;

(3) 第二定律 (面积定理): 在经典情况下, 即满足弱能量条件时, 视界面积不会减少, 即

$$\sigma_A \geq 0; \quad (1.6)$$

(4) 第三定律: 不能通过有限的操作把视界的表面引力减小到零。

值得一提的是, 霍金等人最初提出这四条定律时, 第三定律并没有被严格证明, 但是, 在当时已经有很多迹象表明它是对的。Israel 在 1986 年发表的一篇文章里证明了第三定律。容易看出, 黑洞热力学的四条定律和普通热力学 [16] [17] 有惊人的相似, 表面引力很像是温度, 而视界面积则与熵的行为类似。然而, 霍金等人认为, 这只是形式的类比, 实质上二者没有任何等同的意义。因此, 当时人们对黑洞的看法局限于经典的认识, 而对它的量子行为并无太多的见解。但是, Bekenstein [15] 与 Hawking 的观点不同, 他从信息论出发, 认为黑洞应该有熵, 并且计算出了黑洞熵与黑洞的视界面积成正比。他的依据是: 落入黑洞的物质, 由于“无毛定理”而丧失了几乎全部的信息, 因此, 应该是一个熵增加的过程; 更尖锐的矛盾是, 物质在落入黑洞之前已经有一部分熵, 如果坚持认为黑洞没有熵, 物质拥有的那部分熵就从宇宙中消失了, 这是违反热力学第二定律的。Hawking 对此表示反对, 他认为如果黑洞有熵, 那么也应该有温度, 然而黑洞是黑的, 只吞噬物质, 不向外辐射。那么由于黑洞的存在, 违反热力学第二定律也许不可避免。然而, 在 1974 年, Hawking 就利用当时刚刚发展起来的弯曲时空量子场论去考察黑洞附近量子场的行为, 发现黑洞就象黑体一样精确地按照 Planck 谱向外辐射它的能量, 而且, 其辐射的特征温度确实是与黑洞视界的表面重力成正比, 即  $T = K/2\pi$ 。在此基础之上, 关于黑洞的四条定律成了真正意义上的热力学定律, 把黑洞视界面积  $A$  看作黑洞熵是很自然的, 至少在热力学的意义上是确定无疑的。

黑洞有热辐射暗示了量子理论、统计物理、热力学和引力理论有着密切的联系。按照统计物理中的 Boltzmann 关系, 有

$$S = k_S \ln \Omega, \quad (1.7)$$

这里熵 ( $S$ ) 是与物质体系的微观状态相联系的。与黑洞相联系的微观状态又是什么呢? 这就是黑洞熵的统计起源问题, 此问题的最终解决有赖

于一个成熟的量子引力理论。换句话说，对黑洞熵的研究也会促进量子引力理论的进一步完善。

## §1.2 粒子的散射与吸收

粒子的散射与吸收无论是在经典力学还是在量子力学中都是一个非常重要的微观物理过程，黑洞对粒子的散射与吸收是我们研究和了解黑洞的一个重要测量方法。本节主要介绍散射和吸收截面的概念及量子力学中的一些计算截面的方法。

散射截面：设入射粒子流的强度（即单位时间通过单位面积的粒子数的）为  $N$ ，单位时间内散射到  $(\theta, \varphi)$  方位上（远离散射中心）立体角  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  内的粒子数为  $dN$ ，则  $dN$  应与粒子流的强度  $N$  和立体角  $d\Omega$  成正比，比例系数为  $\theta$  和  $\varphi$  函数，即

$$dN = N\sigma(\theta, \varphi)d\Omega. \quad (1.8)$$

考察  $\sigma(\theta, \varphi)$  的量纲

$$[\sigma(\theta, \varphi)] = \left[ \frac{dN}{Nd\Omega} \right] = \frac{T^{-1}}{L^{-2}T^{-1}} = L^2, \quad (1.9)$$

即  $\sigma(\theta, \varphi)$  具有面积的量纲，因此比例系数  $\sigma(\theta, \varphi)$  被称为微分散射截面 (differential cross section)。将  $\sigma(\theta, \varphi)$  对整个立体角积分，可得到

$$\sigma = \int \sigma(\theta, \varphi)d\Omega, \quad (1.10)$$

$\sigma$  称为总散射截面 (total cross section)。量子力学中散射截面的计算公式：经典力学中，粒子散射的物理图像是入射粒子受到散射体的作用，轨道发生了偏转，而量子力学中粒子物理图像则是入射波遇到散射体这个“障碍物”而发生衍射。下面我们从量子力学 [13] 的散射图像出发求散射截面。入射粒子具有确定的动量，因此可用平面波来描述。设粒子沿  $z$  轴方向入射，则入射波函数为：

$$\Psi_i = A \exp\left(\frac{ip_z z}{\hbar}\right) = A \exp\left(\frac{ip_z r \cos\theta}{\hbar}\right). \quad (1.11)$$

散射波是由散射中心向外扩展的波，在离散射中心足够远处，散射波  $\Psi$ ，应有球面波的形式，即

$$\Psi \rightarrow \Psi_i + \Psi_s = A \left[ \exp\left(\frac{ip_i r \cos \theta}{\hbar}\right) + \frac{f(\theta, \varphi)}{r} \exp\left(\frac{ip_s r \cos \theta}{\hbar}\right) \right]. \quad (1.12)$$

这就是波函数的渐近行为，这里波函数  $(\theta, \varphi)$  是散射振幅 (scattering amplitude)。由入射波函数可求得入射粒子的几率流密度为：

$$J_{iz} = \frac{i\hbar}{2\mu} \left[ \Psi_i \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial r} - \Psi_i^* \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} \right] = |A|^2 \frac{P_i}{\mu}. \quad (1.13)$$

同理，散射波的几率密度为：

$$J_{sr} = \frac{i\hbar}{2\mu} \left[ \Psi_s \frac{\partial \Psi_s^*}{\partial r} - \Psi_s^* \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \right] = |A|^2 \frac{|f(\theta, \varphi)|^2 P_i}{r^2 \mu}. \quad (1.14)$$

因此散射到  $d\Omega$  中的粒子数为：

$$dN = j_{sr} r^2 d\Omega = v_s |A|^2 |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega. \quad (1.15)$$

这样微分散射截面为：

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{dN}{N\Omega} = \frac{v_s}{v_i} |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (1.16)$$

对于弹性散射，有  $v_s = v_i$ ，所以有

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2. \quad (1.17)$$

本文采用 Unruh 计算吸收截面的方法，对静态爱因斯坦 - 麦克斯韦伸缩子黑洞时空中的 Dirac 粒子和标量粒子的吸收截面进行了解析计算。本文的结构如下：第二章介绍黑洞吸收截面的研究成果及现状；第三章和第四章是本文的核心，我们计算了静态 EMDA 黑洞背景中有质量的标量粒子和 Dirac 粒子的吸收截面，并作一定的讨论；第四章是全文的总结以及本人对这一研究领域的一些展望。

## 第二章 粒子的吸收截面的研究成果及现状

黑洞对粒子的吸收与散射的研究兴起于二十世纪七十年代, 它对我们了解黑洞的信息丢失问题以及量子引力的研究有很重要的作用. 继霍金 (Hawking) 发现黑洞并不是全“黑”的, 它也能吸收、散射粒子, 且存在热辐射后, Unruh [26]- [31] 和 Sanchez 等学者在这方面作了许多工作, 包括黑洞对粒子的吸收和散射截面的计算及相应的性质、霍金辐射、黑洞熵、散射和吸收光谱等研究工作, 这个领域的讨论一直是黑洞物理学研究的热点. 最近, 高维弦理论如  $D$  膜 [35] [40] 也对吸收截面 (灰体吸收系数  $\Gamma(l)$ ) 很感兴趣. D. K. Park 和 E. Jung [32, 34] [41, 43] 等学者对高维时空中局域化膜 (brane-localize) 标量, Bulk 标量的吸收截面作了研究. 本文考虑的是四维和  $4+n$  维球对称黑洞对标量和 Dirac 粒子的吸收截面的一些普遍的性质. 本章中我们对不同时空中的吸收截面研究成果作一些介绍, 首先介绍球对称黑洞四维时空中的吸收截面, 而后再介绍  $4+n$  维的球对称时空的吸收截面.

### §2.1 Schwarzschild 时空

黑洞吸收截面的研究最初是 1976 年 Unruh [26] 作的用解析的方法直接求解视界处、中间区域和远离视界区域波动方程, 以中间区域作为连接处来求解吸收系数  $\Gamma(l)$ , 此方法也成为计算吸收截面的经典的方法. Unruh 计算低能条件下四维 Schwarzschild 时空对标量粒子和 Dirac 粒子的吸收截面, Sanchez 等学者用代数的方法 (幂级数近似展开) 研究了不带电荷球对称 Schwarzschild 时空中无质量标量粒子吸收和散射性质得出总吸收截面是入射粒子频率的函数, 且存在偏振. 下面简略介绍 Unruh 的工作.

Schwarzschild 解是爱因斯坦场方程最简单, 也是最重要的解, 描述的是静态无电荷黑洞. 其线元为:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

这里  $M$  是黑洞的质量,  $r$  是其半径. 本文取几何单位制  $c = G = 1$ .

计算吸收截面  $\sigma_l(\omega)$  的一个很重要的工作就是计算吸收系数  $\Gamma_l(\omega)$ , 这两者关系为:

$$\sigma_l(\omega) = \frac{\pi}{\omega^2 v^2} (2\ell + 1) \Gamma_l(\omega) \quad (2.2)$$

其中  $v = \sqrt{1 - m^2/\omega^2}$ ,  $m$  是粒子的质量. 吸收系数  $\Gamma_l(\omega)$  是我们了解黑洞对粒子的散射与吸收一个重要的物理量, 它又被称为灰体因子. 它的物理起源是由于黑洞而产生有的有效势, 即

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right]. \quad (2.3)$$

从量子的角度讲有效势的存在阻碍了一部粒子的入射, 同时它也存在辐射. 势垒的高度影响了粒子的吸收, 势垒越高吸收越小, 这也是黑洞不同于普体黑体的原因, 因为在经典的情况下粒子不可能被吸收. 灰体因子  $\Gamma(\omega)$  也是求霍金热辐射的一个重要的因子, 有如下关系式:

$$\frac{dH}{d\omega} = \sum_{\ell} \frac{\Gamma_{\ell}(\omega)}{e^{\omega/T_{BH}} - 1} \frac{(2\ell + 1)\omega}{\pi}, \quad (2.4)$$

其中  $T_{BH}$  是黑洞温度. 由上式知灰体因子和普朗克因子对黑洞的能量散射起重要的作用.

经过一系列的计算, Unruh 得出低能条件下 (粒子的波长  $\lambda$  大于 Schwarzschild 黑洞半径), Schwarzschild 黑洞对标量粒子的吸收截面为:

$$\sigma_{unruh} = \frac{(4\pi M)^2 (1 + v^2) 2\omega M}{v^2 [1 - \exp\{-2\pi\omega M(1 + v^2)/v\}]}, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{\ell} = \frac{\pi(\ell!)^4 2^{2\ell+2} (1 + v^2) k^{2\ell+3} v^{2\ell}}{(2\ell!)^4 (2\ell + 1)^2 [1 - \exp\{-\pi k(1 + v^2)/v\}]} \prod_{s=1}^{\ell} \left[ s^2 + \left( \frac{k(1 + v^2)}{2v} \right)^2 \right],$$

其中

$$v = \sqrt{1 - m^2/\omega^2}. \quad (2.6)$$

$m$  和  $\omega$  分别是粒子的粒子的质量和能量. 由上式可知当粒子质量为 0, 且  $\omega$  远小于  $2M$ ,  $\sigma_{unruh} \sim 16\pi M^2$  即低能条件下黑洞对无质量标粒子的吸收

截面恰于 Schwarzschild 黑洞视界面面积。当粒子质量不为 0 时,  $v \gg 2\pi m M$  时, 此时

$$1 - \exp\{-2\pi\omega M(1+v^2)/v\} = 2\pi\omega M(1+v^2)/v. \quad (2.7)$$

吸收成为  $v$  的函数, 它随  $v$  的增大而减小。即

$$\sigma_{s,unruh} = \frac{16\pi M^2}{v}. \quad (2.8)$$

而 Schwarzschild 黑洞对 Dirac 粒子的吸收截面  $\sigma_{s,unruh}$  则只有标量米子吸收截面的八分之一, 吸收截面的主要贡献来自  $S$ -波  $P$ -波 ( $k = +1, k = -1$ )。综合标量粒子和 Dirac 粒子的情况, 低能条件下其无质量粒子在四维球对称 Schwarzschild 时空中的吸收截面正比于视界面面积, 其主要贡献来几乎全来自于  $S$  波, 这是无质量粒子在四维球对称黑洞的吸取截面的一个普遍性质。是否在高维的时空中也有这样的普遍性的问题, 将在下面的第三部分中稍加讨论。D. K. Park 和 E. Jung 用代数的方法对这个普遍性质的进行了研究, 并用图作了很好的说明, 如图 (2.1)。

## §2.2 Reissner-Nordström 时空

Reissner-Nordström 黑洞中的吸收截面的计算, 在王永久教授的《引力论与宇宙论》[22] 中作了详细的研究。Reissner-Nordström 黑洞引力场度规为:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.9)$$

式中  $M$  和  $Q$  分别为为 Reissner-Nordström 的质量和电荷。

王永久教授研究带电标量粒子和电子的吸收和散射截面, 经过一系列的推导得低能条件下带电标量粒子的吸收截面为:

$$\begin{aligned} \sigma_{RN} &= \frac{(4\pi M)^2(1 + Z_\alpha/2\omega M)2\omega M(1 + v^2 + Z_\alpha/\omega M)}{v^2[1 - \exp\{-2\pi\omega M(1 + v^2 + Z_\alpha/\omega M)/v\}]}, \\ \Gamma_\ell &= \frac{\pi(\ell!)^4 2^{2\ell+2}(1 + v^2 + Z_\alpha/\omega M)k^{2\ell+3}v^{2\ell}}{(2\ell!)^4(2\ell + 1)^2[1 - \exp\{-\pi k(1 + v^2 + Z_\alpha/\omega M)/v\}]} \\ &\quad \times \prod_{s=1}^{\ell} \left[ s^2 + \left( \frac{k(1 + v^2 + Z_\alpha/\omega M)}{2v} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中  $Z_\alpha = eQ$ ,  $e$  为带电标量粒子的电量。

比较方程 (2.5) 和 (2.10), 可知  $Z_\alpha/\omega M$  项是由于受电荷的影响产生的, 吸收截面随静电引力的增大而增大。Reissner-Nordström 黑洞的电荷强烈影响粒子的吸收, 而对无质量不带电的标量粒子的吸收截面与 Schwarzschild 黑洞的情况一样, 同样等于其视界面积, 且由  $S$  波来确定。Reissner-Nordström 黑洞对电子的吸收截面的大小和标量粒子一样, 主要由  $S$ -波吸收来确定, 不同的是对电子的吸收存在偏振, 由于吸收的结果, 散射束是偏振的, 偏振度是角的振荡函数, 这样黑洞的视界面可看作为“起偏器”。对无质量 Dirac 粒子的吸收截面的情况与四维 Schwarzschild 黑洞的情况, 依旧为无质量不带电荷标量粒子的  $1/8$ 。

### §2.3 4+n 维 Schwarzschild 时空

2004 年, D. K. Park 和 E. Jung [41] 对 4+n 维 Schwarzschild 时空中局域化膜 (Brane-localized) 中标量粒子和 Dirac 粒子的吸收截面作了研究。4+n 维 Schwarzschild 时空度规为:

$$ds^2 = -h(r)dt^2 + h(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{n+2}^2, \quad (2.11)$$

其中

$$h(r) = 1 - \left( \frac{r_H}{r} \right)^{n+1}. \quad (2.12)$$

角向部分为:

$$d\Omega_{n+2}^2 = d\theta_{n+1}^2 + \sin^2 \theta_{n+1} \left( d\theta_n^2 + \sin^2 \theta_n \left( \cdots + \sin^2 \theta_2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi^2) \cdots \right) \right). \quad (2.13)$$

黑洞视界半径为:

$$r_H^{n+1} = \frac{8\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{(n+2)\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{M}{M_*^{n+2}}, \quad (2.14)$$

此处  $M_* = G^{-1/(n+2)}$  是  $4+n$  维普朗克质量,  $G$  是牛顿常量, 经过一系列的推导, D. K. Park 和 E. Jung 得出高维时空中标量粒子吸收截面为:

$$\sigma_\ell \equiv \frac{\pi(2\ell+1)}{\omega^2 v^2} \Gamma_\ell(\omega) = \frac{16\pi^2(2\ell+1)}{(n+1)^2 \omega^2 v^3} \left(\frac{\omega v r_H}{2}\right)^{2\ell+2} \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{\ell}{n+1}\right) \Gamma^2\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right)}{\Gamma^2\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{2\ell+1}{n+1}\right)}. \quad (2.15)$$

无质量粒子情况 ( $m=0, v=1$ ) 吸收截面为:

$$\sigma_\ell^{m=0} = \frac{16\pi^2(2\ell+1)}{(n+1)^2 \omega^2} \left(\frac{\omega r_H}{2}\right)^{2\ell+2} \frac{\Gamma^2\left(1 + \frac{\ell}{n+1}\right) \Gamma^2\left(\frac{\ell+1}{n+1}\right)}{\Gamma^2\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{2\ell+1}{n+1}\right)}, \quad (2.16)$$

化简得

$$\sigma_{\ell=0} = \frac{4\pi r_H^2}{v}. \quad (2.17)$$

考虑  $n=0$  的情况, 即退化到四维时空时, 无质量标量粒子有

$$\sigma_\ell^{n=0} = \frac{\pi(\ell!)^6 2^{2\ell+2} \omega^{2\ell} v^{2\ell-1}}{(2\ell!)^4 (2\ell+1)} r_H^{2\ell+2}. \quad (2.18)$$

发现得到结果是: 低能条件下无质标量粒子的吸收截面仍等于其视界面积。它在  $4+n$  维 Schwarzschild 时空同样保持这样的性质, 他们把这个普遍性质由四维球对称时空推广到了  $4+n$  维球对称时空中。Dirac 粒子的吸收截面为:

$$\sigma_{j=\frac{1}{2}}(\epsilon) = \frac{\pi}{v} 2^{\frac{3n-1}{n+1}} r_H^2, \quad (2.19)$$

其主要贡献来自于  $S$  波。由方程 (2.19) 和 (2.17) 可以计算出低能条件下  $4+n$  维 Schwarzschild 时空中局域化膜 (Brane-localized) 标量粒子与 Dirac 粒子的吸收截面的比值:

$$\frac{\sigma_{J=\frac{1}{2}}}{\sigma_{\ell=0}} = 2^{\frac{n-3}{n+1}}. \quad (2.20)$$

当  $n=0$  时, 有  $\sigma_{J=1/2}/\sigma_{\ell=0} = 1/8$ , 此即四维 Schwarzschild 时空中标量粒子与 Dirac 粒子的吸收截面的比值。但在高维时空中, 随着额外维数  $n$  的增加, 比值不断增大, 即对 Dirac 粒子的吸收截面将增大。当额外维数  $n$  无穷大时, Dirac 粒子的吸收截面是局域化膜 (Brane-localized) 中标量粒子的吸收截面的 2 倍, 也就是说额外维数  $n$  的存在将压制标量粒子的吸收。这是四维时空所没有, 这也为我们研究高维时空提供了依据。D. K. Park 和 E. Jung 还计算了对 Bulk 中标量粒子的吸收截面的情况, 得到与前面四维时空一样的结果, 即在低能条件下高维时空的无质量标量粒子吸收截面仍然等于视界超曲面积。

## §2.4 $4+n$ 维 Reissner-Nordström 时空

2005 年, D. K. Park 和 E. Jung [42] [43] 对  $4+n$  维 Reissner-Nordström 时空中弦理论中的局域化膜 (brane-localized) 和 bulk 场中的标量粒子和 Dirac 粒子的吸收截面作了研究。  $4+n$  维 Reissner-Nordström 时空的度规为:

$$ds^2 = - \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{r}_+}{\tilde{r}} \right)^{n+1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{r}_-}{\tilde{r}} \right)^{n+1} \right] dt^2 + \frac{d\tilde{r}^2}{\left[ 1 - \left( \frac{\tilde{r}_+}{\tilde{r}} \right)^{n+1} \right] \left[ 1 - \left( \frac{\tilde{r}_-}{\tilde{r}} \right)^{n+1} \right]} + \tilde{r}^2 d\Omega_{n+2}^2, \quad (2.21)$$

其中

$$d\Omega_{n+2}^2 = d\theta_{n+1}^2 + \sin^2 \theta_{n+1} \left( d\theta_n^2 + \sin^2 \theta_n \left( \dots + \sin^2 \theta_2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\varphi^2) \dots \right) \right), \quad (2.22)$$

黑洞的质量  $M$ ，电荷  $Q$  为：

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{n+2}{16\pi} \Omega_{n+2} (r_+^{n+1} + r_-^{n+1}) \\
 Q &= \pm (r_+ r_-)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{8\pi}}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

4+n 维 Reissner-Nordström 时空中弦理论中的局域化膜 (brane-localized)，低能条件下无质量标量粒子的吸收截面为  $4\pi\tilde{r}_+^2$ ，四维的情况一样仍为视界超曲面面积。而 Dirac 粒子与标量粒子的吸收截面的比值却并不与 4+n 维 Schwarzschild 时空情况相同，其比值为：

$$\frac{\sigma_{\ell=0}^{Br}}{\sigma_{\ell=0}^{Br}} = 2^{\frac{n-3}{n+1}} \left[ 1 - \left( \frac{r_-}{r_+} \right)^{(n+1)} \right]^{\frac{2}{n+1}}. \tag{2.24}$$

当  $\tilde{r}_- = \tilde{r}_+$  时内外视界重合，此时两吸收截面的比值为 0， $\tilde{r}_-$  与  $\tilde{r}_+$  的比值影响了他们的比值，当  $\tilde{r}_-$  为 0，此时的比值与 4+n 维 Schwarzschild 时空情况相同。在此前提下，当  $n$  无穷大时，比值  $\frac{\sigma_{\ell=0}^{Br}}{\sigma_{\ell=0}^{Br}} = 2$ ；当  $n=0$  时，比值  $\frac{\sigma_{\ell=0}^{Br}}{\sigma_{\ell=0}^{Br}} = 1/8$ 。

在 bulk 场中 Dirac 粒子与标量粒子的吸收截面的比值为：

$$\frac{\sigma_{\ell=0}^{Bl}}{\sigma_{\ell=0}^{Bl}} = 2^{-\frac{n+3}{n+1}} \left[ 1 - \left( \frac{r_-}{r_+} \right)^{(n+1)} \right]^{\frac{n+2}{n+1}}. \tag{2.25}$$

当  $\tilde{r}_-$  为 0 时，当  $n$  无穷大时， $\frac{\sigma_{\ell=0}^{Bl}}{\sigma_{\ell=0}^{Bl}} = 0.5$ ，这是与局域化膜 (brane-localized) 中的比值所不同的。当  $n=0$  时，比值为  $\frac{\sigma_{\ell=0}^{Bl}}{\sigma_{\ell=0}^{Bl}} = 1/8$ ，这是高维球对称时空所共有普遍性质。时空额外的维数也影响粒子的吸收，其影响情况在图 (2.7) 可以清楚的反应。

本章介绍了 4 维和 4+n 维球对称黑洞 (包括 Schwarzschild 时空和 Reissner-Nordström 时空) 对标量粒子和 Dirac 粒子的吸收截面作的研究成果及现状，小结如下：

(1) 四维时空中粒子的吸收截面在低能部分，在一定的  $\nu$  范围内，吸收截面存在一个峰值，中间部分处于偏振状态。高能部分吸收截面趋向于为  $27\pi/4$  高维时空中，因为维数  $n$  的影响并不趋向  $27\pi/4$ 。

(2) 低能条件下, 无质量标量粒子的吸收截面等于其黑洞视界面积, 这是四维和高维球对称时空共有的结论, 其原因在于视界和无穷处的场方程的连接条件是无关系的。

(3) 四维球对称时空中 Dirac 粒子与标量粒子吸收截面之比为  $\frac{1}{8}$ ,  $4+n$  维时空中局域化膜的 Dirac 粒子与标量粒子吸收截面之比为  $2^{\frac{n-3}{n+1}}$ 。当  $n$  为 0 时, 比值与前面一样, 随着  $n$  的增大比值最终为 2, 可见粒子的维数压制了标量粒子的吸收。

(4) 粒子质量和时空的维数对吸收截面的影响显著, 这在图 (2.6) 和图 (2.7) 中得到反映。吸收截面随粒子的质量的增大而增大, 但是时空的维数  $n$  却压制了吸收截面的增长。

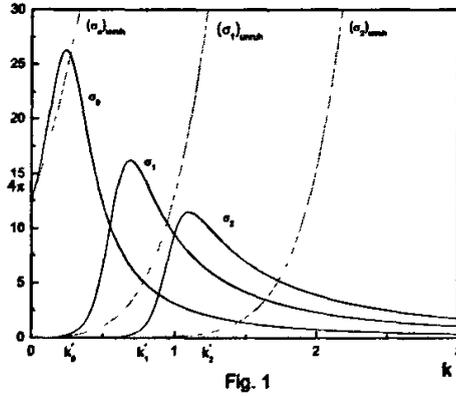


Fig. 1

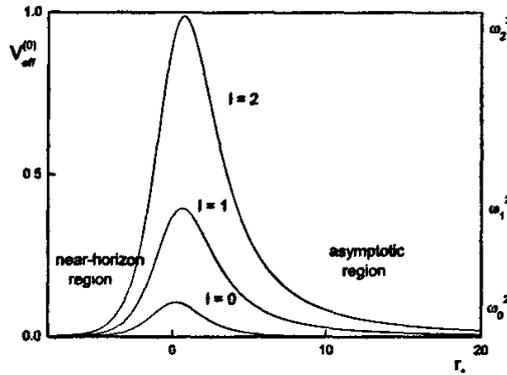


Fig. 2

图 2.1: Schwarzschild 黑洞部分和总吸收截面和有效势图。左图  
 为部分波吸收截面和总吸收截面随角量子数  $l$  和频率  $k$  变化  
 情况图右图为有效势随角量子数  $l$  的变化情况。由左图知  
 每一个部分波吸收截面都有一个峰值，且相应峰值随角动量  
 $l$  的增大而减小，其原因是由于右图中有效势随  $l$  的增大，其  
 相应的势垒越高，势垒的高度阻碍粒子的吸收。其中的红线  
 恰好反映了无质量标量粒子的吸收截面的情况，其面积恰好  
 为  $4\pi$  此即视界面积（此处取视界半径  $r = 2M = 1$ ），保持此  
 情况下粒子质量须小于  $0.02$ 。

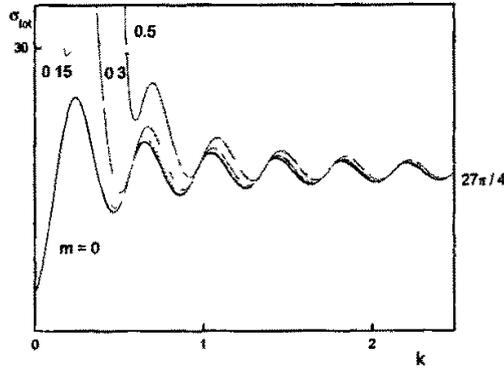


Fig 3

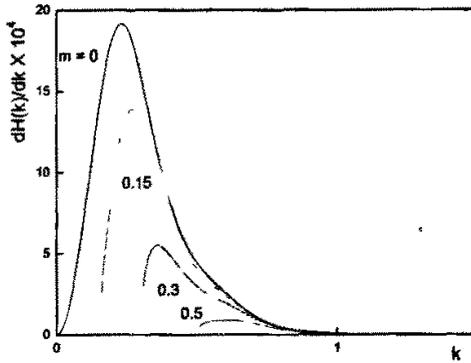


Fig. 4

图 2.2: Schwarzschild 黑洞总吸收截面和总散射率图。此图  
为有质量的总吸收截面在不同质量下随能量的变化图，由图知  
低能部分总吸收截面随粒子质量增大而增大，中间部分处于  
振荡状态，而高能部分，总吸收截面最终于趋向于  $\frac{27}{4}\pi$  不  
管粒子的质量如何。下图为散射率在不同质量下随能量的  
变化图，由图知低能部分散射率峰值随粒子质量  $m$  的增大  
而减小，后面部分却不存在振荡，急剧的衰减。粒子的质量  
压制了散射的发生，却使吸收截面增加，这在低能部分最为  
突出。

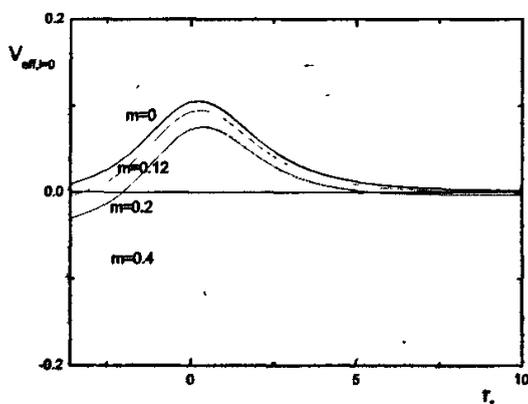


Fig. 5a

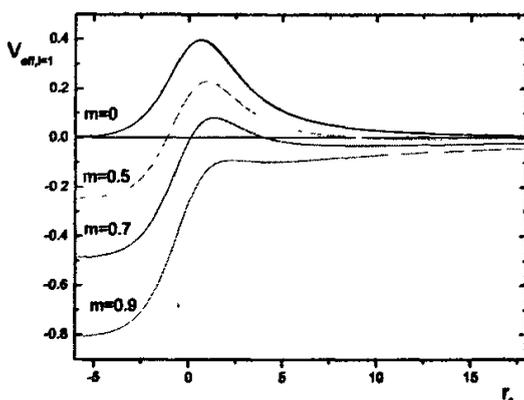


Fig. 5b

图 2.3: Schwarzschild 黑洞有效势。此图为 Schwarzschild 黑洞有效势在角量子数  $l$  为 0 和 1 在不同粒子质量下的变化图, 由图知有效势随粒子质量的增大而减小, 势垒变低, 当粒子质量大于临界质量值其势垒高度变为负, 不再对粒子有阻碍作用, 如角量子数为 0 时,  $m$  大于 0.385 时, 势垒为负, 当角量子数为 1 时,  $m$  大于 0.795 时, 势垒为 0, 且临界质量随角量子数的增大而增大。

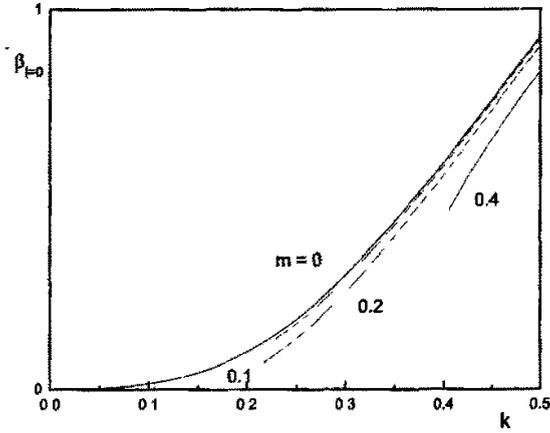


Fig. 6a

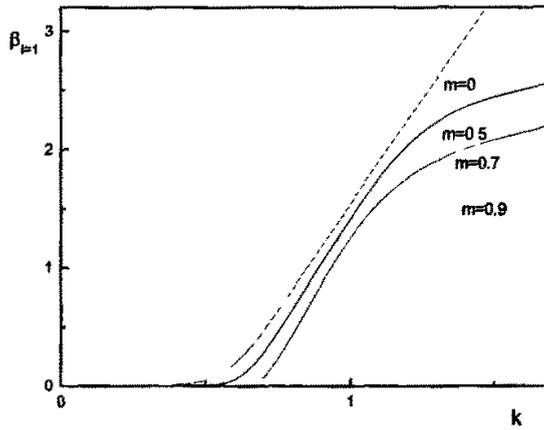


Fig. 6b

图 2.4: Schwarzschild 黑洞吸收截面相因子的虚部。此二图为 Schwarzschild 黑洞吸收截面相因子的虚部在角动量  $l$  为 0 和 1 在不同粒子质量下的变化图, 由图知无质量标粒子的相因子是单调递增, 但相因子却质量的增加而减小。

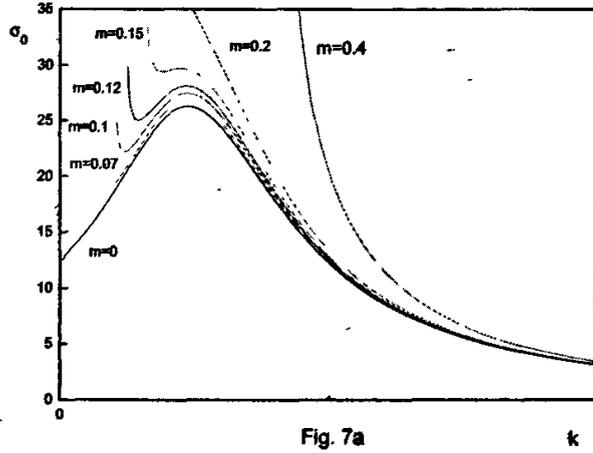


Fig. 7a

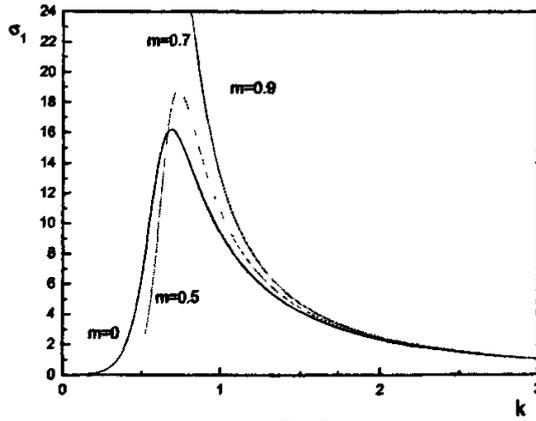


Fig. 7b

图 2.5: Schwarzschild 黑洞部分波吸收截面。此图为 Schwarzschild 黑洞部分吸收截面在角量子数  $l$  为 0 和 1 在不同粒子质量下的变化图, 由图知当粒子质量大于相应临界质量值, 部分波吸收截面  $k$  单调递减, 角量子数不影响这单调性, 图 2.3 的势垒的作用在这图中得到了反映。

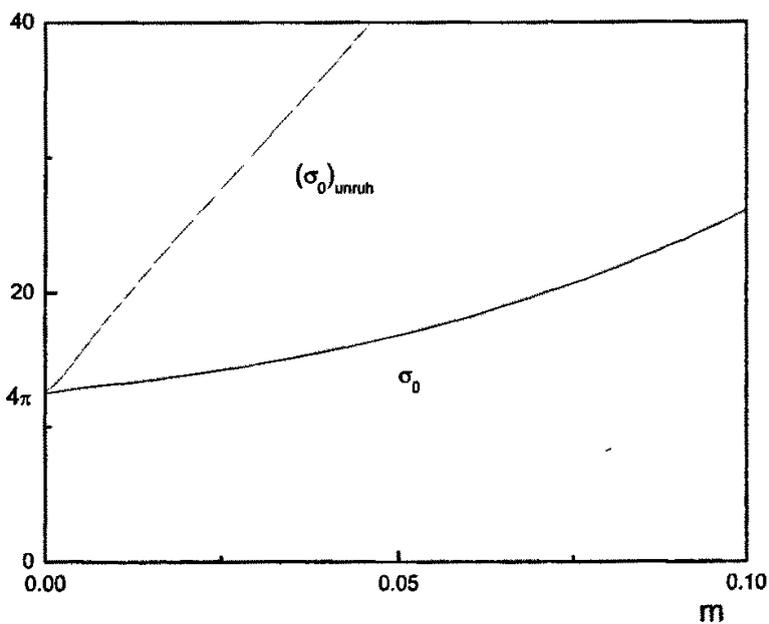


Fig. 8

图 2.6: Schwarzschild 黑洞总吸收截面 (总吸收截面随粒子的质量的增加而增加)。

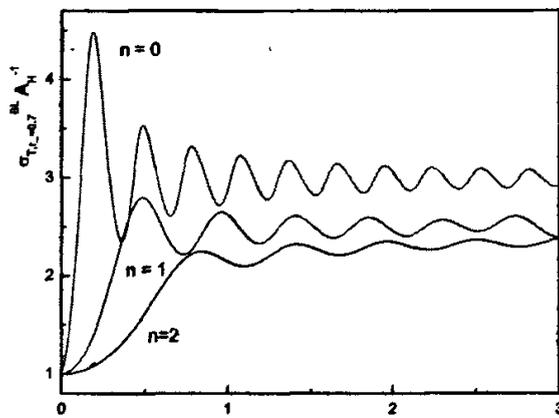


Fig. 7(c)

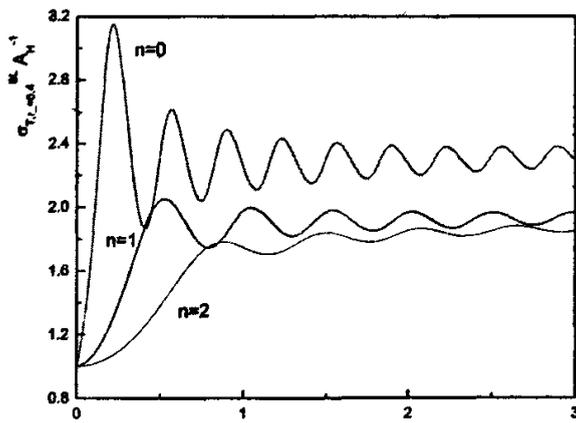


Fig. 7(b)

图 2.7:  $4+n$  维 Reissner-Nordström 时空总吸收截面 (图为总吸收截面受额外的维数  $n$  的影响情况, 无论是在低能还是高能部分, 总吸收截面变化, 在四维时空中, 高能部分总吸收截面趋向同一值  $27/4\pi$  的, 而在此图中, 由于维数的影响他们并不趋向同一值维数的增加, 而压制总吸收截面的增大.)

### 第三章 静态爱因斯坦 - 麦克斯韦伸缩子黑洞对标量粒子的吸收截面

众所周知, 弦理论是目前唯一能够将引力量子化, 并将引力与电磁、弱和强相互作用统一起来的自洽理论, 这一理论具有解释宇宙起源与运行以及现代物理中很多难题的潜力. 从弦的低能有效场理论得到的四维伸缩子时空解有着与一般爱因斯坦引力场解很不一样的性质 [47, 48], 其原因在于伸缩子参数的存在, 因此, 多年来人们对伸缩子时空的各种研究极为关注. 那么伸缩子参数  $D$  是否会影响吸收截面? EMDA 时空是否具有 Schwarzschild 时空和 Reissner-Nordström 时空球对称时空吸收截面同样的性质? 本章将详细讨论这些问题, 但由于问题的复杂性, 本节将只研究静态 EMDA 时空的问题, 并计算其吸收截面.

#### §3.1 静态 EMDA 时空中的标量粒子的径向方程

García、Galtsov 和 Kechkin 从弦理论的四维低能作用量

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} e^{4\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \kappa \partial_\nu \kappa - e^{-2\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \kappa F_{\mu\nu} \check{F}^{\mu\nu}) \quad (3.1)$$

出发, 其中  $\check{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ , 获得爱因斯坦-麦克斯韦伸缩子理论的一个稳态轴对称解 [46, 49]:

$$ds^2 = -\frac{\Sigma - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta}{\Delta} (\Xi - \Sigma) dt d\varphi + \frac{\Delta}{\Sigma} dr^2 + \Delta d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Delta} (\Xi^2 - \Sigma a^2 \sin^2 \theta) d\varphi^2, \quad (3.2)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 - 2Mr + a^2, \\ \Delta &= r^2 - 2Dr + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Xi &= r^2 - 2Dr + a^2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

这里  $D$ ， $a$  和  $M$  分别表示伸缩子参数、单位质量角动量和黑洞质量； $M_{ADM} = M - D$  为 ADM 质量； $e^{2\Phi} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\Delta}$  为伸缩子场。

由于问题的复杂性我们研究静态 EMDA 黑洞，即  $a = 0$  时的情况：

$$ds^2 = -\frac{\Sigma}{\Delta} dt^2 + \frac{\Delta}{\Sigma} dr^2 + \Delta(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.4)$$

此时  $\Sigma = r(r - 2M)$ ， $\Delta = r(r - 2D)$ ，全文采自然单位  $G = c = 1$ 。

有质量标量场的 Klein-Gordon 方程为：

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial \chi^\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial \chi^\nu}) - \mu^2 \phi = 0, \quad (3.5)$$

此处  $\mu$  为粒子的质量，把度规 (3.5) 代入上式，分离变量后得到径向波方程

$$\left\{ \frac{\rho^2}{(r - 2D)^2} \frac{d}{dr} (r^2 \rho^2 \frac{d}{dr}) + \left[ \omega^2 - \frac{r \rho^2}{r - 2D} \left( \mu^2 + \frac{l(l+1)}{r(r-2D)} \right) \right] \right\} f(r) = 0, \quad (3.6)$$

令

$$\phi = f(r) \gamma(\theta, \varphi) e^{-i\omega t}, \quad (3.7)$$

其中  $\rho$  和  $l$  为角量子数， $\rho = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}$ 。

我们主要求解方程 (3.6)，当  $\omega$  远小于  $2M$  (粒子波长大于 EMDA 黑洞半径) 时的解。采用 Unruh 方法计算吸收截面的方法，利用波函数的连续性求和渐近展开技巧化简方程 (3.6) 求解解视界处、中间区域、远离视界处的波动方程。

三个区域的场方程的定义和展开如下：Region I: 视界附近区域，其

条件为  $(r - 2M) < \omega^2 / l(l+1) \ll 2M$ ，引入乌龟坐标  $r^*$

$$r^* = r + 2M \ln(r - 2M), \quad (3.8)$$

方程 (3.6) 变为

$$\left[ \frac{(2M)^2}{(2M - 2D)^2} \frac{d^2}{dr^{*2}} + \omega^2 \right] f(r) = 0. \quad (3.9)$$

视界附近  $\rho$  为 0，此时方程 (3.9) 的解为：

$$f_1 = A_1 e^{i(1-2D/2M)\omega r^* + \delta}, \quad (3.10)$$

这里  $\delta$  是相因子。

Region II: 在中间区域, 所有比  $\omega^2$ 、 $\mu^2$  小的项都可以忽略, 因此方程 (3.6) 变为:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} (r^2 \rho^2 \frac{d}{dr}) - l(l+1) \right\} f = 0 \quad (3.11)$$

其解为:

$$f_2 = A_2 P_l(2r - 2M) + B_2 Q_l(2r - 2M), \quad (3.12)$$

这里  $P_l$  和  $Q_l$  为勒让德 (Legendre) 函数。

Region III: 在远离视界处, 有  $\rho$  为 1, 则方程 (3.6) 化简为:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + (\omega^2 - \mu^2) + \frac{(1 - 2D)(2\omega^2 - \mu^2)}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} (fr\rho) = 0, \quad (3.13)$$

在此区域中, 所有高于  $1/r^2$  的项都可以忽略。方程 (3.13) 可以用哥伦比亚 (Coulomb) 函数展开,  $F_l^c$  和  $G_l^c$  [50] 为 coulomb 函数

$$f_3 = A_3 \frac{F_l^c(-(2M - 2D)\omega(1 + v^2)/(2v), \omega vr)}{r} + B_3 \frac{G_l^c(-(2M - 2D)\omega(1 + v^2)/(2v), \omega vr)}{r}, \quad (3.14)$$

其中  $v = \sqrt{1 - \mu^2/\omega^2}$ ,  $A_3$  和  $B_3$  的确定与  $F_l^c$  和  $G_l^c$  的渐近形式有关。  $A_3$  和  $B_3$  的关系满足下面的关系:

$$A_3 + iB_3 = 2. \quad (3.15)$$

### §3.2 灰体因子 $\Gamma(l)$ 的确定

下面我们通过三个区域的重叠区域和函数的连续性来求解吸收系数  $\Gamma(l)$ 。重叠区表示如下:

Region I 和 II: 视界附近所有含  $r_0 = 2M + \omega^2/(l+1)^2$  和他同阶的都可忽略,  $\ln(r_0 - 2M) \simeq \ln[\omega^2/(l+1)^2]$ 。此式中这样的项也略去后, 下面我在视界  $r_0$  处渐近展开。

视界附近  $r = r_0$ ，相因子取为  $\delta = -\omega r_0^2$ ，去掉相因子后方程 (3.10) 可重新为化简为：

$$f_1 \approx A_1[1 - i(1 - 2D/2M)\omega \ln(r - 2M)], \quad (3.16)$$

$f_2$  由视界处的勒让得函数  $P_l$  和  $Q_l$  [50] 的展开式来确定。

$$P_l(2r - 2M) = 1 + 0(r - 2M) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} Q_l(2r - 2M) &= -\frac{1}{2} \ln(r - 2M) + \frac{1}{2} \ln 2 + \sum_1^l \frac{1}{m} + 0(r - 2M) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(r - 2M) + a, \end{aligned}$$

其中  $a$  为常数，故  $f_2$  为：

$$f_2 = A_2 - B_2\left(\frac{1}{2} \ln(r - 2M) + a\right). \quad (3.18)$$

比较方程 (3.16) 和方程 (3.18) 的系数可得出：

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1, \\ B_2 &= 2i(1 - 2D/2M)\omega A_1. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Region II 和 III: 视界处与中间处的重叠区发生在  $\omega v \ll 1/r \ll 1$ 。因此方程 (3.12) 和方程 (3.14) 中所有与  $1/r$  同阶的项都可以略去。在此条件下渐近展开  $P_l$  和  $Q_l$  得到

$$\begin{aligned} P_l(2r - 2M) &= \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} r^l (2r - 2M)^l \left[1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right] \\ &= \frac{(2l)!}{(l!)^2} r^l \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$Q_l(2r - 2M) = \frac{(l!)^2}{2(2l+1)!r^{l+1}} \left[1 + 0\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

由  $f_2$  得到

$$f_2 \approx A_2 \frac{(2l)!}{(l!)^2} r^l + B_2 \frac{(l!)^2}{2(2l+1)!r^{l+1}}, \quad (3.21)$$

类似的我们对 Coulomb 函数作渐近展开在  $\omega v r = 0$  后得出  $f_3$

$$f_3 \approx \frac{A_3}{r} \left[ C_l(\eta) (\omega v r)^{l+1} \right] + \frac{B_3}{r} \left[ \frac{(\omega v r)^{-l}}{(2l+1)C_l(\eta)} \right], \quad (3.22)$$

其中

$$C_l = 2^l e^{-\pi\eta/2} \frac{|\Gamma(l+1+i\eta)|}{(2l+1)!}, \quad \eta = \frac{-(2M-2D)\omega(1+v^2)}{2v}, \quad (3.23)$$

重叠区  $f_3$  和  $f_2$  相等, 比较系数得

$$\begin{aligned} A_2 \frac{(2l)!}{(l!)^2} &= A_3 C_l(\eta) (\omega v)^{l+1}, \\ \frac{B_2 (l!)^2}{2(2l+1)!} &= B_3 \frac{(\omega v)^{-l}}{(2l+1)C_l(\eta)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

联立方程 (3.15)、(3.19) 和 (3.24), 从中可解出  $A_1$ , 它确定了入射波的振幅.

$$A_1 = \frac{2(l!)^2}{(2l)!} C_l(\eta) (\omega v)^{l+1}. \quad (3.25)$$

定义朗斯基关系:

$$W(\omega) = W(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2) = \tilde{\Psi}_1 \tilde{\Psi}_{2,v} - \tilde{\Psi}_2 \tilde{\Psi}_{1,v}. \quad (3.26)$$

朗斯基函数正比于入射黑洞的粒子的流量, 归一化的标量粒子在无穷远处波函数的渐近行为

$$\tilde{f} \approx e^{-i\omega v r}. \quad (3.27)$$

因此标量粒子无穷远处的朗斯基函数为:

$$\tilde{W}_s = \tilde{f}^* \left( \frac{d}{dr} \tilde{f} \right) - \tilde{f} \left( \frac{d}{dr} \tilde{f}^* \right) = -2i\omega v. \quad (3.28)$$

标量粒子在黑洞视界 ( $r = 2M$ ) 处的朗斯基函数如下

$$W_s \approx -2i(1-2D/2M)\omega |A_1|^2. \quad (3.29)$$

吸收系数  $\Gamma_l$  等于  $\frac{W_s}{W_s}$ , 故

$$\begin{aligned} \Gamma_l &= \frac{(1-2D/2M)|A_1|^2}{v} \\ &= \frac{(4l)!^4}{(2l)!^2} (2M-2D/2M) \left| C_l(\eta) \right|^2 \frac{(\omega v)^{2l+2}}{v}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

由 Gamma 函数的性质可得

$$\left| C_l(\eta) \right|^2 = \frac{2^{2l+1}(\pi\eta)}{(2l+1)!^2(1-e^{-2\pi\eta})} \prod_{s=1}^l (s^2 + \eta^2). \quad (3.31)$$

把  $C_l$  代入得

$$\begin{aligned} \Gamma_l &= \frac{(2M-2D)(1-2D/2M)\pi l!^4 2^{2l+2}\omega(1+v^2)\omega^{2l+2}v^{2l}}{(2l)!^4(2l+1)^2\{1-\exp[-(2M-2D)\omega(1+v^2)/v]\}} \\ &\quad \times \prod_{s=1}^l \left[ s^2 + \left( \frac{(2M-2D)\omega(1+v^2)}{2v} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

### §3.3 吸收截面

平面波在无穷远处的渐近行为如下:

$$\phi = e^{-i\omega t} e^{-i\omega v z}. \quad (3.33)$$

标量粒子几率流密度为  $J^\mu = \frac{1}{2}(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$ , 其径向的几率流密度为:

$$|J^z| = \omega v. \quad (3.34)$$

黑洞吸收的入射粒子数定义为:

$$N = - \int_S \sqrt{-g} J^r dS, \quad (3.35)$$

其中  $S$  为黑洞视界面积. 径向吸收几率密度  $J^r$  为:

$$\begin{aligned} J^r &= - \frac{(1-2M/r)}{2(1-2D/r)} i(\phi^* \frac{\partial}{\partial r} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial r} \phi^*) \\ &= - \frac{1}{2(1-2D/2M)} i(\phi^* \frac{\partial}{\partial r^*} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial r^*} \phi^*). \end{aligned} \quad (3.36)$$

由 EMDA 黑洞的标量场方程得到的解  $\phi$  写成如下形式:

$$\phi = e^{-i\omega t} \sum_{l\bar{m}} K_{l\bar{m}} f_l(r) Y_{l\bar{m}}(\theta). \quad (3.37)$$

黑洞吸收总粒子数为:

$$N = i \sum_{l\bar{m}} \frac{(2M)^2 |K_{l\bar{m}}|^2}{2} (W_S)_l, \quad (3.38)$$

视界处朗斯基函数  $W_S$  由方程 (3.29) 给出, 故标量粒子总吸收截面为:

$$\begin{aligned}\sigma_{EMDA} &= \frac{N}{\omega v} = \sum_{l\bar{m}} \frac{(2M)^2 |K_{l\bar{m}}|^2 (W_S)_l}{-2i\omega v} \\ &= \sum_{l\bar{m}} (2M)^2 |K_{l\bar{m}}|^2 \Gamma_l.\end{aligned}\quad (3.39)$$

为了确定吸收截面, 我们把  $K_{l\bar{m}}$  在无处远处展开得到

$$K_{l\bar{m}} = \frac{i^l}{2\omega v} [4\pi(2l+1)]^{1/2} \delta_{\bar{m}0}.\quad (3.40)$$

把方程 (3.40) 代入方程 (3.39) 得到

$$\sigma_{EMDA} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi}{\omega^2 v^2} (2l+1) \Gamma_l.\quad (3.41)$$

标量粒子的吸收截面主要来自于  $S$  波 (角量子数为  $l=0$ ) 的贡献, 低能条件 ( $\omega \ll 2M$ ) 下, 标量粒子的总吸收截面为:

$$\sigma_{EMDAS} = \frac{2M(2M-2D)^2 (2\pi)^2 (1+v^2)\omega}{v^2(1-\exp[-\pi(2M-2D)\omega(1+v^2)/v])}.\quad (3.42)$$

### §3.4 小结

静态 EMDA 时空的标量粒子的吸收截面积  $\sigma_{EMDA}$ (3.42) 与 Schwarzschild 时空的标量粒子的吸收截面积  $\sigma_{unruh}$ (3.29) 相对比, 可知伸缩子时空的伸缩子参数  $D$  对吸收截面的影响显著,  $2M-2D$  项是 Schwarzschild 时空所没有的, 图 (3.1) 清楚反映的参数  $D$  的影响. 而对无质量粒子而言, 吸收面积变为:

$$\sigma_{EMDA} = 8\pi M(2M-2D),\quad (3.43)$$

这恰好等于静态 EMDA 黑洞的视界面积, 这与 Schwarzschild 时空中的情况是一样的, 无质量标量粒子的吸收截面等于黑洞的视界面积, 这是球对称黑洞的一个普遍性质. 当伸缩子参数  $D$  为零时, 静态 EMDA 黑洞退化为 Schwarzschild 黑洞, 吸收截面就与原来一样. 而在极端黑洞情况下, 吸收截面趋向于 0, 这是 EMDA 黑洞不同于 Schwarzschild 黑洞的新性质.

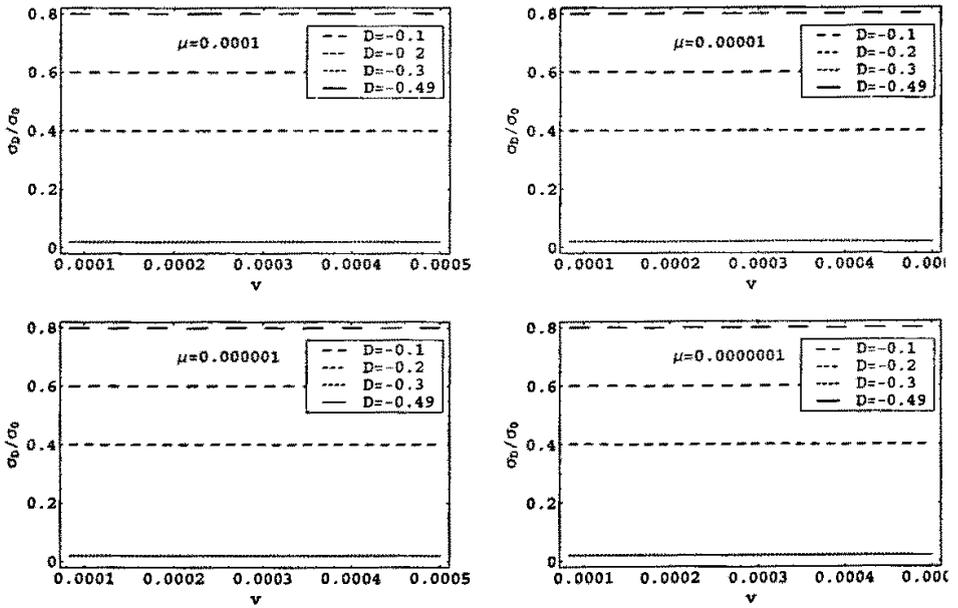


图 3.1: 不同质量和不同的  $D$  值, 静态 EMDA 时空的的标量粒子吸收截面  $\sigma_{EMDA}$  与 Schwarzschild 时空的标量粒子的吸收截面  $\sigma_{unruh}$  的比值图, 其比值随  $D$  的绝对值的增大而减小, 而在极端黑洞情况下趋于 0。

## 第四章 静态爱因斯坦 - 麦克斯韦伸缩子黑洞对 Dirac 粒子的吸收截面

本节同样采用 Unruh 方法计算 Dirac 粒子的吸收截面, 并与标量粒子的吸收截面作比较, 验证 Dirac 粒子吸收截面是否为标量粒子的 1/8.

### §4.1 静态 EMDA 时空中的 Dirac 粒子的径向方程

静态 EMDA 黑洞尺度线元为:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Omega^2} dt^2 + \frac{\Omega^2}{\Delta} dr^2 + \Omega^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

式中  $\Delta = r(r - 2M)$ ,  $\Omega^2 = r(r - 2D)$ ,  $D$  和  $M$  分别为黑洞的伸缩子和质量,  $M_{EMDA} = M - D$  为 Arnowitt-Deser-Misner 质量. 全文采用  $G=c=1$ .

弯曲时空中的 Dirac 场方程为:

$$[\gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) + \mu] \Psi = 0, \quad (4.2)$$

这里  $\mu$  为 Dirac 粒子的质量, 标架  $e_a^\mu$  是标架  $e_\mu^a$  逆形式.  $\gamma^a$  为 Dirac 矩阵, 它取为如下形式:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

其中  $\sigma^i$  是泡利矩阵,  $\Gamma_\mu$  为自旋联络

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8} [\gamma^a, \gamma^b] e_\mu^\nu e_{b\nu;\mu}, \quad (4.4)$$

式中  $e_{b\nu;\mu} = \partial_\mu e_{b\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha e_{b\alpha}$  是  $e_{b\nu}$  的协变微分.  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  为 Christoffel 符号.

静态 EMDA 黑洞的标架取如下形式:

$$e_\mu^a = \text{diag} \left\{ \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega}, \frac{\Omega}{\sqrt{\Delta}}, \Omega, \Omega \sin \theta \right\}. \quad (4.5)$$

代入场方程则有:

$$e_{\mu}^{\alpha} = \text{diag} \left\{ \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega}, \frac{\Omega}{\sqrt{\Delta}}, \Omega, \Omega \sin \theta \right\}. \quad (4.6)$$

因此 Dirac 场方程为:

$$\left[ \gamma^0 \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} + \frac{M}{2r(r-2M)} + \frac{D}{2r(r-2D)} \right) \right. \\ \left. + \gamma^2 \frac{1}{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cot \theta \right) + \gamma^3 \left( \frac{1}{\Omega \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \mu \right] \Psi = 0. \quad (4.7)$$

引入一个新的变量

$$\Psi = \frac{e^{-\omega t}}{\Omega \rho^{1/2}} \begin{pmatrix} G_k(r) \phi_{km}^{\pm}(\theta, \varphi) \\ -i F_k(r) \phi_{km}^{\mp}(\theta, \varphi) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

式中  $\rho = \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega}$ .

$$\phi_{km}^+(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{k+m}{2k}} Y_j^{m-1/2} \\ \sqrt{\frac{k-m}{2k}} Y_j^{m+1/2} \end{pmatrix}, \quad k = j + \frac{1}{2},$$

$$\phi_{km}^-(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{k+1-m}{2k+2}} Y_j^{m-1/2} \\ \sqrt{\frac{k+1+m}{2k+2}} Y_j^{m+1/2} \end{pmatrix}, \quad k = j - \frac{1}{2},$$

代入场方程后化简得到对偶式  $G_k(r)$  和方程  $F_k(r)$  的径向方程:

$$\rho \frac{dG_k(r)}{dr} + \frac{k}{\Omega} G_k(r) = \left( \frac{\omega}{\rho} + \mu \right) F_k(r), \quad (4.9)$$

$$\rho \frac{dF_k(r)}{dr} - \frac{k}{\Omega} F_k(r) = \left( -\frac{\omega}{\rho} + \mu \right) G_k(r). \quad (4.10)$$

为了消去其中一个的  $F_k(r)$ , 当  $\omega > 0$  时, 引入一个新变量  $x$ :

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1 + \lambda \rho}{\rho^2}, \quad (4.11)$$

式中  $\lambda = \frac{\mu}{\omega}$ .

消去  $F_k(r)$  后得到一个只有  $G_k(r)$  的二阶径向微分方程:

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left[ \omega^2 \left( \frac{1 - \lambda \rho}{1 + \lambda \rho} \right) - \frac{k^2 \rho^2}{(1 + \lambda \rho)^2 \Omega^2} + \frac{d}{dx} \left( \frac{k \rho}{1 + \lambda \rho} \right) \right] G = 0, \quad (4.12)$$

式中  $r$  和  $\rho$  是  $x$  的函数, 类似的  $F_k(r)$  二阶径向微分方程在  $\lambda \rightarrow -\lambda$  及  $k \rightarrow -k$  的条件下可以得到.

我们主要求解方程 (4.12) 当  $\omega$  远小于  $2M$  (粒子波长大于 EMDA 黑洞半径) 时的解. 与上节一样采用 Unruh 计算 Dirac 粒子吸收截面的方法, 利用波函数的连续性求和渐近展开技巧化简方程 (4.2) 求解解视界处、中间区域和远离视界处的波动方程.

三个区域的定义和展开如下:

Region I: 视界附近需要满足条件为  $(r - 2M) < \omega^2/k^2 \ll 2M$  和  $\rho \simeq 0$ . 方程 (4.12) 化简为:

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right] G_{NH} = 0. \quad (4.13)$$

方程 (4.13) 的解为:

$$G_{NH} = \alpha_1 e^{i\omega x}, \quad (4.14)$$

Region II: 在中间区域方程 (4.12) 中所有小于  $\omega^2$ ,  $\mu^2$  的项全部可以略去, 因此方程 (4.12) 可化简为:

$$\frac{d^2 G_{IM}}{dx^2} + \left[ -\frac{k^2 \rho^2}{(1 + \lambda \rho)^2 \Omega^2} + \frac{d}{dx} \left( \frac{k \rho}{1 + \lambda \rho} \Omega \right) \right] G_{IM} = 0. \quad (4.15)$$

令

$$H_{IM} = \frac{dG_{IM}}{dx} + \frac{k \rho}{(1 + \lambda \rho) \Omega} G_{IM}, \quad (4.16)$$

方程 (4.15) 可化简为一阶微分方程:

$$\frac{dH_{IM}}{dr} - \frac{k}{\rho \Omega} H_{IM} = 0. \quad (4.17)$$

方程 (4.17) 的解为:

$$H_{IM} = \beta_2 \left( \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right)^{-k}. \quad (4.18)$$

把方程 (4.18) 代入方程 (4.15) 可得到  $G_{IM}$  :

$$G_{IM} = \alpha_2 \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^k + \beta_2 g, \quad (4.19)$$

$g$  是上面方程的一个特解.

$$\frac{dg}{dr} + \frac{k}{\rho\Omega} g = \frac{1+\lambda\rho}{\rho^2} \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^{-k}. \quad (4.20)$$

当  $k < 0$  时有

$$g = \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^k \int_1^\rho \frac{2(1+\lambda\rho)}{\rho} \frac{(1-\rho)^{2|k|-2}}{(1+\rho)^{2|k|+2}} d\rho. \quad (4.21)$$

当  $k > 0$  时有

$$g = \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^k \left\{ \ln \rho^2 + \int_0^\rho \frac{2}{\rho} \left[ \frac{(1-\lambda\rho)}{(1+\rho^2)^2} \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right)^{2k} - 1 \right] d\rho \right\}. \quad (4.22)$$

Region III: 远离视界处时,  $\rho = 0$ , 方程 (4.12) 中所有高于  $1/r^2$  的项都可以略去, 于是方程 (4.12) 化简为:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + (\omega^2 - \mu^2) + \frac{(2M - 2D)(2\omega^2 - \mu^2)}{r} - \frac{k(k+1)}{r^2} \right\} \left( \frac{1+\lambda}{1+\lambda\rho} \right)^{1/2} \rho G_{FF} = 0, \quad (4.23)$$

方程 (4.23) 的解为 Coulomb [50] 函数  $F_l^c$  和  $G_l^c$  的迭加解

$$G_{FF} = \left( \frac{1+\lambda\rho}{1+\lambda} \right)^{1/2} \frac{1}{\rho} \left[ \alpha_3 F_l^c \left( -(2M - 2D)\omega(1+v^2)/(2v), \omega v r \right) + \beta_3 G_l^c \left( -(2M - 2D)\omega(1+v^2)/(2v), \omega v r \right) \right], \quad (4.24)$$

式中  $v = \sqrt{1 - \mu^2/\omega^2}$ ,  $\alpha_3$  和  $\beta_3$  的确定与  $F_l^c$  和  $G_l^c$  的渐近形式有关.  $\alpha_3$  和  $\beta_3$  的关系满足下面的关系:

$$\alpha_3 + i\beta_3 = 2. \quad (4.25)$$

## §4.2 灰体因子 $\Gamma(l)$ 的确定

下面我们通过三个区域的重叠区域的和函数的连续性来求解吸收系数  $\Gamma(l)$ 。三个重叠区如下表示：

Region I 和 II: 视界附近所有含  $r_0 = 2M + \omega^2/(l+1)^2$  和它同阶的项都可忽略。  $\ln(r_0 - 2M) \simeq \ln[\omega^2/(l+1)^2]$ 。因此式中这样的项也略去后，下面我在视界  $r_0$  处渐近展开。

视界处  $r = r_0$ ，  $x \approx 2(M - D)\omega \ln(r - 2M)$ ，方程 (4.14) 可化简为：

$$G_{NH} \approx \alpha_1 [1 - i2(M - D)\omega \ln(r - 2M)], \quad (4.26)$$

$G_{IM}$  必须分  $k > 0$  和  $k < 0$  的情况来讨论。当  $r \rightarrow 2M$  时，  $\rho \rightarrow 0$ ；当  $k < 0$  时，我们由方程 (4.19) 和方程 (4.21) 得到：

$$G_{IM} \approx \alpha_2 + \beta_2(\ln(r - 2M)). \quad (4.27)$$

比较方程 (4.26) 和方程 (4.27)，我们得到：

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1, \\ \beta_2 &= 2i(M - D)\omega\alpha_1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

而对  $k > 0$  的情况，通过比较式  $G_{NH}$  与  $G_{IM}$  的系数我们得到的式子与方程 (4.28) 一样。

Region II 和 III: 视界处与中间处的重叠区发生在  $\omega v \ll 1/r \ll 1$ 。因此方程 (3.12) 和方程 (4.24) 中所有  $1/r$  的同阶项都可以略去。在此条件下渐近展开  $P_l$  和  $Q_l$  得到远穷远处有  $1 - \rho^2 \approx 2M/r$  及  $\rho = 1$ 。

$G_{IM}$  须分别在  $k > 0$  和  $k < 0$  的情况来分析。当  $k < 0$  时，由方程 (4.19) 和方程 (4.21)，我们得到：

$$G_{IM} = \alpha_2(4r)^{|4k|} + \frac{\beta_2(1 + \lambda)}{4(2|k| - 1)(4r)^{|k|-1}}. \quad (4.29)$$

当  $k > 0$  时，由方程 (4.19) 和方程 (4.22)，我们得到：

$$G_{IM} = \frac{\alpha_2}{(4r)^{4k}} + \frac{\beta_2(1 + \lambda)}{4(2|k| - 1)}(4r)^{k+1}. \quad (4.30)$$

渐近展开 Colomb 函数 (在  $\omega vr = 0$  的附近), 我们得到  $G_{FF}$  为:

$$G_{FF} \approx \alpha_3 \left[ C_1(\eta) (\omega vr)^{j+1} \right] + \beta_3 \left[ \frac{(\omega vr)^{-j}}{(2j+1)C_j(\eta)} \right], \quad (4.31)$$

式中

$$C_k(\eta) = 2^j e^{-\pi\eta/2} \frac{|\Gamma(j+1+i\eta)|}{(2j+1)!}, \quad \eta = \frac{-(2M-2D)\omega(1+v^2)}{2v}. \quad (4.32)$$

比较  $G_{IM}$  与  $G_{FF}$ , 当  $k > 0$  ( $j = k$ ) 时, 我们得到

$$\alpha_2 = \beta_3 \frac{4^k}{(\omega v)^k (2k+1) C_k}, \quad (4.33)$$

$$\beta_2 = \frac{\alpha_3 4 (\omega v)^{k+1} (C_k) (2k+1)}{(4)^{k+1} (1+\lambda)}, \quad (4.34)$$

当  $k < 0$  ( $j = |k| - 1$ ) 时, 有

$$\alpha_2 = \alpha_3 \frac{(\omega v)^{|k|}}{4^{|k|}} C_{|k|-1}, \quad (4.35)$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_3 4}{(1+\lambda) C_{|k|-1}} \frac{4^{|k|-1}}{(\omega v)^{|k|-1}}. \quad (4.36)$$

由方程 (4.33)、方程 (4.28) 和方程 (4.25) 得出: 当  $k > 0$  时,

$$\alpha_1 = \frac{8i}{\epsilon} \left( \frac{\omega v}{4} \right)^{k+1} \frac{(C_k)(2k+1)}{1+\lambda}. \quad (4.37)$$

由方程 (4.35)、方程 (4.28) 和方程 (4.25) 得出: 当  $k < 0$  时,

$$\alpha_1 = 2 \left( \frac{\omega v}{4} \right)^{|k|} C_{|k|-1}. \quad (4.38)$$

无穷远处的朗斯基函数为:

$$\widetilde{W}_D = \widetilde{G}^* \left( \frac{d}{dx} \widetilde{G} \right) - \widetilde{G} \left( \frac{d}{dx} \widetilde{G}^* \right) = \frac{-2i}{1+\lambda} \omega v. \quad (4.39)$$

视界处的无穷远处的朗斯基函数为:

$$W_D \approx -2i\omega |\alpha_1|^2. \quad (4.40)$$

吸收系数 ( $\Gamma_D$ ) 为  $W_D$  与  $\widetilde{W}_D$  比值, 即

$$(\Gamma_D)_k = \frac{1+\lambda}{v} |\alpha_1|^2. \quad (4.41)$$

其中

$$\left| C_k(\eta) \right|^2 = \frac{2^{2j+1}(\pi\eta)}{(2j+1)!^2(1-e^{-2\pi\eta})} \prod_{s=1}^j (s^2 + \eta^2). \quad (4.42)$$

代入化简得  $(\Gamma_D)$  为:

$$(\Gamma_D)_K = \begin{cases} \frac{(2M-2D)\pi\omega^{2k+2}v^{2k}(1+v^2) \prod_{s=1}^k \left[ s^2 + \left( \frac{(2M-2D)\omega(1+v^2)}{2v} \right)^2 \right]}{2^{2k-2}(1+\lambda)(2k)!^2 \{1-\exp[-(2M-2D)\epsilon(1+v^2)/v]\}}, & k > 0 \\ \frac{(2M-2D)\pi\epsilon^{2|k|+2}v^{2|k|-2}(1+\lambda)(1+v^2) \prod_{s=1}^{|k|-1} \left[ s^2 + \left( \frac{(2M-2D)\omega(1+v^2)}{2v} \right)^2 \right]}{2^{2|k|}(2|k|-1)! \{1-\exp[-(2M-2D)\omega(1+v^2)/v]\}}, & k < 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

### §4.3 吸收截面

Dirac 粒子平面波无穷远的渐近形式为:

$$\Psi = (e^{-\omega t} e^{-\omega v z}) S, \quad (4.44)$$

$\Psi$  为场方程的任意解, 其自旋  $s$  满足下式:

$$-ic(\gamma^0 S + v\gamma^3 S) + i\mu S = 0. \quad (4.45)$$

自旋分量为:

$$S^+ = \begin{pmatrix} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^{1/4} \\ 0 \\ -\left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^{1/4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^{1/4} \\ 0 \\ \left( \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^{1/4} \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

且满足如下关系:

$$\vec{S}^+ \gamma^3 S^+ = \vec{S}^- \gamma^3 S^- = -2. \quad (4.47)$$

入射粒子的几率流为:

$$|J^\mu| = \vec{\Psi} \gamma^\mu \Psi, \quad (4.48)$$

入射粒子的自旋部分  $S^+e^{-i\omega z}$  沿径向展开

$$S^+e^{-i\omega z} = S^+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l [4\pi(2j+1)]^{1/2} e^{-i\omega r}}{2i\omega v r} Y_{j0}(\theta, \varphi). \quad (4.49)$$

对应的波函数  $\Psi^+$  和  $\Psi^-$  也按前面求解径向函数可部分的  $\Psi_{\omega,k,1/2}$  和  $\Psi_{\omega,k,-1/2}$  展开

$$\Psi^+ = \sum_k \frac{i^k \sqrt{\pi}}{\omega v} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^{1/4} (|k|)^{1/2} \Psi_{\omega,k,1/2} \quad (4.50)$$

$$\Psi^- = \sum_k \frac{i^k \sqrt{\pi}}{\omega v} \left( \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^{1/4} \frac{(|k|)^{3/2}}{k} \Psi_{\omega,k,-1/2}. \quad (4.51)$$

为了确定吸收截面, 先确定如下式子的值

$$\int r(r-2D) \vec{\Psi}_{\omega km} \gamma^r \Psi_{\omega km} d \cos \theta d\phi, \quad (4.52)$$

式中  $\gamma^r$  为:

$$\gamma^r = \frac{\sqrt{\Delta}}{\Omega} (\sin \theta \cos \phi \gamma^1 + \sin \theta \sin \phi \gamma^2 + \cos \theta \gamma^3). \quad (4.53)$$

把  $\gamma^r$  和径向函数  $\Psi_{\epsilon,k,m}$  代入方程 (4.52) 则有

$$-\delta_{kk'} \delta_{mm'} (G_k^* F_k - F_k^* G_k). \quad (4.54)$$

由方程 (4.9) 可知:

$$F_k = \frac{i}{\omega} \left[ \frac{dG_k}{dx} + \frac{k\rho}{1+\lambda\rho} \Omega G_k \right], \quad (4.55)$$

因此方程 (4.54) 可化简为:

$$-\frac{i}{\epsilon} \delta_{kk'} \delta_{mm'} \left( G_k^* \frac{dG_k}{dx} - G_k \frac{dG_k^*}{dx} \right) = \delta_{kk'} \delta_{mm'} \frac{-2v}{1+\lambda} (\Gamma_D)_k. \quad (4.56)$$

静态 EMDA 黑洞所吸收的 Dirac 粒子数  $\Psi_+$  和  $\Psi_-$  为:

$$\begin{aligned}
 N_r^+ &= - \int_S \sqrt{-g} \vec{\Psi}^+ \gamma^r \Psi^+ dS \\
 &= 2 \sum_k \frac{4M(M-D)\pi}{(\omega v)} |k| (\Gamma_D)_k, \\
 N_r^- &= - \int_S \sqrt{-g} \vec{\Psi}^- \gamma^r \Psi^- dS \\
 &= 2 \sum_k \frac{4M(M-D)\pi}{(\omega v)} |k| (\Gamma_D)_k,
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

这里  $S$  为黑洞的视界面积。静态 EMDA 黑洞对 Dirac 粒子的吸收截面为:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{EMDA})_D &= \frac{N_r^+ + N_r^-}{2\omega v} \\
 &= \frac{\pi 4M(M-D)}{(\omega v)^2} \sum_k |k| (\Gamma_D)_k.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

低能条件下静态 EMDA 黑洞对 Dirac 粒子的总吸收截面的主要贡献来自于 ( $k = +1$  和  $k = -1$ ) 的部分, 它们的截面分别为:

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_D)_1 &= \frac{\pi \omega^3 4M(M-D)v^2(1+v^2) \left( 1 + \left[ \omega - 2(M-D)(1+v^2)/2v \right]^2 \right)}{4(1+\lambda)(1 - \exp[-2\pi(M-D)\omega(1+v^2)/v])} \\
 (\Gamma_D)_{-1} &= \frac{\pi \epsilon^3 4M(M-D)(1+v^2)}{4(1 - \exp[-2\pi(M-D)\omega(1+v^2)/v])}.
 \end{aligned}$$

最终总吸收截面为:

$$(\sigma_{EMDA})_D = \frac{\pi^2 8M(M-D)^2(1+v^2)\omega}{2v^2(1 - \exp[-2\pi(M-D)\omega(1+v^2)/v])}. \tag{4.59}$$

#### §4.4 小结

与静态 EMDA 黑洞对标量粒子的吸收截面  $(\sigma_{EMDA})_s$  比较知, 静态 EMDA 黑洞对 Dirac 粒子的吸收截面  $(\sigma_{EMDA})_D = \frac{1}{8}(\sigma_{EMDA})_s$ , 恰好为标量粒子的八分之一, 这与 Schwarzschild 时空中标量粒子和 Dirac 粒子的比值是一样的。这是非旋转球对称黑洞的一个普遍性质, 它在高维的球对称黑洞一样成立。伸缩子参数  $D$  对吸收截面的影响不可忽略, 而对无质量

的 Dirac 粒子的吸收截面, 即当  $v = 1$  时, 有

$$(\sigma_{EMDA})_D = 2\pi M(M - D), \quad (4.60)$$

此时吸收截面亦为视界面积的的八分之一.

## 第五章 总结与展望

本文采用 Unruh 方法计算吸收截面的方法, 利用波函数的连续性和渐近展开技巧求解视界处波动方程, 中间区域波动方程和远离视界处波动方程. 通过对静态爱因斯坦 - 麦克斯韦伸缩子黑洞时空中的 Dirac 粒子和标量粒子的吸收截面的研究, 我们发现静态伸缩子黑洞既有着与一般球对称黑洞共同的性质也存在着不一样的地方, 现总结如下:

1. 低能条件下标量粒子的吸收截面为  $\frac{2M(2M-2D)^2(2\pi)^2(1+v^2)\omega}{v^2(1-\exp[-\pi(2M-2D)\omega(1+v^2)/v])}$ ; 当  $v \gg 2\pi Mm$  时, 标量粒子的吸收截面为  $\frac{16\pi M(M-D)}{v}$ , 此时吸收截面是  $v$  的函数, 并且随  $v$  的增大而减小. 无质量标量粒子的其吸收截面为  $8\pi M(2M-2D)$ , 此恰为静态 EMDA 黑洞的视界面积, 这也是球对称黑洞吸收截面的一个普遍性质. 吸收截面的主要贡献来自于 S 波.

2. Dirac 粒子的吸收截面为标量粒子的吸收截面的  $1/8$ , 这主要自于 S 波和 P 波 ( $k = -1, +1$ ) 的贡献, 这与 Schwarzschild 时空的结果是一样的. 无质量 Dirac 粒子的吸收截面为  $2\pi M(M-D)$ , 此为视界面积的  $1/8$ .

3. 伸缩子时空中伸缩子参数  $D$  对吸收截面的影响显著.  $2M-2D$  是 Schwarzschild 时空的粒子的吸收截面所没有的, 图 (3.1) 中静态 EMDA 黑洞吸收截面与 Schwarzschild 时空吸收截面的比值随  $D$  的绝对值增大而减小. 而在极端黑洞情况下, 该比值趋向于 0, 这是 EMDA 黑洞不同于 Schwarzschild 黑洞的新性质.

本文研究了低能条件下球对称黑洞吸收截面, 由于问题的复杂性, 带电旋转黑洞没有讨论. 我们也意识到这些研究仍然存在可以继续发掘的地方, 例如我们可以考虑旋转、带电的黑洞如稳态旋转 EMDA 中的吸收截面的情况, 因为黑洞的电荷和旋转参数都会对吸收情况产生影响. 本文的创新点在于研究了伸缩子时空中伸缩子参数  $D$  对吸收截面的影响, 并验证它是否具有 Schwarzschild 时空中同样的性质. 而对高能区域的吸收截面的研究, 低能区的研究方法和结论对此很有启发. 黑洞对粒子的吸收和散射情况的研究是我们探寻黑洞的一个重要领域, 这也有助于人们更加清楚地了解黑洞的性质, 了解黑洞物理与其他学科如量子理论、共

形场论、弦理论、热力学以及统计物理等的内在联系，并将进一步推动这些学科更加协调、深入地发展。而且这个问题的研究对我们了解黑洞信息的丢失有很重要的作用。对于旋转的黑洞，以及弦理论中  $D$  膜的粒子的吸收和散射情况目前许多学者作进一步的研究。球对称黑洞吸收截面的研究为他们的研究给予了重要启示。

## 参考文献

- [1] 王永久, 广义相对论和宇宙学 [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000: 106-468.
- [2] R. M. Wald, **General Relativity**[M]. Chicago and London:the university of Chicago press,1984.
- [3] R. Ruffini and J. A. Wheeler, **Introducing the black hole** [J]. Phys. Today., 1971, 24(1): 30-41.
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, **Gravitation**[M]. San Francisco: Freeman, 1973.
- [5] E. Poisson and W. Israel, **Internal structure of black hole** [J]. Phys. Rev.D,1990,41: 1796-1809.
- [6] A. Ori, **Oscillatory null singularity inside realistic spinning black holes** [J]. Phys. Rev.L,1999,83: 5423-5426.
- [7] S. W. Hawking, **The large Scale Structure of Space-time**[M]. Cambridge: Cambridge University Press,1973.
- [8] 刘辽, 广义相对论 [M]. 高等教育出版社, 1987:114-128.
- [9] J. D. Bekenstein and J. A. Wheeler, **Introducing the black hole**[J]. Phys. Rev. D, 1973, 7: 2333-2346.
- [10] R. Herman and W. A. Hiscock, **Strength of the mass inflation singularity** [J]. Phys. Rev. D,1992,46: 1863-1865.
- [11] T. Regge and J. A. Wheeler, **Stability of a Schwarzschild Singularity**[J]. Phys. Rev.D, 1957, 108(4): 1063-1069.
- [12] 赵峥, 黑洞与弯曲的时空 [M]. 山西科学技术出版社, 2000:222-230.
- [13] 曾谨言, 量子力学导论 [M]. 北京大学出版社, 1998:340-356.
- [14] R. M. Wald, **Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics**, the University of Chicago Press Chicago, 1994.
- [15] J. D. Bekenstein, **Black Holes and Entropy**, Phys. Rev. D, 1973, 7 2333.
- [16] P. M. Morse and H. Feshbach, **Methods of Theoretical Physics** [M]. edited by McGraw-Hill, New York, 1953.
- [17] S. W. Hawking, **Black holes and thermodynamics**, Phys. Rev. D, 1976, 13 191.
- [18] A. Strominger and C. Vafa, **Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy**, Phys. Lett. B 1996 379 99 [hep-th/9601029].

- 
- [19] A. W. Peet, **TASI Lectures on Black Holes in String Theory** [hep-th/0008241].
- [20] C. V. Vishveshwara, **A current loop of electromagnetic field arounds Kerr black hole**[J]. *Phys. Rev.D*, 1970, 1: 2870-2879.
- [21] V. P. Frolov and I. D. Novikov, **Black Hole Physics: Basic Concepts and New Development**[M]. edited by ALWYN VAN FER MERWE, University of Denver, USA.
- [22] 王永久, **引力论和宇宙论** [M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2000: 106-468.
- [23] R. H. Price, **Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. I. Scalar and Gravitational Perturbations**[J]. *Phys. Rev. D*, 1972, 5(10): 2419-2438.
- [24] R. H. Price, **Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse. II. Integer-Spin, Zero-Rest-Mass Fields**[J]. *Phys. Rev. D*, 1972, 5(10): 2439-2454.
- [25] J. Bicak, **Gravitational collapse with charge and small asymmetries. I. Scalar perturbations**[J]. *Gen. Relativ. Gravit.* 1972, 3: 331.
- [26] W. G. Unruh, **Absorption cross section of small black holes**, *Phys. Rev. D* 1976, (14) 3251.
- [27] N. Sánchez, **Wave scattering theory and the absorption problem for a black hole**. *Phys. Rev.* 1977, 16 937-945.
- [28] N. Sánchez, **Elastic scattering of waves by a black hole.** *Phys. Rev. D*, 1978, 18 1798-1804.
- [29] N. Sánchez, **Absorption and emission spectra of a Schwarzschild black hole**, *Phys. Rev.D*, 1978, 18 1030.
- [30] S. R. Das, G. Gibbons, and S. D. Mathur, **Universality of Low Energy Absorption Cross Sections for Black Holes**, *Phys. Rev. Lett.* 1997, 78 417 [hep-th/9609052].
- [31] R. Emparan, **Absorption of Scalars by Extended Objects**, *Nucl. Phys.B*, 1998 516 297 [hep-th/9706204].
- [32] D. K. Park and H. J. W. Müller-Kirsten, **Universality or Non-Universality of Absorption Cross Sections for Extended Objects**, *Phys. Lett.B*, 2000 , 49 2135 [hep-th/0008215].
- [33] E. Jung, S. H. Kim, and D. K. Park, **Absorption Cross Section for S-wave massive Scalar**, *Phys. Lett.B*, 2004, 586 390 [hep-th/0311036].
- [34] E. Jung and D. K. Park, **Effect of Scalar Mass in the Absorption and Emission**

- Spectra of Schwarzschild Black Hole,[hep-th/0403251].
- [35] J. Maldacena, **Black holes and D-branes**, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 1998 61 111 [hep-th/9705078].
- [36] J. Maldacena and A. Strominger, **Black Hole Greybody Factors and D-Brane Spectroscopy**, Phys. Rev. D, 1996 55 861 [hep-th/9609026].
- [37] R. Emparan, G. T. Horowitz and R. C. Myers, **Black Holes radiate mainly on the Brane**, Phys. Rev. Lett. 2000 85 499 [hep-th/0003118].
- [38] V. Frolov and D. Stojković, **Black hole radiation in the brane world and the recoil effect**, Phys. Rev. D 2002 66 084002 [hep-th/0206046].
- [39] V. Frolov and D. Stojković, **Black Hole as a Point Radiator and Recoil Effect on the Brane World**, Phys. Rev. Lett. 2002 89 151302 [hep-th/0208102].
- [40] M. Cvetič, H. Lü and J. F. Vázquez-Poritz, **Absorption by Extremal D3-branes**, JHEP 2001, 0102 012. [hep-th/0002128].
- [41] E. Jung, S. H. Kim, and D. K. Park, **Low-energy absorption cross section for massive scalar and Dirac fermion by  $(4 + n)$ -dimensional Schwarzschild black hole**, JHEP 2000, 40409 005 [hep-th/0406117].
- [42] E. Jung, S. H. Kim and D. K. Park, **Proof of universality for the absorption of massive scalars by the higher-dimensional Reissner-Nordström black holes**, [hep-th/0409145].
- [43] E. Jung and D. K. Park, **Absorption and Emission Spectra of an higher-dimensional Reissner-Nordström black hole** [hep-th/0502002].
- [44] E. Newman and R. Penrose, **An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients** J. Math. Phys. , 1962, 3: 556-578.
- [45] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev and V. K. Khersonskii, **Quantum Theory of Angular Momentum**[M]. Phys. Rev. D , 1995, 52: 2118.
- [46] A. García, D. Galtsov and O. Kechkin, **Class of stationary axisymmetric solutions of the Einstein-Maxwell-Dilaton-Axion field equations**[J]. Phys. Rev. Lett., 1995, 74(8): 1276-1279.
- [47] Jiliang Jing and Mulin Yan, **Statistical Entropy of a Stationary Dilaton Black Holes from Cardy Formula**[J]. Phys. Rev. D, 2001, 63(2): 024003.
- [48] Jiliang Jing, **Thermodynamics of stationary axisymmetric EMDA black hole**[J]. Nucl. Phys. B, 1996, 476: 548-555.
- [49] Jiliang Jing and ShiLiang Wang, **Can Martinez's conjecture be extended to string theory?**[J]. Phys. Rev. D, 2002, 65(6): 064001.

- [50] M .Abramowitz and I. A. Stegun, **Handbook of Mathematical Functions** [M].  
edited by Dover,New York , 1970.

---

### 攻读硕士学位期间完成的论文

- [1] Chang-Qing Liu and Ji-Liang Jing, **Absorption cross section of static Einstein-Maxwell Dilation Axion black hole for Scaler particles and scalr particles.** Commun. Theor. Phys. 2007 47 665-668
- [2] Chang-Qing Liu and Ji-Liang Jing , **Absorption cross section of static Einstein-Maxwell Dilation Axion black hole for Dirac particles and scalr particles.** Chin. Phys. 已投稿

## 致谢

我非常感谢我的导师荆继良教授对我的精心指导和无私的帮助，使我非常愉快地完成了三年硕士的学习。荆老师严谨谦虚的治学态度和对物理学尤其是黑洞物理方面的独到见解使我受益匪浅，他不畏艰难、勇于攀登的坚强意志激励着我不断努力进取。同时，荆老师和师母在生活中给予我的不倦教诲和无私帮助使我终生受益。在此，谨致以我最衷心的感谢和诚挚的敬意，并祝他们工作顺利，身体健康。

在我攻读硕士学位期间，王永久教授、唐智明教授、余洪伟教授、吕君丽教授给予我大量无私的指导和鼓励。此外，学校、院领导，科研办的老师也给了我很多热忱的关怀和帮助。在此，我向他们表示衷心的感谢。

同时要感激父母的关怀、亲人和朋友的支持，这些是我这三年不断进取的动力和持续的努力的源泉。

另外，师兄陈松柏、潘启沅、吴普训、张佳林、张云、王津，徐善羨等以及同学朱致英、贺喜等也给了我很多的帮助，在此向他们表示谢意。同样感谢物理系其他各位老师不吝教诲和所给予的查找资料之便。忆及与同年级同学，尤其是与电工楼的师兄和同学的相互学习和讨论，必将是我终生难得的财富，这里一并致谢。

刘 长 青

二〇〇七年三月