

## 摘要

现代导航系统对精度和可靠性的要求越来越高,要求导航系统能够提供全面、精确的导航定位定向信息,而且不受气象条件制约,隐蔽性和自主性强,抗干扰性能好。因此,到目前为止,没有哪一种单一的导航设备能满足这些要求,而是将几种导航设备适当组合构成组合导航系统,相互取长补短,来提高系统的精度和稳健性,组合导航已成为导航发展的主要方向,这也是多传感器信息融合在导航系统中发展的一个方向。

在组合导航算法方面,对这些单传感器进行融合应用最成功的方法就是卡尔曼滤波,然而卡尔曼滤波器需要精确已知系统的动态模型和过程及测量噪声的统计特性,对系统参数和噪声的不确定性比较敏感,容易造成滤波发散。伴随着鲁棒控制理论发展起来的鲁棒滤波理论,尤其是 $H_\infty$ 滤波的理论,为卡尔曼滤波存在的问题在理论上提供了解决途径。

本文以 GPS/DR 组合导航系统为对象,研究了组合导航中的鲁棒滤波问题。针对不同的滤波模型以及噪声的不确定性,研究了 $H_\infty$ 滤波算法, $H_2/H_\infty$ 混合滤波算法和联合 $H_\infty$ 滤波算法的适应性和滤波精度。研究工作主要包括以下几个部分:

第一,分析与推导了 GPS/DR 组合导航系统的几种滤波数学模型。基于矩阵理论,改进了 $H_\infty$ 滤波的参数选择算法。基于线性矩阵不等式,推导了稳态 $H_\infty$ 滤波算法。将鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒 $H_\infty$ 滤波算法运用于 GPS/DR 组合导航系统,是模型参数不确定性算法应用于组合导航的一次尝试。根据当前“统计”模型的非线性,运用扩展卡尔曼滤波和扩展 $H_\infty$ 滤波算法进行了组合导航滤波研究。

第二,基于线性矩阵不等式,分析推导了离散时间约束方差混合滤波算法,证明了传统的混合滤波算法下确界的存在性,指出了其不便于工程实现的弱点,提出了迭代形式的混合滤波算法。

第三,针对集中参数滤波器的弱点以及联邦卡尔曼滤波算法的不足,提出了联合 $H_\infty$ 滤波算法,证明了其与联邦卡尔曼滤波的统一性,并进行了算法的对比研究。

第四,构建了 GPS/DR 组合导航的实验系统,进行了实际导航实验,对实验中采集的导航数据,采用文中研究的有关算法进行了离线滤波计算,实验结果验证了本文所提出的算法与卡尔曼滤波算法相比的优越性以及在实际导航中应用的可行性。

关键词:鲁棒滤波 约束方差 混合 $H_2/H_\infty$ 滤波 组合导航 联邦卡尔曼滤波 联合 $H_\infty$ 滤波

## ABSTRACT

The requirements of precision and reliability for modern navigation systems become higher and higher. It demands that navigation systems can provide overall and precise information of navigation positioning and orientation, which shall not be restricted by climate, and have the properties of strong concealment and independence, and high anti-jamming performance. Up to now, there is no single navigation equipment that can meet these requirements. Alternatively, an appropriate combination of several navigation systems may solve this problem, which can compensate each to other and improve a system's precision and stability. Such integrated navigation systems turn out to be a development trend in navigation and in navigation systems in multi-sensor data fusion as well.

Among algorithms in integrated navigation systems, Kalman filtering is the most successful method for the application of single sensor data fusion. However, Kalman filtering requires that the dynamic model of systems and statistical characteristics of state and measured noise must be exactly known. Kalman filtering is sensitive to system parameter and noise uncertainty, thus makes it difficult to converge. Developing along with robust control theory, robust filtering theory, especially  $H_\infty$  filtering theory, primarily resolves the problem occurring in Kalman filtering in theory.

In this thesis, the robust filtering problem of integrated navigation systems in context of GPS/DR is studied. Aiming at existing problems of uncertainty of model and uncertainty of noise, we analyze applicability and precision of  $H_\infty$  filtering algorithm,  $H_2/H_\infty$  filtering algorithm, and federated  $H_\infty$  filtering algorithm. The main study as follow.

Firstly, several mathematic models in GPS/DR integrated navigation system are derived. Priority algorithm of  $H_\infty$  filtering based on matrix theory is improved. Stable  $H_\infty$  filtering algorithm based on LMI is developed. Robust Kalman filtering algorithm and robust  $H_\infty$  filtering algorithm are applied to GPS/DR integrated navigation system, this is an attempt to develop the application of model uncertainty algorithm in integrated navigation system. Extended Kalman filtering and extended  $H_\infty$  filtering are applied to integrated navigation system based on current statistical nonlinear model.

Secondly, mixed filtering algorithm under constraint of error covariance is derived. The results confirm the existence of infimum of traditional mixed filtering algorithm, and manifest its weakness inconvenient for engineering implement. Accordingly, we deduce new iterative mixed  $H_2/H_\infty$  filtering algorithm.

Thirdly, aiming at the filter weakness of centralized parameter system and

federated Kalman filter, we specifically propose federated  $H_\infty$  filtering algorithm, which can overcome the weakness of federated Kalman filtering algorithm. By comparing it with federated  $H_\infty$  filtering algorithm, we prove that they are united.

Fourthly, experiment system of GPS/DR integrated navigation is built, practical experiments are done, and those algorithm in this paper are calculated off-line by practical data. The result of experiment proves that the algorithms in this paper are better than kalman filtering algorithm and applicable in practice.

**Key Words:** Robust filtering Error variance constraints Mixed  $H_2/H_\infty$  filtering Intergrated navigation Federated kalman filtering Federated  $H_\infty$  filtering

## 图 目 录

图 2.1	航位推算原理示意图 .....	13
图 2.2	单片机硬件结构图 .....	14
图 2.3	带操作系统计算机（处理器）硬件结构图 .....	14
图 2.4	GPS/DR 椭球模型 .....	18
图 3.1a	白噪声情况卡尔曼滤波估计误差 .....	30
图 3.1b	白噪声情况卡尔曼滤波估计误差 .....	30
图 3.2	白噪声情况 $H_{\infty}$ 滤波估计误差 .....	31
图 3.3	色噪声情况卡尔曼滤波估计误差 .....	31
图 3.4	色噪声情况 $H_{\infty}$ 滤波估计误差 .....	32
图 3.5	白噪声情况卡尔曼滤波估计误差 .....	34
图 3.6	白噪声情况 $H_{\infty}$ 滤波估计误差 .....	34
图 3.7	白噪声情况稳态 $H_{\infty}$ 滤波估计误差 .....	35
图 3.8	色噪声情况卡尔曼滤波估计误差 .....	35
图 3.9	色噪声情况 $H_{\infty}$ 滤波估计误差 .....	36
图 3.10	色噪声情况稳态 $H_{\infty}$ 滤波估计误差 .....	36
图 3.11	扩展卡尔曼滤波估计误差与扩展 $H_{\infty}$ 滤波估计误差对比 .....	42
图 3.12	扩展卡尔曼滤波估计误差与扩展 $H_{\infty}$ 滤波估计误差对比 .....	42
图 3.13	扩展卡尔曼滤波估计误差与扩展 $H_{\infty}$ 滤波估计误差对比 .....	43
图 3.14	扩展卡尔曼滤波估计误差与扩展 $H_{\infty}$ 滤波估计误差对比 .....	43
图 3.15	白噪声情况鲁棒卡尔曼滤波估计误差 .....	49
图 3.16	白噪声情况鲁棒 $H_{\infty}$ 滤波估计误差 .....	50
图 3.17	色噪声情况鲁棒卡尔曼滤波估计误差 .....	50
图 3.18	色噪声情况鲁棒 $H_{\infty}$ 滤波估计误差 .....	51
图 4.1	卡尔曼滤波与方差受限滤波幅频特性 .....	56
图 4.2	三种滤波的幅频特性对比图 .....	56
图 4.3	几种滤波方法的幅频特性曲线图 .....	61
图 4.4	白噪声情况方差约束混合滤波估计误差 .....	66
图 4.5	色噪声情况方差约束混合滤波估计误差 .....	66
图 4.6	混合滤波迭代算法滤波流程图 .....	74
图 4.7	白噪声情况混合迭代滤波估计误差 .....	75

图 4.8	白噪声情况稳态混合迭代滤波估计误差 .....	75
图 4.9	色噪声情况混合迭代滤波估计误差 .....	76
图 4.10	色噪声情况稳态混合迭代滤波估计误差 .....	76
图 4.11	白噪声情况混合迭代滤波估计误差 .....	77
图 4.12	色噪声情况混合迭代滤波估计误差 .....	78
图 5.1	联邦滤波器的一般结构 .....	81
图 5.2	联邦滤波器结构（有重置） .....	82
图 5.3	联邦滤波器结构（无重置） .....	82
图 5.4	联邦卡尔曼滤波（有重置） .....	83
图 5.5	联邦卡尔曼滤波（无重置） .....	84
图 5.6	联合 $H_{\infty}$ 滤波（有重置） .....	95
图 5.7	联合 $H_{\infty}$ 滤波（无重置） .....	95
图 5.8	联合 $H_{\infty}$ 滤波与联邦卡尔曼滤波误差对比 .....	96
图 5.9	联邦卡尔曼滤波 .....	96
图 5.10	白噪声情况联合卡尔曼与联合 $H_{\infty}$ 滤波对比图 .....	99
图 5.11	色噪声情况联合卡尔曼与联合 $H_{\infty}$ 滤波对比图 .....	100
图 6.1	实验系统硬件结构图 .....	101
图 6.2	角速率陀螺工作原理 .....	102
图 6.3	角速率陀螺 .....	103
图 6.4	加速度计 .....	104
图 6.5	MSC1210EVM 结构框图 .....	106
图 6.6	组合导航系统硬件连接图 .....	107
图 6.7	GPS/DR 组合导航实验系统实物图 .....	108
图 6.8	广域差分接收机模型图 .....	108
图 6.9	软件系统流程图 .....	111
图 6.10	卡尔曼滤波实验结果 .....	112
图 6.11	$H_{\infty}$ 滤波实验结果 .....	113
图 6.12	混合滤波实验结果 .....	113
图 6.13	鲁棒卡尔曼滤波实验结果 .....	114
图 6.14	鲁棒 $H_{\infty}$ 滤波实验结果 .....	114
图 6.15	卡尔曼滤波实验结果 .....	115
图 6.16	$H_{\infty}$ 滤波实验结果 .....	115
图 6.17	混合滤波实验结果 .....	116

---

---

图 6.18 稳态 $H_{\infty}$ 滤波实验结果 .....	116
图 6.19 方差约束混合滤波实验结果 .....	117
图 6.20 稳态混合滤波实验结果 .....	117

## 表 目 录

表 3.1	4000 次迭代耗费 CPU 时间比较.....	37
表 4.1	4000 次迭代耗费 CPU 时间比较.....	66
表 6.1	角速率陀螺指标 .....	102
表 6.2	加速度计参数指标 .....	103
表 6.3	NMEA-0183 信息内容 .....	104
表 6.4	RMC 信息格式 .....	105
表 6.5	观测差值的标准差, 单位: 米 (基于椭球模型) .....	112
表 6.6	观测差值的标准差, 单位: 米 (基于位置误差模型) .....	118

## 独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表和撰写过的研究成果，也不包含为获得国防科学技术大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文题目：组合导航中的鲁棒滤波研究

学位论文作者签名：张立

日期：2008年6月5日

## 学位论文版权使用授权书

本人完全了解国防科学技术大学有关保留、使用学位论文的规定。本人授权国防科学技术大学可以保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅；可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密学位论文在解密后适用本授权书。)

学位论文题目：组合导航中的鲁棒滤波研究

学位论文作者签名：张立

日期：2008年6月5日

作者指导教师签名：王

日期：2008年6月5日



## 第一章 绪论

本章首先说明开展基于鲁棒滤波进行组合导航研究的背景和意义，然后介绍国内外在该领域的研究状况及发展方向，最后简要叙述本论文的主要工作。

### 1.1 课题来源及研究意义

本论文来源于作者参与的某军区联勤部的《星地一体后勤移动指挥系统》、某军区军区司令部的《某军区边防勤务动态监控系统》、某部、某军区《某部东南沿海后勤车辆监控系统》等项目，通过对这些项目中车载导航系统研发，发现系统中运用卡尔曼滤波算法存在一些共性问题，针对这些共性问题，通过新的有效的滤波算法的研究，提出适合组合导航的鲁棒滤波算法和高精度高可靠性的滤波技术。

卫星导航定位系统应用装备主要是以美国的全球定位系统（GPS）和俄罗斯的全球导航卫星系统（GLONASS）为代表的产品，在今后的五到十年内，欧洲的 Galileo 系统和中国的导航卫星系统（CNSS）会加入这一行列，形成全球性导航卫星系统的集合（GNSS）。

据统计，至 2005 年全世界全年的 GPS 产品销售额能达到 600 亿美元，而应用市场最大的是车辆导航、消费产品和跟踪监控，尤其以车辆导航所占份额为最多。车辆导航系统已成为卫星导航定位产品应用的主流。车辆导航系统需要高精度和高可靠性的定位结果。

然而，卫星导航与定位存在一个致命的问题就是当卫星信号被遮挡的时候，定位无法继续，这个问题不仅在北斗一代用户机中存在，在北斗二代和其他的卫星导航系统中同样存在。

这些问题的存在，将严重影响卫星导航产品的应用，尤其是在楼宇比较密集、道路比较狭窄的城市导航应用。据文献[100]和[101]分析，在城市地区，如建筑物、公路隧道、沿街道旁的树木遮盖、水塔、广播塔等都能造成 GPS 信号阻塞和衰减。研究表明，在城市中的商业区如各建筑物高于 10 层，可见 4 星的时间低于 50%、可见 3 星的时间低于 70%；如建筑物为 3-4 层，则可见 3 星的时间也仅为 80% 左右，GPS 在商业区导航的多径效应也降低了导航精度。我国的第二代卫星导航系统类似 GPS 的体制，采用被动定位方式，同步卫星，中低轨卫星并用，因此，这些问题对二代导航系统的应用的影响更加严重。

目前，人们主要采用以惯性导航或其他导航系统来辅助卫星导航系统形成的组合导航来解决这些问题。在组合导航系统中，从方法上说，采用的信息融合方

法主要有概率论方法、D-S 证据理论方法、模糊理论方法、神经网络方法和小波理论方法等，从耦合方式来分，包括紧耦合与松耦合方式。紧耦合方式可提高卫星接收机的抗干扰能力和高动态性能<sup>[53][135-140]</sup>，在卫星部分或全部遮挡情况下，可通过惯性导航方式继续导航，在卫星信号好的情况下，可提高卫星接收机的性能，但是，这种方式要涉及到接收机的内部结构编排<sup>[141]</sup>，对于一般用户是无法对卫星接收机进行内部重新设计的；松耦合方式不需用户对卫星接收机内部了解，在卫星接收机受遮挡时，通过惯性导航继续导航，在卫星接收机不受干扰时，通过信息融合算法提高整体组合导航系统的精度与可靠性。本文讨论的是松耦合方式。

松耦合方式下，组合导航信息融合算法应用最广泛也最成熟的是卡尔曼滤波算法。但是，卡尔曼滤波算法是建立在  $H_2$  估计准则基础上，它要求准确的系统模型和确切已知外部干扰信号的统计特性，对系统中存在的噪声不确定性比较敏感，容易造成滤波发散，为此人们引入了鲁棒滤波技术，比较有代表性的有鲁棒卡尔曼滤波技术<sup>[11][2]</sup>、鲁棒  $H_\infty$  滤波<sup>[3][4][5]</sup>、 $H_2/H_\infty$  混合滤波<sup>[6]</sup>、小波谱方法<sup>[7]</sup>、神经网络方法<sup>[8]</sup>、粒子滤波<sup>[9][10]</sup>、区间卡尔曼滤波<sup>[74][75]</sup>等方法，这些方法都是针对卡尔曼滤波的局限性而提出的，其中与卡尔曼滤波沿袭比较紧密的就是鲁棒卡尔曼滤波、鲁棒  $H_\infty$  滤波、混合  $H_2/H_\infty$  滤波。当然，还可用自适应卡尔曼滤波算法<sup>[142-148]</sup>，但自适应算法各种各样，不能在统一的框架下进行，有些算法还存在收敛时间过慢的缺点，因此本文不对自适应算法讨论。

$H_2$  和  $H_\infty$  是指滤波的两种性能， $H_2$  指标性能追求的是滤波误差方差最小，在高斯环境下，线性最小方差滤波就是一般的卡尔曼滤波，而  $H_\infty$  指标性能目标是使干扰到估计误差能量增益最小，使滤波器对外界干扰不敏感，这两个指标在滤波器设计中，往往是矛盾的，实际情况是两种滤波方法的折衷，即混合  $H_2/H_\infty$  滤波。

$H_2$  和  $H_\infty$  滤波是有着千丝万缕联系。从  $H_\infty$  的理论发展来看，它先是从控制领域发展起来，然后才转移到滤波方面的研究，这和卡尔曼滤波理论发展类似，人们从各个方面来引入  $H_\infty$  滤波，有的学者是从极大极小原理出发得出  $H_\infty$  滤波更具鲁棒性和对参数变化的不敏感性<sup>[11][12]</sup>，有的学者是从代价函数的角度出发得出  $H_\infty$  滤波方法<sup>[13][14]</sup>，但是最能反映  $H_\infty$  滤波与卡尔曼滤波本质联系的是由 Babak Hassibi, Ali H. Sayed, and Thomas Kailath 等提出的方法<sup>[15][16]</sup>，我们知道卡尔曼滤波是利用希尔伯特（Hilbert）空间上的正交投影的方法推导出来的，该方法建立了格林（Krein）空间的概念，格林空间是希尔伯特空间的推广，并推导了在此空间上的正交投影定理，指出在该空间上投影的可能不唯一性，并在此基础上推导了格林空间的卡尔曼滤波定理，证明了  $H_\infty$  滤波是格林空间上的卡尔曼滤波。

因此，理论上证明了  $H_\infty$  滤波与卡尔曼滤波本质是一样的，并且比卡尔曼滤波

更广义,  $H_2$  与  $H_\infty$  仅仅为滤波的不同指标特性, 为基于  $H_\infty$  与  $H_2$  指标特性的滤波算法实现一定精度下的高可靠性的导航定位的应用提供了理论依据, 为研究鲁棒性强, 精度尽可能高, 便于工程实现的滤波算法提供了可能。

## 1.2 课题的研究现状及发展方向

鲁棒  $H_2$  滤波的目的是使估计误差的方差在一定范围内条件下, 滤波尽可能稳健。一种方法是有界协方差方法, 即在任何容许的不确定性情况下, 滤波器所产生的估计误差的协方差是有界的, 这个边界可以通过求解黎卡蒂 (Riccati) 方程进行估计, 同时可以通过凸优化的方法对之进行优化<sup>[17][23]</sup>; 另一种方法称为估计误差协方差上界技术, 即事先设定一个上界, 然后设计滤波器, 使得估计误差的协方差在这个指定的上界内<sup>[24][25]</sup>, 这种方法没有最优性要求, 计算速度较快, 同时满足条件的滤波器不唯一, 因此可以适合于多目标设计。文献[26]将鲁棒  $H_2$  滤波应用于现代航空跟踪问题中, 证明了该方法的有效性。

鲁棒  $H_\infty$  滤波研究对象是具有参数不确定性的系统, 目标是使该系统由噪声输入到估计误差输出的传递函数  $H_\infty$  范数极小化或者小于给定某一值。研究该问题的方法主要有三种, 一种是插值法<sup>[27]</sup>, 它属于频域方法; 另一种是黎卡蒂方程方法<sup>[28]</sup>; 还有一种就是线性矩阵不等式方法<sup>[29]</sup>。黎卡蒂方程方法是目前  $H_\infty$  滤波设计最为普遍的方法, 它一般是将具有参数不确定性的系统转化为只带有一个待定标量参数的确定性系统, 对该系统的滤波问题又可以转化为一个参数化的线性时不变的  $H_\infty$  控制问题, 但是该方法只能得出唯一一个  $H_\infty$  滤波器, 而近些年, 基于线性不等式的方法迅速发展, 该方法不但降低了问题求解的约束, 放松了求解的条件, 而且得到的是一系列满足条件的滤波器, 适合优化多个性能指标<sup>[30][31]</sup>。

$H_\infty$  滤波的设计目标是最小化系统对最差情况的有界能量增益, 并没有考虑估计误差方差等其他滤波性能, 往往达不到工程上要求的精度。系统如果同时受到白噪声和能量有界干扰信号的作用时,  $H_2$  和  $H_\infty$  滤波都不能很好的对系统进行状态估计, 因此, 近些年, 基于两种性能指标的混合  $H_2/H_\infty$  滤波出现了许多研究成果<sup>[32][33][34]</sup>, 研究混合  $H_2/H_\infty$  滤波主要有两种方法, 一种是基于线性矩阵不等式的方法, 该方法是满足  $H_\infty$  范数有界的条件下, 优化系统的  $H_2$  性能<sup>[35][36]</sup>, 另一种方法是利用协方差配置理论<sup>[37]</sup>, 不追求  $H_2$  指标最优, 而只要求系统的协方差或方差小于指定的上界, 来优化系统的  $H_\infty$  指标<sup>[38][39][40]</sup>。

近年来, 非线性滤波成为人们又一研究热点, 出现了  $H_2$  非线性滤波和  $H_\infty$  非线性滤波。  $H_2$  非线性滤波一般有两种方法, 一种是广义卡尔曼滤波方法(Extended

Kalman Filter), 即系统在先前状态估计的基础上, 通过一步步线性化, 然后再采用传统的卡尔曼滤波方法<sup>[41][42][43]</sup>, 另一种是线性化卡尔曼滤波方法, 即将非线性系统进行局部线性化, 然后利用线性系统的卡尔曼滤波方法来进行状态估计<sup>[44]</sup>。 $H_{\infty}$ 非线性滤波类似广义卡尔曼滤波方法, 是将非线性函数在滤波值上进行泰勒展开<sup>[45]</sup>, 还有基于耗散结构系统理论的方法<sup>[46]</sup>和基于对策论的方法<sup>[47][48]</sup>。针对非线性滤波, 有的学者进行了新的探索, 有人将小波理论和传统的谱方法结合, 提出了小波谱方法, 有人将进化规划理论和区间代数理论结合, 提出了区间卡尔曼滤波。在这方面探索比较成功和应用比较广泛的是粒子滤波算法, 它和传统的扩展卡尔曼滤波相比, 表现出很优越的性能<sup>[49][50]</sup>。

鲁棒滤波在组合导航方面的研究, 主要集中在 GPS/INS 组合导航, 文献[51-54]都是利用  $H_{\infty}$  滤波在 GPS/INS 组合导航上的应用研究, 文献[55]针对我国北斗双星系统的误差源建模成果未知, 建立了惯导/双星定位的系统模型, 并且比较了  $H_{\infty}$  滤波、最小二乘滤波和最小均方滤波的效果, 得出  $H_{\infty}$  滤波最好的结论。这些方法都是应用纯  $H_{\infty}$  滤波, 通过不断仿真的方式获得滤波稳健性参数的选择, 需要很强的经验性, 工程实现难度大。

智能交通系统是近年来发展迅速的一个新兴科技领域, 它的目标是综合应用最新的电子、通信、计算机以及控制技术, 使交通系统在减少拥挤、减轻污染和减小对环境影响的同时更安全、更有效的运行<sup>[56][57]</sup>。车辆的定位与导航是智能交通系统中的核心部分。航位推算 (Dead-Reckoning) 和 GPS 是目前车辆导航领域应用最为广泛的两种定位技术。航位推算是一种独立定位技术, 短时间内保持较高精度, 并且不受外界因素影响, 但是它只能确定相对位置, 要求车辆的初始位置已知, 并且定位的误差随推算过程积累。GPS 定位精度不随时间积累, 但是一旦信号受到遮挡, 则无法定位。结合两种定位的优点, 构成 GPS/DR 组合导航系统, 就能达到互相取长补短, 提高定位精度和可靠性<sup>[58]-[61]</sup>。GPS/DR 组合导航滤波方法主要有集中式卡尔曼滤波和分布式卡尔曼滤波。但是集中式卡尔曼滤波组合导航系统具有计算量大、容错性能差、无法处理串联滤波的解等问题, 人们开始研究分布式卡尔曼滤波技术, 文献<sup>[62-65]</sup>中提出的各种分散滤波技术虽然可以有效地减少集中式卡尔曼滤波技术的计算量问题, 但却没有充分实现和利用系统的容错性能。N.A.Carlson 在文献[66-68]中提出了联邦滤波算法, 利用信息分配原则以消除各子状态估计的相关性, 进行简单、有效的融合, 而得到全局最优或次优估计, 该方法的主滤波器的融合周期可选定, 从而计算量可大大减少, 并且由于信息分配因子的引入使得系统的容错性得到很大改善。目前, 利用联邦式滤波器实现多传感器信息融合已成为国际上导航和制导技术领域内的一个研究重点, 并

被美国空军列入其发展新一代容错导航系统的“公共卡尔曼滤波器”计划[69]。文献 [69] 提出了 GPS/DR 组合定位系统联邦滤波方案，文献 [70] 针对 SINS/GPS/DNS/TAN 提出了联邦滤波算法的 4 种实现模式，文献[71]则利用联邦滤波器设计了 SINS/RDSS/GPS 组合导航系统，以上联邦滤波器都是基于卡尔曼滤波算法实现的，对滤波噪声的统计特性还是基于高斯的，易受干扰。

总之，鲁棒滤波算法是近些年来发展起来的滤波算法，但大多都停留在理论研究阶段，算法的研究由原来的纯粹  $H_\infty$  指标进入到  $H_2/H_\infty$  混合指标的研究，由基于黎卡蒂方程的解法到基于线性矩阵不等式解法的研究；在工程中，为克服滤波发散性的纯粹  $H_\infty$  指标算法的应用比较多，且主要集中在 GPS/INS 组合导航方向上，但还不成熟， $H_2/H_\infty$  混合指标算法主要是在仿真阶段，工程上的应用很少见。鲁棒滤波算法运用在 GPS/DR 组合导航应用上的研究非常少。所以，鲁棒滤波算法，特别是  $H_2/H_\infty$  混合算法以及工程应用研究是很迫切的，它是实现一定精度下的高可靠性的导航定位研究的一个方向，鲁棒性强，精度尽可能高的，便于工程实现的滤波算法和与之相应的传感器信息融合结构研究还处在方兴未艾的阶段。

高精度、高可靠性的定位导航服务已成为用户的迫切需要。我国正在进行第二代北斗卫星导航定位系统的研制工作，采取类似 GPS 的系统体制，该系统的研制成功将会促进导航定位技术的发展。本课题针对用户的迫切需求，着重研究对噪声不敏感的鲁棒滤波算法，拓展联邦滤波器这个框架性的组合导航滤波方式在噪声不确定性情况下的研究范畴，为车辆导航中运用稳健的滤波算法提供必要的理论基础，也为实际工程的需要提供实用有效的滤波算法。

### 1.3 数学基础

本课题中应用了线性矩阵不等式相关理论和一些数学定理，这里作一简要介绍。

#### 1.3.1 线性矩阵不等式

##### 1 定义

一个线性矩阵不等式 (LMI, Linear Matrix Inequality) 就是具有形式：

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0 \quad (1-1)$$

的一个表达式，其中  $x_1, \dots, x_m$  是  $m$  个实数变量，称为线性矩阵不等式(2-6)的决策变量， $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T \in R^m$  是由决策变量构成的向量，称为决策向量，

$F_i = F_i^T \in R^{n \times n}, i = 0, 1, \dots, m$  是一组给定的实对称矩阵，(1-1)中的“ $<$ ”指的是矩阵

$F(x)$  是负定的。

在实际问题中，问题的变量是以矩阵的形式出现的，我们可以通过一定变形来构成矩阵不等式形式。设  $E_1, E_2, \dots, E_M$  是  $S_n = \{M : M = M^T \in R^{n \times n}\}$  中的一组基，则对于任意对称矩阵  $X \in R^{n \times n}$ ，存在  $x_1, \dots, x_M$ ，使得  $X = \sum_{i=1}^M x_i E_i$ ，然后代入含矩阵的不等式中，例如矩阵不等式：

$$F(x) = A^T X + XA + Q < 0 \quad (1-2)$$

我们可以化为：

$$\begin{aligned} F(x) &= F\left(\sum_{i=1}^M x_i E_i\right) \\ &= A^T \left(\sum_{i=1}^M x_i E_i\right) + \left(\sum_{i=1}^M x_i E_i\right) A + Q \\ &= Q + x_1 (A^T E_1 + E_1 A) + \dots + x_M (A^T E_M + E_M A) < 0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

线性矩阵不等式通常有椭球算法和内点算法两种解法，其中椭球算法，其算法思想类似于整数规划中的分支定界方法。另一种算法就是 1988 年 Nesterov 和 Nemirovskii 提出的内点算法，该算法思想类似约束优化问题的罚函数法，正是这种算法的出现，使得线性矩阵不等式成为重要的工具，本文所使用的 MATLAB 的 LMI 解算方法都是基于内点算法的。两种算法的详细内容参考文献[79][80]。

## 2 标准的线性矩阵不等式<sup>[81]</sup>

1、可行性问题(LMIP)：对给定的线性矩阵不等式  $F(x) < 0$ ，检验是否存在  $x$ ，使得  $F(x) < 0$  成立的问题称为线性矩阵不等式的可行性问题。如果存在这样的  $x$ ，则线性矩阵不等式是可行的，否则不可行。

2、特征值问题(EVP)：该问题是在一个线性矩阵不等式约束下，最小化最大特征值问题。这样的问题也可以写成一个等价问题：

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ \text{s.t} \\ F(x) < 0 \end{aligned}$$

本文所有的线性矩阵不等式问题最终归结为标准的线性矩阵不等式，这些标准的线性矩阵不等式有现成软件工具箱来求解。

### 1.3.2 有关公式与定理

在本文的研究中，大量运用了线性矩阵不等式来解决问题，然而一些问题并不是直接以线性矩阵不等式给出的，下面介绍的公式与定理为运用线性矩阵不等

式和作矩阵的有关变形架起了桥梁。

### 1 Schur 基本公式

给定矩阵  $A \in R^{r \times r}$ ,  $B \in R^{r \times (n-r)}$ ,  $C \in R^{(n-r) \times r}$ ,  $D \in R^{(n-r) \times (n-r)}$ , 并且方阵  $A$  可逆, 则有下式成立:

$$(1) \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

$$(2) \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

$$(3) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -A^{-1}B \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \quad (1-6)$$

### 2 Schur 补定理

考虑一个矩阵  $S \in R^{n \times n}$ , 并将  $S$  进行分块:

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \text{ 其中的 } S_{11} \text{ 是 } r \times r \text{ 维的。假定 } S_{11} \text{ 是非奇异的, 则 } S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12}$$

称为  $S_{11}$  在  $S$  中的 Schur 补。对于 Schur 补, 以下三个条件是等价的 (“ $<$ ” 同时换成 “ $\geq$ ” 也成立):

- (1)  $S < 0$ ;
- (2)  $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- (3)  $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$

### 3 离散时间有界实引理

考虑如下稳定可测线性时不变离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \\ y(k) = Cx(k) + Dw(k) \\ z(k) = Lx(k) \end{cases} \quad (1-8)$$

其中,  $x(k) \in R^n$  为状态向量,  $y(k) \in R^m$  为量测向量,  $z(k) \in R^q$  为要估计的输出量,  $A, B, C, D, L$  为适当维数的矩阵,  $w(k)$  为噪声。

对于系统(1-8), 我们定义增益  $\Lambda_{ee} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|y\|_2$ , 则有如下定理。

对于给定的常数  $\gamma > 0$  和系统(1-8), 以下条件等价:

- (1) 系统(1-8)是渐近稳定的, 且系统的增益  $\Lambda_{ee} < \gamma$ 。
- (2) 存在一个实对称矩阵  $P > 0$ , 使得

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (1-9)$$

有界实引理是利用线性矩阵不等式来求解问题的非常重要的一个定理，在本文的第四章运用了该定理。

利用 Schur 补定理，可以将(1-9)写成如下形式：

$$\begin{pmatrix} -P^{-1} & 0 & A & B \\ 0 & -I & C & D \\ A^T & C^T & -P & 0 \\ B^T & D^T & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (1-10)$$

而(1-10)是线性矩阵不等式，可利用软件工具箱来求解。

#### 4 李雅普诺夫稳定性定理

##### (1) 连续系统

对于系统  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ ，如果矩阵  $A$  的所有特征值在左开半平面（ $A$  稳定）当且仅当存在矩阵  $P$ ，满足：

$$PA^* + AP < 0, P > 0, * \text{ 为共轭转置} \quad (1-11)$$

##### (2) 离散系统

对于系统  $\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k)$ ，如果矩阵  $A$  的所有特征值在单位圆内（ $A$  稳定）当且仅当存在矩阵  $P$ ，满足：

$$APA^* - P < 0, P > 0, \quad (1-12)$$

李雅普诺夫稳定性定理是一个基础性定理，是本文的第四章方差约束混合滤波算法推导的一个基础定理。

#### 5 矩阵相关定理

##### (1) 求逆引理

设矩阵  $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$  为任意矩阵，其中， $A_{11}, A_{22}$  非奇异，则有等式成立：

$$(A_{11} \mp A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1} \pm A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} \mp A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \quad (1-13)$$

$$A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} \mp A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} = (A_{11} \mp A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \quad (1-14)$$

本引理在本文第五章的联合  $H_\infty$  滤波算法推导证明中经常用到。

(2) 定理<sup>[78]</sup>1-1 设  $A$  和  $B$  为两个  $n$  阶 Hermite 阵， $A > 0$ ， $B \geq 0$ ，则  $A > B$ ，当且仅当  $\lambda_{\max}(BA^{-1}) < 1$ ， $\lambda_{\max}(\bullet)$  表示矩阵的最大特征值。

(3) 矩阵迹的性质 1  $x^T Ax = \text{trace}(Axx^T)$ ， $A \in R^{n \times n}$ ， $x \in R^{n \times 1}$ ， $\text{trace}(\bullet)$  表示矩阵的迹。

(4) 矩阵迹的性质 2  $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ ， $A \in R^{n \times m}$ ， $B \in R^{m \times n}$ 。



---

---

## 1.4 本文的主要工作

### 1.4.1 主要研究成果

1、推导了反映鲁棒程度的 $\gamma$ 参数的迭代算法,降低了滤波的保守性,为了简化计算,提高运算效率,利用线性矩阵不等式,推导了稳态 $H_\infty$ 滤波公式。

2、提出了基于线性矩阵不等式的方差约束混合滤波算法,这是本文的创新点之一。仿真表明算法在一定精度下缩短了计算时间,对工程实现具有实用价值。

3、证明了传统的混合 $H_2/H_\infty$ 滤波理论算法下界的存在性。提出了新的 $H_2/H_\infty$ 混合滤波算法,该算法不需对噪声作过多建模,仅对两种滤波的增益矩阵进行加权求和,是一种迭代形式的混合滤波算法,这是本文的创新点之二。

4、建立了基于椭球面模型的GPS/DR组合导航滤波模型,并根据理论和实际的近似,得到了含不确定性参数系数矩阵的球面滤波模型,使鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒 $H_\infty$ 滤波算法得到了应用。

5、提出了联合 $H_\infty$ 滤波算法,证明了联合 $H_\infty$ 滤波是联邦卡尔曼滤波的推广,联邦卡尔曼滤波是联合 $H_\infty$ 滤波的特例的结论,与 $H_\infty$ 滤波与卡尔曼滤波的关系形成了统一,这是本文的创新点之三。

6、搭建了GPS/DR组合导航实验系统,验证了本文提出的有关滤波算法。

### 1.4.2 主要研究内容

第一章为绪论,综述课题的来源和研究的意义,概括了鲁棒滤波理论及其在组合导航中的应用,指出本文的研究成果和研究内容。

第二章主要论述GPS、DR原理, GPS/DR系统的硬件结构,重点论述GPS/DR组合导航系统的滤波模型的建立,为展开滤波算法研究奠定了基础。

第三章介绍组合导航中的 $H_\infty$ 滤波的理论,并与卡尔曼滤波理论作对比分析,论述扩展卡尔曼滤波算法、扩展 $H_\infty$ 滤波算法,鲁棒卡尔曼滤波算法、鲁棒 $H_\infty$ 滤波算法以及稳态滤波算法,并对比各种滤波算法的滤波效果。

第四章论述组合导航中的混合 $H_2/H_\infty$ 滤波理论,论述约束方差滤波,即基于线性矩阵不等式的离散时间约束方差混合滤波算法,并对算法进行仿真;论述通常的混合滤波算法,并证明滤波的存在性;提出迭代形式的混合滤波算法,并通过仿真,研究该算法的有效性。

第五章论述组合导航中的联合滤波算法,提出联合 $H_\infty$ 滤波算法,证明其与联邦卡尔曼滤波的统一性,并进行算法的对比仿真研究。

第六章论述 GPS/DR 组合导航实验系统的搭建过程和实验方案，对文中提出的算法进行了实验验证，并分析其精度和在组合导航中应用的有效性。

第七章为总结与展望。

## 第二章 GPS/DR 组合导航系统

### 2.1 引言

任何一种导航设备或系统都是完成特定的导航需要的，通常，每种单一的导航设备都有其局限性，就陆地车辆导航应用而言，航位推算（Dead-Reckoning, 简称 DR）和全球定位系统（GPS）或其他卫星导航系统，例如北斗系统，是车辆定位与导航系统最常用的两种定位技术。针对卫星定位和 DR 各自的特点，车辆定位系统常采用卫星定位/DR 组合定位方案或单独使用 DR 系统定位方案。目前，车辆导航中，通常使用的是 GPS/DR 卫星导航系统，一方面，采用信息融合技术来组合 GPS 和 DR 系统，使得 GPS/DR 组合后系统的性能要优于各个子系统的性能，另一方面，当 GPS 接收机定位精度很差或无法定位时，则由 DR 系统获得定位信息。但是，DR 系统的误差会随时间而积累，这需要 GPS 系统或其他卫星导航系统来校正。

本章系统的论述了 GPS/DR 组合导航系统的硬件结构和三种滤波数学模型，是以下几章研究的基础。

### 2.2 GPS 定位原理

GPS 卫星导航系统本质上是一种无源测距系统，该系统包括地面监测与运控部分，空间部分和用户接收机。用户接收机捕获卫星播发的测距信号，使得本地参考信号与卫星信号的测距码同步，载波同频，由此来获得卫星到用户机信号的传播时延  $\tau$ ，则卫星到用户机的距离为：

$$r = c\tau \quad (2-1)$$

其中  $r$  为距离， $c$  为电波传播速度，实际上用户机和卫星存在时钟差  $\Delta t$ ，此时测得的时延  $\tau'$  及相应的距离  $\rho$  并不是真正的传播时延  $\tau$  和距离  $r$ ， $\rho$  称为伪距，则

$$\rho = r + c\Delta t \quad (2-2)$$

因此，用户测得对第  $i$  颗卫星的伪距为：

$$\rho^i = r^i + c\Delta t \quad (2-3)$$

其中  $r^i = \sqrt{(x-x_s^i)^2 + (y-y_s^i)^2 + (z-z_s^i)^2}$ ， $x, y, z$  和  $x_s^i, y_s^i, z_s^i$  分别为用户机和卫星  $i$  位置坐标，测量伪距存在四个未知数  $x, y, z, \Delta t$ ，需要测量四颗或四颗以上卫星的伪距才能解出未知数，联立求解：

$$\rho^i = \sqrt{(x-x_s^i)^2 + (y-y_s^i)^2 + (z-z_s^i)^2} + c\Delta t (i=1,2,3,4) \quad (2-4)$$

则可获得用户位置坐标。

通过测量载波频率的多普勒频移可获得伪距的变化率，从而可建立起另外四个方程，即：

$$\dot{\rho}' = \frac{(x-x_s')(\dot{x}-\dot{x}_s')+(y-y_s')(\dot{y}-\dot{y}_s')+(z-z_s')(\dot{z}-\dot{z}_s')}{\sqrt{(x-x_s')^2+(y-y_s')^2+(z-z_s')^2}} + c\Delta f (i=1,2,3,4) \quad (2-5)$$

其中， $x_s', y_s', z_s'$  和  $\dot{x}_s', \dot{y}_s', \dot{z}_s'$  分别为卫星的位置和速度， $\dot{\rho}'$  可由多普勒频移求得， $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \Delta f$  为用户机速度和时钟漂移，联立这四个方程，即可求得用户机的速度。

### 2.3 DR 原理

在一定范围内，车辆的运动可以近似看作是在地表上的二维运动，如果车辆的起始位置和所有时刻的位移已知，则通过在初始位置上累加位移向量的方法就可计算出车辆的位置，这就是车辆 DR 定位原理<sup>[82]</sup>。采用东北坐标系，则车辆的位置就可以由东向、北向位置坐标  $(x, y)$  来描述。如图 2.1 所示，在  $t_0$  时刻，车辆的初始位置为  $(x_0, y_0)$ ，则在  $t_n (n \geq 1)$  时刻，车辆的位置  $(x_n, y_n)$  可按下列公式计算：

$$\begin{cases} x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \sin \theta_i \\ y_n = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cos \theta_i \\ \theta_n = \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \theta_i \end{cases} \quad (2-6)$$

式中， $\theta_i$  是  $t_i$  时刻车辆的航向角（和北方向的夹角）， $d_i$  是  $t_i$  到  $t_{i+1}$  时刻车辆行驶过的距离， $\Delta \theta_i$  是  $t_i$  到  $t_{i+1}$  时刻车辆航向的变化量。当采样周期恒定时，上面的公式可写为：

$$\begin{cases} x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i T \sin \theta_i \\ y_n = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} v_i T \cos \theta_i \\ \theta_n = \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i T \end{cases} \quad (2-7)$$

式中， $v_i$  是  $t_i$  时刻车辆的速度， $\omega_i$  是  $t_i$  时刻车辆的角速度，若采样周期  $T$  很小，则在每个采样周期内，可认为  $v_i$  和  $\omega_i$  是常量。

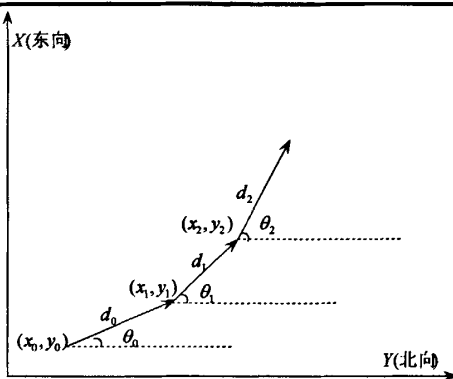


图 2.1 航位推算原理示意图

采用这种航位推算法得到的是平面直角坐标，为了能采用经纬度表示还需把平面坐标转化为大地坐标，如式 2-8A 表示：

$$\begin{cases} \varphi_n = \varphi_{n-1} + \frac{d_{n-1} \cos \theta_{n-1}}{M} \\ \lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{d_{n-1} \sin \theta_{n-1}}{N} \end{cases} \quad (2-8A)$$

其中  $M, N$  分别为地球子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径， $\varphi_n, \lambda_n$  为  $T_n$  时刻的纬度和经度坐标，当将地球椭球面退化为球面时，则(2-8A)化为(2-8B)，其中  $R$  为地球半径。

$$\begin{cases} \varphi_n = \varphi_{n-1} + \frac{d_{n-1} \cos \theta_{n-1}}{R} \\ \lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{d_{n-1} \sin \theta_{n-1}}{R} \end{cases} \quad (2-8B)$$

## 2.4 GPS/DR 系统的硬件结构

GPS/DR 导航定位系统主要由 GPS 接收机、压电陀螺仪、里程计、车载计算机、液晶显示屏、控制键盘及附件组成。压电陀螺仪、里程计、车载计算机及相应的软件组成航位推算子系统(DR 系统)，当车载 GPS 接收机不能正常接收 GPS 卫星位置而无法定位时，GPS/DR 导航定位系统启用 DR 定位功能，使车载定位系统仍能正常导航定位。当 GPS 接收机能正常定位时，用 GPS 精确定位结果辅助 DR 系统，以确保 DR 系统中陀螺仪的方向精度，同时，通过滤波模型实现 GPS/DR 定位信息的最优融合。

根据车载计算机的不同，GPS/DR 的硬件结构大致分为两种，一种是以单片机为核心的，一种是以带操作系统处理器为核心的。

## 1 单片机为核心

GPS/DR 系统的硬件包括里程计、压电陀螺仪、GPS 接收机、单片机、用户界面（键盘、液晶显示屏）、通讯接口、数据采集单片机及电源等。如图 2.2 所示：

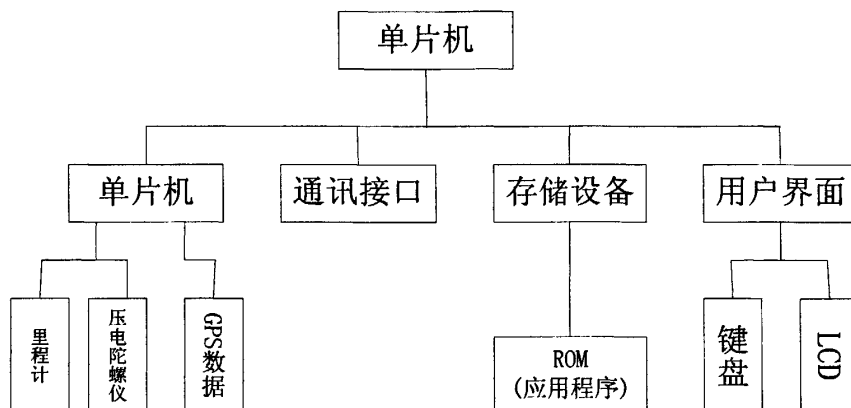


图 2.2 单片机硬件结构图

这种结构中用单片机采集 GPS 和 DR 两组不同采样频率的模拟和数据信号，再以另一个单片机作为一个算法计算芯片运行滤波算法，同时外接键盘和液晶显示。两个 CPU 间用双口 RAM 作为通讯手段。该硬件结构优点是：由于使用了两个单片机，它们可以集中在一个电路板上，所以该方案具有成本低廉、体积小巧，而且使用灵活的优点，它可以装在手持机上，也能装在车载计算机上；缺点是：由于使用单片机处理数据，当数据量大和存在复杂矩阵运算时，单片机处理不及，易造成死机，并且当需要增加新功能时，单片机能力有限，不能过多增加。

## 2 带操作系统计算机（处理器）为核心

单片机主要完成 GPS 信号和陀螺仪、里程计信号的采集，并行采集陀螺仪、里程计信号，串行采集 GPS 信号，并将采集的信号存储在双口 RAM 的不同地址区域，通过串行口发送给便携机，便携机（处理器）读入数据用于滤波运算，最后将运算结果显示在显示器上。如图 2.3 所示：

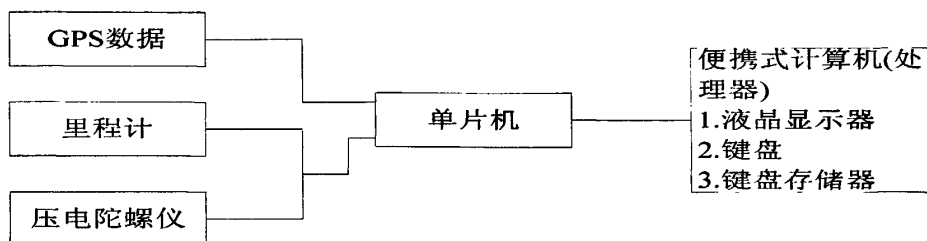


图 2.3 带操作系统计算机（处理器）硬件结构图

该结构的优点在于利用便携式计算机（处理器）处理数据速度快，能大量处理数据，也易于以后增加新功能；缺点是便携式计算机（处理器）成本较高，并且使用方式也没有第一种结构灵活。

另外，由于压电陀螺仪的误差漂移会随时间积累大，也可以考虑用磁罗盘代替压电陀螺仪，磁罗盘优点在于它不会随时间误差累积，缺点是受周围环境影响很大，由于车体磁化程度、道路环境如隧道、钢铁大桥、路边大型钢铁结构均会引起磁罗盘的航向测量误差。压电陀螺仪优点是受外界影响很小。这些，可根据实际情况来选择。

## 2.5 GPS/DR 组合导航系统的滤波模型

### 2.5.1 基于“当前”统计模型的滤波模型

研究载体的运动滤波问题，首先需要建立比较合理、准确的运动模型。在机动目标的运动模型中，运用于车载导航中比较好的就是当前“统计”模型<sup>[99]</sup>，本节将利用该模型建立 GPS/DR 的滤波模型。

#### 1、状态方程模型建立

当前“统计”模型的意义在于，在一定的应用场合，人们所关心的是机动加速度的“当前”概率密度，即目标机动的当前可能性，当机动目标正以某一加速度机动时，它在下一瞬时的加速度的取值范围是有限的，而且只能在“当前”加速度的领域内，即：

$$a_1(t) = \bar{a}(t) + a(t) \quad (2-9)$$

$$\dot{a}(t) = -\frac{1}{\tau} a(t) + w(t) \quad (2-10)$$

其中， $a_1(t)$  是机动加速度， $\bar{a}(t)$  是机动加速度“当前”均值，在每一采样时间内为常数， $a(t)$  是零均值的有色加速度噪声， $\tau$  为机动加速度变化率的相关时间常数， $w(t)$  是零均值高斯白噪声。根据(2-9)，(2-10)可得：

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) &= \dot{a}(t) \\ &= -\frac{1}{\tau} a(t) + w(t) \\ &= -\frac{1}{\tau} [a_1(t) - \bar{a}(t)] + w(t) \\ &= -\frac{1}{\tau} a_1(t) + \frac{1}{\tau} \bar{a}(t) + w(t) \end{aligned} \quad (2-11)$$

令  $w_1(t) = -\frac{1}{\tau} \bar{a}(t) + w(t)$ ，则有：

$$\dot{a}_1(t) = -\frac{1}{\tau} a_1(t) + w_1(t) \quad (2-12)$$

$w_1(t)$  为均值为  $-\frac{1}{\tau} \bar{a}(t)$  的高斯白噪声。定义 GPS/DR 组合导航系统的状态变量为  $x = [x_e, v_e, a_e, x_n, v_n, a_n]^T$ ，其中  $x_e, x_n$  分别为车辆东向和北向的位置分量； $v_e, v_n$  分别为车辆东向和北向的速度分量； $a_e, a_n$  分别为车辆东向和北向的加速度分量，根据 (2-12)，可以得到组合系统状态的微分方程为：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) + w(t) \quad (2-13)$$

其中：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{a_e}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{a_n}} \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\tau_{a_e}} \bar{a}_e \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\tau_{a_n}} \bar{a}_n \end{bmatrix}, \quad w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{a_e} \\ 0 \\ 0 \\ w_{a_n} \end{bmatrix}, \quad w_{a_e}, w_{a_n} \text{ 分别为系统噪声, } \tau_{a_e}, \tau_{a_n} \text{ 分别为车辆东向和北向机动加速度变化率的相关时间常数, } \bar{a}_e, \bar{a}_n \text{ 分别为车辆东向和北向机动加速度分量的“当前”均值。设采样周期为 } T, \text{ 将系统状态方程离散化, 则得到离散的系统状态方程为:}$$

别为系统噪声， $\tau_{a_e}, \tau_{a_n}$  分别为车辆东向和北向机动加速度变化率的相关时间常数， $\bar{a}_e, \bar{a}_n$  分别为车辆东向和北向机动加速度分量的“当前”均值。设采样周期为  $T$ ，将系统状态方程离散化，则得到离散的系统状态方程为：

$$x(k) = A(k)x(k-1) + u(k) + w(k) \quad (2-14)$$

其中：

$$x(k) = [x_e(k), v_e(k), a_e(k), x_n(k), v_n(k), a_n(k)]^T$$

$$A(k) = \text{diag}[A_e(k) \quad A_n(k)] \quad (2-14-1)$$

令  $\alpha_e = -\frac{1}{\tau_{a_e}}$ ， $\alpha_n = -\frac{1}{\tau_{a_n}}$ ，则  $A_e(k)$   $A_n(k)$  分别为：

$$A_e(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & \alpha_e^{-2}(-1 + \alpha_e T + e^{-\alpha_e T}) \\ 0 & 1 & (1 - e^{-\alpha_e T})\alpha_e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-\alpha_e T} \end{bmatrix}$$

$$A_n(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & \alpha_n^{-2}(-1 + \alpha_n T + e^{-\alpha_n T}) \\ 0 & 1 & (1 - e^{-\alpha_n T})\alpha_n^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-\alpha_n T} \end{bmatrix}$$

$$u(k) = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6]^T \quad (2-14-2)$$



$$u_1 = [-T + 0.5\alpha_e T^2 + (1 - e^{-\alpha_e T})\alpha_e^{-1}] \alpha_e^{-1} \bar{\alpha}_e$$

$$u_2 = [T - (1 - e^{-\alpha_e T})\alpha_e^{-1}] \bar{\alpha}_e$$

$$u_3 = (1 - e^{-\alpha_e T}) \bar{\alpha}_e$$

$$u_4 = [-T + 0.5\alpha_n T^2 + (1 - e^{-\alpha_n T})\alpha_n^{-1}] \alpha_n^{-1} \bar{\alpha}_n$$

$$u_5 = [T - (1 - e^{-\alpha_n T})\alpha_n^{-1}] \bar{\alpha}_n$$

$$u_6 = (1 - e^{-\alpha_n T}) \bar{\alpha}_n$$

## 2、观测方程模型建立

设系统的观测量为：GPS 输出的东向位置信息  $e(t)$ 、北向位置信息  $n(t)$ 、角速率陀螺的输出  $\omega(t)$ ，里程计（或加速度计）在一个采样周期内输出的距离  $s(t)$ 。根据 DR 原理(2-7)，则观测量与状态变量之间有如下关系：

$$e(t) = x_e(t) + v_1, \quad n(t) = x_n(t) + v_2 \quad (2-15)$$

$$\omega(t) = \frac{\partial}{\partial t} [\tan^{-1}(\frac{v_e}{v_n})] + \varepsilon_\omega = \frac{v_n a_e - v_e a_n}{v_e^2 + v_n^2} + \varepsilon_\omega \quad (2-16)$$

$$s = T \sqrt{v_e^2 + v_n^2} + \varepsilon_s \quad (2-17)$$

因此，系统连续的观测方程为：

$$z = \begin{bmatrix} e \\ n \\ \omega \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ x_n \\ \frac{v_n a_e - v_e a_n}{v_e^2 + v_n^2} \\ T \sqrt{v_e^2 + v_n^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varepsilon_\omega \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

其中， $v_1, v_2$  分别为 GPS 接收机输出的东向位置和北向位置的观测噪声， $\varepsilon_\omega$  为陀螺漂移， $\varepsilon_s$  为里程计（或加速度计）的观测噪声。将观测方程离散化，则得到系统离散的观测方程为：

$$z(k) = h[x(k)] + v(k) \quad (2-19)$$

$$\text{其中, } z(k) = \begin{bmatrix} e_k \\ n_k \\ \omega_k \\ s_k \end{bmatrix}, h[x(k)] = \begin{bmatrix} x_{e(k)} \\ x_{n(k)} \\ \frac{v_{n(k)} a_{e(k)} - v_{e(k)} a_{n(k)}}{v_{e(k)}^2 + v_{n(k)}^2} \\ T \sqrt{v_{e(k)}^2 + v_{n(k)}^2} \end{bmatrix}, v(k) = \begin{bmatrix} v_{1(k)} \\ v_{2(k)} \\ \varepsilon_{\omega(k)} \\ \varepsilon_{s(k)} \end{bmatrix}$$

### 2.5.2 基于椭球模型的滤波模型

虽然“当前”统计模型在一定应用场合是合理的，但是其驱动噪声和机动时间常数是事先人为设定，但在实际中这些参数很难确定，甚至是时变的，因此，本节利用目标在地球曲表面的运动与地球本身定义的坐标系，建立不依赖运动目标机动特性的滤波方程。

### 1、状态方程模型建立

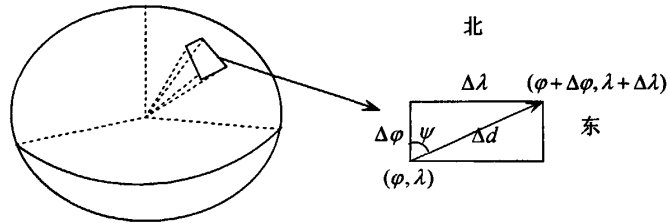


图 2.4 GPS/DR 椭球模型

如图 2.4 所示，可认为车辆在地球二维椭球曲表面上行进（此时不考虑高程），当车辆有微移  $\Delta d$  时，则车辆在经纬度上相应发生纬度微移  $\Delta\varphi$ ，经度微移  $\Delta\lambda$ ，按大地坐标，车辆由坐标  $(\varphi, \lambda)$  微移至坐标  $(\varphi + \Delta\varphi, \lambda + \Delta\lambda)$ 。设地球子午圈曲率半径为  $M$ ，由于纬度微移所对应的微弧长度为  $M\Delta\varphi$ ，根据图 2.4，有：

$$M\Delta\varphi = \Delta d \cos\psi \quad (2-20)$$

其中  $\psi$  为载体首向角（运动方向与正北方向夹角）。设地球卯酉圈曲率半径为  $N$ ，由于经度微移所对应的弧所在圆与赤道为同心圆，所以，我们可知它所在圆半径为  $N \cos\varphi$ ，根据图 2.4，有：

$$N \cos\varphi \Delta\lambda = \Delta d \sin\psi \quad (2-21)$$

综合以上分析，我们可得下式：

$$\begin{cases} M\Delta\varphi = \Delta d \cos\psi \\ N \cos\varphi \Delta\lambda = \Delta d \sin\psi \end{cases} \quad (2-22)$$

对(2-22)两边除以  $\Delta t$ ，并令  $\Delta t \rightarrow 0$ ，则可得到

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{v \cos\psi}{M} \\ \dot{\lambda} = \frac{v \sin\psi}{N \cos\varphi} \end{cases} \quad (2-23)$$

其中， $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$  为速度，根据文献[85]，可知：

$$\begin{cases} M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \\ N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \end{cases} \quad (2-24)$$

代入(2-23), 可得,

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{v \cos \psi (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1-e^2)} \\ \dot{\lambda} = \frac{v \sin \psi (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi} \end{cases} \quad (2-25)$$

由于测量元件存在误差, 从而导致运动体位置、速度、航向存在误差, 因此, 将(2-25)全微分展开, 我们可以得到:

$$\begin{cases} \delta\dot{\varphi} = \delta v \frac{\cos \psi (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1-e^2)} - \frac{v(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \sin \psi}{a(1-e^2)} \delta\psi \\ \quad - \frac{3e^2 v \cos \psi (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \sin \varphi \cos \varphi}{a(1-e^2)} \delta\varphi \\ \delta\dot{\lambda} = \delta v \frac{\sin \psi (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi} + \frac{v(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \cos \psi}{a \cos \varphi} \delta\psi \\ \quad + \frac{v \sin \psi \sin \varphi [(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} - e^2 (1-e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} \cos^2 \varphi]}{a \cos^2 \varphi} \delta\varphi \end{cases} \quad (2-26)$$

下面, 将(2-26)离散化。设采样时间间隔为 $T$ , 而且 $T$ 很小, 则纬度、经度、位移在 $t = kT$ 时的采样值为 $\varphi(k), \lambda(k), d(k)$ , 因为:

$$\frac{d}{dt}(a \cos \varphi \delta\lambda) = a \cos \varphi \delta\dot{\lambda} - a \sin \varphi \delta\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\text{则: } a \cos \varphi \delta\dot{\lambda} = \frac{d}{dt}(a \cos \varphi \delta\lambda) + a \sin \varphi \delta\lambda \frac{d\varphi}{dt}$$

所以, 当 $T$ 很小时, 有:

$$\frac{d}{dt}(a \cos \varphi \delta\lambda) = \frac{a \cos \varphi(k) \delta\lambda(k) - a \cos \varphi(k-1) \delta\lambda(k-1)}{T}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varphi(k) - \varphi(k-1)}{T}$$

$$\delta\dot{\varphi} = \frac{\delta\varphi(k) - \delta\varphi(k-1)}{T}$$

则(2-26)离散化为

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(1-e^2)\delta\varphi(k) - \alpha(1-e^2)\delta\varphi(k-1) &= T \cos\psi(k-1)\Theta^{3/2}\delta v(k-1) - T v(k-1)\sin\psi(k-1)\Theta^{3/2}\delta\psi(k-1) \\ &\quad - 3e^2 v(k-1)T \cos\psi(k-1)\Theta^{1/2}\sin\varphi(k-1)\cos\varphi(k-1)\delta\varphi(k-1) \\ a\cos\varphi(k)\delta\lambda(k) &= [1 - (\varphi(k) - \varphi(k-1))\operatorname{tg}\varphi(k-1)]a\cos\varphi(k-1)\delta\lambda(k-1) \\ &\quad + \delta v(k-1)T \sin\psi(k-1)\Theta^{1/2} \\ &\quad + T v(k-1)\Theta^{1/2}\cos\psi(k-1)\delta\psi \\ &\quad + T v(k-1)\sin\psi(k-1)\operatorname{tg}\varphi(k-1)[\Theta^{1/2} - e^2\Theta^{-1/2}\cos^2\varphi]\delta\varphi(k-1) \end{aligned} \right. \quad (2-27)$$

其中  $\Theta = 1 - e^2 \sin^2 \varphi(k-1)$ 。

由图 2.4, 当  $T$  很小, 则  $d(k) - d(k-1) = v(k-1)T$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(1-e^2)\varphi(k) - \alpha(1-e^2)\varphi(k-1) &= (d(k) - d(k-1))\Theta^{3/2}\cos\psi(k-1) \\ a\cos\varphi(k-1)(\lambda(k) - \lambda(k-1)) &= (d(k) - d(k-1))\Theta^{1/2}\sin\psi(k-1) \end{aligned} \right. \quad (2-28)$$

即:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(1-e^2)\varphi(k) - \alpha(1-e^2)\varphi(k-1) &= v(k-1)T \cos\psi(k-1)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \\ a\cos\varphi(k-1)(\lambda(k) - \lambda(k-1)) &= v(k-1)T \sin\psi(k-1)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \end{aligned} \right. \quad (2-29)$$

令  $\begin{cases} \Delta\varphi = \varphi(k) - \varphi(k-1) \\ \Delta\lambda = \lambda(k) - \lambda(k-1) \end{cases}$ , 则(2-27)可变为:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha(1-e^2)\delta\varphi(k) - \alpha(1-e^2)\delta\varphi(k-1) &= T \cos\psi(k-1)\Theta^{3/2}\delta v(k-1) \\ &\quad - a\cos\varphi(k-1)\Delta\lambda(1 - e^2 \sin^2 \varphi(k-1))\delta\psi(k-1) \\ &\quad - 3e^2 \alpha(1-e^2)\Delta\varphi\Theta^{-1}\sin\varphi(k-1)\cos\varphi(k-1)\delta\varphi(k-1) \\ a\cos\varphi(k)\delta\lambda(k) &= [1 - (\varphi_k - \varphi(k-1))\operatorname{tg}\varphi(k-1)]a\cos\varphi(k-1)\delta\lambda(k-1) \\ &\quad + \delta v(k-1)T \sin\psi(k-1)\Theta^{1/2} \\ &\quad + \alpha(1-e^2)\Delta\varphi\Theta^{-1}\delta\psi(k-1) \\ &\quad + a\Delta\lambda\cos\varphi(k-1)\operatorname{tg}\varphi(k-1)[1 - e^2\Theta^{-1}\cos^2\varphi]\delta\varphi(k-1) \end{aligned} \right. \quad (2-30)$$

载体速度的主要误差源为里程仪刻度系数误差, 载体首向角由陀螺误差测定, 因此  $\delta v(k)$ ,  $\delta\psi(k)$  满足下面方程:

$$\begin{cases} \delta v(k) = \delta v(k-1) + w_1(k) \\ \delta\psi(k) = \delta\psi(k-1) + Tw_2(k) \end{cases} \quad (2-31)$$

其中,  $w_1(k)$ ,  $w_2(k)$  为测量噪声, 结合(2-27), 可以得到系统状态方程:

$$\begin{bmatrix} \alpha(1-e^2)\delta\varphi(k) \\ a\cos\varphi(k)\delta\lambda(k) \\ \delta v(k) \\ \delta\psi(k) \end{bmatrix} = A(k) \begin{bmatrix} \alpha(1-e^2)\delta\varphi(k-1) \\ a\cos\varphi(k-1)\delta\lambda(k-1) \\ \delta v(k-1) \\ \delta\psi(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1(k) \\ Tw_2(k) \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

其中:

$$A(k) = \begin{bmatrix} 1-3e^2\Delta\varphi\Theta^{-1}\sin\varphi(k-1)\cos\varphi(k-1) & 0 & T\Theta^{3/2}\cos\psi(k-1) & -a\Theta\cos\varphi(k-1)\Delta\lambda \\ \Delta\lambda\sin\varphi(k-1)\Theta^{-1} & 1-\Delta\varphi g\varphi_{k-1} & T\Theta^{1/2}\sin\psi(k-1) & a(1-e^2)\Delta\varphi\Theta^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-32-1)$$

在下面的鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒  $H_\infty$  滤波中, 将对  $A(k)$  采用如下形式:

$$\text{令 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} -3e^2\Delta\varphi\Theta^{-1}\sin\varphi(k-1)\cos\varphi(k-1) & 0 & T\Theta^{3/2}\cos\psi(k-1) & -a\Theta\cos\varphi(k-1)\Delta\lambda \\ \Delta\lambda\sin\varphi(k-1)\Theta^{-1} & -\Delta\varphi g\varphi_{k-1} & T\Theta^{1/2}\sin\psi(k-1) & a(1-e^2)\Delta\varphi\Theta^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则:  $A(k) = A + \Delta A$ , 令  $\Delta A = H_1 F(k) E$ , 其中  $H_1 = I$ ,

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}$$

$$F(k) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}e^2\Delta\varphi\Theta^{-1}\sin 2\varphi(k-1) & 0 & \frac{1}{2}\Theta^{3/2}\cos\psi(k-1) & -\frac{1}{2}\Theta\cos\varphi(k-1)\Delta\lambda \\ \frac{1}{2}\Delta\lambda\sin\varphi(k-1)\Theta^{-1} & -\frac{1}{2}\Delta\varphi g\varphi_{k-1} & \frac{1}{2}\Theta^{1/2}\sin\psi(k-1) & \frac{1}{2}(1-e^2)\Delta\varphi\Theta^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-32-2)$$

一方面, 在实际工程应用中, 根据测量工作的精度要求, 在一定范围内, 把椭球面当成具有适当半径的球面是合适的, 另一方面, 为了本文的仿真模型的简化, 抓住主要矛盾, 把椭球面当成具有适当半径的球面也是合适的。因此, 令(2-32)中的  $e=0$ , 则系统状态模型变为:

$$\begin{bmatrix} R\delta\varphi(k) \\ R\cos\varphi(k)\delta\lambda(k) \\ \delta v(k) \\ \delta\psi(k) \end{bmatrix} = A_1(k-1) \begin{bmatrix} R\delta\varphi(k-1) \\ R\cos\varphi(k-1)\delta\lambda(k-1) \\ \delta v(k-1) \\ \delta\psi(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_1(k) \\ Tw_2(k) \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

$$\text{其中, } A_1(k-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T \cos \psi(k-1) & -R \cos \varphi(k-1) \Delta \lambda \\ \Delta \lambda \sin \varphi(k-1) & 1 - \Delta \rho t g \varphi(k-1) & T \sin \psi(k-1) & R \Delta \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2、观测方程模型建立

设 GPS, DR 对经度、纬度、速度、航向的观测值分别为  $\lambda_G, \varphi_G, v_G, \psi_G$ ,  $\lambda_R, \varphi_R, v_R, \psi_R$ , DR 对纬度、经度的观测可根据式(2-8B)获得, 则观测向量为  $[R(\varphi_G - \varphi_R), R \cos \varphi_R(\lambda_G - \lambda_R), v_G - v_R, \psi_G - \psi_R]^T$ , 则系统观测方程为:

$$\begin{bmatrix} R(\varphi_G - \varphi_R) \\ R \cos \varphi_R(\lambda_G - \lambda_R) \\ v_G - v_R \\ \psi_G - \psi_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \delta \varphi(k) \\ R \cos \varphi(k) \delta \lambda(k) \\ \delta v(k) \\ \delta \psi(k) \end{bmatrix} + V \quad (2-34)$$

其中  $V$  为观测噪声矩阵。

### 2.5.3 基于位置误差的定常滤波模型

在实际工程中, 为了减少计算量, 精度要求不高的情况下, 可采用一种稳态滤波形式来替代迭代滤波, 但是, 要获得稳态滤波器, 就需要模型的系数矩阵是定常的, 2.5.1 节和 2.5.2 节中的模型系数矩阵都是时变的, 因此, 本节根据观测量为位置误差, 来建立 GPS/DR 常值滤波模型。

#### 1、状态方程模型建立

根据 DR 原理(2-7), 有:

$$\begin{cases} x_e(k) = x_e(k-1) + T v_e(k-1) \\ x_n(k) = x_n(k-1) + T v_n(k-1) \end{cases} \quad (2-35)$$

其中,  $x_e(k), x_e(k-1)$  分别是  $k, k-1$  时刻东向位置,  $x_n(k), x_n(k-1)$  分别是  $k, k-1$  时刻的北向位置,  $v_e(k-1), v_n(k-1)$  分别是  $k-1$  时刻的东向和北向速度。对(2-35)两边取微分, 则可得到位置误差方程:

$$\begin{cases} \delta x_e(k) = \delta x_e(k-1) + T \delta v_e(k-1) \\ \delta x_n(k) = \delta x_n(k-1) + T \delta v_n(k-1) \end{cases} \quad (2-36)$$

其中,  $\delta x_e(k), \delta x_e(k-1)$  分别是  $k, k-1$  时刻东向位置误差,  $\delta x_n(k), \delta x_n(k-1)$  分别是  $k, k-1$  时刻的北向位置误差,  $\delta v_e(k-1), \delta v_n(k-1)$  分别是  $k-1$  时刻的东向和北向速度误差。

一般采样时间比较小, 可以认为  $\delta v_e(k) \approx \delta v_e(k-1), \delta v_n(k) \approx \delta v_n(k-1)$ , 因此, 有:

$$\begin{cases} \delta v_e(k) = \delta v_e(k-1) + \varepsilon_e \\ \delta v_n(k) = \delta v_n(k-1) + \varepsilon_n \end{cases} \quad (2-37)$$

其中,  $\varepsilon_e, \varepsilon_n$  分别是东向和北向  $k, k-1$  时刻速度误差的差, 可看作噪声。

令系统状态变量为:  $x(k) = [\delta x_e(k), \delta v_e(k), \delta x_n(k), \delta v_n(k)]^T$ , 则系统方程为:

$$x(k) = A(k)x(k-1) + w(k) \quad (2-38)$$

$$\text{其中: } A(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad w(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_e \\ 0 \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

## 2、观测方程模型建立

设 GPS  $k$  时刻对东向、北向位置的观测值为  $s_{eG}(k), s_{nG}(k)$ , DR 对东向、北向位置的观测值为  $s_{eR}(k), s_{nR}(k)$ , 则观测向量为  $[s_{eG}(k) - s_{eR}(k) \quad s_{nG}(k) - s_{nR}(k)]^T$ , 系统观测方程为:

$$\begin{bmatrix} s_{eG}(k) - s_{eR}(k) \\ s_{nG}(k) - s_{nR}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_e(k) \\ \delta v_e(k) \\ \delta x_n(k) \\ \delta v_n(k) \end{bmatrix} + v(k) \quad (2-39)$$

其中,  $v(k)$  为观测噪声。

## 3、滤波模型示意框图

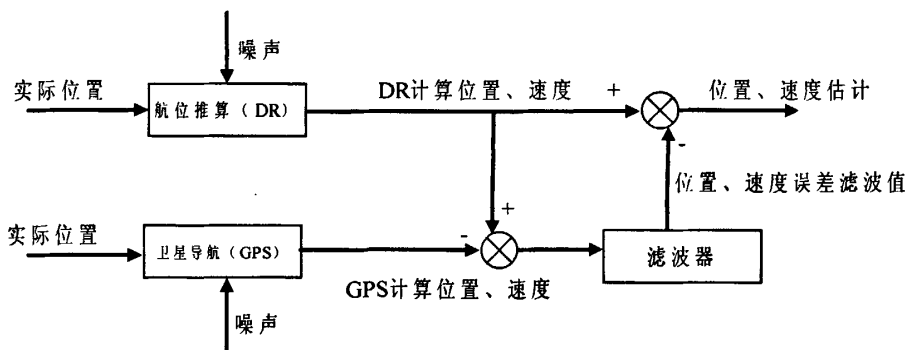


图 2.5 GPS/DR 组合导航框图

图 2.5 的位置、速度变量变为经度、纬度、速度、首向角, 则该图也是基于椭圆模型的滤波模型的示意图。

---

---

## 2.6 本章小结

本章首先论述了 GPS 定位原理、DR 航位推算原理，GPS/DR 组合导航系统的硬件结构，包括单片机为核心和带操作系统计算机（处理器）为核心的两种体系结构，重点论述了 GPS/DR 组合导航系统的滤波模型的建立，包括基于“当前”统计模型的滤波模型、基于椭球模型的滤波模型、基于位置误差的定常滤波模型，为下文展开滤波算法研究奠定了基础。基于椭球模型的滤波模型是作者重点推导的一个模型，其它文献给出的都是直接将地球椭球球面化的连续模型，而且没有提供推导过程，本文则在地球椭球假设前提下，推导了离散的滤波模型，然后根据实际应用情况再将椭球进行球面化和相关简化，相对而言，这种建模方式理论更严密，逻辑更严谨。“当前”统计模型适用于下文提到的扩展卡尔曼滤波与扩展  $H_{\infty}$  滤波，基于位置误差的定常滤波模型适用于下文提到的稳态滤波问题，椭球模型适用于一般性的迭代滤波问题。



## 第三章 组合导航中的 $H_\infty$ 滤波

### 3.1 引言

基于状态变量的滤波问题就是利用系统的状态方程和量测方程来估计系统的状态，当系统噪声和量测噪声的分布已知时，卡尔曼滤波方法提供了最优算法。工程实际中，尤其是车辆导航系统中，系统经常受到这样或者那样的噪声干扰，很难知其确切的统计分布，因此，常规的卡尔曼滤波就不是最优的，甚至造成滤波的发散。

$H_\infty$  滤波是将鲁棒控制领域中的  $H_\infty$  性能指标应用于滤波，以解决系统中存在的各种不确定性问题，这种不确定性包括模型的不确定性和噪声的不确定性，本文主要是针对噪声的不确定性来展开讨论的。近些年发展起来的  $H_\infty$  滤波对系统或观测噪声的不确定性具有很好的鲁棒性<sup>[76]</sup>，因此，将  $H_\infty$  滤波技术应用于组合导航系统，提高滤波稳健性具有重要意义。

本章论述了离散时间卡尔曼滤波、 $H_\infty$  滤波，指明了  $H_\infty$  滤波是卡尔曼滤波的推广；根据有界实引理获得了稳态  $H_\infty$  滤波；将扩展卡尔曼滤波与扩展  $H_\infty$  滤波算法应用于“当前”统计模型下的 GPS/DR 组合导航中，证明了扩展  $H_\infty$  滤波的优越性；对椭球模型方程进行变形，将鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒  $H_\infty$  滤波算法应用于该滤波模型下，证明了鲁棒  $H_\infty$  滤波的优越性。

### 3.2 离散时间卡尔曼滤波

滤波是指从获得的测量信息中尽可能的滤除干扰或噪声，分离出所需要的信号。滤波理论在检测与估计理论体系中纳入估计理论，估计理论主要包括参量估计和波形估计，但是参量估计仅适合非时变参量，应用局限。波形估计本质上是对随机过程的估计，即寻求一种运算作用于所需信号和噪声或干扰的混合波形，使信号与噪声或干扰实现分离。著名控制论创始人维纳于 1949 年开创了平稳过程的滤波理论，称之为维纳滤波，但维纳滤波理论必须用到无限过去的的数据，不适用于实时处理，仅适合于平稳过程。1960 年卡尔曼通过引入状态变量的方法，成功地导出了一套算法，该算法根据新一时刻的测量数据和前一时刻状态向量的估值，即可递推出新一时刻状态向量估值，这种算法称之为卡尔曼滤波理论，卡尔曼滤波理论适合于非平稳过程和实时处理与计算机运算，克服了维纳滤波的缺点。卡尔曼滤波经过几十年的发展，内容十分丰富，应用于航天航空、通讯、控制、

信号处理等各个领域。本文则是将离散时间卡尔曼滤波理论应用于 GPS/DR 组合导航中。

考虑如下稳定可测线性离散系统：

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)v(k) \end{cases} \quad (3-1)$$

其中， $x(k) \in R^n$  为状态向量， $y(k) \in R^m$  为量测向量， $A(k), B(k), C(k), D(k)$  为适当维数的矩阵， $w(k), v(k)$  为互不相关的零均值高斯白噪声序列，且方差分别为  $Q(k), R(k)$ 。系统初始状态为： $E[x(0)] = \hat{x}(0), P(0) = E[(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T]$ ，则卡尔曼滤波递推方程为：

1、状态一步预测方程：

$$\hat{x}(k, k-1) = A(k)x(k-1) \quad (3-2)$$

2、一步预测估计误差方程：

$$P(k, k-1) = A(k)P(k-1)A^T(k) + B(k)Q(k-1)B^T(k) \quad (3-3)$$

3、滤波增益方程：

$$K(k) = P(k, k-1)C^T(k) [C(k)P(k, k-1)C^T(k) + R(k)]^{-1} \quad (3-4)$$

4、滤波估计方程：

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k, k-1) + K(k)[y(k) - C(k)\hat{x}(k, k-1)] \quad (3-5)$$

5、估计误差方程：

$$P(k) = [I - K(k)C(k)]P(k, k-1) \quad (3-6)$$

公式(3-2)到(3-6)为卡尔曼滤波的数学表达，卡尔曼滤波相比维纳滤波，有以下特点：

第一，卡尔曼滤波将被估计信号看作是白噪声作用下的随机线性系统输出，且输入输出关系由时域内的状态和观测方程决定，因此，这种滤波方法不仅适用于平稳过程，而且适用于非平稳过程。

第二，卡尔曼滤波基本方程是时域内的递推形式，其计算过程是一个不断“预测-修正”的过程，求解时不需存储过去的大量数据，便于实时处理与计算机实现。

### 3.3 离散时间 $H_2$ 滤波

卡尔曼滤波算法是建立在  $H_2$  估计准则基础上，要求精确的系统模型和准确的噪声统计特性。但是，很多实际应用，不仅不确切的知道噪声的统计特性，而且系统模型中存在很多未知因素，卡尔曼滤波应用于这种情况下，就不是最优滤波了，严重情况下会导致滤波发散。伴随鲁棒控制理论发展的鲁棒滤波理论，尤其

是  $H_\infty$  滤波理论与相应算法比较好的解决了该问题。

考虑如下稳定可测线性离散系统<sup>[16][77]</sup>:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + v(k) \\ z(k) = L(k)x(k) \end{cases} \quad (3-7)$$

其中,  $x(k) \in R^n$  为状态向量,  $y(k) \in R^m$  为量测向量,  $z(k) \in R^q$  为要估计的输出量,  $A(k), B(k), C(k), D(k), L(k)$  为适当维数的矩阵,  $w(k), v(k)$  分别为系统噪声与观测噪声, 为不知分布情况的能量有界噪声, 对它们的统计特性不作任何假设。设系统的初始状态为  $x(0)$ ,  $\hat{x}(0)$  为  $x(0)$  的估计, 初始估计误差方差阵为

$P(0) = E[(x(0) - \hat{x}(0))(x(0) - \hat{x}(0))^T]$ 。令  $\hat{z}(k) = F_f(y(0), y(1), \dots, y(k))$  表示在给定观测值  $y(0), y(1), \dots, y(k)$  和滤波策略  $F_f$  条件下对  $z(k)$  的滤波, 滤波误差为

$e(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ , 设  $T_k(F_f)$  表示将输入  $\{P^{-1}(0)[x(0) - \hat{x}(0)], w(k), v(k)\}$  序列映射至滤波误差序列  $\{e(k)\}$  的传递函数。定义  $T_k(F_f)$  的  $H_\infty$  范数为

$$\|T_k(F_f)\|_\infty = \frac{\|e(k)\|_2^2}{[x(0) - \hat{x}(0)]^T P^{-1}(0)[x(0) - \hat{x}(0)] + \|w(k)\|_2^2 + \|v(k)\|_2^2}, \text{ 其中 } \|\bullet\|_2^2 \text{ 是指对于因}$$

果序列  $\{u(k)\}$ ,  $\|u(k)\|_2^2 = \sum_{i=0}^k u^T(i)u(i)$ , 则  $H_\infty$  滤波问题为:

给定实数  $\gamma > 0$ , 寻找  $H_\infty$  滤波策略  $\hat{z}(k) = F_f(y(0), y(1), \dots, y(k))$ , 使得

$\|T_k(F_f)\|_\infty < \gamma$ 。  $H_\infty$  滤波的存在条件和递推关系为:

对于给定  $\gamma > 0$ , 如果  $[A(k) \ B(k)]$  满秩, 则满足条件  $\|T_k(F_f)\|_\infty < \gamma$  滤波器存在, 当且仅当对于所有  $k$ , 有:

$$P^{-1}(k) + C^T(k)C(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L(k) > 0 \quad (3-8)$$

其中,

$$\begin{aligned} P(k+1) = & A(k)P(k)A^T(k) + B(k)B^T(k) \\ & - A(k)P(k) \begin{bmatrix} C^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} R_e^{-1}(k) \begin{bmatrix} C(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k)A^T(k) \end{aligned} \quad (3-9)$$

$$R_e(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k) \begin{bmatrix} C^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

如果(3-8)成立, 则  $H_\infty$  滤波递推公式为:

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + K(k+1)(y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k)) \quad (3-11)$$

$$K(k+1) = P(k+1)C^T(k+1)(I + C(k+1)P(k+1)C^T(k+1))^{-1} \quad (3-12)$$

根据矩阵求逆引理(1-13), 可以将(3-9), (3-10)合并为

$$P(k+1) = A(k)(P^{-1}(k) + C^T(k)C(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L(k))^{-1}A^T(k) + B(k)B^T(k) \quad (3-13)$$

从  $H_{\infty}$  滤波的递推关系来看, 问题的关键是  $\gamma$  参数的确定, 该参数是反映滤波稳健程度的参数。  $\gamma$  参数可由定理 1-1 确定。

根据定理 1-1 和不等式(3-8), 可以得到  $\gamma^2 > \lambda[L^T(k)L(k)(P^{-1}(k) + C^T(k)C(k))^{-1}]$ , 若取  $L(k) = I$ , 则  $\gamma = \sigma\{\lambda_{\max}[(P^{-1}(k) + C^T(k)C(k))^{-1}]\}^{1/2}$ , 其中,  $\lambda_{\max}[\bullet]$  表示最大特征值, 系数  $\sigma > 1$ , 根据工程实际情况来确定, 当稳定性要求高,  $\sigma$  取小些, 当精度要求高, 则  $\sigma$  取大些, 这样,  $\gamma$  参数就进入到迭代过程中, 降低了迭代初始就确定  $\gamma$  带来的保守性。

### 3.4 卡尔曼滤波与 $H_{\infty}$ 滤波比较

卡尔曼滤波与  $H_{\infty}$  滤波究竟有什么区别与联系呢? 本节从滤波算法的理论基础和数学形式上作了对比分析。

#### 1 理论基础比较

卡尔曼滤波数学推导基础是希尔伯特空间的正交投影定理, 而  $H_{\infty}$  滤波数学基础是格林空间中的投影定理, 所谓格林空间是这样的线性空间  $\{K \in C, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ , 满足对于  $\forall x, y, z \in K, a, b \in C$ ,

$$(1) \langle y, x \rangle = \langle y, x \rangle^*$$

$$(2) \langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$$

而希尔伯特空间, 除了满足格林空间的条件(1)和(2)外, 还满足:

$$(3) \langle x, x \rangle \geq 0, \text{ 当且仅当 } x = 0, \text{ 等号成立}$$

即希尔伯特空间满足正定性, 约束条件要强于格林空间, 所以格林空间是希尔伯特空间的推广。格林空间可以分解为两个希尔伯特空间的直接和, 在希尔伯特空间中, 投影存在且唯一, 而在格林空间中, 投影有可能不存在, 有可能存在但不唯一, 有可能存在且唯一。从这个角度分析,  $H_{\infty}$  滤波应是卡尔曼滤波的推广, 卡尔曼滤波应是  $H_{\infty}$  滤波的特例。

#### 2 数学形式比较

如果假设  $w(k), v(k)$  为不相关的零均值白噪声, 则系统(3-7)的卡尔曼滤波递推公式为:

$$\hat{x}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + P(k+1)C^T(k+1)(I + C(k+1)P(k+1)C^T(k+1))^{-1}(y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k))$$

(3-14)

$$P(k+1) = A(k)P(k)A^T(k) + B(k)B^T(k) - A(k)P(k)[I + C(k)P(k)C^T(k)]^{-1}P(k)A^T(k) \quad (3-15)$$

对比卡尔曼滤波公式与  $H_\infty$  滤波公式，有以下特点：

(1)  $H_\infty$  滤波是对状态的线性组合的估计，其滤波公式中包含了这种线性组合因子  $L(k)$ ，而卡尔曼滤波对状态的线性组合估计是先对状态进行估计，再进行线性组合，其滤波公式中不包含线性组合因子。

(2) 对于  $H_\infty$  滤波，必须满足条件(3-8)，而卡尔曼滤波对于该条件是永远满足的，其根源就是前面提到的两种理论算法推导基础不同，一个基于格林空间，一个基于希尔伯特空间，条件(3-8)也是格林空间投影存在且唯一条件在滤波算法中的体现。

(3)  $H_\infty$  滤波公式中存在矩阵  $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$ ，而卡尔曼滤波与之对应的是单位阵  $I$ ，当  $\gamma \rightarrow \infty$  时，(3-9)退化为(3-15)， $H_\infty$  滤波成为卡尔曼滤波，这说明卡尔曼滤波是  $H_\infty$  滤波的特例， $\gamma$  是调节鲁棒性与精度的一个因子。

### 3.5 基于椭球滤波模型仿真实验

在本节中，基于椭球滤波模型对卡尔曼滤波和  $H_\infty$  滤波进行滤波仿真，仿真中，取采样周期  $T = 0.1$  秒，球面圆周运动半径为 2000 米，当系统作卡尔曼滤波时，作如下假设：所有角度误差噪声均方差为 0.001 度，所有速度误差噪声均方差为  $0.005 \text{ m/s}$ 。车辆作匀速圆周运动，速度为  $27 \text{ m/s}$ ，仿真迭代 4000 次，来对比卡尔曼滤波和  $H_\infty$  滤波在白噪声和色噪声情况下的估计误差。其中，经度、纬度、首向角估计误差单位为弧度，速度估计误差单位为  $\text{m/s}$ 。

在白噪声情况下，对比卡尔曼滤波与  $H_\infty$  滤波，即图 3.1(a)、图 3.1(b)和图 3.2，精度相当，在图 3.1(a)中，可以看到，卡尔曼滤波在迭代到 2300 多次的时候出现了较大幅度的波动，而  $H_\infty$  滤波一直保持在稳定下的精度滤波，这点说明，卡尔曼滤波对时变系数模型比较敏感，而  $H_\infty$  滤波对此不敏感；在色噪声情况下，对比卡尔曼滤波与  $H_\infty$  滤波，即图 3.3 和图 3.4，卡尔曼滤波在时变系数和色噪声双重作用下，滤波性能明显下降，而  $H_\infty$  滤波基本不受影响；对比图 3.1 和图 3.3，色噪声情况下的卡尔曼滤波明显劣于白噪声情况，反映了卡尔曼滤波对噪声比较敏感，对比图 3.2 和图 3.4， $H_\infty$  滤波在白噪声和色噪声情况下，滤波效果相差不多，即反映

了  $H_{\infty}$  滤波对噪声不敏感。

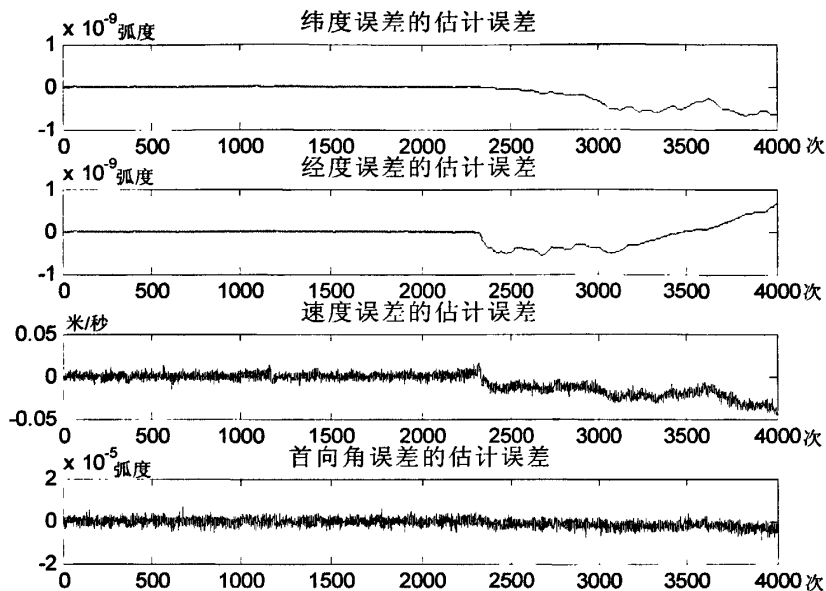


图 3.1a 白噪声情况卡尔曼滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

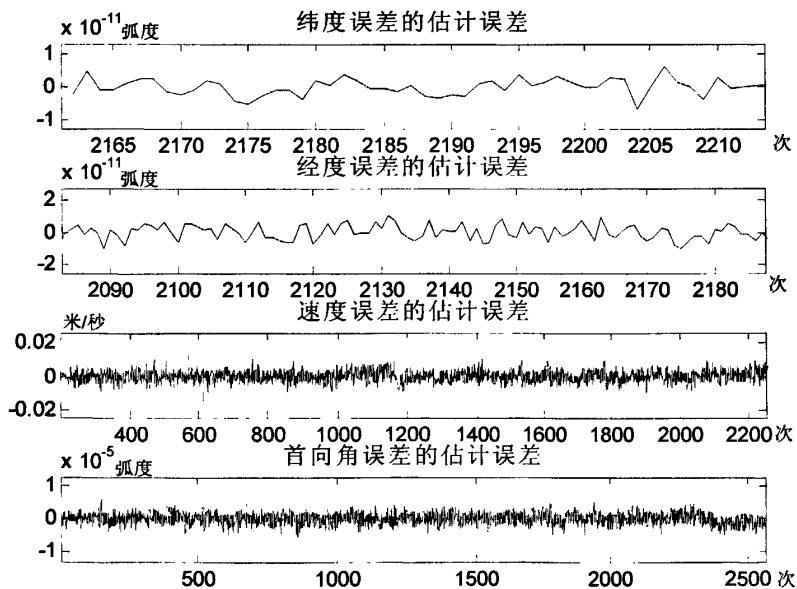


图 3.1b 白噪声情况卡尔曼滤波估计误差  
(局部放大图, 基于椭球滤波模型)

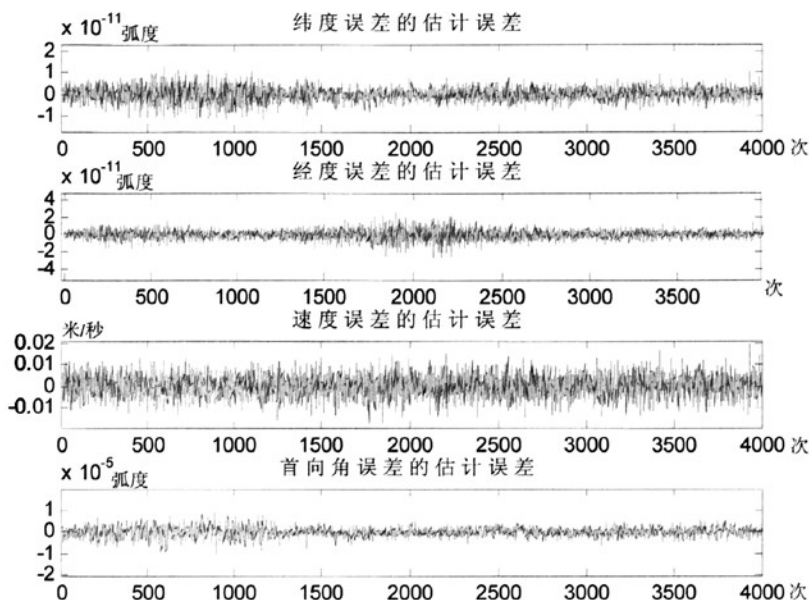


图 3.2 白噪声情况  $H_\infty$  滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

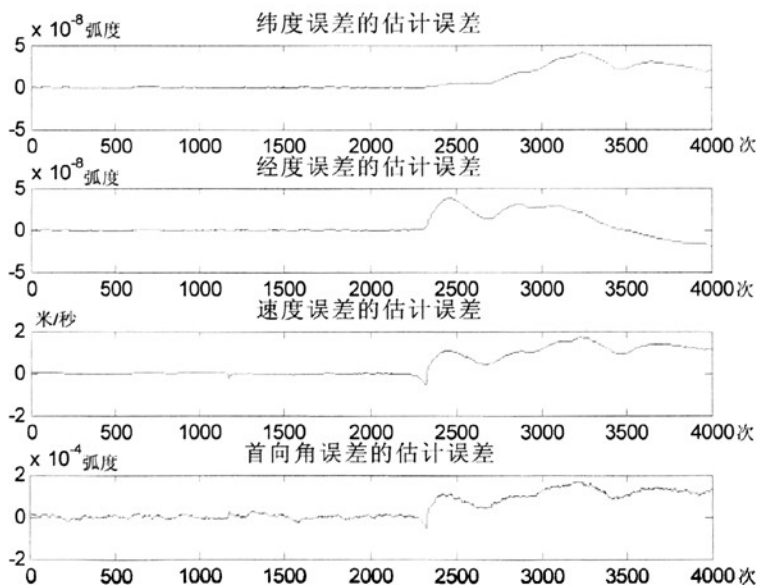


图 3.3 色噪声情况卡尔曼滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

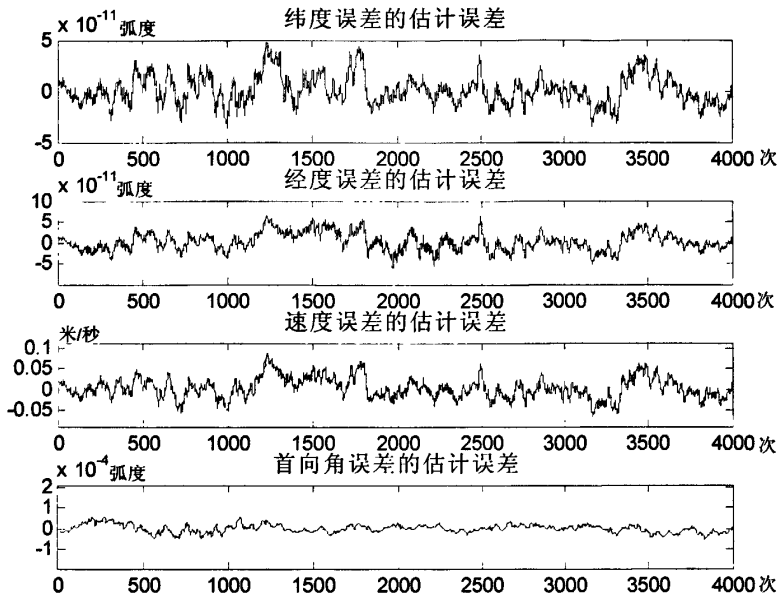


图 3.4 色噪声情况  $H_{\infty}$  滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

### 3.6 稳态 $H_{\infty}$ 滤波

从  $H_{\infty}$  滤波来看, 存在矩阵求逆和特征值运算, 在工程实际中, 这些运算都是比较耗时的, 尤其是状态维数比较高时, 运算量将成倍增加, 实时性将严重降低。卡尔曼滤波也存在类似问题, 于是, 工程上将滤波的增益阵用它的稳态值近似代替<sup>[7]</sup>, 虽然精度有损失, 但计算量减少了,  $H_{\infty}$  滤波是卡尔曼滤波的推广形式, 也存在稳态增益阵, 同样可求得稳态  $H_{\infty}$  滤波器。

考虑如下稳定可测线性离散时不变系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \\ y(k) = Cx(k) + Dw(k) \\ z(k) = Lx(k) \end{cases} \quad (3-16)$$

其中,  $x(k) \in R^n$  为状态向量,  $y(k) \in R^m$  为量测向量,  $z(k) \in R^q$  为要估计的输出量,  $A, B, C, D, L$  为适当维数的矩阵,  $BD^T = 0$ , 保证过程扰动输入与量测噪声不相关,  $w(k)$  为不知分布情况的能量有界噪声。定义  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ ,  $\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ , 考虑如下结构的滤波器:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + K[y(k+1) - CA\hat{x}(k)] \\ \hat{z}(k) = L\hat{x}(k) \end{cases} \quad (3-17)$$



由(3-16), (3-17)可得, 估计误差动态系统如下:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = (I - KC)A\tilde{x}(k) + [B - KCB \quad -KD] \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k+1) \end{bmatrix} \\ \tilde{z}(k) = L\tilde{x}(k) \end{cases} \quad (3-18)$$

由  $\bar{w}(k) = [w^T(k) \quad w^T(k+1)]^T$  到  $e(k)$  的传递函数为:

$T_{zw} = L[zI - (I - KC)A]^{-1}[B - KCB \quad -KD]$ , 则离散时间  $H_\infty$  滤波的性能指标为

$$\|T_{zw}\|_\infty^2 = \sup \frac{\|z(k) - \hat{z}(k)\|_2^2}{[x(0) - \hat{x}(0)]^T P^{-1}(0)[x(0) - \hat{x}(0)] + \|\bar{w}(k)\|_2^2} < \gamma^2 \quad (3-19)$$

根据(3-18), 令  $\tilde{A} = A - KCA$ ,  $\tilde{B} = [B - KCB \quad -KD]$ , 则得到:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B} \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k+1) \end{bmatrix} \\ \tilde{z}(k) = L\tilde{x}(k) \end{cases} \quad (3-20)$$

对于该误差动态系统, 根据离散时间有界实引理有, 给定  $\gamma$ , 若  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ , 当且仅当, 存在对称矩阵  $P > 0$ , 使得

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ L & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ L & 0 \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

根据 Schur 补定理, 可将(3-21)变形为下式:

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 & \tilde{A} & \tilde{B} \\ 0 & -I & L & 0 \\ \tilde{A}^T & L^T & -P & 0 \\ \tilde{B}^T & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3-22)$$

令  $X = P^{-1}$ , 则线性矩阵不等式(3-22)是关于矩阵变量  $X$ ,  $P$ ,  $K$  的线性矩阵不等式, 可以利用线性矩阵不等式工具箱, 来求得增益矩阵  $K$ , 则式(3-17)为稳态  $H_\infty$  滤波器。

### 3.7 基于位置误差模型的仿真实验

前几节论述了离散时间卡尔曼滤波,  $H_\infty$  滤波和稳态  $H_\infty$  滤波, 本节基于位置误差模型, 来对比三种滤波的时间和精度性能。仿真中, 取采样周期  $T = 0.1$  秒, 当系统作卡尔曼滤波时, 作如下假设: 位置误差方差为  $q_1 = 0.7 * 0.7 m^2$ , 速度误差方差为  $q_2 = (0.005) * (0.005) m^2 / s^2$ , 仿真迭代 4000 次, 其中, 位置误差估计误差单位为  $m$ , 速度误差估计误差单位为  $m/s$ 。

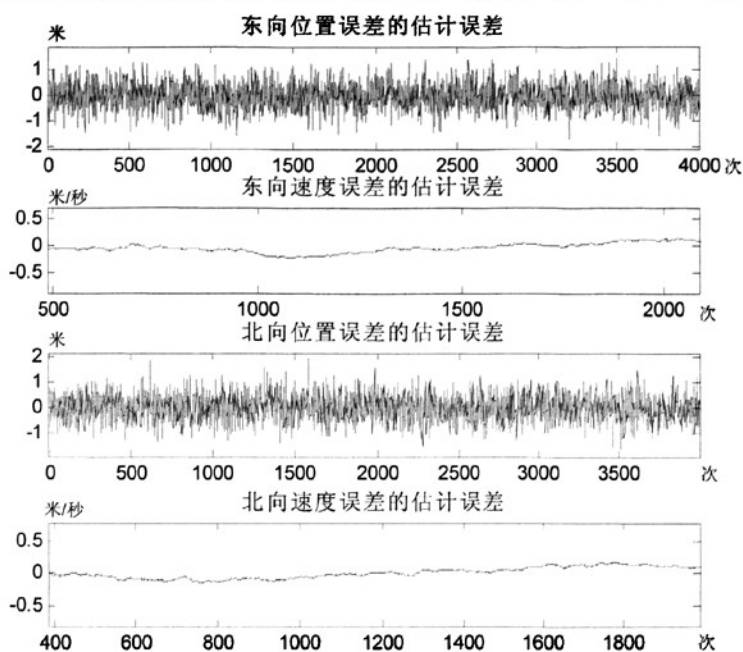


图 3.5 白噪声情况卡尔曼滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

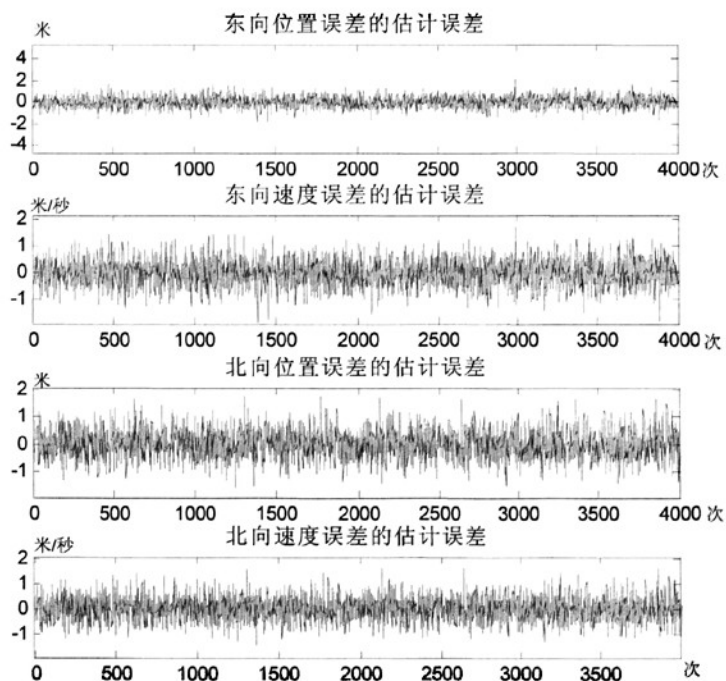


图 3.6 白噪声情况  $H_{\infty}$  滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

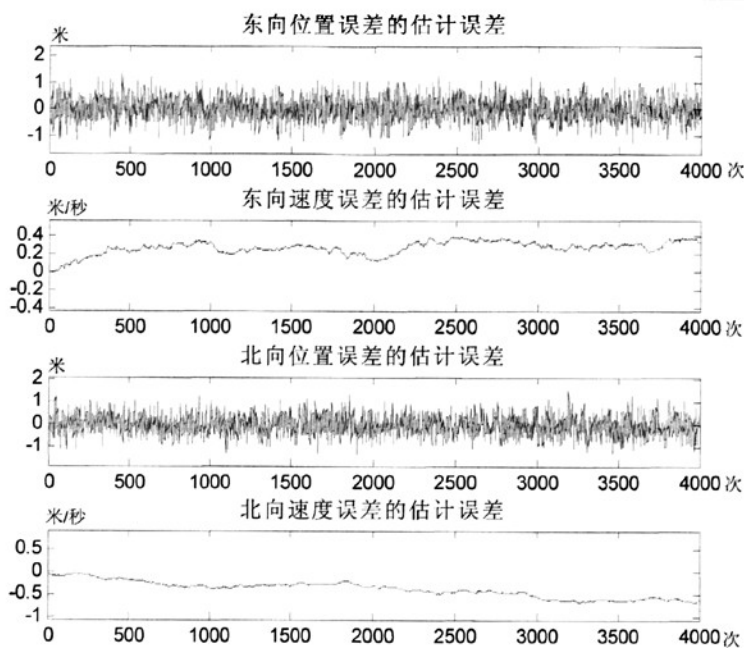


图 3.7 白噪声情况稳态  $H_{\infty}$  滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

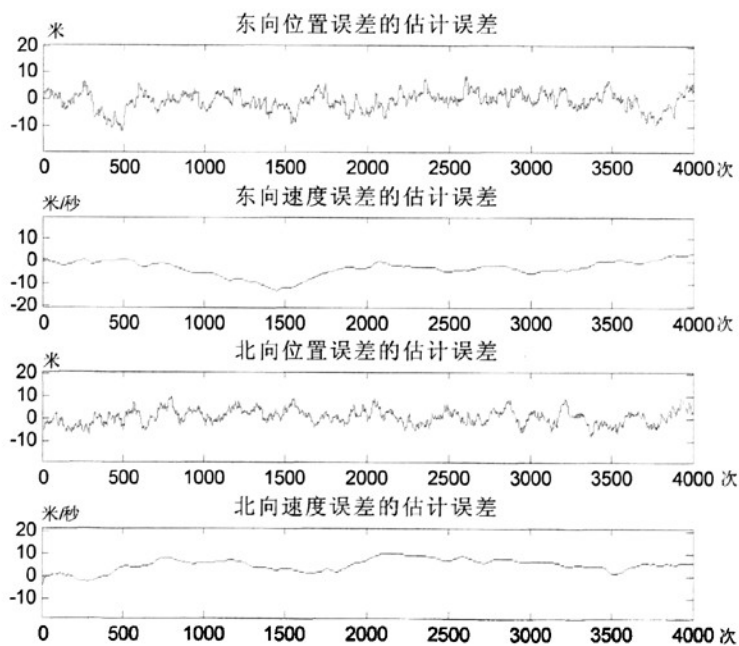


图 3.8 色噪声情况卡尔曼滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

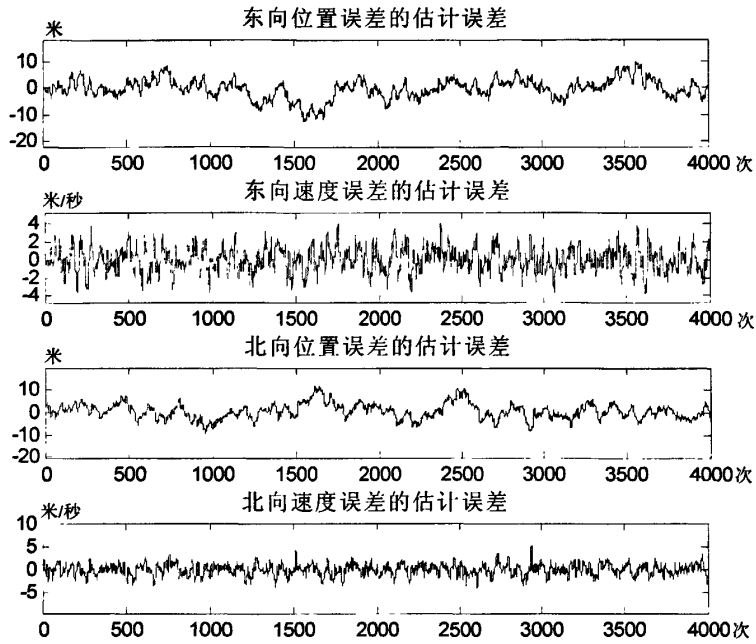


图 3.9 色噪声情况  $H_{\infty}$  滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

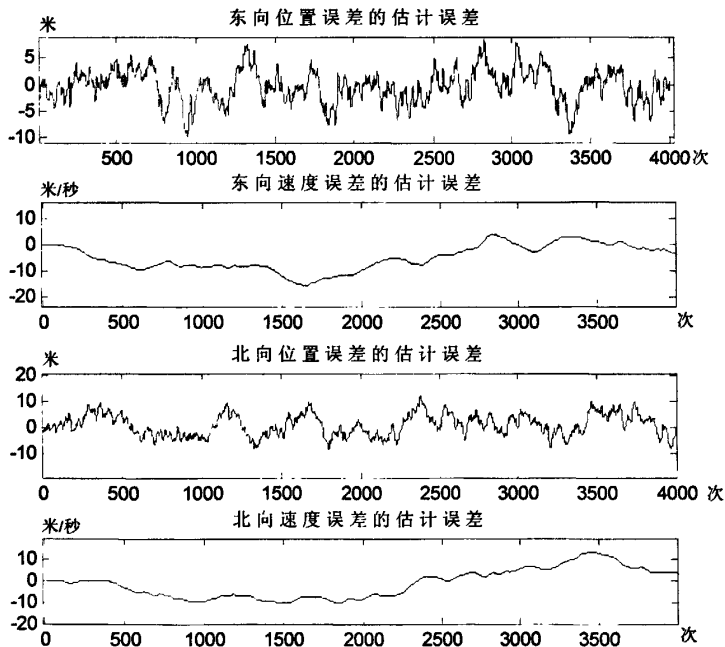


图 3.10 色噪声情况稳态  $H_{\infty}$  滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

表 3.1 4000 次迭代耗费 CPU 时间比较

噪声背景	白噪声	色噪声
卡尔曼滤波	2.4936 秒	2.6939 秒
$H_{\infty}$ 滤波	4.8269 秒	4.5766 秒
稳态 $H_{\infty}$ 滤波	1.9027 秒	1.9228 秒

在白噪声情况下,对比卡尔曼滤波、 $H_{\infty}$ 滤波和稳态  $H_{\infty}$ 滤波,即图 3.5、图 3.6 和图 3.7,卡尔曼滤波整体性能要优于  $H_{\infty}$ 滤波和稳态  $H_{\infty}$ 滤波,稳态  $H_{\infty}$ 滤波在速度估计误差方面要优于  $H_{\infty}$ 滤波,这点说明,第一,在常值模型下,卡尔曼滤波是在高斯白噪声情况下最优滤波,第二, $H_{\infty}$ 滤波误差是逐渐减小而达到稳态,稳态时滤波误差小于等于时变时的误差;在色噪声情况下,对比卡尔曼滤波、 $H_{\infty}$ 滤波和稳态  $H_{\infty}$ 滤波,即图 3.8、图 3.9 和图 3.10, $H_{\infty}$ 滤波在速度误差估计方面优于卡尔曼滤波, $H_{\infty}$ 滤波对噪声不敏感,但稳态  $H_{\infty}$ 滤波对噪声还是敏感的,因为其增益矩阵为常值,不能根据噪声的变化而调节;从表 3.1 可看到,稳态  $H_{\infty}$ 滤波滤波时间最短,卡尔曼滤波其次, $H_{\infty}$ 滤波消耗时间最长,这也是在精度要求不高而计算效率要求高的情况下,用稳态  $H_{\infty}$ 滤波替代  $H_{\infty}$ 滤波的原因。

### 3.8 扩展卡尔曼滤波与扩展 $H_{\infty}$ 滤波

前面提到的卡尔曼滤波与  $H_{\infty}$ 滤波都是基于线性模型来进行的,但是实际工程中,建立的模型不一定是线性的,例如第二章中提到的基于“当前”统计模型滤波模型的观测方程就是非线性的,在理论上,针对非线性系统,目前还没有一种统一的严格的递推滤波算法,工程上一般的处理方法是将模型线性化,然后将滤波的基本算法进行扩展,形成相应的扩展算法进行滤波,但是这种滤波算法是次优的。本节主要讨论了扩展卡尔曼滤波算法和扩展  $H_{\infty}$ 滤波算法,以及基于“当前”统计模型滤波模型的线性化。

#### 3.8.1 扩展卡尔曼滤波

扩展卡尔曼滤波是将卡尔曼滤波应用于非线性系统的一种滤波方法,即将非线性函数围绕滤波值展成泰勒级数,略去二次以上项后,得到非线性系统的线性化模型。

考察非线性时变离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = f[x(k), k] + B[x(k), k]w(k) \\ y(k+1) = h[x(k+1), k+1] + D[x(k+1), k+1]v(k+1) \end{cases} \quad (3-23)$$

其中,  $f[\bullet]$  是  $n$  维向量函数,  $h[\bullet]$  是  $m$  维向量函数,  $w(k)$  和  $v(k)$  分别是  $r$  维系统噪声和  $m$  维测量噪声, 初始状态  $x(0)$  是任意值的  $n$  维随机向量,  $w(k)$ 、 $v(k)$  和  $x(0)$  互不相关。将(3-23)泰勒展开, 略去二次项, 得:

$$x(k+1) \approx f[\hat{x}(k), k] + \left. \frac{\partial f[x(k), k]}{\partial x(k)} \right|_{\hat{x}(k)} [x(k) - \hat{x}(k)] + B[\hat{x}(k), k]w(k) \quad (3-24)$$

令  $A(k) = \left. \frac{\partial f[x(k), k]}{\partial x(k)} \right|_{\hat{x}(k)}$ ,  $B(k) = B[\hat{x}(k), k]$ ,  $U(k) = f[\hat{x}(k), k] - A(k)\hat{x}(k)$ , 则系统状态方程为:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + U(k) + B(k)w(k) \quad (3-25)$$

将观测方程中的非线性函数围绕一步状态估计  $\hat{x}(k+1, k)$  展成泰勒级数, 略去二次项后, 可得:

$$\begin{aligned} y(k+1) &\approx h[\hat{x}(k+1, k), k+1] \\ &+ \left. \frac{\partial h[x(k+1), k+1]}{\partial x(k)} \right|_{\hat{x}(k+1, k)} [x(k+1) - \hat{x}(k+1, k)] \\ &+ D[\hat{x}(k+1, k), k+1]v(k+1) \end{aligned} \quad (3-26)$$

令  $C(k+1) = \left. \frac{\partial h[x(k+1), k+1]}{\partial x(k)} \right|_{\hat{x}(k+1, k)}$ ,  $D[k+1] = D[\hat{x}(k+1, k), k+1]$ ,

$V(k+1) = h[\hat{x}(k+1, k), k+1] - C(k+1)\hat{x}(k+1, k)$ , 则观测方程为:

$$y(k+1) = C(k+1)x(k+1) + V(k+1) + D(k+1)v(k+1) \quad (3-27)$$

根据卡尔曼滤波的基本方程可得到扩展卡尔曼滤波方程组:

$$\hat{x}(k+1, k) = f[\hat{x}(k), k] \quad (3-28-1)$$

$$P(k+1, k) = A(k)P(k, k)A^T(k) + B(k)Q(k)B^T(k) \quad (3-28-2)$$

$$\begin{aligned} K(k+1) &= P(k+1, k)C^T(k+1)[D(k+1)Q(k)D^T(k+1) \\ &+ C(k+1)P(k+1, k)C^T(k+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (3-28-3)$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1, k) + K(k+1)[y(k+1) - C(k+1)\hat{x}(k+1, k)] \quad (3-28-4)$$

$$\begin{aligned} P(k+1, k+1) &= [I - K(k+1)C(k+1)]P(k+1, k)[I - K(k+1)C(k+1)]^T \\ &+ K(k+1)D(k+1)Q(k)D^T(k+1)K^T(k+1) \end{aligned} \quad (3-28-5)$$

### 3.8.2 扩展 $H_\infty$ 滤波

非线性系统的噪声分布是未知的或非高斯的, 则扩展卡尔曼滤波的假设是不

合理的, 此时, 可采用扩展  $H_\infty$  滤波来进行滤波, 扩展  $H_\infty$  滤波的思想是一致的, 也是将非线性函数围绕滤波值展成泰勒级数, 略去二次以上项后, 得到非线性系统的线性化模型。

考察非线性时变离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = f[x(k), k] + B[x(k), k]w(k) \\ y(k+1) = h[x(k+1), k+1] + D[x(k+1), k+1]w(k+1) \\ z(k+1) = L(k+1)x(k+1) \end{cases} \quad (3-29)$$

其中,  $f[\bullet]$  是  $n$  维向量函数,  $h[\bullet]$  是  $m$  维向量函数,  $w(k)$  为有界能量噪声, 初始状态  $x(0)$  是任意值的  $n$  维随机向量,  $w(k)$  和  $x(0)$  互不相关。将(3-29)泰勒展开, 略去二次项, 得线性化模型为:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + U(k) + B(k)w(k) \\ y(k+1) = C(k+1)x(k+1) + V(k+1) + D(k+1)w(k+1) \end{cases} \quad (3-30)$$

其中  $A(k), U(k), B(k), C(k+1), V(k+1), D(k+1)$  的定义同 3.8.1 节, 根据  $H_\infty$  滤波的基本方程可得到扩展  $H_\infty$  滤波方程组:

$$\hat{x}(k+1, k) = f[\hat{x}(k), k] \quad (3-31-1)$$

$$P(k+1) = A(k)[P^{-1}(k) + C^T(k)C(k) - \gamma^2(k)L^T(k)L(k)]^{-1}A^T(k) + B(k)B^T(k) \quad (3-31-2)$$

$$K(k+1) = P(k+1, k)C^T(k+1)[D(k+1)D^T(k+1) + C(k+1)P(k+1)C^T(k+1)]^{-1} \quad (3-31-3)$$

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k+1, k) + K(k+1)[y(k+1) - C(k+1)\hat{x}(k+1, k)] \quad (3-31-4)$$

### 3.8.3 基于“当前”统计模型滤波模型的线性化

从基于“当前”统计模型的滤波模型来看, 其观测方程是非线性的, 则将观测方程线性化。将观测方程(2-19)围绕滤波值  $\hat{x}(k, k-1)$  展成泰勒级数, 略去二次以上项后, 得到线性化模型:

$$z(k) = H(k)x(k) + v(k) + h[\hat{x}(k, k-1)] - H(k)\hat{x}(k, k-1) \quad (3-32)$$

其中:

$$H(k) = \left. \frac{\partial h[x(k)]}{\partial x(k)} \right|_{x(k)=\hat{x}(k, k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_2 & 0 & h_3 & h_4 \\ 0 & h_5 & 0 & 0 & h_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-32-1)$$

$$h_1 = \frac{\hat{a}_n(k, k-1)\hat{v}_e(k, k-1) - 2\hat{v}_e(k, k-1)\hat{v}_n(k, k-1)\hat{a}_e(k, k-1) - \hat{a}_n(k, k-1)\hat{v}_n^2(k, k-1)}{[\hat{v}_n^2(k, k-1) + \hat{v}_e^2(k, k-1)]^2}$$

$$h_2 = \frac{\hat{v}_n(k, k-1)}{\hat{v}_n^2(k, k-1) + \hat{v}_e^2(k, k-1)}$$

$$h_3 = \frac{\hat{a}_e(k, k-1)\hat{v}_e(k, k-1) + 2\hat{v}_e(k, k-1)\hat{v}_n(k, k-1)\hat{a}_n(k, k-1) - \hat{a}_e(k, k-1)\hat{v}_n^2(k, k-1)}{[\hat{v}_n^2(k, k-1) + \hat{v}_e^2(k, k-1)]^2}$$

$$h_4 = \frac{-\hat{v}_e(k, k-1)}{\hat{v}_n^2(k, k-1) + \hat{v}_e^2(k, k-1)}$$

$$h_5 = \frac{T\hat{v}_e(k, k-1)}{\sqrt{\hat{v}_n^2(k, k-1) + \hat{v}_e^2(k, k-1)}}$$

$$h_6 = \frac{T\hat{v}_n(k, k-1)}{\sqrt{\hat{v}_n^2(k, k-1) + \hat{v}_e^2(k, k-1)}}$$

则基于“当前”统计模型的 GPS/DR 扩展卡尔曼递推滤波方程组为

$$\hat{x}(k, k-1) = A(k)\hat{x}(k-1) + u(k-1) \quad (3-33-1)$$

$$P(k, k-1) = A(k)P(k-1)A^T(k) + Q(k-1) \quad (3-33-2)$$

$$K(k) = P(k, k-1)H^T(k)[R(k) + H(k)P(k, k-1)H^T(k)]^{-1} \quad (3-33-3)$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k, k-1) + K(k)[z(k) - h(\hat{x}(k, k-1))] \quad (3-33-4)$$

$$P(k) = [I - K(k)H(k)]P(k, k-1) \quad (3-33-5)$$

其中的  $A(k)$  可从(2-14-1)获得,  $u(k-1)$  可从(2-14-2)获得,  $H(k)$  可从(3-32-1)获得,  $R(k)$  为观测噪声协方差,

$$Q(k) = E[\omega(k)\omega^T(k)] = \text{diag}[2\sigma_a^2\alpha_e Q_e(k), 2\sigma_n^2\alpha_n Q_n(k)] \quad (3-34)$$

其中,  $\sigma_a^2, \sigma_n^2$  分别为东向和北向加速度的方差,  $Q_e(k)$  和  $Q_n(k)$  都是对称阵, 矩阵中形式一致, 仅参数不同, 将  $Q_e(k)$  中的参数  $\alpha_e$  换成  $\alpha_n$ , 则为  $Q_n(k)$ 。

$$Q_e(k) = \begin{bmatrix} q_e11 & q_e12 & q_e13 \\ q_e21 & q_e22 & q_e23 \\ q_e31 & q_e32 & q_e33 \end{bmatrix}, Q_n(k) = \begin{bmatrix} q_n11 & q_n12 & q_n13 \\ q_n21 & q_n22 & q_n23 \\ q_n31 & q_n32 & q_n33 \end{bmatrix},$$

$$q_e11 = 0.5\alpha_e^{-5}(1 - e^{-2\alpha_e T} + 2\alpha_e T + \frac{2}{3}\alpha_e^3 T^3 - 2\alpha_e^2 T^2 - 4\alpha_e T e^{-\alpha_e T})$$

$$q_e12 = 0.5\alpha_e^{-4}(1 + e^{-2\alpha_e T} - 2e^{-\alpha_e T} + 2\alpha_e T e^{-\alpha_e T} - 2\alpha_e T + \alpha_e^2 T^2)$$

$$q_e13 = 0.5\alpha_e^{-3}(1 - e^{-2\alpha_e T} - 2\alpha_e T e^{-\alpha_e T})$$

$$q_e22 = 0.5\alpha_e^{-3}(2\alpha_e T + 4e^{-\alpha_e T} - e^{-2\alpha_e T} - 3)$$

$$q_e23 = 0.5\alpha_e^{-2}(1 + e^{-2\alpha_e T} - 2e^{-\alpha_e T})$$

$$q_e33 = 0.5\alpha_e^{-1}(1 - e^{-2\alpha_e T})$$

根据“当前”统计模型, 加速度的一步预测可看作“当前”加速度的均值, 即



$\bar{a}_e(k) = \hat{a}_e(k, k-1), \bar{a}_n(k) = \hat{a}_n(k, k-1)$ , 则(3-33-1)可简化为:

$$\hat{x}(k, k-1) = A_1(k)\hat{x}(k-1) \quad (3-35)$$

其中,  $A_1(k) = \text{diag}[A_e(T), A_n(T)]$

$$A_e(T) = A_n(T) = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

基于“当前”统计模型的 GPS/DR 扩展  $H_\infty$  滤波方程组为:

$$\hat{x}(k, k-1) = A(k)\hat{x}(k-1) + u(k-1) \quad (3-37-1)$$

$$P(k) = A(k)[P^{-1}(k-1) + H^T(k)H(k) - \gamma^2(k)L^T(k)L(k)]^{-1}A^T(k) + I \quad (3-37-2)$$

$$K(k) = P(k, k-1)H^T(k)[I + H(k)P(k)H^T(k)]^{-1} \quad (3-37-3)$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k, k-1) + K(k)[z(k) - h(\hat{x}(k, k-1))] \quad (3-37-4)$$

同样的方法, 可将(3-37-1)化简为(3-35)。

### 3.9 基于“当前”统计模型的仿真实验

本节基于当前“统计”模型的线性化滤波模型, 利用 3.8 节讨论的扩展卡尔曼与扩展  $H_\infty$  滤波结果来进行仿真。仿真条件为: 假设车辆以  $10\sqrt{2}m/s$  的速度,  $45^\circ$  航向角匀速直线运动, 采样周期  $T = 0.1$  秒, 根据(2-18),  $v_1, v_2, \varepsilon_s, \varepsilon_w$  为白噪声时, 方差分别为:  $\sigma_1^2 = (15m)^2, \sigma_2^2 = (16m)^2, \sigma_s^2 = (0.7m)^2, \sigma_w^2 = (0.005rad/s)^2$ , 东向和北向加速度的方差  $\sigma_{a_e}^2 = \sigma_{a_n}^2 = (0.3m/s^2)^2, \alpha_e = \alpha_n = 1$ , 初始值  $x(0) = \text{diag}[0, 10, 0, 0, 10, 0], P(0) = \text{diag}[100, 1, 0.04, 100, 1, 0.04]$ , 为了使图看得更清楚, 当白噪声条件下, 仿真次数为 400, 色噪声条件下为 4000 次。图中虚线为扩展卡尔曼滤波的误差曲线, 单位为米。

在白噪声情况下, 对比扩展卡尔曼滤波、扩展  $H_\infty$  滤波, 即图 3.11 和图 3.12, 显然, 扩展卡尔曼滤波滤波效果要优于扩展  $H_\infty$  滤波, 扩展  $H_\infty$  滤波相当于 GPS 单一传感器的精度, 符合卡尔曼滤波在高斯白噪声情况下是最优滤波的结论; 在色噪声情况下, 对比扩展卡尔曼滤波和扩展  $H_\infty$  滤波, 即图 3.13 和图 3.14, 扩展  $H_\infty$  滤波基本保持在白噪声情况下的滤波水平, 而扩展卡尔曼滤波在这种情况下, 几乎不能完成滤波, 说明扩展  $H_\infty$  滤波对噪声不太敏感, 而扩展卡尔曼滤波对噪声敏感, 在实际工程中, 对 GPS 测量误差、陀螺漂移、里程计误差特性不甚了解时, 为了滤波的稳健性, 建议使用扩展  $H_\infty$  滤波。

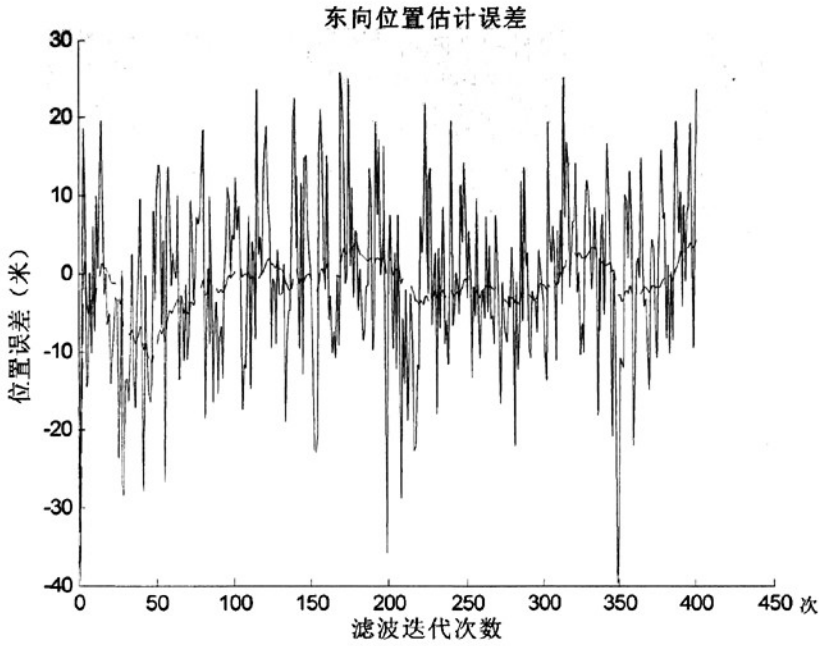


图 3.11 扩展卡尔曼滤波估计误差与扩展  $H_{\infty}$  滤波估计误差对比  
(白噪声情况, 东向, 基于当前统计模型)

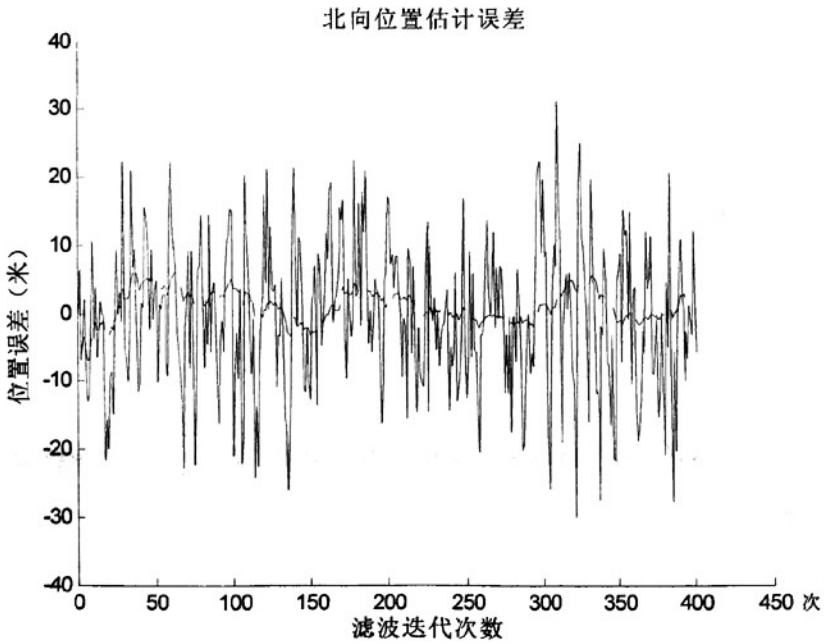


图 3.12 扩展卡尔曼滤波估计误差与扩展  $H_{\infty}$  滤波估计误差对比  
(白噪声情况, 北向, 基于当前统计模型)

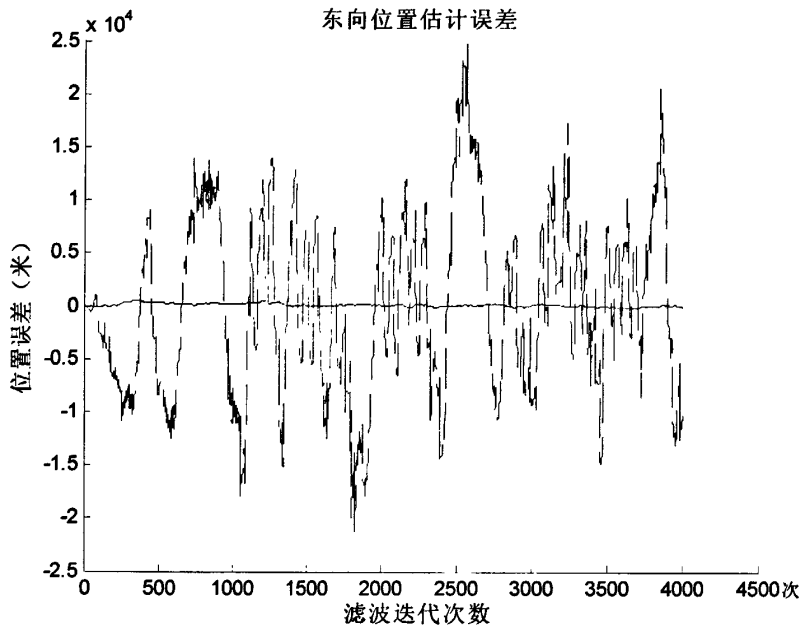


图 3.13 扩展卡尔曼滤波估计误差与扩展  $H_{\infty}$  滤波估计误差对比  
(色噪声情况, 东向, 基于当前统计模型)

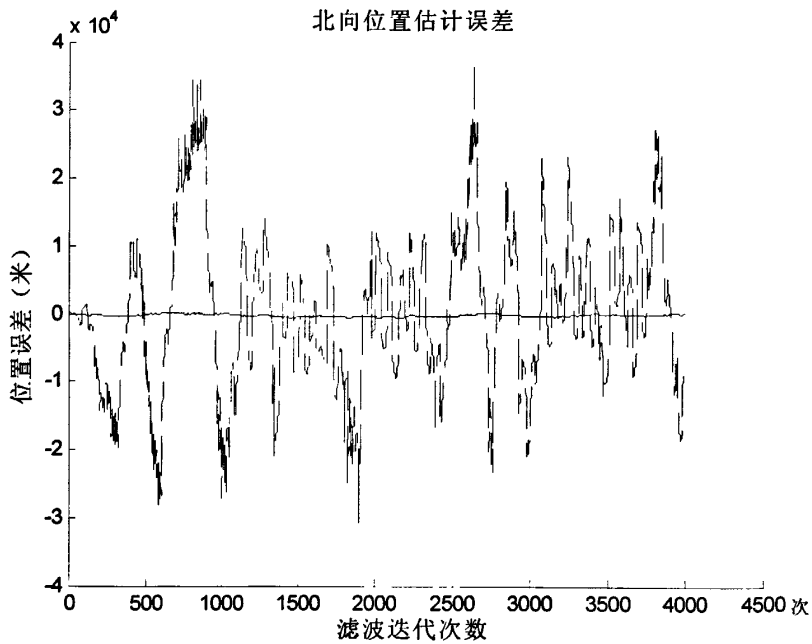


图 3.14 扩展卡尔曼滤波估计误差与扩展  $H_{\infty}$  滤波估计误差对比  
(色噪声情况, 北向, 基于当前统计模型)

### 3.10 鲁棒卡尔曼滤波与鲁棒 $H_\infty$ 滤波

基于椭球模型的滤波模型从一种角度来看是时变系数，从另一种角度来看，也可看成含不确定参数模型，对于不确定参数模型，可以利用鲁棒卡尔曼滤波与鲁棒  $H_\infty$  滤波来进行滤波。

#### 3.10.1 鲁棒卡尔曼滤波

考虑如下离散时间不确定系统：

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + \Delta A(k))x(k) + B\omega(k) \\ y(k) = (C + \Delta C(k))x(k) + v(k) \end{cases} \quad (3-38)$$

式中， $x(k) \in R^n$  为状态变量， $y(k) \in R^m$  为测量输出， $\omega(k) \in R^p$  为驱动噪声， $v(k) \in R^m$ ， $v(k) \in R^m$  为量测噪声，驱动噪声和量测噪声满足：

假设 1：

对于所有的整数  $k$  和  $l \geq 0$ ，有：

$$\begin{cases} E[\omega(k)] = 0, E[\omega(k)\omega^T(l)] = W\delta(k,l), W \geq 0 \\ E[v(k)] = 0, E[v(k)v^T(l)] = V\delta(k,l), V \geq 0 \\ E[\omega(k)v^T(l)] = 0 \end{cases}$$

$A, B, C$  为具有适当维数的描述名义对象的矩阵， $\Delta A(k), \Delta C(k)$  表示系统时变参数不确定性，假定可容许的不确定性满足：

$$\begin{bmatrix} \Delta A(k) \\ \Delta C(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(k)E, \text{ 式中, } F(k) \in R^{i \times j}, F^T(k)F(k) \leq I (\forall k \geq 0), \text{ 而 } H_1,$$

$H_2$  和  $E$  为具有适当维数的定常矩阵，它规定了在  $F(k)$  中的不确定参数是如何进入标称矩阵的。基于椭球模型的滤波模型的  $F(k)$  满足  $F^T(k)F(k) \leq I (\forall k \geq 0)$ ，事实上，对于(2-32-2)，当将椭球近似为球体时，则  $F(k)$  变形为：

$$F(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \cos \psi(k-1) & -\frac{1}{2} \cos \varphi(k-1) \Delta \lambda \\ \frac{1}{2} \Delta \lambda \sin \varphi(k-1) & -\frac{1}{2} \Delta \varphi \operatorname{tg} \varphi(k-1) & \frac{1}{2} \sin \psi(k-1) & \frac{1}{2} \Delta \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则：

$$\begin{aligned}\|F(k)\|^2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(\Delta^2\lambda + \Delta^2\varphi \sec^2 \varphi(k-1)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{\Delta^2 d}{R^2 \cos^2 \varphi(k-1)} \\ &= \frac{\Delta^2 d + R^2 \cos^2 \varphi(k-1)}{4R^2 \cos^2 \varphi(k-1)} \\ &\approx \frac{R^2 \cos^2 \varphi(k-1)}{4R^2 \cos^2 \varphi(k-1)} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

所以,  $\|F(k)\| = \frac{1}{2} < 1$ , 即,  $F^T(k)F(k) < I$ 。

假设 2:

①  $E[x(0)x^T(0)] \leq \bar{S}_0$ ,  $\bar{S}_0 = \bar{S}_0^T > 0$  是一已知矩阵。

②  $\text{rank}[A \ H_1 \ BW^{1/2}] = n$

假定鲁棒卡尔曼滤波器结构如下:

$$\hat{x}(k+1) = A_f(k)\hat{x}(k) + K_f(k)y(k), \hat{x}(0) = 0 \quad (3-39)$$

式中,  $A_f(k), K_f(k)$  分别为待求的滤波状态矩阵和增益矩阵,  $\hat{x}(k)$  为系统状态向量估计值。定义状态估计误差  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ , 则得到如下增广矩阵:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = (A_{c1} + H_{c1}F_k E_{c1})\xi(k) + G\eta(k), \xi(0) = \xi_0 \\ e(k) = L\xi(k) \end{cases} \quad (3-40)$$

式中,  $\xi(k) = \begin{bmatrix} e(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}$ ,  $\xi_0 = \begin{bmatrix} x(0) \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\eta(k) = \begin{bmatrix} \omega(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$ ,  $L = [I \ 0]$ ,

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} A - K_f(k)C & A - A_f(k) - K_f(k)C \\ K_f(k)C & A + K_f(k)C \end{bmatrix}, \quad E_{c1} = [E \ E], \quad H_{c1} = \begin{bmatrix} H_1 - K_f(k)H_2 \\ K_f(k)H_2 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} B & -K_f(k) \\ 0 & K_f(k) \end{bmatrix}$$

定义 3-1<sup>[86]</sup>: 如果对于某些实数  $\varepsilon(k) > 0$ , 存在有界矩阵  $\Sigma(k) = \Sigma^T(k) \geq 0$ , 满足黎卡蒂差分方程,

$$\begin{aligned}\Sigma(k+1) &= A_{c1}\Sigma(k)A_{c1}^T + \varepsilon^{-1}(k)H_{c1}H_{c1}^T + G\bar{W}G^T \\ &\quad + A_{c1}\Sigma(k)E_{c1}^T(\varepsilon_k^{-1}I - E_{c1}\Sigma_k E_{c1}^T)^{-1}E_{c1}\Sigma(k)A_{c1}^T\end{aligned} \quad (3-41)$$

式中,  $I - \varepsilon_k E_{c1}\Sigma_k E_{c1}^T > 0$ ,  $\bar{W} = \text{diag}\{W, V\}$ , 那么, 称滤波器(3-39)为鲁棒二次型滤波器。

定理 3-1<sup>[86]</sup> (鲁棒卡尔曼滤波器求解) 对于不确定性系统(3-38), 在满足假设 1、2 的条件下, 存在定义 3-1 所述滤波器, 当且仅当, 对于某些  $\varepsilon(k) > 0$ , 存在  $P(k) = P^T(k) > 0$ , 满足黎卡蒂方程,

$$P(k+1) = AP(k)A^T + AP(k)E^T(\varepsilon^{-1}(k)I - EP(k)E^T)^{-1}EP(k)A^T + \varepsilon^{-1}(k)H_1H_1^T + BWB^T,$$

且  $P^{-1}(k) - \varepsilon(k)E^T E > 0$ ，此时，鲁棒滤波器为：

$$\hat{x}(k+1) = (A + \Delta A_e(k))\hat{x}(k) + K_f(k)[y(k) - (C + \Delta C_e(k))\hat{x}(k)] \quad (3-42)$$

其中， $\Delta A_e(k) = \varepsilon(k)AS(k)E^T(I - \varepsilon(k)ES(k)E^T)^{-1}E$ ，

$\Delta C_e(k) = \varepsilon(k)CS(k)E^T(I - \varepsilon(k)ES(k)E^T)^{-1}E$ ，

$$K_f(k) = (AQ(k)C^T + \varepsilon^{-1}(k)H_1H_2^T)(R_e(k) + CQ(k)C^T)^{-1} \quad (3-43)$$

式中  $Q^{-1}(k) = S^{-1}(k) - \varepsilon(k)E^T E > 0$ ， $R_e(k) = V + \varepsilon^{-1}(k)H_2H_2^T$ ，

$S(k+1) = AQ(k)A^T$

$$\begin{aligned} & - (AQ(k)C^T + \varepsilon^{-1}(k)H_1H_2^T)(R_e(k) + CQ(k)C^T)^{-1}(AQ(k)C^T + \varepsilon^{-1}(k)H_1H_2^T)^T \\ & + \varepsilon^{-1}(k)H_1H_1^T + BWB^T \end{aligned} \quad (3-44)$$

在本文的基于椭球模型的滤波模型 GPS/DR 导航模型中，由于  $H_2 = 0$ ，所以鲁棒卡尔曼滤波变形为：

$$\hat{x}(k+1) = (A + \Delta A_e(k))\hat{x}(k) + K_f(k)[y(k) - (C + \Delta C_e(k))\hat{x}(k)] \quad (3-45)$$

其中： $\Delta A_e(k) = \varepsilon(k)AS(k)E^T(I - \varepsilon(k)ES(k)E^T)^{-1}E$

$$= A(S^{-1}(k) - \varepsilon(k)E^T E)^{-1}S^{-1}(k) - A$$

$\Delta C_e(k) = \varepsilon(k)CS(k)E^T(I - \varepsilon(k)ES(k)E^T)^{-1}E$

$$= C(S^{-1}(k) - \varepsilon(k)E^T E)^{-1}S^{-1}(k) - C$$

$K_f(k) = AQ(k)C^T(V + CQ(k)C^T)^{-1}$

$Q^{-1}(k) = S^{-1}(k) - \varepsilon(k)E^T E > 0$

$S(k+1) = AQ(k)A^T - AQ(k)C^T(V + CQ(k)C^T)^{-1}CQ(k)A^T + \varepsilon^{-1}(k)H_1H_1^T + BWB^T$

$$= A(S^{-1}(k) - \varepsilon(k)E^T E + C^T V^{-1} C)^{-1}A^T + \varepsilon^{-1}(k)H_1H_1^T + BWB^T$$

根据定理 1-1 和  $S_k^{-1} - \varepsilon_k E^T E > 0$ ，可以得到  $\varepsilon(k) = \sigma \lambda_{\max}^{-1}(E^T ES(k))$ ， $0 < \sigma \leq 1$ ， $\lambda_{\max}[\bullet]$  表示矩阵最大特征值。其中， $\sigma$  根据工程实际来选取，理论上是越小越好，工程上取实际系统支持的最高精度。

### 3.10.2 鲁棒 $H_\infty$ 滤波

考虑如下离散时间不确定系统：

$$\begin{cases} x(k+1) = (A + \Delta A(k))x(k) + Bw(k) \\ y(k) = (C + \Delta C(k))x(k) + Dw(k) \\ z(k) = Lx(k) \end{cases} \quad (3-46)$$

式中， $x(k) \in R^n$  为状态变量， $w(k) \in R^p$  为能量有界干扰信号， $y(k) \in R^m$  为测量输出， $z(k) \in R^q$  为待估计量， $A, B, C, D$  和  $L$  为具有适当维数的描述名义对象的矩阵，

而  $\Delta A(k)$  和  $\Delta C(k)$  表示系统的时变参数不确定性, 参数不确定性满足

$$\begin{bmatrix} \Delta A(k) \\ \Delta C(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(k) E, \text{ 其中, } F(k) \in R^{i \times j} \text{ 为一未知时变矩阵, 满足}$$

$F^T(k)F(k) \leq I, \forall k \geq 0$ , 而  $H_1, H_2$  和  $E$  为具有适当维数的定常矩阵。

针对参数不确定性系统(3-46), 设计鲁棒  $H_\infty$  滤波器:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_e \hat{x}(k) + K_e y(k), \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(k) = L \hat{x}(k) \end{cases} \quad (3-47)$$

使估计误差  $e(k) = z(k) - \hat{z}(k)$  最小化, 其中,  $A_e = A + \Delta A_e - K_e(C + \Delta C_e)$ 。定义状态估计误差  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ ,  $\xi(k) = [x^T(k) \quad \tilde{x}^T(k)]^T$ , 则估计误差动态方程由下面的增广系统描述:

$$\begin{cases} \xi(k+1) = (A_c + H_c F(k) E_c) \xi(k) + B_c w(k) \\ e(k) = L_c \xi(k) \end{cases} \quad (3-48)$$

$$\text{式中, } A_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -\Delta A_e - K_e \Delta C_e & A + \Delta A_e - K_e(C + \Delta C_e) \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B \\ B - K_e D \end{bmatrix},$$

$$H_c = \begin{bmatrix} B \\ B - K_e D \end{bmatrix}, E_c = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, L_c = \begin{bmatrix} 0 \\ L^T \end{bmatrix}。鲁棒  $H_\infty$  滤波的性能指标为  $\|G_{ew}(z)\|_\infty < \gamma$ ,$$

其中  $G_{ew}(z) = L_c(zI - A_c - H_c F_k E_c)^{-1} B_c$ 。对于系统(3-46), 假设噪声信号  $w(k)$  是能量有限的, 给定一个噪声衰减系数  $\gamma > 0$ , 如果找到一个渐进稳定线性滤波器(3-47), 对于任何允许的参数不确定性, 使得噪声  $w(k)$  到估计误差  $e(k)$  的算子的  $H_\infty$  范数小于  $\gamma$ , 这就是鲁棒  $H_\infty$  滤波。对于鲁棒  $H_\infty$  滤波, 有下面定理。

定理 3-2<sup>[102]</sup> 设  $\delta > 0$  是任意一个标量, 给定  $\gamma > 0$  和初始状态, 对于某些常数  $\varepsilon > 0$ , 如果下面条件成立:

① 如下 Riccati 方程存在一个稳定化解  $P = P^T > 0$ , 使得

$$A^T P A - P + \gamma^{-2} A^T P B_1 (I - \gamma^{-2} B_1^T P B_1)^{-1} B_1^T P A + \varepsilon^2 E^T E + \delta I = 0 \quad (3-49)$$

$$\text{满足 } I - \gamma^{-2} B_1^T P B_1 > 0, \text{ 并且 } P < \gamma^2 N, \text{ 式中 } B_1 = \begin{bmatrix} B & \frac{\gamma}{\varepsilon} H_1 & 0 \end{bmatrix}。$$

② 如下差分 Riccati 方程存在一个有界的时变矩阵  $S(k) = S^T(k) \geq 0, \forall k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \hat{A} S(k) \hat{A}^T \\ &\quad - (\hat{A} S(k) \hat{C}_1^T + \hat{B} \hat{D}_1^T) (\hat{C}_1 S(k) \hat{C}_1^T + \hat{R})^{-1} (\hat{A} S(k) \hat{C}_1^T + \hat{B} \hat{D}_1^T)^T + \hat{B} \hat{B}^T \end{aligned} \quad (3-50)$$

$S(0) = (R - \gamma^{-2} P)^{-1}$ , 满足  $I - \gamma^{-2} L^T S(k) L > 0$ , 使得

$$\hat{A} - (\hat{A} S(k) \hat{C}_1^T + \hat{B} \hat{D}_1^T) (\hat{C}_1 S(k) \hat{C}_1^T + \hat{R})^{-1} \hat{C}_1 \quad (3-51)$$

渐进稳定。式中， $\hat{A} = A + \gamma^{-2} \bar{B} \bar{B}^T (P^{-1} - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)^{-1} A$ ,

$$\hat{C} = C + \gamma^{-2} \bar{D} \bar{B}^T (P^{-1} - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)^{-1} A, \quad \hat{B} = [\bar{B} Z \quad 0 \quad 0], \quad \hat{D} = [\bar{D} Z \quad 0 \quad 0]$$

$$\hat{C}_1 = \begin{bmatrix} \gamma^{-1} \hat{M} \\ \hat{C} \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{D} \end{bmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & \hat{D} \hat{D}^T \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B & \frac{\gamma}{\varepsilon} H_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D & \frac{\gamma}{\varepsilon} H_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{M} = (L^T L)^{1/2}, \quad Z = [I + \gamma^{-2} \bar{B}^T (P^{-1} - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)^{-1} \bar{B}]^{1/2},$$

那么，鲁棒  $H_\infty$  滤波器(3-47)中的

$$A_e = \hat{A} - K_e \hat{C}$$

$$K_e = (\hat{A} \hat{S}(k) \hat{C}^T + \hat{B} \hat{D}^T)(\hat{C} \hat{S}(k) \hat{C}^T + \hat{D} \hat{D}^T)^{-1}$$

$$\hat{S}(k) = S(k) + \gamma^{-2} S(k) \hat{M}^T (I - \gamma^{-2} \hat{M} S(k) \hat{M}^T)^{-1} \hat{M} S(k)$$

定理 3-2 所得到的鲁棒  $H_\infty$  滤波算法主要是通过求解一个黎卡蒂方程，基于该方程的解来获得另一个黎卡蒂方程的参数，通过这个迭代黎卡蒂方程来进行滤波。但该定理并没给出一种有效的参数求解方法，不便于工程实用，本文基于线性矩阵不等式，来求得参数方程的解。根据(3-49)，有：

$$A^T P A - P + \gamma^{-2} A^T P B_1 (I - \gamma^{-2} B_1^T P B_1)^{-1} B_1^T P A + \varepsilon^2 E^T E < 0 \quad (3-52)$$

利用矩阵求逆引理和矩阵 Schur 补性质可得：

$$\begin{bmatrix} -P + \varepsilon^2 E^T E & 0 & 0 & A^T \\ 0 & -\gamma^2 I & 0 & B^T \\ 0 & 0 & -\varepsilon^2 I & H_1^T \\ A & B & H_1 & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (3-53)$$

令  $X = P^{-1}$ ，则矩阵不等式(3-53)是关于  $X, P, \varepsilon^2, \gamma^2$  的线性矩阵不等式，在(3-53)约束条件下，最小化  $\gamma$ ，可求得  $P, \varepsilon^2, \gamma^2$ ，并通过定理 3-2 的条件 2 即可求得滤波的迭代解。

### 3.11 基于椭球滤波模型鲁棒滤波仿真实验

在本节中，基于椭球滤波模型，利用鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒  $H_\infty$  滤波进行滤波仿真，仿真条件同 3.5 节。

在白噪声情况下，对比鲁棒卡尔曼滤波与鲁棒  $H_\infty$  滤波，即图 3.15、图 3.16，精度相当，鲁棒  $H_\infty$  滤波在速度误差和首向角误差估计方面略优于鲁棒卡尔曼滤波；在色噪声情况下，对比鲁棒卡尔曼滤波与鲁棒  $H_\infty$  滤波，即图 3.17 和图 3.18，鲁棒  $H_\infty$  滤波在速度误差和首向角误差估计方面仍然优于鲁棒卡尔曼滤波；对比图 3.15 和图 3.17，色噪声情况下的鲁棒卡尔曼滤波明显劣于白噪声情况，反映了鲁



棒卡尔曼滤波对噪声比较敏感,具有卡尔曼滤波同样的性质;对比图 3.16 和图 3.18,鲁棒  $H_{\infty}$  滤波在白噪声和色噪声情况下,滤波效果相差不多,反映了鲁棒  $H_{\infty}$  滤波对噪声不敏感,具有  $H_{\infty}$  滤波同样的性质。

对比 3.5 节的仿真结果,可以发现,鲁棒卡尔曼滤波已克服了卡尔曼滤波对时变参数不够稳健的缺点,同时,也可看到,鲁棒  $H_{\infty}$  滤波滤波性能略低于  $H_{\infty}$  滤波,这是因为  $H_{\infty}$  滤波利用了系数矩阵全部信息,而鲁棒  $H_{\infty}$  滤波则将系数矩阵中有些信息看作了不确定数,丢失了一些信息,本文的基于椭球滤波模型还不存在真正意义上的不确定参数,根据实际情况对于该模型的一些变形模型可能存在不确定参数,只能利用鲁棒  $H_{\infty}$  滤波或鲁棒卡尔曼滤波进行滤波,因为卡尔曼滤波和  $H_{\infty}$  滤波在滤波过程中无法确定这些参数,而恰恰鲁棒  $H_{\infty}$  滤波或鲁棒卡尔曼滤波将这些不确定因素摒弃在滤波迭代过程之外了。

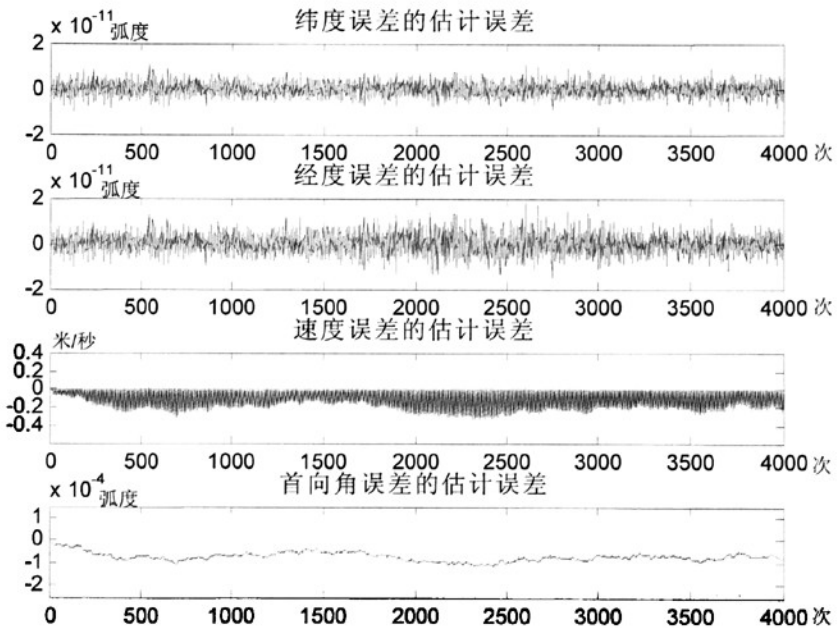


图 3.15 白噪声情况鲁棒卡尔曼滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

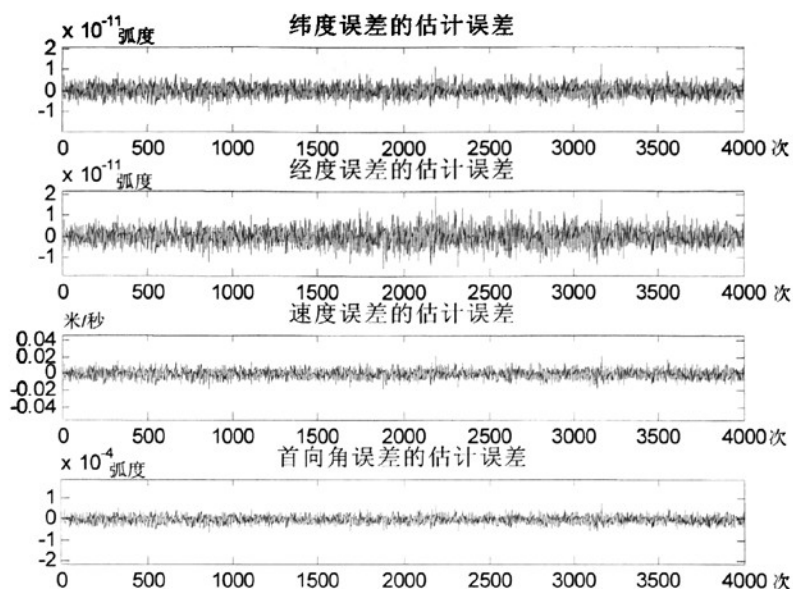


图 3.16 白噪声情况鲁棒  $H_\infty$  滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

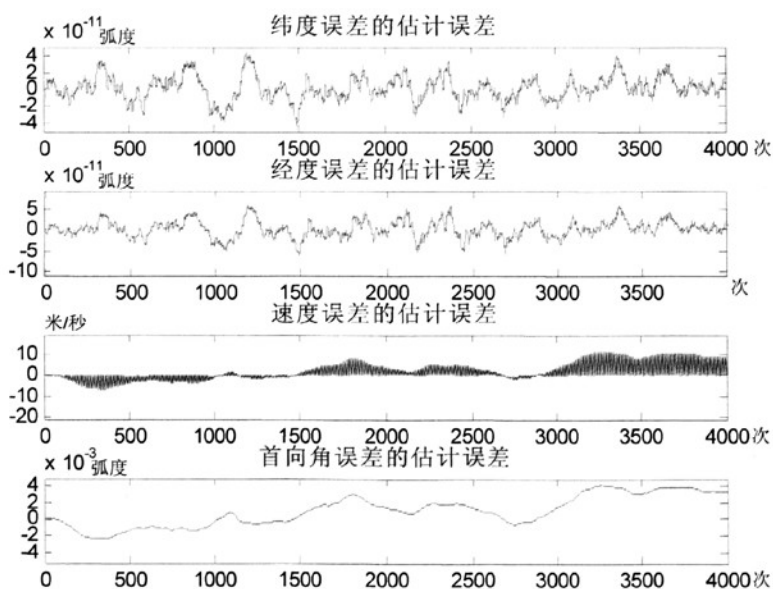


图 3.17 色噪声情况鲁棒卡尔曼滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

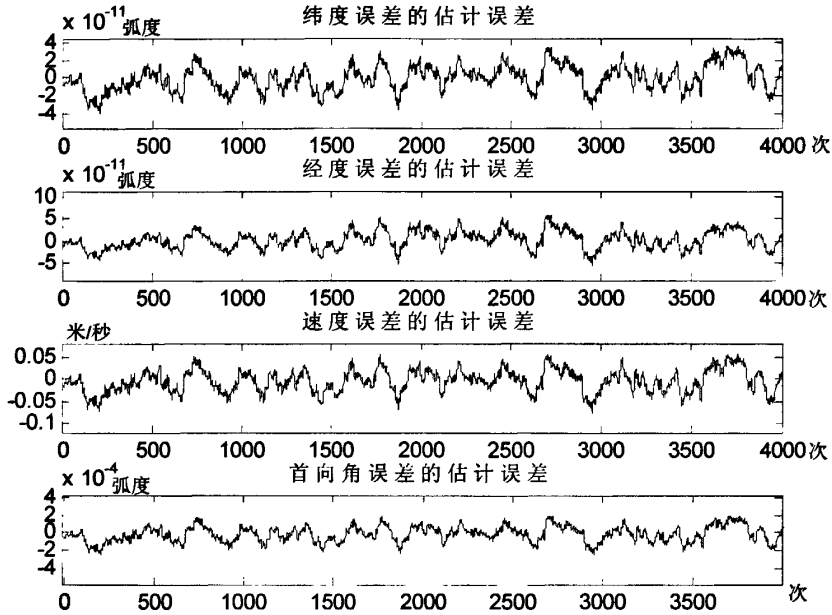


图 3.18 色噪声情况鲁棒  $H_{\infty}$  滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

### 3.12 本章小结

本章论述了卡尔曼滤波算法和  $H_{\infty}$  滤波算法，并从理论基础和数学形式两方面对比了两种滤波算法，得到了  $H_{\infty}$  滤波是卡尔曼滤波的推广，卡尔曼滤波是  $H_{\infty}$  滤波的特例的结论。基于线性矩阵不等式获得了稳态  $H_{\infty}$  滤波算法，结合基于“当前”统计模型的滤波模型介绍了非线性模型下的扩展滤波算法，从另一角度，将基于椭球滤波模型看成不确定系数模型，由此介绍了鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒  $H_{\infty}$  滤波算法。全面地将第二章介绍的三个模型，分白噪声和色噪声两种情况，对比了卡尔曼滤波、 $H_{\infty}$  滤波、稳态  $H_{\infty}$  滤波、扩展卡尔曼滤波、扩展  $H_{\infty}$  滤波、鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒  $H_{\infty}$  滤波的滤波性能，从总体上看， $H_{\infty}$  滤波形式的滤波性能与卡尔曼滤波相当，但稳健性要强于卡尔曼滤波形式的滤波。卡尔曼滤波是白噪声情况下的最优滤波，怎么将  $H_{\infty}$  滤波与卡尔曼滤波的优势互补，将是下一章要研究的内容。

## 第四章 组合导航中的 $H_2/H_\infty$ 混合滤波

### 4.1 引言

从第三章的论述,可以获得这样一个结论,即对于常值模型,如果噪声是高斯白噪声,选用卡尔曼滤波来求解较好,如果噪声并非高斯噪声,那么考虑的应是  $H_\infty$  滤波。但是,一方面,当系统同时受到白噪声与其他噪声干扰或者受到根本不知道分布特征的噪声的干扰,只有综合考虑滤波的性能又考虑滤波的稳健性,才能得到符合实际要求的滤波器,另一方面,怎么让  $H_\infty$  滤波与卡尔曼滤波优势互补,则需考虑将两者结合起来进行滤波。近些年出现的  $H_2/H_\infty$  滤波能兼顾系统性能与滤波稳健性,得到了些高品质的滤波器<sup>[6][32]</sup>,这些滤波器都是在满足  $H_\infty$  范数界的情况下,优化系统的  $H_2$  指标,这是混合滤波的一种,但  $H_\infty$  范数上界,即  $\gamma$  参数怎么确定是实际系统的难点所在,另一种是确定估计误差方差上界,即  $H_2$  指标,来优化  $H_\infty$  指标,这种滤波称之为约束方差滤波,这种方式比较有工程实用价值。但是这些滤波形式,都是基于线性矩阵不等式,适合稳态滤波,对迭代的混合滤波,本文提出了新的算法。

本章首先提出了基于线性矩阵不等式的约束方差  $H_2/H_\infty$  混合滤波算法,主要思想是获得估计误差协方差约束下的增益矩阵集合来优化系统  $H_\infty$  指标,从而获得满足一定精度而又比较稳健的滤波器,这是本章的创新点之一;然后介绍了在理论上讨论比较多的在满足  $H_\infty$  范数界的情况下来优化系统的  $H_2$  指标的混合  $H_2/H_\infty$  滤波算法,并对算法作了相关证明;最后论述了针对在满足  $H_\infty$  范数界的情况下来优化系统的  $H_2$  指标混合滤波的局限性,提出了一种迭代形式的混合滤波算法,它不对噪声作过多的限制与建模,从滤波增益着手,认为滤波增益是卡尔曼滤波增益与  $H_\infty$  滤波增益的加权和,然后按最小估计误差方差的原则来求得加权系数,从而获得最终的滤波器,仿真证明该算法能够让  $H_\infty$  滤波与卡尔曼滤波优势互补,具有较好稳健性,这是本章的创新点之二。

### 4.2 方差约束稳态混合滤波

本节首先论述方差约束混合滤波的一个重要步骤,即非线性不等式怎么化为矩阵不等式求解的问题,然后利用这种方法,获得离散时间系统方差约束估计解的集合,为优化  $H_\infty$  指标作了准备,最后,论述了估计误差协方差约束下的增益矩

阵集合来优化系统  $H_\infty$  指标的  $H_2 / H_\infty$  稳态混合滤波解, 从而获得满足一定精度而又较稳健的稳态混合滤波器。

#### 4.2.1 黎卡蒂非线性不等式的矩阵不等式求解

##### 1 问题描述

实际许多滤波问题是以给出估计误差方差上界形式来使估计误差在限定的范围内以达到次优而同时保证滤波不发散, 文献[83]利用协方差配置理论<sup>[37]</sup>完成了过程噪声与观测噪声为高斯白噪声的估计问题, 但是求解中的一个重要步骤需要解一个黎卡蒂非线性不等式, 而该文是通过将黎卡蒂非线性不等式转化为黎卡蒂方程来求解的, 这也是通常使用的方法, 然而, 这种方法引入了正定矩阵, 黎卡蒂方程的解依赖于该正定矩阵的选定, 而且, 对给定的正定矩阵, 即使黎卡蒂方程无解, 也不能推出相应的黎卡蒂非线性不等式无可行解。本节将黎卡蒂非线性不等式的求解, 转换成矩阵不等式可行性问题的求解, 避免了用试探的方法求解黎卡蒂非线性不等式, 同时, 该方法为进一步优化系统的其他性能指标提供了可能, 为方差约束稳态混合滤波在方法上提供了一个引导作用。

##### 2 算法

考虑如下稳定可测线性时不变连续系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \quad (4-1)$$

其中,  $x(t) \in R^n$ ,  $y(t) \in R^q$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  为互不相关的零均值高斯白噪声, 方差矩阵分别为  $V$ ,  $W$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  为相应维数常数矩阵, 初始状态估计为  $\hat{x}(0)$ , 方差为  $P(0)$ , 状态估计  $\hat{x}(t)$  为:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4-2)$$

稳态估计误差方差为:  $P = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[e(t)e^T(t)]$ , 其中,  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 。

$\sigma_i^2 (i=1, \dots, n)$  表示方差估计误差限制, 目标是求解矩阵  $K$ , 使得估计误差方差满足方差上界的要求。由上述定义, 可以得到:

$$\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) + Bv(t) - KDw(t) \quad (4-3)$$

$$\dot{P}(t) = (A - KC)P(t) + P(t)(A - KC)^T + KDWD^T K^T + BVB^T \quad (4-4)$$

如果  $(A - KC)$  稳定, 那么, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $P = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ , 此时有:

$$0 = (A - KC)P + P(A - KC)^T + KDWD^T K^T + BVB^T \quad (4-5)$$

定义正定对称矩阵  $Y$ , 将(4-5)式变形为:

$$\begin{aligned} & (A-KC)(P-Y)+(P-Y)(A-KC)^T+(A-KC)Y+Y(A-KC)^T \\ & +KDWD^TK^T+BVB^T=0 \end{aligned} \quad (4-6)$$

根据李雅普诺夫稳定性定理, 知道, 如果有:

$$(A-KC)Y+Y(A-KC)^T+KDWD^TK^T+BVB^T<0 \quad (4-7)$$

那么,  $P<Y$ 。令  $N=Y^{-1}, M=Y^{-1}K$ , 那么  $K=N^{-1}M$ , 则(4-7)变形为:

$$(A-N^{-1}MC)N^{-1}+N^{-1}(A-N^{-1}MC)^T+N^{-1}MDWD^TM^TN^{-1}+BVB^T<0 \quad (4-8)$$

对(4-8), 两边分别左乘和右乘矩阵  $N$ , 矩阵的负定性并不改变, 则得到

$$NA+A^TN-MC-C^TM^T+MDWD^TM^T+NBVB^TN<0 \quad (4-9)$$

对于(4-9), 利用 Schur 补定理得到关于矩阵变量  $N, M$  的三阶线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} NA+A^TN-MC-C^TM^T & NB & MD \\ B^TN & -V^{-1} & 0 \\ D^TM^T & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4-10)$$

(4-10)的证明如下。

证明: 根据 Schur 补定理,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} NA+A^TN-MC-C^TM^T & NB & MD \\ B^TN & -V^{-1} & 0 \\ D^TM^T & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{bmatrix} -V^{-1} & 0 \\ 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ NA+A^TN-MC-C^TM^T - [NB \quad MD] \begin{bmatrix} -V^{-1} & 0 \\ 0 & -W^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B^TN \\ D^TM^T \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & NA+A^TN-MC-C^TM^T+MDWD^TM^T+NBVB^TN < 0 \end{aligned}$$

其中  $\begin{bmatrix} -V^{-1} & 0 \\ 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0$  显然成立。

证毕。

根据方差估计误差限制为  $[Y]_{ii} \leq \sigma_i^2, i=1 \dots n$ , 同样, 利用 Schur 补定理可求得

$$\begin{bmatrix} N & E_i \\ E_i & \sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4-11)$$

其中,  $E_i$  为单位列向量,  $i=1 \dots n$ 。(4-11)的证明如下。

证明: 根据矩阵性质,  $[Y]_{ii} \leq \sigma_i^2, i=1 \dots n$  可写成  $E_i^T Y E_i \leq \sigma_i^2, i=1 \dots n$ , 根据 Schur 补定理,

$$\begin{bmatrix} N & E_i \\ E_i & \sigma_i^2 \end{bmatrix} \geq 0, i=1, 2 \dots n \text{ 等价于 } N > 0, \sigma_i^2 - E_i^T N^{-1} E_i > 0, \text{ 即}$$

$$Y > 0, E_i Y E_i \leq \sigma_i^2, i = 1 \cdots n.$$

证毕。

根据(4-10), (4-11), 可以利用线性矩阵不等式工具箱来求得  $N, M$  的可行解, 从而可求得  $K, Y$  的可行解。根据实际情况, 还可对矩阵变量  $K, Y$  作其他限制, 一并作为约束条件来求可行性解。

### 3 仿真示例

考虑一个二维系统: 假设

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], D = 1, W = 1, V = 2, \sigma_1^2 = 2.8, \sigma_2^2 = 1.7$$

根据(4-10), (4-11), 则可得滤波增益矩阵为  $K = [1.4199 \quad 1.6876]^T$ , 稳态估计误差

协方差阵  $Y = \begin{bmatrix} 2.3914 & 1.4223 \\ 1.4223 & 1.6903 \end{bmatrix}$ 。对此系统作连续时间卡尔曼滤波, 稳态滤波增益

矩阵为  $K = [1.4142 \quad 1.6818]^T$ , 稳态估计误差协方差阵  $X = \begin{bmatrix} 2.3784 & 1.4142 \\ 1.4142 & 1.6868 \end{bmatrix}$ 。将(4-3)

式改写为  $\dot{e}(t) = (A - KC)e(t) + [B \quad -KD] \begin{bmatrix} V(t) \\ W(t) \end{bmatrix}$ , 令

$\bar{W}(t) = \begin{bmatrix} V(t) \\ W(t) \end{bmatrix}, \bar{B} = [B \quad -KD], \bar{A} = A - KC$ , 则得到:  $\dot{e}(t) = \bar{A}e(t) + B\bar{W}(t)$ , 由此,

可以得到卡尔曼滤波与方差限制时  $\bar{W}(t)$  到  $e(t)$  的幅频特性曲线, 如图 4.1 所示: (实线为卡尔曼滤波方法曲线), 由图可以看到所述的方法, 与卡尔曼滤波几乎接近, 证明所采取的方法是可行的。

同时, 按照文献[83]所述方法, 得到的增益矩阵为  $K = [3.1617 \quad 1.7958]^T$ , 卡尔曼滤波、线性矩阵不等式与文献[83]所述方法的方差限制时  $\bar{W}(t)$  到  $e(t)$  的幅频特性曲线如图 4.2 所示, 由图可见, 文献[83]所述方法与卡尔曼滤波方法差距较大, 而本文所述线性矩阵不等式方法非常好的吻合了卡尔曼滤波。

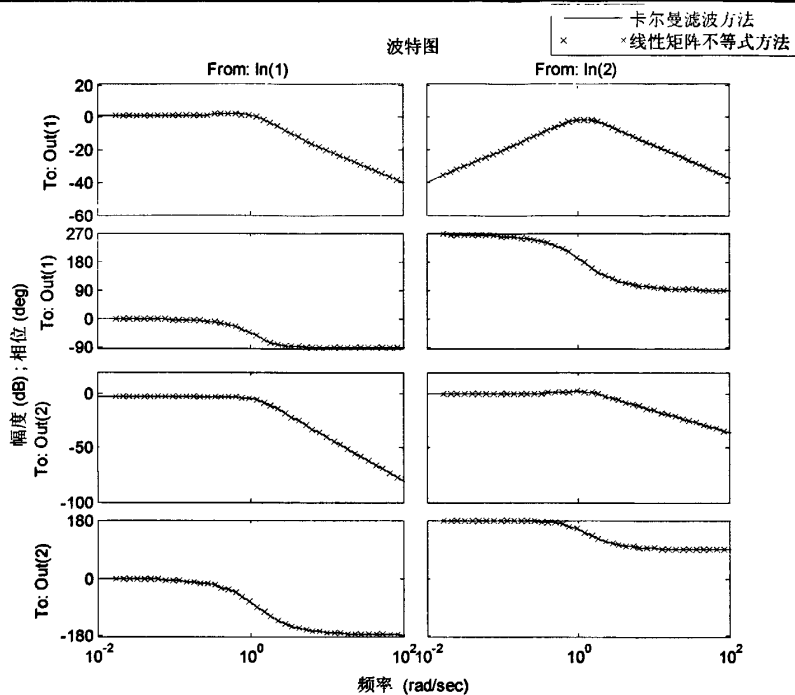


图 4.1 卡尔曼滤波与方差受限滤波幅频特性

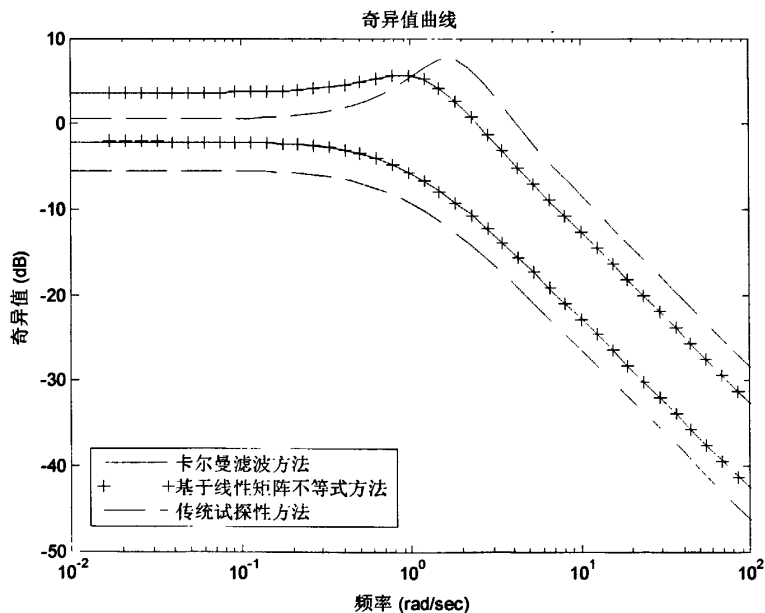


图 4.2 三种滤波的幅频特性对比图



总结：基于线性矩阵不等式方法，得到了估计误差方差限制时滤波的稳态增益矩阵与滤波方差，求解过程遵循严格数学过程，避免了带尝试性的解法，取得了较好的效果。这种方法提供了一个解的集合，为进一步优化系统其他性能指标提供了可能。

#### 4.2.2 离散时间系统约束方差估计

##### 1 问题描述

对于状态空间模型时不变卡尔曼滤波过程中，往往从工程应用的观点，将卡尔曼滤波的增益阵用它的稳态值近似代替，便可得到一种简单次优的卡尔曼滤波器<sup>[84]</sup>。基于上节方法，利用线性矩阵不等式对离散时间系统作分析，推导基于线性矩阵不等式离散时间约束方差估计算法，使得在估计误差方差上界限制下，滤波达到次优而同时保证不发散。本节的仿真结果表明算法可达到卡尔曼滤波假设条件下的精度，是离散时间系统噪声不充分条件下比较稳健的方差估计的方法。

##### 2 基于线性矩阵不等式离散时间约束方差估计算法

考虑如下稳定可测线性离散时不变系统：

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bv(k) \\ y(k) = Cx(k) + Dw(k) \end{cases} \quad (4-12)$$

其中， $x(k) \in R^n$ ， $y(k) \in R^q$ ， $v(k)$ ， $w(k)$ 为互不相关的零均值高斯白噪声，方差矩阵分别为 $V, W$ ， $A, B, C, D$ 为相应维数常数矩阵。下面分两种情况来讨论：

(1)预报器情形：所谓预报器，是指 $k$ 时刻的状态向量由量测 $y(k-1), y(k-2), y(k-3) \dots$ 重构而成，其状态估计向量为：

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (4-13)$$

(2)滤波器情形：所谓滤波器，是指 $k$ 时刻的状态向量由量测 $y(k), y(k-1), y(k-2) \dots$ 重构而成，其状态估计向量为：

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + K(y(k+1) - CA\hat{x}(k)) \quad (4-14)$$

稳态估计误差方差为： $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} E[e(k)e^T(k)]$ ，其中， $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ ， $\sigma_i^2 (i=1, \dots, n)$ 表示方差估计误差限制，目标是求解矩阵 $K$ ，使得估计误差方差满足方差上界的要求。

(1)预报器情形：

由(4-12)，(4-13)的表达式可以得到

$$e(k+1) = (A - KC)e(k) + Bv(k) - KDw(k),$$

$$P(k+1) = A_0 P(k) A_0^T + BVB^T + KDWD^T K^T \quad (4-15)$$

其中,  $A_0 = A - KC$ , 现给定正定对称矩阵  $Y$ ,  $[Y]_{ii} \leq \sigma_i^2 (i=1,2,\dots,n)$ , 使得  $P < Y$ 。当  $k \rightarrow \infty$  时, (4-15) 式化为:

$$P = A_0 P A_0^T + B V B^T + K D W D^T K^T \quad (4-16)$$

进一步得到:

$$A_0 (P - Y) A_0^T - (P - Y) + A_0 Y A_0^T - Y + K D W D^T K^T + B V B^T = 0 \quad (4-17)$$

由李雅普诺夫稳定性定理可知, 如果

$$A_0 Y A_0^T - Y + K D W D^T K^T + B V B^T < 0 \quad (4-18)$$

则  $P < Y$ 。对于(4-18), 利用 schur 补定理得到线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} B V B^T - Y & A_0 & K D \\ A_0^T & -Y^{-1} & 0 \\ D^T K^T & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4-19)$$

(4-19) 的证明如下。

证明: 根据 Schur 补定理, 有:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} B V B^T - Y & A_0 & K D \\ A_0^T & -Y^{-1} & 0 \\ D^T K^T & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{bmatrix} -Y^{-1} & 0 \\ 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} B V B^T - Y - [A_0 & K D] \begin{bmatrix} -Y^{-1} & 0 \\ 0 & -W^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_0^T \\ D^T K^T \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & A_0 Y A_0^T - Y + K D W D^T K^T + B V B^T < 0 \end{aligned}$$

其中  $\begin{bmatrix} -Y^{-1} & 0 \\ 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0$  显然成立。

证毕。

令  $U = Y^{-1}$ , 则线性矩阵不等式(4-19)是关于矩阵变量  $U$ ,  $Y$ ,  $K$  的不等式。

(2) 滤波器情形:

由(4-12), (4-13)的表达式我们可以得到

$$e(k+1) = (A - KCA)e(k) + (B - KCB)v(k) - K D w(k+1)$$

$$P(k+1) = A_0 P(k) A_0^T + (B - KCB)V(B - KCB)^T + K D W D^T K^T \quad (4-20)$$

其中,  $A_0 = A - KCA$ , 现给定正定对称矩阵  $Y$ ,  $[Y]_{ii} \leq \sigma_i^2 (i=1,2,\dots,n)$ , 使得  $P < Y$ 。

当  $k \rightarrow \infty$  时, (4-20) 式化为:

$$P = A_0 P A_0^T + (B - KCB)V(B - KCB)^T + K D W D^T K^T \quad (4-21)$$

进一步得到:

$$A_0(P-Y)A_0^T - (P-Y) + A_0YA_0^T - Y + KDWD^TK^T + (B-KCB)V(B-KCB)^T = 0 \quad (4-22)$$

同样, 根据李雅普诺夫稳定性定理, 要使  $P < Y$ , 则:

$$A_0YA_0^T - Y + KDWD^TK^T + (B-KCB)V(B-KCB)^T < 0 \quad (4-23)$$

利用 schur 补定理得到线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -Y & B-KCB & A_0 & KD \\ (B-KCB)^T & -V^{-1} & 0 & 0 \\ A_0^T & 0 & -Y^{-1} & 0 \\ D^TK^T & 0 & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4-24)$$

证明: 根据 Schur 补定理, 有:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -Y & B-KCB & A_0 & KD \\ (B-KCB)^T & -V^{-1} & 0 & 0 \\ A_0^T & 0 & -Y^{-1} & 0 \\ D^TK^T & 0 & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{bmatrix} -V^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -Y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ -Y - [B-KCB \ A_0 \ KD] \begin{bmatrix} -V^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -Y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (B-KCB)^T \\ A_0^T \\ D^TK^T \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & A_0YA_0^T - Y + KDWD^TK^T + (B-KCB)V(B-KCB)^T < 0 \\ \text{其中} & \begin{bmatrix} -V^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -Y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0, \text{显然成立。} \end{aligned}$$

证毕。

令  $U = Y^{-1}$ , 则线性矩阵不等式(4-24)是关于矩阵变量  $U$ ,  $Y$ ,  $K$  的不等式。

$Y$  矩阵的对角线元素可由方差估计误差限制, 即

$$[Y]_{ii} \leq \sigma_i^2, i = 1, \dots, n, \quad (4-25)$$

这样, 预测器可结合(4-19), (4-25)式, 滤波器可结合(4-24), (4-25)式, 构成矩阵不等式可行性问题, 利用线性矩阵不等式工具箱就可求得  $Y, K$ 。当然, 还可以对  $K$  中元素加以限制, 构成新的矩阵不等式约束条件来得到可行解。

### 3 仿真示例

考虑一个二维的系统：假设  $x(k) = [x_1(k), x_2(k)]^T$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \ 1]$ ,  $D = 1, W = 0.7, V = 1.4$ ,  $\sigma_1^2 = 2.8, \sigma_2^2 = 1.7$ , 同时限制  $[K]_y \geq 1$ , 与根据 (4-19), (4-25) 式, 利用矩阵不等式工具箱可求得预测器增益为  $K_p = [1.1290 \ 1.1446]^T$ , 稳态估计误差方差为  $Y = \begin{bmatrix} 2.6690 & 1.1306 \\ 1.1306 & 1.5373 \end{bmatrix}$ ; 利用 (4-24), (4-25) 式与  $K$  的限制, 可求得滤波器增益为  $K_f = [1.0904 \ 1.2025]^T$ , 稳态估计误差方差为  $Y = \begin{bmatrix} 2.7080 & 1.0037 \\ 1.0037 & 1.3786 \end{bmatrix}$ 。同时, 如果过程与观测噪声是高斯的, 则得到卡尔曼滤波增益为  $K = [1.4142 \ 1.6818]^T$ , 稳态估计误差方差为  $P = \begin{bmatrix} 1.6649 & 0.9899 \\ 0.9899 & 1.1773 \end{bmatrix}$ 。将预测器估计误差方程改写为  $e(k+1) = (A - KC)e(k) + [B \ -KD] \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k) \end{bmatrix}$ , 滤波器估计误差方程改写为  $e(k+1) = (A - KCA)e(k) + [B - KCB \ -KD] \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k+1) \end{bmatrix}$ , 令  $W_p = \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k) \end{bmatrix}$ ,  $B_p = [B \ -KD]$ ,  $A_p = A - KC$ , 则得到预测器估计误差方程为:  $e(k+1) = A_p e(k) + B_p W_p$ , 令  $W_f = \begin{bmatrix} v(k) \\ w(k+1) \end{bmatrix}$ ,  $B_f = [B - KCB \ -KD]$ ,  $A_f = A - KCA$ , 则得到滤波器估计误差方程为:  $e(k+1) = A_f e(k) + B_f W_f$ , 由此, 可以得到稳态卡尔曼滤波与方差限制时预测器与滤波器从噪声到估计误差的幅度相位曲线, 如图 4.3 所示: (实线为卡尔曼滤波器, “+”为预测器, “\*”为滤波器), 由图可以看到, 利用矩阵不等式求出的滤波器幅频特性与同样噪声条件下稳态卡尔曼滤波器是一致的。

总结: 本节推导了离散时间定常系统基于线性矩阵不等式的估计误差方差限制下的滤波算法, 该算法提供的是解的集合, 为优化其他性能指标提供了可能, 例如  $H_\infty$  指标, 为下一节研究奠定了基础。

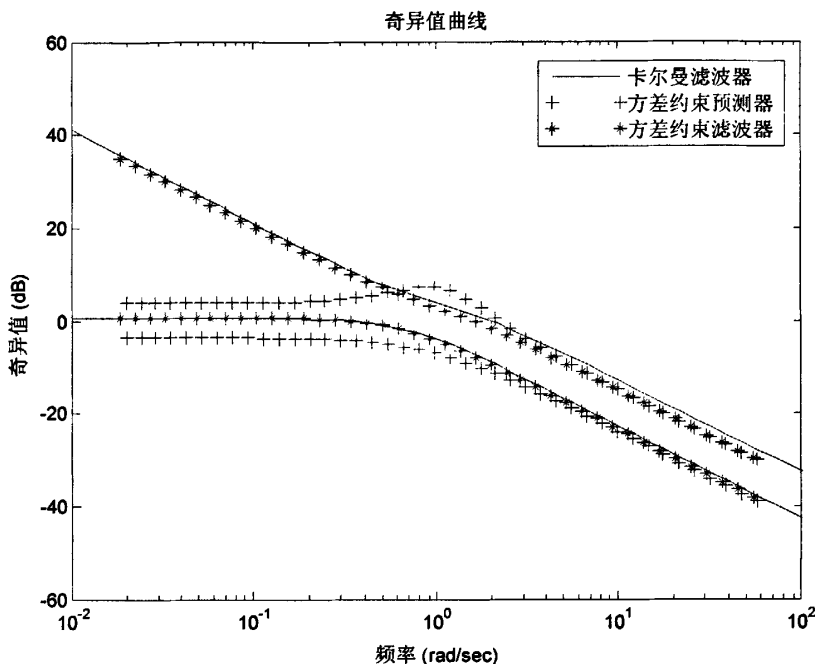


图 4.3 几种滤波方法的幅频特性曲线图

### 4.2.3 方差约束离散时间系统混合 $H_2/H_\infty$ 滤波

#### 1 问题描述

以上两节得到的结论是：基于线性矩阵不等式，提供了方差约束下解的集合约束条件，为优化其他性能指标提供了可能。因此，本节利用这一结果运用在满足  $H_2$  指标上界的情况下，优化系统的  $H_\infty$  指标的混合滤波上，避免需确定  $\gamma$  参数的混合滤波方法。

#### 2 方差约束的混合 $H_2/H_\infty$ 滤波算法

考虑如下稳定可测线性离散定常系统：

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \\ y(k) = Cx(k) + Dw(k) \\ z(k) = Lx(k) \end{cases} \quad (4-26)$$

其中， $x(k) \in R^n$  为状态向量， $y(k) \in R^m$  为量测向量， $z(k) \in R^q$  为要估计的输出量， $A, B, C, D, L$  为适当维数的矩阵， $BD^T = 0$ ，保证过程扰动输入与量测噪声不相关， $w(k)$  为含零均值单位方差白噪声与不知分布情况的能量有界噪声的混合过程，但

是知道其上界,  $E(w(k)w^T(k)) \leq W$ 。同时, 稳定状态估计误差协方差阵  $P$  满足

$$[P]_{ii} \leq \sigma_i^2, i=1,2,\dots,n. \quad (4-27)$$

式中  $[P]_{ii}$  代表  $P$  的第  $i$  个对角元,  $\sigma_i^2$  表示对第  $i$  个状态估计误差限制, 它是根据实际性能指标确定的。目标是稳态估计误差方差限制的情况下, 使得系统  $H_\infty$  性能指标最小。定义  $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k), \tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ , 分两种情况来考虑:

I 预报器情形: 定义(4-28)式为预测器, 并需确定预测器增益矩阵  $K$ , 使得估计误差协方差满足(4-27), 并且  $H_\infty$  指标达到最小。

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + K[y(k) - C\hat{x}(k)] \\ \hat{z}(k) = L\hat{x}(k) \end{cases} \quad (4-28)$$

由(4-26), (4-28)式, 可以得到:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = (A - KC)\tilde{x}(k) + (B - KD)w(k) \\ \tilde{z}(k) = L\tilde{x}(k) \end{cases} \quad (4-29)$$

根据(4-29), 令稳态估计误差协方差  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} E[x(k)x^T(k)]$ , 可以得到:

$$P = (A - KC)P(A - KC)^T + (B - KD)W(B - KD)^T \quad (4-30)$$

现给定正定对称矩阵  $Y$ ,  $[Y]_{ii} \leq \sigma_i^2 (i=1,2,\dots,n)$ , 将(4-30)变形为:

$$\begin{aligned} (A - KC)(P - Y)(A - KC)^T - (P - Y) + (A - KC)Y(A - KC)^T - Y \\ + (B - KD)W(B - KD)^T = 0 \end{aligned} \quad (4-31)$$

由李雅普诺夫稳定性定理, 如果

$$(A - KC)Y(A - KC)^T - Y + (B - KD)W(B - KD)^T < 0 \quad (4-32)$$

则  $P < Y$ , 从而  $[P]_{ii} \leq \sigma_i^2, i=1,2,\dots,n$ 。对于(4-32), 利用 schur 补定理得到三阶线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -Y & A - KC & B - KD \\ A^T - C^T K^T & -Y^{-1} & 0 \\ B^T - D^T K^T & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4-33)$$

证明参考 4.2.2 节。

令  $U = Y^{-1}$ , 则线性矩阵不等式(4-33)是关于矩阵变量  $U, Y, K$  的线性矩阵不等式。利用离散时间有界实引理, 针对估计误差动态系统(4-29), 可以得到: 对于估计误差动态系统(4-29), 如果存在正定对称矩阵  $X$ , 满足(4-34)

$$\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & A - KC & B - KD \\ 0 & I & L & 0 \\ A^T - C^T K^T & L^T & X & 0 \\ B^T - D^T K^T & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (4-34)$$

那么  $A - KC$  是渐进稳定的, 并且满足  $\|L(zI - A + KC)^{-1}(B - KD)\|_{\infty} < \gamma$ 。

证明: 根据离散时间有界实引理, 对于估计误差动态系统(4-29), 若  $A - KC$  是渐近稳定的, 并且满足  $\|L(zI - A + KC)^{-1}(B - KD)\|_{\infty} < \gamma$  的充要条件是存在正定对称矩阵  $X$ , 满足:

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} A - KC & B - KD \\ L & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - KC & B - KD \\ L & 0 \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

根据 Schur 补定理中等价关系:

$$S > 0 \Leftrightarrow S_{11} > 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} > 0 \quad (4-36)$$

有:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & A - KC & B - KD \\ 0 & I & L & 0 \\ A^T - C^T K^T & L^T & X & 0 \\ B^T - D^T K^T & 0 & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} > 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A - KC & B - KD \\ L & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A - KC & B - KD \\ L & 0 \end{bmatrix} > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

证毕。

令  $V = X^{-1}$ , 则线性矩阵不等式(4-34)是关于矩阵变量  $V$ ,  $X$ ,  $K$  的线性矩阵不等式。目标是利用关于矩阵变量  $U$ ,  $Y$ ,  $V$ ,  $X$ ,  $K$  矩阵不等式(4-33), (4-34)作为约束条件, 来最小化系统  $H_{\infty}$  性能指标  $\gamma$ 。

II 滤波器情形: 定义(4-37)式为滤波器, 并需确定预测器增益矩阵  $K$ , 使得估计误差协方差满足(4-27)并且  $H_{\infty}$  指标达到最小。

$$\begin{cases} \hat{\hat{x}}(k+1) = A\hat{\hat{x}}(k) + K[y(k+1) - CA\hat{\hat{x}}(k)] \\ \hat{\hat{z}}(k) = L\hat{\hat{x}}(k) \end{cases} \quad (4-37)$$

由(4-26), (4-37)则知, 估计误差动态系统如下:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}}(k+1) = (I - KC)A\tilde{\tilde{x}}(k) + [B - KCB \quad -KD] \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k+1) \end{bmatrix} \\ \tilde{\tilde{z}}(k) = L\tilde{\tilde{x}}(k) \end{cases} \quad (4-38)$$

根据(4-38), 令稳态估计误差协方差  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} E[x(k)x^T(k)]$ , 可以得到:

$$P = (A - KCA)P(A - KCA)^T + (B - KCB - KD)W(B - KCB - KD)^T \quad (4-39)$$

现给定正定对称矩阵  $Y$ ,  $[Y]_{ii} \leq \sigma_i^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ , 按照求解预测器类似的方法可以得

到当

$$\begin{bmatrix} -Y & A-KCA & B-KCB-KD \\ A^T-C^TK^TA^T & -Y^{-1} & 0 \\ B^T-B^TC^TK^T-D^TK^T & 0 & -W^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (4-40)$$

那么  $P < Y$ , 从而  $[P]_{ii} \leq \sigma_i^2, i=1,2,\dots,n$ , 令  $U = Y^{-1}$ , 则线性矩阵不等式(4-40)是关于矩阵变量  $U, Y, K$  的线性矩阵不等式。同样, 由离散时间有界实引理, 针对估计误差动态系统(4-38), 可以得到: 对于估计误差动态系统(4-38), 如果存在正定对称矩阵  $X$ , 满足(4-41)

$$\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & A-KCA & B-KCB-KD \\ 0 & I & L & 0 \\ A^T-A^TC^TK^T & L^T & X & 0 \\ B^T-B^TC^TK^T-D^TK^T & 0 & 0 & \gamma^2I \end{bmatrix} > 0 \quad (4-41)$$

那么  $A-KCA$  是渐进稳定的, 并且满足  $\|L(zI-A+KCA)^{-1}(B-KCB-KD)\|_{\infty} < \gamma$ 。

证明: 根据离散时间有界实引理, 对于估计误差动态系统(4-38), 若  $A-KCA$  是渐进稳定的, 并且满足  $\|L(zI-A+KCA)^{-1}(B-KCB-KD)\|_{\infty} < \gamma$  的充要条件是存在正定对称矩阵  $X$ , 满足:

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \gamma^2I \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} A-KCA & B-KCB-KD \\ L & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-KCA & B-KCB-KD \\ L & 0 \end{bmatrix}$$

根据 Schur 补定理中等价关系:

$$S > 0 \Leftrightarrow S_{11} > 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} > 0$$

有:

$$\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & A-KCA & B-KCB-KD \\ 0 & I & L & 0 \\ A^T-A^TC^TK^T & L^T & X & 0 \\ B^T-B^TC^TK^T-D^TK^T & 0 & 0 & \gamma^2I \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0, \text{ 且}$$

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \gamma^2I \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} A-KCA & B-KCB-KD \\ L & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A-KCA & B-KCB-KD \\ L & 0 \end{bmatrix} > 0$$

证毕。

令  $V = X^{-1}$ , 则线性矩阵不等式(4-41)是关于矩阵变量  $V, X, K$  的线性矩阵不



等式，以矩阵不等式(4-40)，(4-41)作为约束条件，来最小化系统  $H_\infty$  性能指标  $\gamma$ ，从而求得稳态增益矩阵  $K$ 。

### 4.3 基于位置误差模型的稳态混合滤波仿真实验

将(2-38)，(2-39)按照 (4-26)的形式重写如下：

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + w(k) \\ y(k) = Cx(k) + v(k) \\ z(k) = Lx(k) \end{cases} \quad (4-42)$$

其中， $x(k) = [\delta x_e(k), \delta v_e(k), \delta x_n(k), \delta v_n(k)]^T$ ， $y(k) = [s_{eG}(k) - s_{eR}(k), s_{nG}(k) - s_{nR}(k)]^T$ ，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = D = L = I, \quad I \text{ 为单位阵, 令}$$

$\bar{w}(k) = [w^T(k) \quad v^T(k)]^T$ ，则(4-42)变形为：

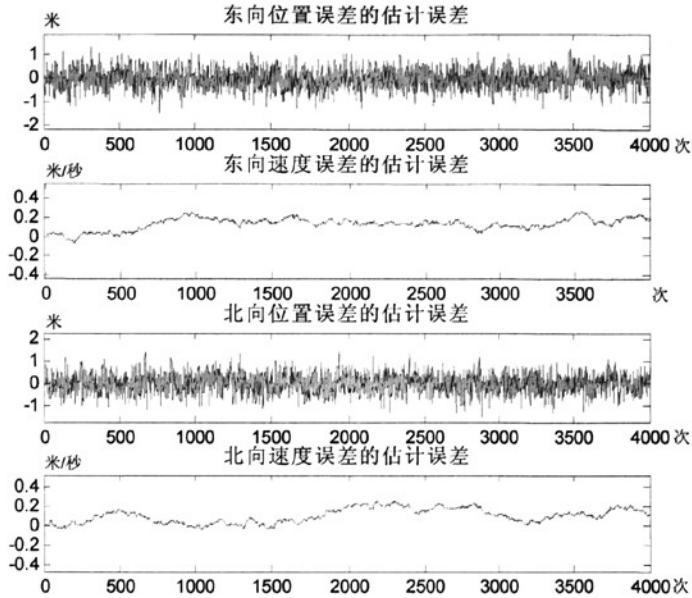
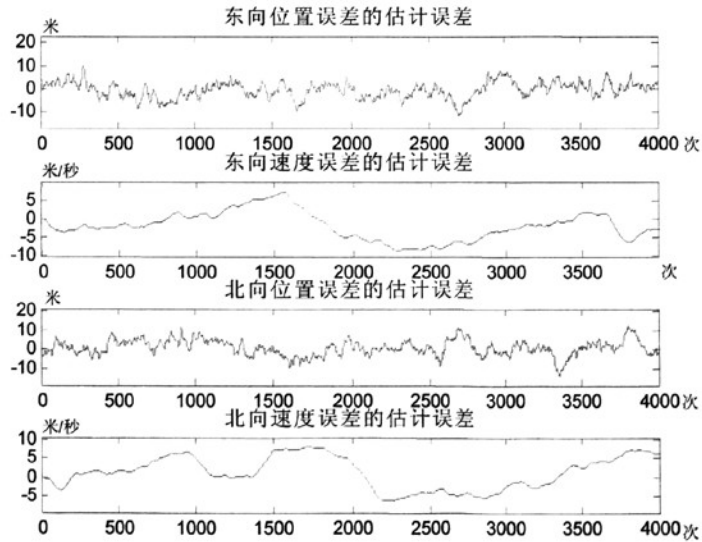
$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 2} \end{bmatrix} \bar{w}(k) \\ y(k) = Cx(k) + \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \bar{w}(k) \\ z(k) = Lx(k) \end{cases} \quad (4-43)$$

此时， $B = \begin{bmatrix} I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 2} \end{bmatrix}$ ， $D = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$ 。仿真条件为：取  $\bar{w}(k)$  的上界为  $W = I_{6 \times 6}$ ，估计误差方差上界满足  $P$  满足  $[P]_{ii} \leq 16, i = 1 \dots 4$ ，其他条件同 3.7 节。

在白噪声情况下，对比基于位置误差模型下的卡尔曼滤波、 $H_\infty$  滤波、稳态  $H_\infty$  滤波和约束方差混合滤波，即图 3.5、图 3.6、图 3.7 和图 4.4，约束方差混合滤波滤波性能与卡尔曼滤波性能相当，略优于稳态  $H_\infty$  滤波，比  $H_\infty$  滤波要好；在色噪声情况下，对比图 3.8、图 3.9、图 3.10 和图 4.5，约束方差混合滤波滤波性能要优于卡尔曼滤波，比  $H_\infty$  滤波差，与稳态  $H_\infty$  滤波相当；约束方差混合滤波滤波是卡尔曼滤波与  $H_\infty$  滤波的一个折中选择，在特定噪声下，不是最优的，但是滤波效能是比较稳定的。但是，对比图 4.4 和图 4.5，当噪声特性发生变化，约束方差混合滤波滤波效能变化还是比较明显的，且性能与稳态  $H_\infty$  滤波没有多少优势，主要原因是增益矩阵是常值，不能对变化的特性进行调节，这点与稳态  $H_\infty$  滤波是一致的，都是次优滤波，目的是节省时间上的开销。对比表 3.1 和 4.1，稳态  $H_\infty$  滤波与方差约束混合滤波时间上是相当的。

表 4.1 4000 次迭代耗费 CPU 时间比较

噪声背景	白噪声	色噪声
方差约束混合滤波	1.8927 秒	1.9027 秒

图 4.4 白噪声情况方差约束混合滤波估计误差  
(基于位置误差模型)图 4.5 色噪声情况方差约束混合滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

## 4.4 优化方差指标混合滤波算法

本节主要论述在鲁棒参数 $\gamma$ 确定下,来优化方差指标的混合滤波算法,作者着重证明了这种算法的存在性,说明了这种算法工程上应用的难点。

### 1 问题描述

考虑如下线性时不变离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1 w_1(k) + B_2 w_2(k) \\ y(k) = Cx(k) + D_1 w_1(k) + D_2 w_2(k) \\ z(k) = Lx(k) \end{cases} \quad (4-44)$$

其中,  $x(k) \in R^n$  为状态向量,  $y(k) \in R^r$  为测量向量,  $z(k) \in R^p$  为要估计的输出量,  $w_i(k) \in R^m, i=1,2$ , 为噪声向量, 包括过程和测量噪声,  $w_1(k), w_2(k)$  分别为白噪声和未知分布的有界能量噪声,  $A, B_1, B_2, C, D_1, D_2, L$  为适当维数的矩阵。假定系统(4-44)是渐进稳定的, 对于给定的常数 $\gamma > 0$ , 设计一个渐进稳定的满秩的滤波器:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_f \hat{x}(k) + B_f y(k) \\ \hat{z}(k) = C_f \hat{x}(k) \\ \hat{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (4-45)$$

定义  $\tilde{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}$ , 则滤波误差方程为:

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A} \tilde{x}(k) + \tilde{B}_1 w_1(k) + \tilde{B}_2 w_2(k) \\ \tilde{z}(k) = \tilde{C} \tilde{x}(k) \\ \tilde{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (4-46)$$

其中,  $\tilde{z}(k) = z(k) - \hat{z}(k)$ ,  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_1 D_1 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_f D_2 \end{bmatrix}$ ,

$\tilde{C} = [L \quad -C_f]$ 。使得滤波器对应通道  $w_1(k) \rightarrow \tilde{z}(k)$  的滤波误差方差  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k))$

最小, 同时  $\|\tilde{z}(k)\|_2 < \gamma \|w_2(k)\|_2$ 。

### 2 结论

对于(4-46)的误差动态系统, 混合滤波指的是在

$$\|\tilde{z}(k)\|_2 < \gamma \|w_2(k)\|_2 \quad (4-47)$$

的约束条件下, 最小化

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(\tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k)) \quad (4-48)$$

对于这种形式的  $H_2 / H_\infty$  混合滤波, 需(4-46)式存在下确界。下面是(4-48)式下确界存在性证明。

证明: 根据矩阵迹的性质 1, 有

$$\lim_{k \rightarrow 0} E(\tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k)) = \lim_{k \rightarrow 0} E(\tilde{x}^T(k)\tilde{C}^T\tilde{C}\tilde{x}(k)) = \lim_{k \rightarrow 0} E(\text{trace}(\tilde{C}^T\tilde{C}\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k))) \quad (4A-1)$$

又根据矩阵迹 2, 有

$$\lim_{k \rightarrow 0} E(\tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k)) = \lim_{k \rightarrow 0} \text{trace}(\tilde{C}E(\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k))\tilde{C}^T) \quad (4A-2)$$

根据线性系统理论, 对于差分方程(4-44)的通道  $w_1(k) \rightarrow \tilde{z}(k)$ , 有:

$$\tilde{x}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i-1} \tilde{B}_1 w_1(i) \quad (4A-3)$$

将(4A-3)代入(4A-2)有:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \text{trace}(\tilde{C}E(\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k))\tilde{C}^T) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{trace}(\tilde{C}E(\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i-1} \tilde{B}_1 w_1(i)(\sum_{j=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i-1} \tilde{B}_1 w_1(j))^T)\tilde{C}^T) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{trace}(\tilde{C} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i-1} \tilde{B}_1 E(w_1(i)w_1(j)^T) \tilde{B}_1^T (\tilde{A}^{k-j-1})^T \tilde{C}^T) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{trace}(\tilde{C} \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T (\tilde{A}^{k-i-1})^T \tilde{C}^T) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \text{trace}(\tilde{C} \sum_{i=1}^k \tilde{A}^{i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T (\tilde{A}^{i-1})^T \tilde{C}^T) \\ &= \text{trace}(\tilde{C} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{A}^{i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T (\tilde{A}^{i-1})^T \tilde{C}^T) \end{aligned} \quad (4A-4)$$

这里, 不失一般性, 假设  $w_1(i)$  为方差为 1 的白噪声序列, 即  $E(w_1(i)w_1(j)^T) = \delta(i-j)$

同样, 根据矩阵迹的性质 2, 有:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} E(\tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k)) &= \text{trace}(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{C} \tilde{A}^{i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T (\tilde{A}^{i-1})^T \tilde{C}^T) \\ &= \text{trace}(\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_1^T (\tilde{A}^{i-1})^T \tilde{C}^T \tilde{C} \tilde{A}^{i-1} \tilde{B}_1) \\ &= \text{trace}(\tilde{B}_1^T (\sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{A}^{i-1})^T \tilde{C}^T \tilde{C} \tilde{A}^{i-1}) \tilde{B}_1) \\ &= \text{trace}(\tilde{B}_1^T P_2 \tilde{B}_1) \end{aligned} \quad (4A-5)$$

其中,

$$P_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{A}^T)^{i-1} \tilde{C}^T \tilde{C} \tilde{A}^{i-1} \quad (4A-6)$$

对(4A-6)作变形:

$$\begin{aligned}
P_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{A}^T)^i \tilde{C}^T \tilde{C} \tilde{A}^i = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{A}^T)^i \tilde{C}^T \tilde{C} \tilde{A}^i + \tilde{C}^T \tilde{C} \\
&= \tilde{A}^T \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{A}^T)^{i-1} \tilde{C}^T \tilde{C} \tilde{A}^{i-1} \right] \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} \\
&= \tilde{A}^T P_2 \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C}
\end{aligned} \tag{4A-7}$$

即：

$$\tilde{A}^T P_2 \tilde{A} - P_2 + \tilde{C}^T \tilde{C} = 0 \tag{4A-8}$$

根据李雅普诺夫稳定性定理，任意  $P$ ，满足

$$\tilde{A}^T P \tilde{A} - P + \tilde{C}^T \tilde{C} \leq 0 \tag{4A-9}$$

(4A-9) 减去 (4A-8)，有

$$\tilde{A}^T (P - P_2) \tilde{A} - (P - P_2) \leq 0 \tag{4A-10}$$

则， $P \geq P_2$ ，从而  $\text{trace}(\tilde{B}_1^T P_2 \tilde{B}_1) \leq \text{trace}(\tilde{B}_1^T P \tilde{B}_1)$ ，因此  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k))$  的最小值是存在的。

证毕。

对于通道  $w_2(k) \rightarrow \tilde{z}(k)$  的约束条件(4-47)，有离散时间有界实引理保证，即：

给定  $\gamma > 0$ ， $A$  稳定，(4-45) 成立，当且仅当存在  $P_{\infty} = P_{\infty}^T \in R^{2n \times 2n}$ ，使得：

$$\begin{bmatrix} P_{\infty} & 0 & \tilde{A}^T P_{\infty} & \tilde{C}^T \\ 0 & \gamma^2 I & \tilde{B}_2^T P_{\infty} & 0 \\ P_{\infty} \tilde{A} & P_{\infty} \tilde{B}_2 & P_{\infty} & 0 \\ \tilde{C} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{4-49}$$

并且，(4-49) 中的  $P_{\infty}$  满足(4A-9)

证明：根据 Schur 补定理，(4-49) 变形为：

$$\begin{bmatrix} P_{\infty} & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{\infty} \tilde{A} & P_{\infty} \tilde{B}_2 \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{\infty}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{\infty} \tilde{A} & P_{\infty} \tilde{B}_2 \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix} > 0 \tag{4B-1}$$

化简得：

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P_{\infty} \tilde{A} - P_{\infty} + \tilde{C}^T \tilde{C} & \tilde{A}^T P_{\infty} \tilde{B}_2 \\ \tilde{B}_2^T P_{\infty} \tilde{A} & \tilde{B}_2^T P_{\infty} \tilde{B}_2 - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4B-2}$$

从而，

$$\tilde{A}^T P_{\infty} \tilde{A} - P_{\infty} + \tilde{C}^T \tilde{C} < 0 \tag{4B-3}$$

证毕。

因此，估计误差方差  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\tilde{z}^T(k) \tilde{z}(k)) = \text{trace}(\tilde{B}_1^T P_2 \tilde{B}_1) \leq \text{trace}(\tilde{B}_1^T P_{\infty} \tilde{B}_1)$ ，所以，可以在(4-49)的约束条件下，使得  $\text{trace}(\tilde{B}_1^T P_{\infty} \tilde{B}_1)$  最小来求得滤波器，但是矩阵不等式

(4-49)关于  $P_\infty, A_f, B_f, C_f$  是非线性的, 通过一系列变换<sup>[35]</sup>, 可通过如下定理求得:

给定  $\gamma > 0$ , 系统(4-42)存在一个  $H_2/H_\infty$  混合滤波器(4-43)当且仅当存在矩阵  $R = R^T \in R^{n \times n}$ ,  $X = X^T \in R^{n \times n}$ ,  $S \in R^{n \times n}$ ,  $Z \in R^{n \times r}$ ,  $T \in R^{p \times n}$  使得以下的优化问题有解:

$$\begin{aligned} & \min_{R, X, Z, S, T, H} \text{trace}(H) \\ & \text{s.t.} \begin{bmatrix} R & R & 0 & A^T R & A^T X + C^T Z^T + S^T & L^T - T^T \\ R & X & 0 & A^T R & A^T X + C^T Z^T & L^T \\ 0 & 0 & \gamma^2 I & B_2^T R & B_2^T X + D_2^T Z^T & 0 \\ RA & RA & RB_2 & R & R & 0 \\ XA + ZC + S & XA + ZC & XB_2 + ZD_2 & R & X & 0 \\ L - T & L & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} H & B_1^T R^T & B_1^T X + D_1^T Z^T \\ RB_1 & R & R^T \\ XB_1 + ZD_1 & R & X \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

则, 所求  $H_2/H_\infty$  混合滤波器(4-43)对应的系数矩阵为:  $A_f = (R - X)^{-1}S$ ,

$B_f = (R - X)^{-1}Z$ ,  $C_f = T$ , 估计误差方差  $\lim_{k \rightarrow \infty} E(\tilde{z}^T(k)\tilde{z}(k)) \leq \text{trace}(H)$ 。

可以看到, 本节的滤波器是在满足  $H_\infty$  范数界的情况下来优化系统的估计误差方差, 即  $H_2$  指标, 求得的滤波器为稳态滤波器, 该滤波器求解算法中需事先确定一常数  $\gamma$ , 而该常数的确定目前还没有一定的方法, 而且  $\gamma$  确定不好, 可能造成滤波器无解, 因此, 这种混合  $H_2/H_\infty$  滤波算法在工程上不便设计。

## 4.5 $H_2/H_\infty$ 混合滤波迭代算法

### 1 问题描述

在方差约束混合滤波中, 可以看到, 混合滤波的效果与稳态  $H_\infty$  滤波的效果差不多, 没有充分使卡尔曼滤波和  $H_\infty$  滤波的优势互补起来, 究其原因它是稳态滤波形式, 增益矩阵不能根据实时的滤波效果进行调整, 只有实时调整增益矩阵的滤波方式才能真正使滤波达到较好的效果, 4.4 节讨论的优化方差指标的方法不仅鲁棒参数难于工程上确定, 而且它也是一种基于线性矩阵不等式的方法, 得到的也是稳态滤波, 一种次优滤波方式, 因此, 寻找一种迭代的混合滤波十分必要, 本节着重论述了该问题。

### 2 算法推导

依然考虑 3.3 节所提到的稳定可测线性离散系统, 将所得到的结果重写如下:

给定实数  $\gamma > 0$ , 使得  $\|T_k(F_f)\|_\infty < \gamma$  成立的  $H_\infty$  滤波的存在条件和递推关系为:

$$P^{-1}(k) + C^T(k)C(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L(k) > 0 \quad (4-50)$$

$$P(k+1) = A(k)(P^{-1}(k) + C^T(k)C(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L(k))^{-1}A^T(k) + B(k)B^T(k) \quad (4-51)$$

$$K(k+1) = P(k+1)C^T(k+1)(I + C(k+1)P(k+1)C^T(k+1))^{-1} \quad (4-52)$$

根据 3.3 的结论, 降低迭代保守性的

$$\gamma = \sigma\{\lambda_{\max}[(P^{-1}(k) + C^T(k)C(k))^{-1}]\}^{1/2} \quad (4-53)$$

当  $\gamma \rightarrow \infty$ , 则  $H_\infty$  滤波退化为卡尔曼滤波, 则式(4-50)、(4-51)、(4-52)可变形为:

$$P^{-1}(k) + C^T(k)C(k) > 0 \quad (4-54)$$

$$P(k+1) = A(k)(P^{-1}(k) + C^T(k)C(k))^{-1}A^T(k) + B(k)B^T(k) \quad (4-55)$$

$$K(k+1) = P(k+1)C^T(k+1)(I + C(k+1)P(k+1)C^T(k+1))^{-1} \quad (4-56)$$

其中, (4-54)是显然成立的。

在混合滤波中, 可认为滤波器的增益是卡尔曼滤波增益与  $H_\infty$  滤波增益的加权和, 即:

$$K(k) = dK^{(2)}(k) + (1-d)K^{(\infty)}(k) \quad (4-57)$$

其中,  $d$  为实数常数,  $0 \leq d \leq 1$ ,  $K^{(2)}(k)$  为卡尔曼滤波增益,  $K^{(\infty)}(k)$  为  $H_\infty$  滤波增益。 $K^{(2)}(k)$  是利用  $\gamma \rightarrow \infty$  来求得的, 依据是卡尔曼滤波是  $H_\infty$  滤波的特例, 目的是避免求卡尔曼滤波时需要系统对系统和观测噪声方差阵的假设。对于加权系数  $d$ , 有如下结论。

$$d = \frac{\text{tr}(P^{(\infty)}(k))}{\text{tr}(P^{(2)}(k) + P^{(\infty)}(k))} \quad (4-58)$$

其中,  $\text{tr}(\bullet)$  表示矩阵的迹,  $P^{(2)}(k), P^{(\infty)}(k)$  分别表示卡尔曼滤波和  $H_\infty$  滤波的估计误差方差阵。

证明:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A(k)\hat{x}(k) + K(k+1)[y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k)] \\ &= A(k)\hat{x}(k) + dK^{(2)}(k+1)[y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k)] \\ &\quad + (1-d)K^{(\infty)}(k+1)[y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k)] \\ &= d[A(k)\hat{x}(k) + K^{(2)}(k+1)(y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k))] \\ &\quad + (1-d)[A(k)\hat{x}(k) + K^{(\infty)}(k+1)(y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k))] \\ &= d\hat{x}^{(2)}(k+1) + (1-d)\hat{x}^{(\infty)}(k+1) \end{aligned} \quad (4C-1)$$

其中:

$$\hat{x}^{(2)}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + K^{(2)}(k+1)[y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k)] \quad (4C-2)$$

$$\hat{x}^{(\infty)}(k+1) = A(k)\hat{x}(k) + K^{(\infty)}(k)[y(k+1) - C(k+1)A(k)\hat{x}(k)] \quad (4C-3)$$

$\hat{x}^{(\infty)}(k+1), \hat{x}^{(2)}(k+1)$  分别为  $H_{\infty}$  滤波值和卡尔曼滤波值, 即混合滤波值等于卡尔曼滤波值与  $H_{\infty}$  滤波值的加权和。同理, 可以得到, 混合滤波估计误差等于卡尔曼滤波估计误差与  $H_{\infty}$  滤波估计误差的加权和, 即:

$$\tilde{x}(k+1) = d\tilde{x}^{(2)}(k+1) + (1-d)\tilde{x}^{(\infty)}(k+1) \quad (4C-4)$$

其中,  $\tilde{x}^{(2)}(k+1)$  为卡尔曼滤波估计误差,  $\tilde{x}^{(\infty)}(k+1)$  为  $H_{\infty}$  滤波估计误差。因此, 混合滤波估计误差方差为

$$\begin{aligned} P(k) &= E[\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)] \\ &= d^2P^{(2)}(k) + d(1-d)P^{(2\infty)}(k) + d(1-d)P^{(\infty 2)}(k) + (1-d)^2P^{(\infty)}(k) \end{aligned} \quad (4C-5)$$

其中,  $(P^{(\infty 2)}(k))^T = P^{(2\infty)}(k) = E[\tilde{x}^{(2\infty)}(k)(\tilde{x}^{(2\infty)}(k))^T]$  为卡尔曼滤波估计误差与  $H_{\infty}$  滤波估计误差协方差。根据最小估计误差方差的原则, 要使混合滤波估计误差方差  $P$  最小, 等价于使  $P$  的迹  $tr(P(k))$  最小, 即:

$$\frac{\partial[tr(P(k))]}{\partial d} = 0 \quad (4C-6)$$

$$\begin{aligned} \because P^{(2\infty)}(k) &= (P^{(\infty 2)}(k))^T \\ \therefore trP^{(2\infty)}(k) &= tr(P^{(\infty 2)}(k))^T \\ \therefore trP &= d^2tr(P^{(2)}(k)) + 2d(1-d)tr(P^{(\infty 2)}(k))^T + (1-d)^2tr(P^{(\infty)}(k)) \\ \therefore \frac{\partial[tr(P(k))]}{\partial d} &= 2dtrP^{(2)}(k) + 2(1-d)trP^{(\infty 2)}(k) - 2(1-d)trP^{(\infty)}(k) \end{aligned}$$

由(4C-6), 可求得:

$$d = \frac{tr(P^{(\infty)}(k) - P^{(2\infty)}(k))}{tr(P^{(2)}(k) + P^{(\infty)}(k) - 2P^{(2\infty)}(k))} \quad (4C-7)$$

两种估计是不相关的, 所以,  $P^{(2\infty)}(k) = 0$ , 则  $d = \frac{tr(P^{(\infty)}(k))}{tr(P^{(2)}(k) + P^{(\infty)}(k))}$ 。

证毕。

上述算法总结如下步骤:

- 1、根据上次迭代的  $P^{(2)}(k)$ ,  $P^{(\infty)}(k)$ , 利用(4-58), 求得加权系数  $d$ 。
- 2、利用上次求得的卡尔曼滤波增益  $K^{(2)}(k)$ ,  $H_{\infty}$  滤波增益  $K^{(\infty)}(k)$  和步骤 1 求得的  $d$ , 根据(4-57), 求得上次混合滤波增益  $K(k)$ 。
- 3、根据上次状态估计值和本次观测值以及步骤 2 求得的混合滤波增益  $K(k)$ , 根据(3-11)可求得本次状态估计值。
- 4、根据(4-51)、(4-52)、(4-53)可求得本次  $H_{\infty}$  滤波增益  $K^{(\infty)}(k+1)$ , 估计误差方差  $P^{(\infty)}(k+1)$ 。
- 5、根据(4-55)、(4-56)可求得本次卡尔曼滤波增益  $K^{(2)}(k+1)$ , 估计误差方差



---



---

 $P^{(2)}(k+1)$ 

6、回到步骤 1，继续迭代。

流程图如图 4.6 所示。

对于常值系数模型，本节的  $H_2/H_\infty$  混合滤波同样存在稳态混合滤波形式，可以参照 3.6 节中(3-22)式来求得  $H_\infty$  滤波稳态增益矩阵  $K^{(\infty)}(\infty)$  和稳态估计误差方差阵  $P^{(\infty)}(\infty)$ 。本文在求稳态卡尔曼滤波增益和估计误差方差阵时，不是按照文献[84]的方式求得，因为这种求法是需要对噪声的方差作假设的，而是根据(4-55)，令  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} P(k)$ ，则(4-55)变为

$$P = A(P^{-1} + C^T C)^{-1} A^T + B B^T \quad (4-59)$$

然后利用矩阵求逆引理，可得，

$$A P A^T - P - A P C^T [I + C P C^T]^{-1} C P A^T + B B^T = 0 \quad (4-60)$$

而这是标准的离散形式的黎卡蒂方程，通过控制工具箱可求得稳态卡尔曼滤波估计误差方差阵  $P^{(2)}(\infty)$ ，从而求得稳态增益矩阵  $K^{(2)}(\infty)$ 。利用  $K^{(\infty)}(\infty)$ ,  $P^{(\infty)}(\infty)$ ,  $K^{(2)}(\infty)$ ,  $P^{(2)}(\infty)$  和公式(3-11)、(4-57)、(4-58)即可求得稳态混合滤波值。

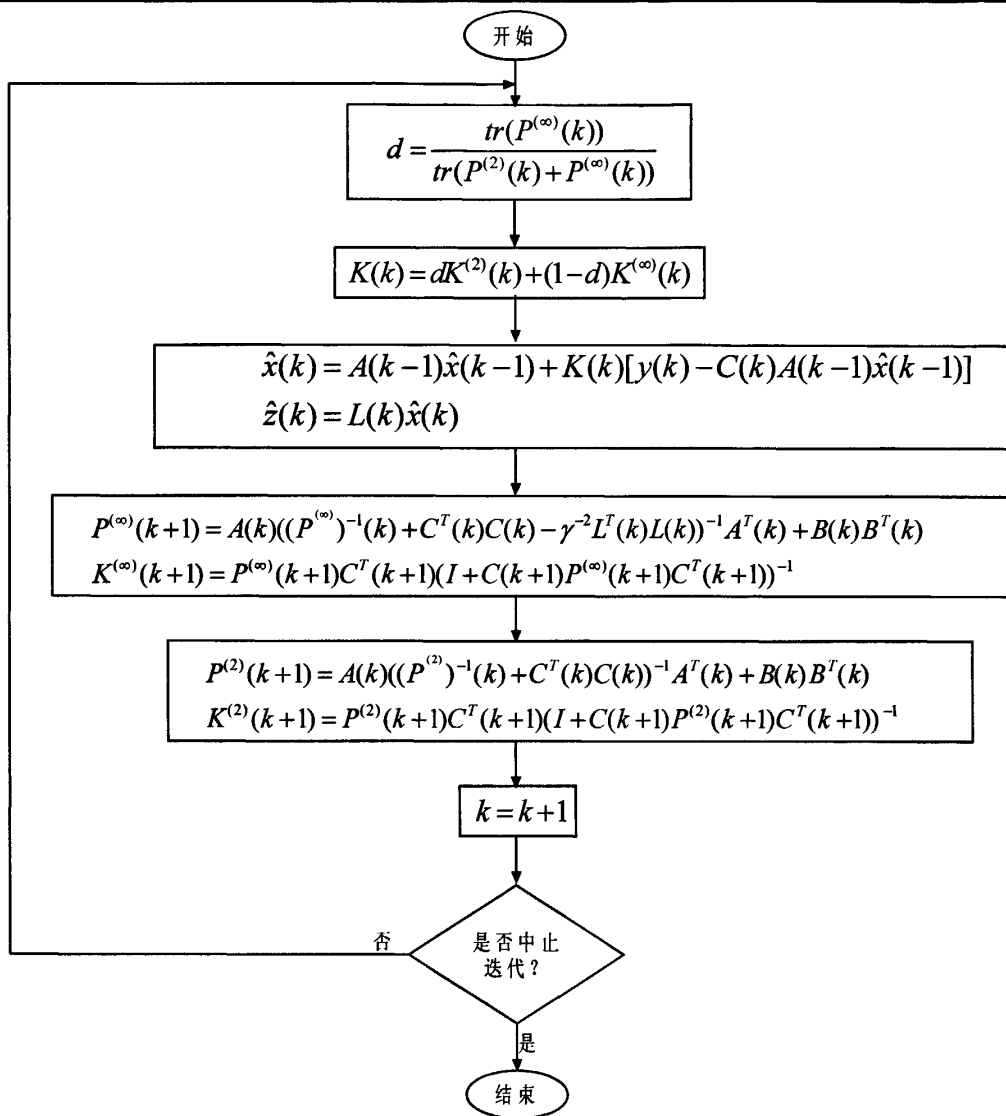


图 4.6 混合滤波迭代算法滤波流程图

#### 4.6 基于位置误差模型的混合滤波仿真实验

本节对混合滤波迭代算法和稳态滤波算法进行了计算机仿真，仿真条件与 3.7 节相同。

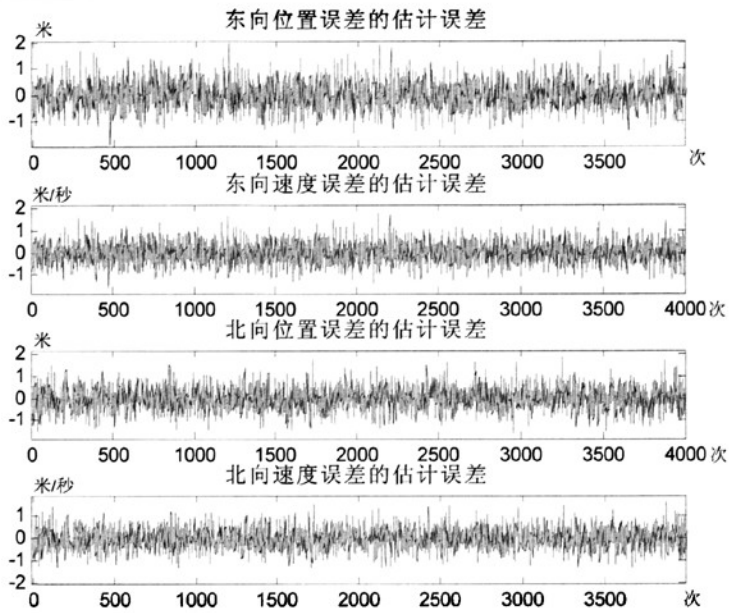


图 4.7 白噪声情况混合迭代滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

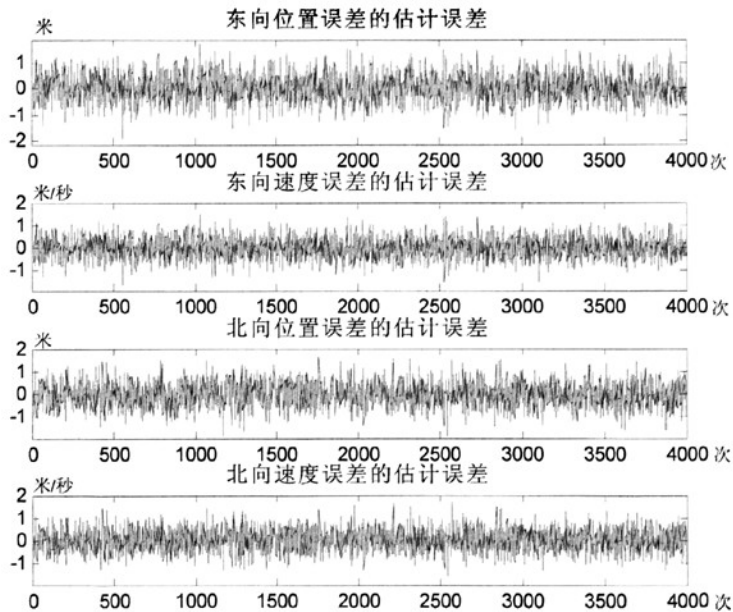


图 4.8 白噪声情况稳态混合迭代滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

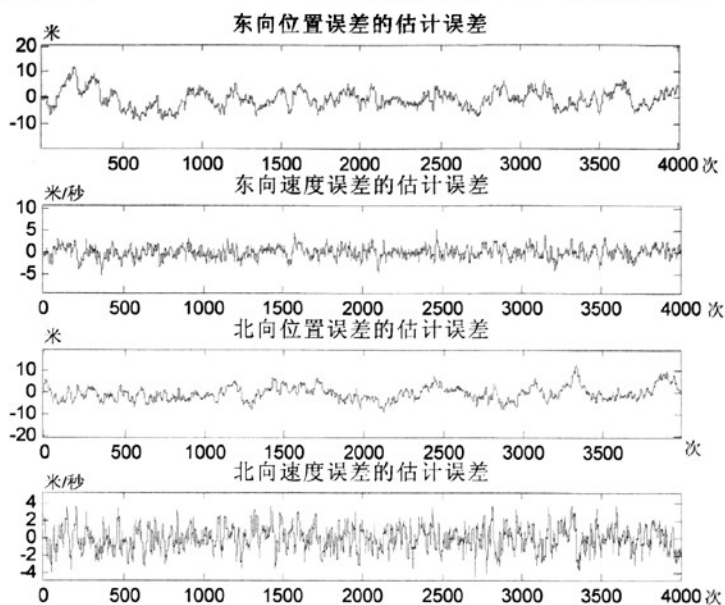


图 4.9 色噪声情况混合迭代滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

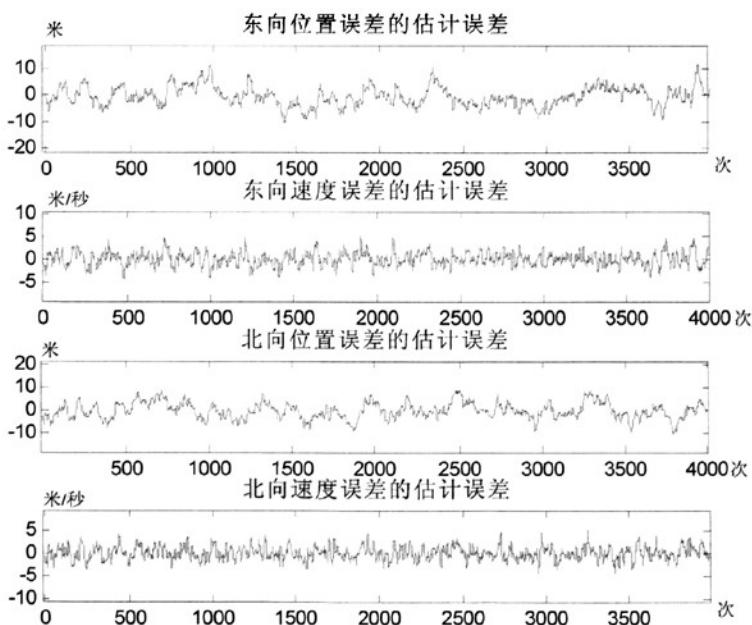


图 4.10 色噪声情况稳态混合迭代滤波估计误差  
(基于位置误差模型)

在白噪声情况下，对比基于位置误差模型下的卡尔曼滤波、 $H_{\infty}$ 滤波、混合迭代滤波和稳态混合迭代滤波，即图 3.5、图 3.6、图 4.7 和图 4.8，可以看到，混合迭代滤波和稳态混合迭代滤波和  $H_{\infty}$  滤波效能相当，卡尔曼滤波效果最好；在色噪声情况下，对比即图 3.8、图 3.9、图 4.9 和图 4.10，混合迭代滤波和稳态混合迭代滤波和  $H_{\infty}$  滤波效能相当，比卡尔曼滤波效果好，这说明，混合迭代滤波和稳态混合迭代滤波是卡尔曼滤波和  $H_{\infty}$  滤波的一个折中，对噪声不敏感。稳态混合迭代滤波和混合迭代滤波效果相当，比稳态  $H_{\infty}$  滤波和方差约束滤波效果更稳健，即在噪声的变化下，噪声对滤波效果的影响不剧烈。

#### 4.7 基于椭球模型的混合滤波仿真实验

本节对混合滤波迭代算法和稳态滤波算法进行了计算机仿真，仿真条件与 3.5 节相同。

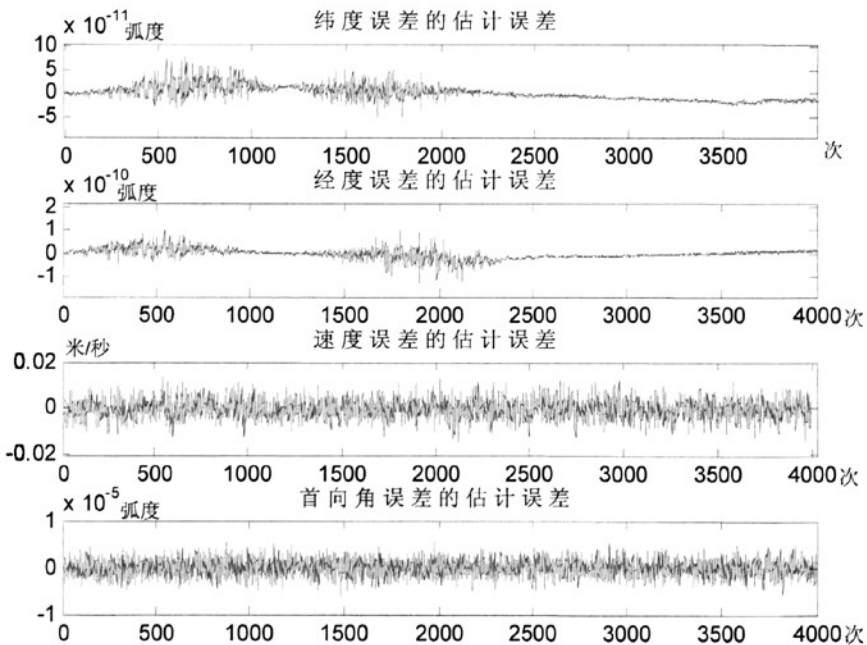


图 4.11 白噪声情况混合迭代滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

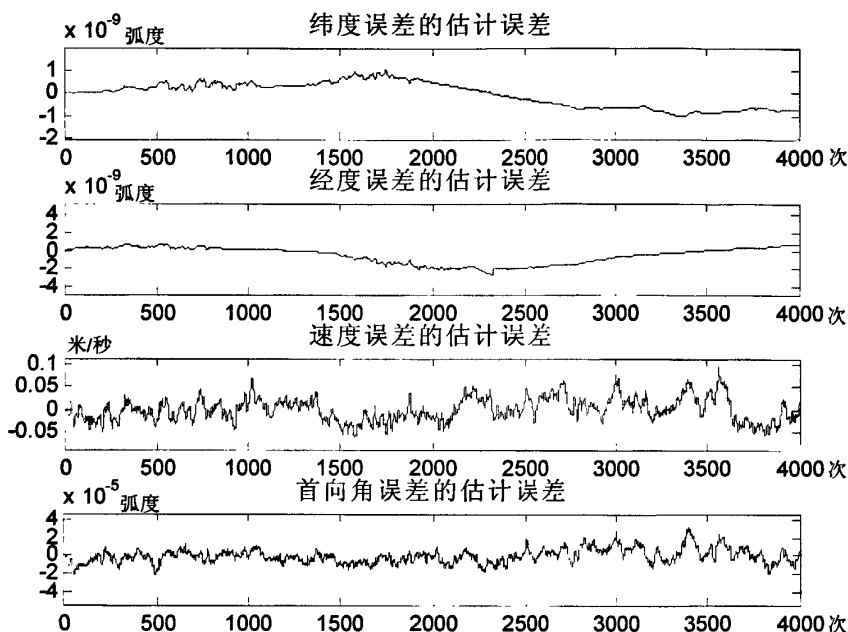


图 4.12 色噪声情况混合迭代滤波估计误差  
(基于椭球滤波模型)

在白噪声情况下，对比基于椭球滤波模型下的卡尔曼滤波、 $H_{\infty}$ 滤波、混合迭代滤波，即图 3.1(a)、图 3.1(b)、图 3.2 和图 4.11，在色噪声情况下，对比图 3.3、图 3.4 和图 4.12 可以看到，混合迭代滤波始终处于卡尔曼滤波和  $H_{\infty}$  滤波的折中效果，白噪声时精度逼近卡尔曼滤波，但比卡尔曼滤波更稳健，基于椭球滤波模型，克服了卡尔曼滤波的时变参数不稳健性，色噪声时，精度逼近  $H_{\infty}$  滤波，克服了卡尔曼滤波对噪声的敏感性。

## 4.8 本章小结

本章论述了混合滤波理论，首先论述了优化  $H_{\infty}$  指标的方差约束算法，该方法是基于线性矩阵不等式的稳态滤波算法，理论和仿真表明在精度要求不高，缩短计算时间的情况下，它是一种具有工程实用价值的算法；其次论证了优化方差指标混合滤波算法，证明了算法的存在性，指明了该算法在工程上实现的不便性；最后重点论述了不需对噪声作过多建模，仅对两种滤波的增益矩阵进行加权求和的迭代形式的混合滤波算法，该算法更加体现的  $H_2/H_{\infty}$  滤波滤波的优势，使卡尔曼滤波与  $H_{\infty}$  滤波算法的优势得到了互补。

## 第五章 组合导航中的联合 $H_{\infty}$ 滤波

### 5.1 引言

在前几章中, 论述的卡尔曼滤波,  $H_{\infty}$  滤波、 $H_2/H_{\infty}$  混合滤波, 鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒  $H_{\infty}$  滤波, 都是属于集中滤波, 即各单一滤波合成为一个状态方程和观测方程, 这样会造成: 第一, 系统状态维数高, 计算负担重, 影响滤波的动态性能和实时性; 第二, 一个传感器出现较大偏差时, 会传播到整个观测和状态估计中, 导致滤波精度和稳定度下降。为了避免这个问题, Carlson 于 1988<sup>[66]</sup> 年提出的联邦滤波器的概念和理论 (本文所称的“联合”与“联邦”是等价的提法), 这种滤波理论使得滤波的容错性高, 精度高, 计算量小, 取得了一些较好的结果<sup>[67-71][87]</sup>, 并且一直是研究的热点, 但近几年的研究很多问题都集中在信息分配因子的优选问题上<sup>[88-93]</sup>, 最后的讨论结果集中在文献[94]的结论上, 即追求信息分配因子的优选法不可能使局部滤波器达到最优, 也没有使全局滤波在性能上再作提高。于是, 本文作者另辟蹊径, 根据第三章卡尔曼滤波与  $H_{\infty}$  滤波对比分析, 卡尔曼滤波是  $H_{\infty}$  滤波特例的结论, 提出了联合  $H_{\infty}$  滤波算法, 证明了联合卡尔曼滤波是联合  $H_{\infty}$  滤波的特例, 联合  $H_{\infty}$  滤波是联合卡尔曼滤波的推广, 这是本章的主要创新点。

本章首先介绍了联合卡尔曼滤波的有关理论, 并进行了仿真, 验证了理论结论, 然后重点论述了作者提出的联合  $H_{\infty}$  滤波理论, 与联合卡尔曼滤波进行了对比仿真实验。

### 5.2 联合卡尔曼滤波

#### 5.2.1 概述

Carlson 提出的联邦卡尔曼滤波理论主要以信息分配原则为基础, 追求滤波器的容错、精度、计算量三个指标的最佳折衷, 以满足不同的应用要求, 尤其适用于拥有多个非相似独立导航子系统的重要运载体的导航系统, 是目前导航界的一种通用滤波器, 并被美国空军列入其发展新一代容错导航系统的“公共卡尔曼滤波器”计划<sup>[69]</sup>。本节主要介绍了联邦卡尔曼滤波器的算法原理、设计步骤、滤波器结构和特点等方面的内容, 最后通过一个仿真实例验证了该理论的有关结论。

#### 5.2.2 联邦卡尔曼滤波算法原理与设计步骤

联邦卡尔曼滤波器是一个两级数据处理过程，可以看成是一个特殊的分散滤波器。它的目标是如何向各局部滤波器分配信息以改善容错性，提高计算能力。联邦滤波器信息分配原则的基本思想是：第一，将整个系统的信息按一定比例分配到各局部滤波器中；第二，各子滤波器单独工作，进行时间更新，利用其局部量测信息进行测量更新；第三，将更新后的局部信息融合成新的全局状态估计和误差估计；第四，如果有反馈重置，则按照信息分配比例对局部滤波器的状态和误差进行重新配置。

设  $P_g, X_g$  分别表示全局卡尔曼滤波器的方差阵和状态向量， $P_i, X_i$  分别表示各局部滤波器的方差阵和状态向量， $P_m, X_m$  分别表示主滤波器的方差阵和状态向量。信息用方差阵的逆表示，量测信息用量测噪声方差阵的逆  $R^{-1}$  表示，系统信息用系统噪声方差阵的逆  $Q^{-1}$  表示，滤波估计误差信息用估计误差方差阵的逆  $P^{-1}$  表示。则在联邦滤波结构中，系统的整体信息应按以下规则在各滤波器间分配：

(1)分配系数约束条件：

$$\beta_m + \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, i = 1 \cdots N \quad (5-1)$$

即主滤波器和各局部滤波器的分配系数和归一。

(2)状态估计与估计误差信息分配方式：

$$\begin{aligned} P_i^{-1} &= \beta_i P_g^{-1}, i = 1 \cdots N, m \\ \hat{X}_m &= \hat{X}_i = \hat{X}_g, i = 1 \cdots N \end{aligned} \quad (5-2)$$

(3)过程噪声信息分配方式：

$$Q_i^{-1} = \beta_i Q^{-1}, i = 1 \cdots N, m \quad (5-3)$$

按上述的信息分配准则在各局部滤波器间分配信息，若局部滤波器和主滤波器之间是统计独立的，则它们可以按下面的最优算法合成<sup>[95-96]</sup>：

$$\begin{cases} \hat{X}_g = P_g (P_m^{-1} \hat{X}_m + \sum_{i=1}^N P_i^{-1} \hat{X}_i) \\ P_g^{-1} = P_m^{-1} + \sum_{i=1}^N P_i^{-1} \end{cases} \quad (5-4)$$

最优算法的证明基于全局滤波的无偏性和最小方差性来推导的，具体证明过程参看文献[95-96]。关于各局部滤波器统计相关情况的讨论参看 5.3.3.4 节，其论证过程与联合  $H_\infty$  滤波一致。下图是联邦卡尔曼滤波器的原理图<sup>[95]</sup>：



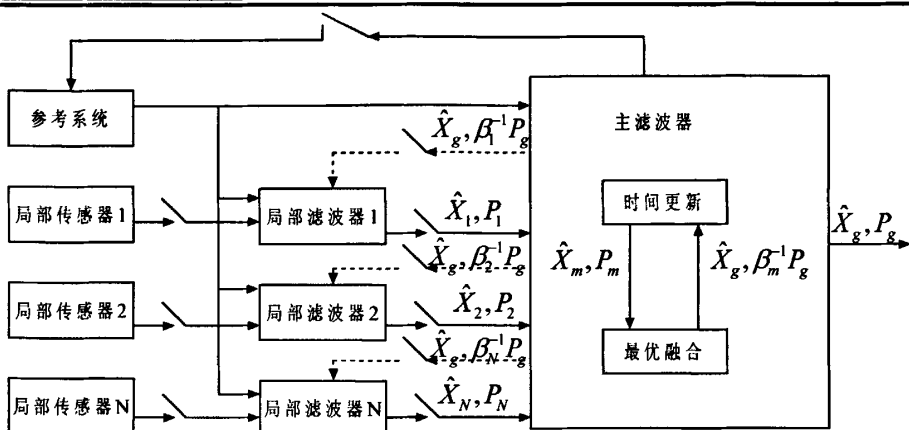


图 5.1 联邦滤波器的一般结构

在图 5.1 中，虚线箭头表示反馈校正，联邦滤波算法最优性的含义体现在有校正的情况下，即局部滤波器每次滤波结束后都将自己的结果送到主滤波器进行融合，主滤波器的融合结果再反馈到局部滤波器对其校正，这样的联邦卡尔曼滤波器的估计效果是最优的。联邦滤波器的设计步骤可归纳如下：

- 1、将各局部滤波器和主滤波器的初始估计协方差阵设置为组合系统初始值的一定倍数，使得协方差阵互不相关。
- 2、将各局部滤波器和主滤波器的过程噪声协方差阵设置为组合系统过程噪声的一定倍数，使得过程噪声阵互不相关。
- 3、各局部滤波器处理自己的测量信息，获得局部估计。
- 4、在得到各局部滤波器估计和主滤波器估计，则按照(6-4)进行最优合成。
- 5、用全局滤波解来重置各局部滤波器和主滤波器的滤波值和协方差阵。

### 5.2.3 联邦卡尔曼滤波器的结构

联邦卡尔曼滤波有六种不同的设计结构，这些不同的结构主要是根据信息分配系数来确定的，不同的滤波结构有不同的容错性、最优性和计算量等。本文主要采用两种常用的分配方式与结构，其他结构见参考文献[95]。

#### 1、有重置 ( $\beta_m = 0, \beta_i = 1/N$ )

这种结构主滤波器无信息分配，主滤波器不进行滤波，估计值取全局估计，即： $\hat{X}_m = \hat{X}_g = P_g(P_1^{-1}\hat{X}_m + \dots + P_N^{-1}\hat{X}_N)$ 。滤波器结构如图 5.2 所示。

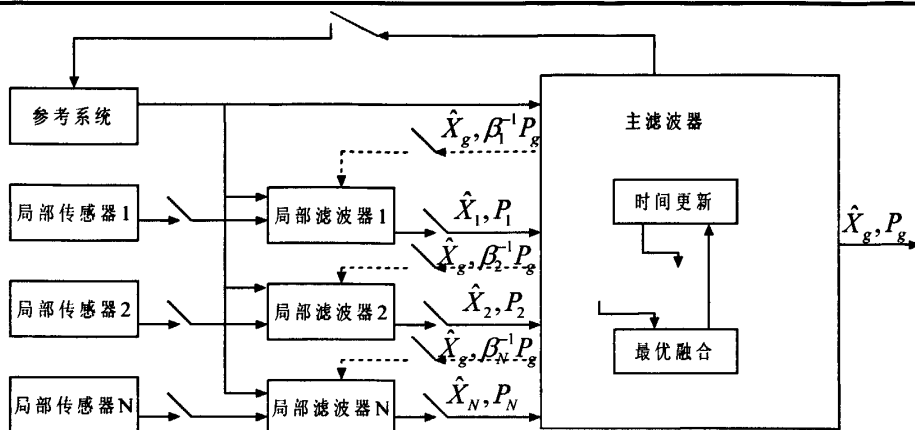


图 5.2 联邦滤波器结构（有重置）

## 2、无重置 ( $\beta_m = 0, \beta_i = 1/N$ )

这种结构各局部滤波器独立滤波，没有反馈重置带来相互影响，因此，容错性高，但没有最优估计重置，局部滤波器估计精度不高。滤波器结构如图 5-3 所示。

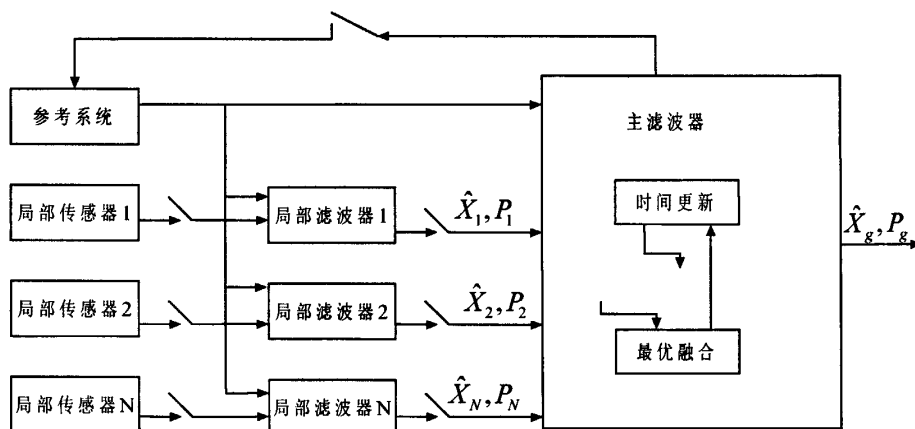


图 5.3 联邦滤波器结构（无重置）

### 5.2.4 联邦卡尔曼滤波仿真实验

考虑如下的双传感器系统：

$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k-1) + \begin{bmatrix} 0.5T^2 \\ T \end{bmatrix} w(k-1) \quad (5-5)$$

式中， $x(k) = [s(k) \ v(k)]^T$  为位移和速度估计， $T$  为采样时间。假设系统具有两个子传感器进行位移测量，且设第  $i$  ( $i=1,2$ ) 个量测方程为：

$$z_i(k) = [1 \ 0]x(k) + v_i(k) \quad (5-6)$$

在系统作联邦卡尔曼滤波时, 假设  $w(k)$  方差为  $\delta^2$  的零均值白噪声,  $v_i(k)$  方差为  $R_i$  独立的零均值高斯白噪声,  $T = 0.1, \delta = 1, R_1 = 2, R_2 = 5$ , 并假设初始值为  $x(0) = [0 \ 0]^T, P(0) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ , 信息分配系数  $\beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.3, \beta_m = 0$ , 仿真时间为 200 步。

图 5.4 (a) 为有重置情况下, 联邦卡尔曼滤波的估计误差方差阵迹的变化曲线, 粗实线表示联邦滤波的变化曲线, 虚线和实线分别表示局部滤波器的变化曲线。可以看到, 联邦卡尔曼滤波精度优于各局部滤波器, 从图 5.4 (b) 的位移估计也可看出。

图 5.5 为无重置情况下, 联邦卡尔曼滤波的估计误差方差阵迹和位移估计误差的变化曲线。从图 5.5 (b) 可以看到, 无重置情况下, 局部滤波器的波动程度大, 精度要比有重置情况下差些。

以上这些都符合联邦卡尔曼滤波理论结论。

仿真结果如下:

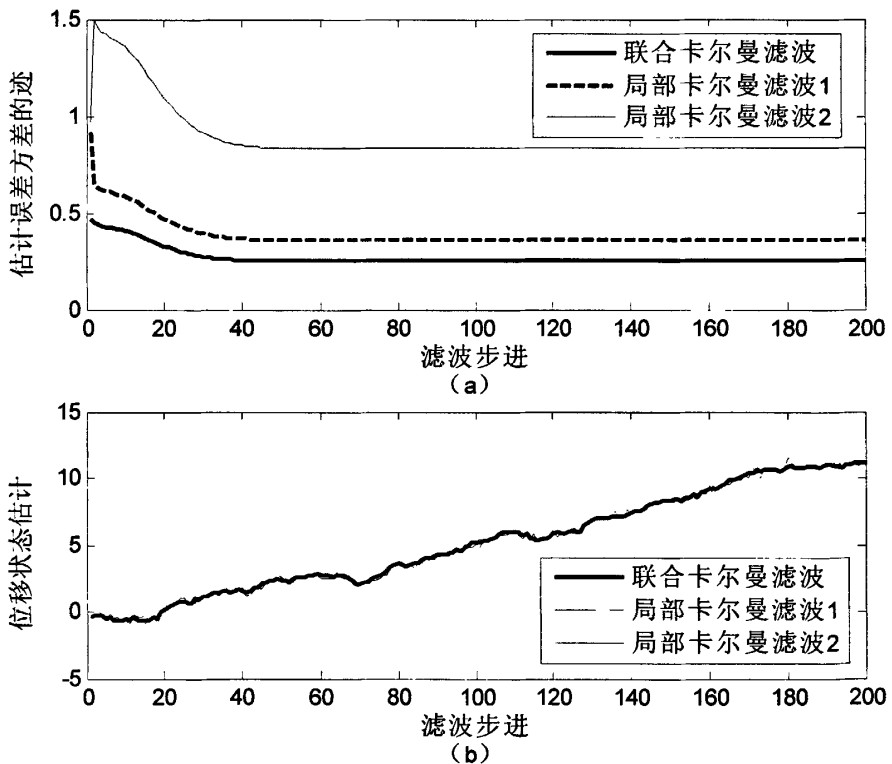


图 5.4 联邦卡尔曼滤波 (有重置)

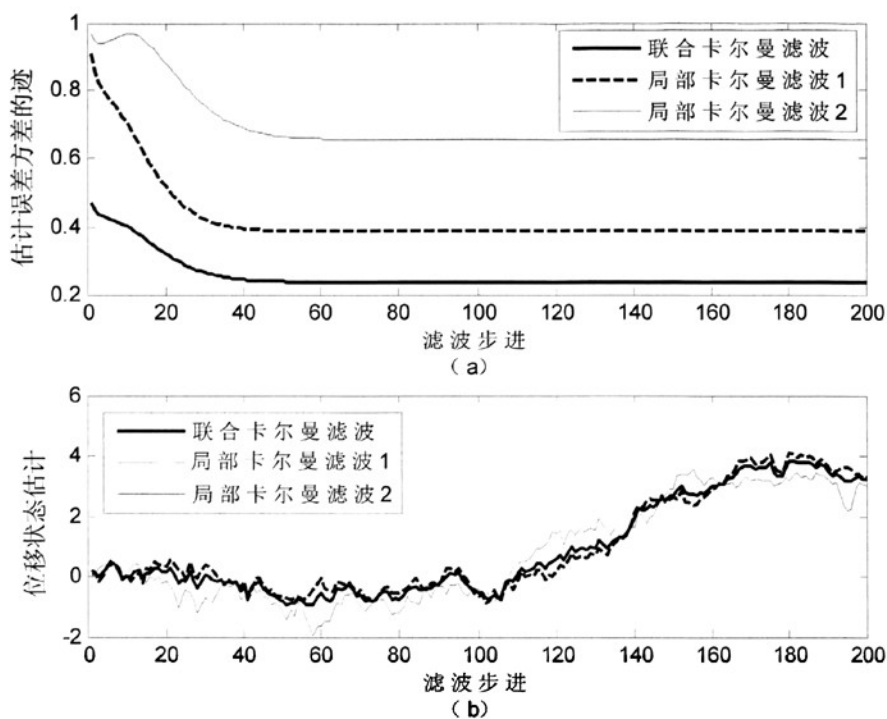


图 5.5 联邦卡尔曼滤波（无重置）

### 5.3 联合 $H_\infty$ 滤波

#### 5.3.1 概述

近些年,虽然  $H_\infty$  滤波及其应用讨论很多<sup>[51-55]</sup>,但是,联合  $H_\infty$  滤波的讨论文献很少,文献[97]基于格林空间理论提出了分散  $H_\infty$  滤波算法,文献[72]在文献[97]的基础上提出了联合  $H_\infty$  滤波算法,但是文献[72]的算法仅得到了测量更新独立,而时间更新不独立,且提出了一种不同于联邦卡尔曼滤波器的信息因子分配算法。本文作者认为,按照格林空间理论<sup>[15-16]</sup>,格林空间是希尔伯特空间的推广, $H_\infty$  滤波就是格林空间的卡尔曼滤波,因此,联合  $H_\infty$  滤波算法在形式和特性上应与联邦卡尔曼滤波是一致的。作者在这方面作了探索,理论分析证明,联邦卡尔曼滤波算法作些修正就可得到联合  $H_\infty$  滤波算法,并且,仿真结果表明联合  $H_\infty$  滤波的性能要优于联邦卡尔曼滤波并且更加稳健。

本节首先介绍了分散  $H_\infty$  滤波算法,证明了  $H_\infty$  滤波算法另一种表达的定理,然后,基于该形式,提出了联合  $H_\infty$  滤波算法,证明了融合的非偏性和最小方差性,分析了该算法与联邦卡尔曼滤波的一致性,最后是仿真对比实验。

### 5.3.2 分散 $H_\infty$ 滤波算法

#### 5.3.2.1 $H_\infty$ 滤波算法

将  $H_\infty$  滤波算法重写如下:

考虑离散时间系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)w(k) \\ y(k) = H(k)x(k) + v(k) \\ z(k) = L(k)x(k) \end{cases} \quad (5-7)$$

如果  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$  当且仅当:

$$P^{-1}(k, k) = P^{-1}(k, k-1) + H^T(k)H(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L(k) > 0 \quad (5-8)$$

此时, 估计误差方差满足:

$$\begin{aligned} P(k+1, k) = & F(k)P(k, k-1)F^T(k) + G(k)G^T(k) \\ & - F(k)P(k, k-1) \begin{bmatrix} H^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} R_e^{-1}(k) \begin{bmatrix} H(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k, k-1)F^T(k) \end{aligned} \quad (5-9)$$

$$R_e(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k, k-1) \begin{bmatrix} H^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

估计的递推公式为:

$$\hat{x}(k) = F(k-1)\hat{x}(k-1) + K(k)(y(k) - H(k)F(k-1)\hat{x}(k-1)) \quad (5-11)$$

$$K(k) = P(k)H^T(k)(I + H(k)P(k)H^T(k))^{-1} \quad (5-12)$$

#### 5.3.2.2 $H_\infty$ 滤波算法的另一种表达<sup>[97]</sup>

如果  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$  当且仅当:

$$P^{-1}(k, k) = P^{-1}(k, k-1) + \begin{bmatrix} H^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} R^{-1}(k) \begin{bmatrix} H(k) \\ L(k) \end{bmatrix} > 0 \quad (5-13)$$

$$R(k) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

滤波状态估计为:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k, k-1) + K(k)(y(k) - H(k)\hat{x}(k, k-1)) \quad (5-15)$$

$$K(k) = (I + \gamma^{-2}P(k)L^T(k)L(k))^{-1}P(k)H^T(k) \quad (5-16)$$

时间更新为:

$$\hat{x}(k, k-1) = F(k-1)\hat{x}(k-1) \quad (5-17)$$

$$P(k, k-1) = F(k-1)P(k-1, k-1)F^T(k-1) + G(k-1)G^T(k-1) \quad (5-18)$$

证明: (5-13)可以很容易从(5-8)得到。根据矩阵求逆引理公式(1-13), (5-9)可作如

下变形:

$$\begin{aligned}
P(k+1, k) &= F(k)P(k)F^T(k) + G(k)G^T(k) \\
&\quad - F(k)P(k, k-1) \begin{bmatrix} H^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{Bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} H(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k, k-1) \begin{bmatrix} H^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_k \\ L_k \end{Bmatrix}^{-1} P(k, k-1) F^T(k) \\
&= F(k) \{P^{-1}(k, k-1) \\
&\quad + \begin{bmatrix} H^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H(k) \\ L(k) \end{bmatrix}\}^{-1} F^T(k) + G(k)G^T(k) \\
&= F(k) \{P^{-1}(k, k)\}^{-1} F^T(k) + G(k)G^T(k) \\
&= F(k)P(k, k)F^T(k) + G(k)G^T(k)
\end{aligned} \tag{5A-1}$$

则可得到(5-18)。根据矩阵求逆引理公式(1-14)，(5-12)可作如下变形:

$$\begin{aligned}
K(k) &= P(k, k-1)H^T(k)(I + H(k)P_{k/k-1}H^T(k))^{-1} \\
&= (P^{-1}(k, k-1) + H^T(k)H(k))^{-1} H^T(k) \\
&= (P^{-1}(k, k-1) + H^T(k)H(k))^{-1} P^{-1}(k, k)P(k, k)H^T(k) \\
&= (P(k, k)P_{k/k-1}^{-1} + P(k, k)H^T(k)H(k))^{-1} P(k, k)H^T(k)
\end{aligned} \tag{5A-2}$$

由(5-13)可得:

$$P^{-1}(k, k) = P^{-1}(k, k-1) + H^T(k)H(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L(k) \tag{5A-3}$$

两边同乘  $P(k, k)$ , 可得:

$$I = P(k, k)P^{-1}(k, k-1) + P(k, k)H^T(k)H(k) - \gamma^{-2}P(k, k)L^T(k)L(k) \tag{5A-4}$$

将(5A-4)代入(5A-2)即可得(5-16)

证毕。

### 5.3.2.3 分散 $H_{\infty}$ 滤波算法

$x(k)$  的观测值维数为  $n$ , 可通过  $N$  个传感器得到, 则(5-7)的观测方程中,

$$\begin{aligned}
y(k) &= [y_1^T(k), y_2^T(k), \dots, y_N^T(k)]^T \\
H(k) &= [H_1^T(k), H_2^T(k), \dots, H_N^T(k)]^T
\end{aligned} \tag{5-19}$$

则系统(5-7)的集中  $H_{\infty}$  滤波信息滤波形式可表示为:

$$\hat{x}(k, k-1) = F(k-1)\hat{x}(k-1, k-1) \tag{5-20}$$

$$K(k) = W^{-1}(k)P(k, k)H^T(k) \tag{5-21}$$

$$W(k) = I + \gamma^{-2}P(k, k)L^T(k)L(k) \tag{5-22}$$

$$\hat{x}(k, k) = W^{-1}(k)P(k, k)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) + W^{-1}(k)P(k, k)H^T(k)y(k) \tag{5-23}$$

$$P^{-1}(k, k-1) = (F(k-1)P(k-1, k-1)F^T(k-1) + G(k)G^T(k))^{-1} \quad (5-24)$$

$$P^{-1}(k, k) = P^{-1}(k, k-1) + H^T(k)H(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L(k) \quad (5-25)$$

设第  $i$  个子系统的状态和观测方程如下:

$$\begin{cases} x_i(k+1) = F_i(k)x_i(k) + G_i(k)w_i(k) \\ y_i(k) = A_i(k)x_i(k) + v_i(k) \\ z_i(k) = L_i(k)x_i(k) \end{cases} \quad (5-26)$$

则第  $i$  个子系统局部  $H_\infty$  滤波的信息滤波形式为:

$$\hat{x}_i(k, k-1) = F_i(k-1)\hat{x}_i(k-1, k-1) \quad (5-27)$$

$$K_i(k) = W_i^{-1}(k)P_i(k, k)A_i^T(k) \quad (5-28)$$

$$W_i(k) = I + \gamma^{-2}P_i(k, k)L_i^T(k)L_i(k) \quad (5-29)$$

$$\hat{x}_i(k, k) = W_i^{-1}(k)P_i(k, k)P_i^{-1}(k, k-1)\hat{x}_i(k, k-1) + W_i^{-1}(k)P_i(k, k)A_i^T(k)y_i(k) \quad (5-30)$$

$$P_i^{-1}(k, k-1) = (F_i(k-1)P_i(k-1, k-1)F_i^T(k-1) + G_i(k)G_i^T(k))^{-1} \quad (5-31)$$

$$P_i^{-1}(k, k) = P_i^{-1}(k, k) + A_i^T(k)A_i(k) - \gamma^{-2}L_i^T(k)L_i(k) \quad (5-32)$$

假设子系统状态与总系统状态存在矩阵  $M_i$ , 满足:

$$x_i(k) = M_i x(k), H_i(k) = A_i(k)M_i, L_i(k) = \frac{1}{\sqrt{N}}L(k) \quad (5-33)$$

利用(5-19)、(5-23)、(5-30)、(5-33)可得:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k, k) &= W^{-1}(k)P(k, k)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N W^{-1}(k)P(k, k)M_i^T P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N W^{-1}(k)P(k, k)M_i^T P_i^{-1}(k, k-1)\hat{x}_i(k, k-1) \end{aligned} \quad (5-34)$$

事实上:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k, k) &= W^{-1}(k)P(k, k)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) + W^{-1}(k)P(k, k)H^T y(k) \\ &= W^{-1}(k)P(k, k)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) \\ &\quad + W^{-1}(k)P(k, k)\left[ H_1^T(k), H_2^T(k), \dots, H_N^T(k) \right] \left[ y_1^T(k), y_2^T(k), \dots, y_N^T(k) \right]^T \\ &= W^{-1}(k)P(k, k)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) + W^{-1}(k)P(k, k) \sum_{i=1}^N M_i^T A_i^T(k)y_i(k) \\ &= W^{-1}(k)P(k, k)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) \\ &\quad + W^{-1}(k)P(k, k) \sum_{i=1}^N M_i^T (P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) - P_i^{-1}(k, k-1)\hat{x}_i(k, k-1)) \\ &= W^{-1}(k)P(k, k)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N W^{-1}(k)P(k, k)M_i^T P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) - \sum_{i=1}^N W^{-1}(k)P(k, k)M_i^T P_i^{-1}(k, k-1)\hat{x}_i(k, k-1) \end{aligned}$$

利用(5-19)、(5-25)、(5-32)、(5-33)可得:

$$\begin{aligned}
 P^{-1}(k, k) &= P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N M_i^T P_i^{-1}(k, k) M_i - \sum_{i=1}^N M_i^T P_i^{-1}(k, k-1) M_i \\
 &\quad + \frac{\gamma^{-2}}{N} \sum_{i=1}^N M_i^T L^T(k) L(k) M_i - \gamma^{-2} L^T(k) L(k)
 \end{aligned} \tag{5-35}$$

事实上:

$$\begin{aligned}
 P^{-1}(k, k) &= P^{-1}(k, k-1) + H^T(k) H(k) - \gamma^{-2} L^T(k) L(k) \\
 &= P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N H_i^T(k) H_i(k) - \gamma^{-2} L^T(k) L(k) \\
 &= P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N M_i^T A_i^T(k) A_i(k) M_i - \gamma^{-2} L^T(k) L(k) \\
 &= P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N M_i^T (P_i^{-1}(k, k) - P_i^{-1}(k, k-1) + \gamma^{-2} L_i^T(k) L_i(k)) M_i \\
 &\quad - \gamma^{-2} L^T(k) L(k) \\
 &= P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N M_i^T P_i^{-1}(k, k) M_i - \sum_{i=1}^N M_i^T P_i^{-1}(k, k-1) M_i \\
 &\quad + \gamma^{-2} \sum_{i=1}^N M_i^T L_i^T(k) L_i(k) M_i - \gamma^{-2} L^T(k) L(k) \\
 &= P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N M_i^T P_i^{-1}(k, k) M_i - \sum_{i=1}^N M_i^T P_i^{-1}(k, k-1) M_i \\
 &\quad + \frac{\gamma^{-2}}{N} \sum_{i=1}^N M_i^T L^T(k) L(k) M_i - \gamma^{-2} L^T(k) L(k)
 \end{aligned}$$

### 5.3.3 联合 $H_\infty$ 滤波算法

#### 5.3.3.1 滤波算法

在分散  $H_\infty$  滤波的基础上, 令  $M_i = I, F_i(k) = F(k)$ , 则分散滤波变为联邦滤波, 信息分配原理和状态重置与联邦卡尔曼滤波器一致, 有:

$$\begin{cases} P_i^{-1}(k-1, k-1) = \beta_i P^{-1}(k-1, k-1) \\ \beta_m = 1 - \sum_{i=1}^N \beta_i \\ \hat{x}_i(k-1, k-1) = \hat{x}(k-1, k-1) \end{cases} \tag{5-36}$$

则联合  $H_\infty$  滤波的公式为:

时间更新:



$$\begin{cases} P^{-1}(k, k-1) = (F(k-1)P(k-1, k-1)F^T(k-1) + G(k-1)G^T(k-1))^{-1} \\ \hat{x}(k, k-1) = F(k-1)\hat{x}(k-1, k-1) \\ P_i^{-1}(k, k-1) = \beta_i P^{-1}(k, k-1), P_m^{-1}(k, k-1) = \beta_m P^{-1}(k, k-1) \\ \hat{x}_i(k, k-1) = \hat{x}(k, k-1), \hat{x}_m(k, k-1) = \hat{x}(k, k-1) \end{cases} \quad (5-37)$$

测量更新:

$$\begin{cases} P_i^{-1}(k, k) = P_i^{-1}(k, k-1) + A_i^T(k)A_i(k) - \gamma^{-2}L_i^T(k)L_i(k) \\ P_m^{-1}(k, k) = P_m^{-1}(k, k-1) \\ \hat{x}_i(k, k) = W_i^{-1}(k)P_i(k, k)P_i^{-1}(k, k-1)\hat{x}_i(k, k-1) + W_i^{-1}(k)P_i(k, k)A_i^T(k)y_i(k) \\ \hat{x}_m(k, k) = \hat{x}_m(k, k-1) \end{cases} \quad (5-38)$$

信息融合:

$$P^{-1}(k, k)W(k)\hat{x}(k, k) = P_m^{-1}(k, k)\hat{x}_m(k, k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) \quad (5-39)$$

$$P^{-1}(k, k) = P_m^{-1}(k, k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k) \quad (5-40)$$

$$P^{-1}(k, k-1) = P_m^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k-1) \quad (5-41)$$

证明: 根据  $M_i = I$ , 由(5-34)可得:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k, k) &= W^{-1}(k)P(k, k)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N W^{-1}(k)P(k, k)P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N W^{-1}(k)P(k, k)P_i^{-1}(k, k-1)\hat{x}_i(k, k-1) \end{aligned} \quad (5B-1)$$

根据(5-36), (5B-1)可以作如下变形为:

$$\begin{aligned} &P^{-1}(k, k)W(k)\hat{x}(k, k) \\ &= P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) - \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k-1)\hat{x}_i(k, k-1) \\ &= P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) - \sum_{i=1}^N \beta_i P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) \\ &= (1 - \sum_{i=1}^N \beta_i)P^{-1}(k, k-1)\hat{x}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) \\ &= P_m^{-1}(k, k)\hat{x}_m(k, k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k)W_i(k)\hat{x}_i(k, k) \end{aligned} \quad (5B-2)$$

即得到(5-39)。同样, 根据  $M_i = I$ , 由(5-35)可得:

$$P^{-1}(k, k) = P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N (P_i^{-1}(k, k) - P_i^{-1}(k, k-1)) \quad (5B-3)$$

进一步，将(5-36)代入(5B-3)可作如下变形为：

$$\begin{aligned} P^{-1}(k, k) &= P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N (P_i^{-1}(k, k) - P_i^{-1}(k, k-1)) \\ &= P^{-1}(k, k-1) - \sum_{i=1}^N \beta_i P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k) \\ &= (1 - \sum_{i=1}^N \beta_i) P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k) \\ &= \beta_m P^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k) \\ &= P_m^{-1}(k, k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k) \end{aligned} \quad (5B-4)$$

即得到(5-40)。将(5-32) 代入(5-40)，则作如下变形：

$$\begin{aligned} P^{-1}(k, k) &= P_m^{-1}(k, k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k) \\ &= P_m^{-1}(k, k) + \sum_{i=1}^N (P_i^{-1}(k, k-1) + A_i^T(k)A_i(k) - \gamma^{-2}L_i^T(k)L_i(k)) \\ &= P_m^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N A_i^T(k)A_i(k) + \sum_{i=1}^N \gamma^{-2}L_i^T(k)L_i(k) \\ &= P_m^{-1}(k, k-1) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k, k-1) + H^T(k)H(k) - \gamma^{-2}L^T(k)L(k) \end{aligned} \quad (5B-5)$$

对比(5-25)，我们即可得到(5-41)。

证毕。

对比联邦卡尔曼滤波算法公式(5-4)，可以看到，在信息融合中，估计误差方差融合是一致的，估计值的融合在联邦卡尔曼滤波算法的基础上作了修正。

### 5.3.3.2 融合的非偏性和最小方差性

联合卡尔曼滤波融合定理<sup>[66]</sup>是基于全局滤波的非偏性和最小方差性来推导的，其结论为：在局部估计互不相关条件下，全局最小方差，全局滤波为非偏估计。从估计误差信息融合来看，与联合卡尔曼滤波融合定理一致，联合 $H_{\infty}$ 滤波满足最小方差性；从联合卡尔曼滤波融合定理的推导来看，全局滤波为非偏估计本质上是局部滤波的加权矩阵和为单位阵。

**命题：**联合 $H_{\infty}$ 滤波的局部滤波加权矩阵和也为单位阵。

**证明：**联邦 $H_{\infty}$ 滤波滤波器加权系数和为：

$$\begin{aligned}
& W^{-1}(k)P(k,k)[P_m^{-1}(k,k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k,k)W_i(k)] \\
&= W^{-1}(k)P(k,k)[P_m^{-1}(k,k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k,k)(I + \gamma^{-2}P_i(k,k)L_i^T(k)L_i(k))] \\
&= W^{-1}(k)P(k,k)[P_m^{-1}(k,k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k,k) + \gamma^{-2} \sum_{i=1}^N L_i^T(k)L_i(k)] \\
&= W^{-1}(k)P(k,k)[P_m^{-1}(k,k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k,k) + \frac{\gamma^{-2}}{N} \sum_{i=1}^N L^T(k)L(k)] \quad (5C-1) \\
&= W^{-1}(k)P(k,k)[P^{-1}(k,k) + \gamma^{-2}L^T(k)L(k)] \\
&= W^{-1}(k)[I + \gamma^{-2}P(k,k)L^T(k)L(k)] \\
&= I
\end{aligned}$$

证毕。

因此，联合  $H_\infty$  滤波满足无偏性和最小方差性，与联邦卡尔曼滤波是一致的。

### 5.3.3.3 融合的统一性

在信息融合的(5-39)、(5-40)、(5-41)中，误差方差公式，联合卡尔曼滤波与联合  $H_\infty$  滤波是一致的，仅状态估计作了修正。从  $H_\infty$  滤波理论中，可知，当  $\gamma \rightarrow \infty$  时， $H_\infty$  滤波就退化为卡尔曼滤波。因此，联合  $H_\infty$  滤波也退化为联合卡尔曼滤波。

事实上，当  $\gamma \rightarrow \infty$  时： $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} W(k) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (I + \gamma^{-2}P(k,k)L^T(k)L(k)) = I$ ，

$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} W_i(k) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (I + \gamma^{-2}P_i(k,k)L_i^T(k)L_i(k)) = I$ ，因此(5-39)退化为：

$$P^{-1}(k,k)\hat{x}(k,k) = P_m^{-1}(k,k)\hat{x}_m(k,k) + \sum_{i=1}^N P_i^{-1}(k,k)\hat{x}_i(k,k)$$
，即为联邦卡尔曼滤波状态融合公式。因此，联合  $H_\infty$  滤波是联合卡尔曼滤波的推广，联合卡尔曼滤波是联合  $H_\infty$  滤波的特例。

### 5.3.3.4 子滤波器局部估计相关情形的讨论

在联合  $H_\infty$  滤波的信息分配中，已假定各子滤波器的局部估计是不相关的，即  $P_{ij} = 0, i \neq j$ ，为了使  $P_{ij} \equiv 0$ ，需对滤波过程进行改造。构造一个增广系统，它的状态向量由  $N$  个局部滤波器子系统和主滤波器子系统的状态重迭而成的，即：

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \bar{N} = N + 1 \quad (5-42)$$

每个子系统的状态向量  $x_i$  可表示为：

$$x_i = \begin{bmatrix} x_c \\ x_{bi} \end{bmatrix} \quad (5-43)$$

其中,  $x_c, x_{bi}$  分别是公共状态向量和第  $i$  个传感器的误差状态。增广系统的状态方程为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ \vdots \\ x_N(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & & \\ & \ddots & \\ & & F_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(k) \\ \vdots \\ G_N(k) \end{bmatrix} w(k) \quad (5-44)$$

第  $i$  个子系统的测量方程为:

$$y_i(k) = H_i(k)x_i(k) + v_i(k) \quad (5-45)$$

$$\text{令 } H(k) = [0, 0, \dots, H_i(k), \dots, 0] \quad (5-46)$$

则  $y_i(k)$  可用增广系统的状态来表示:

$$y_i(k) = H(k)x(k) + v_i(k) \quad (5-47)$$

增广系统总体滤波的协方差可表示为:

$$P(k) = \begin{bmatrix} P_{11}(k) & \cdots & P_{1N}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}(k) & \cdots & P_{NN}(k) \end{bmatrix} \quad (5-48)$$

命题: 当  $P_y(0) = 0$  时, 增广系统滤波的测量更新和时间更新可分解为各局部滤波器独立的测量更新和时间更新, 它们之间没有交联。

证明: 增广系统只用一个测量值时, 集中滤波的测量更新为:

$$\hat{x}(k, k) = \hat{x}(k, k-1) + P(k, k-1)H_i^T(k)[I + H_i(k)P_{ii}(k, k-1)H_i^T(k)]^{-1}[y_i(k) - H_i(k)\hat{x}(k, k-1)] \quad (5D-1)$$

考虑第  $i$  个测量对第  $j$  个估计的更新, 由(5D-1)可得:

$$\begin{aligned} \hat{X}_j(k, k) &= \hat{X}_j(k, k-1) \\ &+ P_{ji}(k, k-1)H_i^T(k)[I + H_i(k)P_{ii}(k, k-1)H_i^T(k)]^{-1}[y_i(k) - H_i(k)\hat{X}_i(k, k-1)] \end{aligned} \quad (5D-2)$$

集中滤波协方差的测量更新为:

$$\begin{aligned} P(k, k) &= P(k, k-1) - P(k, k-1) \begin{bmatrix} H^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \right. \\ &+ \left. \begin{bmatrix} H(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k, k-1) \begin{bmatrix} H^T(k) & L^T(k) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} H(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P(k, k-1) \end{aligned} \quad (5D-3)$$

则(5D-3)的第  $jl$  元为:

$$\begin{aligned}
P_{ji}(k, k) = & P_{ji}(k, k-1) - P_{ji}(k, k-1) \begin{bmatrix} H_i^T(k) & L_i^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} H_i(k) \\ L_i(k) \end{bmatrix} P_{ji}(k, k-1) \begin{bmatrix} H_i^T(k) & L_i^T(k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H(k) \\ L(k) \end{bmatrix} P_{ji}(k, k-1)
\end{aligned} \tag{5D-4}$$

分析:

(1) 当  $l=i, i \neq j$  时, 由(5D-4),  $P_{ji}(k, k-1) = 0$ , 则  $P_{ji}(k, k) = 0$ , 即相关项  $P_{ji}$  的预报值为零, 则由测量更新所得到的滤波值仍为零; 当  $P_{ji}(k, k-1) = 0$ , 由(5D-2), 则  $\hat{X}_j(k, k) = \hat{X}_j(k, k-1)$ , 即第  $i$  个测量值不会对第  $j$  个估计的测量更新。

(2) 当  $l=i, i=j$  时, 由(5D-4)、(5D-2)可得,  $\hat{X}_i$  和  $P_{ii}$  的测量更新只与第  $i$  个测量值有关。

(3) 当  $l \neq i, i \neq j$  时, 只要  $P_{ji}(k, k-1) = 0$ , 由(5D-4),  $P_{ji}(k, k) = P_{ji}(k, k-1)$ , 即第  $i$  个测量不会对其他局部滤波之间的相关项进行测量更新。

综合(1)、(2)、(3), 只要  $P_{ji}(k, k-1) = 0$ , 集中滤波的测量更新可分解为各局部滤波器的测量更新。由增广系统状态方程可得:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} P_{11}(k, k-1) & \cdots & P_{1N}(k, k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}(k, k-1) & \cdots & P_{NN}(k, k-1) \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} F_1(k-1) & & \\ & \ddots & \\ & & F_N(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(k-1, k-1) & \cdots & P_{1N}(k-1, k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}(k-1, k-1) & \cdots & P_{NN}(k-1, k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^T(k-1) & & \\ & \ddots & \\ & & F_N^T(k-1) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} G_1(k-1) \\ \vdots \\ G_N(k-1) \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} G_1^T(k-1) & \cdots & G_N^T(k-1) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5D-5}$$

其中,  $Q = E[w(k-1)w^T(k-1)]$ 。根据矩阵有关定理, 有:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} P_{11}(k, k-1) & \cdots & P_{1N}(k, k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}(k, k-1) & \cdots & P_{NN}(k, k-1) \end{bmatrix} \\
& \leq \begin{bmatrix} F_1(k-1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & F_N(k-1) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11}(k-1, k-1) & \cdots & P_{1N}(k-1, k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}(k-1, k-1) & \cdots & P_{NN}(k-1, k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^T(k-1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & F_N^T(k-1) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} G_1(k-1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & G_N(k-1) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 Q(k-1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \gamma_N Q(k-1) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1^T(k-1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & G_N^T(k-1) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5D-6)
\end{aligned}$$

其中,  $\frac{1}{\gamma_1} + \cdots + \frac{1}{\gamma_N} = 1, 0 \leq \frac{1}{\gamma_i} \leq 1$ 。在(5D-6)中取等号, 则可得到:

$$P_{ii}(k, k-1) = F_i(k-1)P_{ii}(k-1, k-1)F_i^T(k-1) + \gamma_i G_i(k-1)Q G_i^T(k-1) \quad (5D-7)$$

$$P_{jj}(k, k-1) = F_j(k-1)P_{jj}(k-1, k-1)F_j^T(k-1) = 0, \text{ 当 } P_{jj}(k-1, k-1) = 0 \quad (5D-8)$$

对比(5-18)与(5D-7), 可得:  $Q = I$ , 因此, (5D-7)即为:

$$P_{ii}(k, k-1) = F_i(k-1)P_{ii}(k-1, k-1)F_i^T(k-1) + \gamma_i G_i(k-1)G_i^T(k-1) \quad (5D-9)$$

(5D-8)说明, 只要  $P_{jj}(k-1, k-1) = 0$ , 则  $P_{jj}(k, k-1) = 0$ , 根据(5D-4), 则  $P_{jj}(k, k) = 0$ , 所以, 只要  $P_{jj}(0) = 0$ , 则  $P_{jj}(k, k-1) = 0$ ,  $P_{jj}(k, k) = 0$ 。根据矩阵理论, 可以得到:

$$\begin{bmatrix} P_{11}(0) & \cdots & P_{1N}(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{N1}(0) & \cdots & P_{NN}(0) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \gamma_1 P_{11}(0) & & & \\ & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \gamma_N P_{NN}(0) \end{bmatrix} \quad (5D-10)$$

由(5D-10)可以看到, 将各子滤波器的初始方差放大, 就可以忽略各自滤波器初始方差的相关项, 即  $P_{ij}(0) = 0$ 。

证毕。

### 5.3.4 联合 $H_\infty$ 滤波仿真实验

仍然考虑 5.2.4 节中的仿真条件, 不同的是在作联合  $H_\infty$  滤波时,  $w(k)$  与  $v_i(k)$  为能量有界噪声, 其他条件不变。

仿真结果如下:

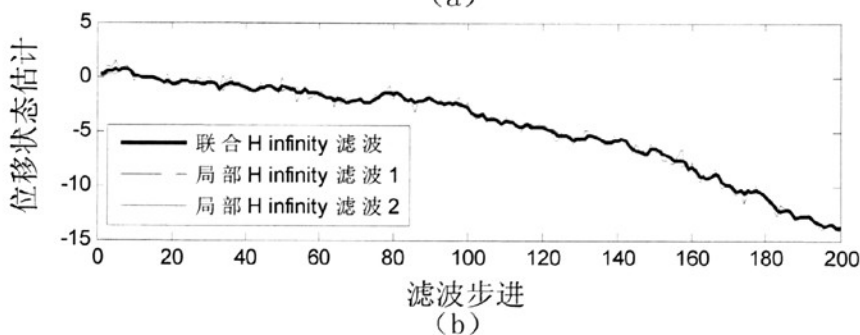
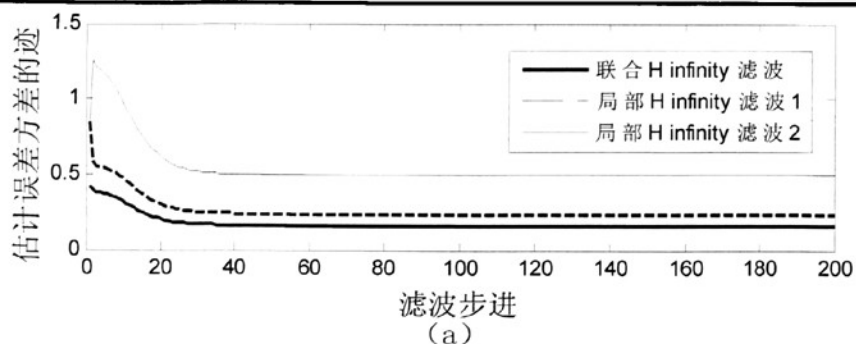


图 5.6 联合  $H_\infty$  滤波 (有重置)

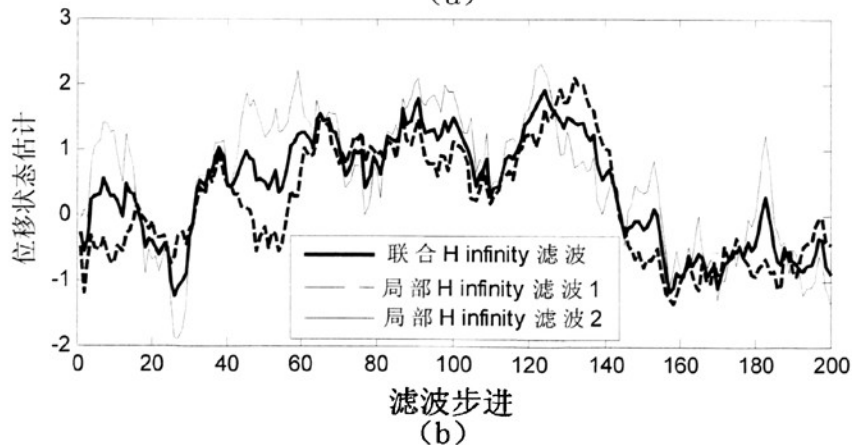
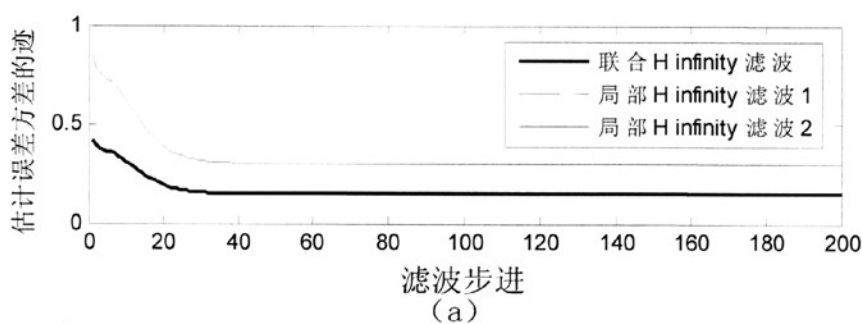
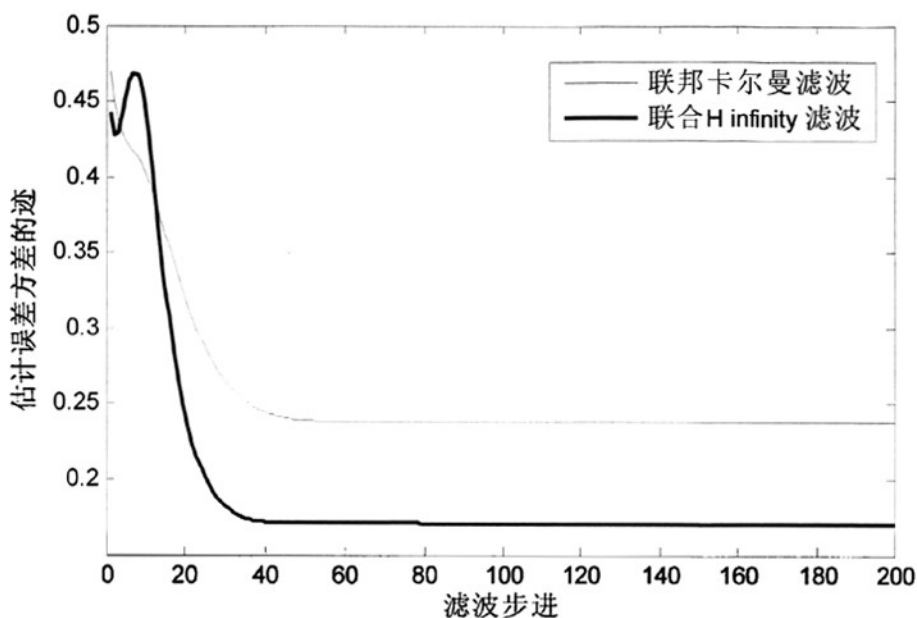


图 5.7 联合  $H_\infty$  滤波 (无重置)

图 5.8 联合  $H_{\infty}$  滤波与联邦卡尔曼滤波误差对比

(有重置, 无重置类似)

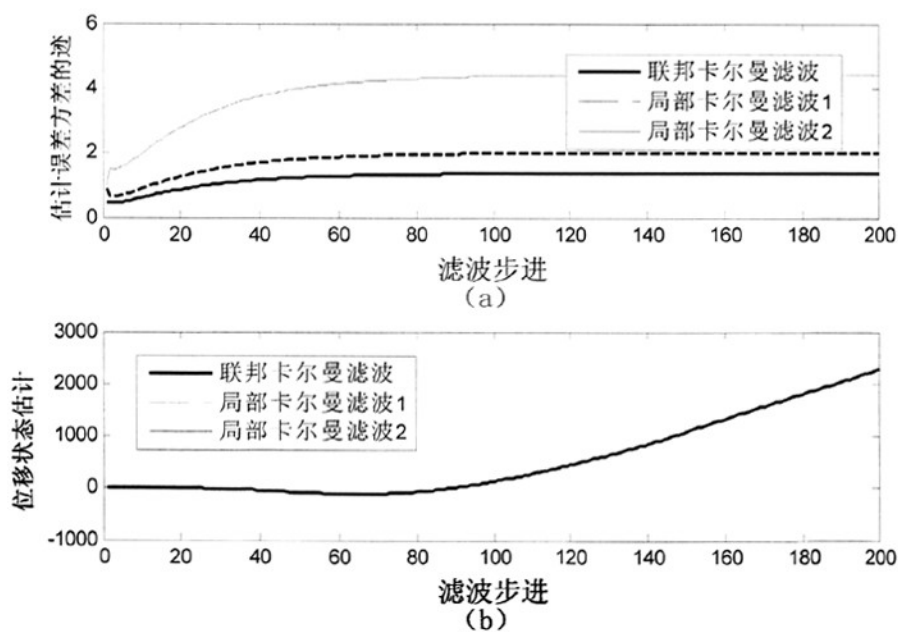


图 5.9 联邦卡尔曼滤波

(过程噪声方差发生变化)



图 5.6(a)为有重置情况下,联合  $H_{\infty}$  滤波的估计误差方差阵迹的变化曲线,粗实线表示联合滤波的变化曲线,虚线和细实线分别表示局部滤波器的变化曲线(以下同),可以看到,联合  $H_{\infty}$  滤波精度优于各局部滤波器,从图 6.6(b)的位移估计误差也可看出。

图 5.7 为无重置情况下,联合  $H_{\infty}$  滤波的估计误差方差阵迹和位移估计误差的变化曲线,第一,从图 5.7(a)可以看到,两局部滤波器的估计误差方差迹曲线重合,这是因为  $H_{\infty}$  滤波不对噪声情况作统计特性上的假设,因此,两局部滤波器是同一滤波器,精度同等。第二,从图 5.7(b)可以看到,无重置情况下,局部滤波器的波动程度大,精度要比有重置情况下差些,这符合联合滤波理论。

图 5.8 为联合  $H_{\infty}$  滤波和联邦卡尔曼滤波的估计误差方差阵迹的变化曲线对比图,粗实线表示联合  $H_{\infty}$  滤波的变化曲线,细实线表示联邦卡尔曼滤波的变化曲线,可以看到,联合  $H_{\infty}$  滤波精度优于联邦卡尔曼滤波。

图 5.9 为联邦卡尔曼滤波在过程噪声方差发生变化时的滤波变化曲线图,可以看到,联邦卡尔曼滤波出现了严重的滤波发散现象,而联合  $H_{\infty}$  滤波情况还是如图 5.6 所示,因此,联合  $H_{\infty}$  滤波比联邦卡尔曼滤波更稳健,这其实是  $H_{\infty}$  滤波派生的一个特性。

本节根据格林空间理论中卡尔曼滤波与  $H_{\infty}$  滤波统一性的理论,按照联邦卡尔曼滤波器中集中滤波、分散滤波和联邦滤波的等价性,推导了联邦  $H_{\infty}$  滤波算法,证明了联邦  $H_{\infty}$  滤波是联合卡尔曼滤波的推广。仿真结果表明,联邦  $H_{\infty}$  滤波比联合卡尔曼滤波更稳健,精度更高。

## 5.4 基于“当前”统计模型的联合滤波仿真实验

在上节仿真试验的基础上,本节结合第二章提出的基于“当前”统计模型,建立 GPS/DR 联合滤波数学模型,并进行仿真。本节也是上节双传感器模型结合 GPS/DR 组合导航系统的一个具体应用。

### 5.4.1 基于“当前”统计模型的联合滤波数学模型

基于“当前”统计模型的联合滤波数学模型的状态方程的建立与 2.5.1 节的状态方程建立相同。观测方程就和集中形式滤波器不同了,在联合滤波中,将 GPS 传感器和 DR 传感器分别建立观测方程,结合状态方程,构成两个局部滤波器。

设 GPS 传感器的观测量为:GPS 输出的东向位置信息  $e(t)$ 、北向位置信息  $n(t)$ 、

则观测量与状态变量之间有如下关系:

$$e(t) = x_e(t) + v_1, \quad n(t) = x_n(t) + v_2 \quad (5-49)$$

因此, GPS 观测器的连续的观测方程为:

$$z_{gps} = \begin{bmatrix} e \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (5-50)$$

其中,  $v_1, v_2$  分别为 GPS 接收机输出的东向位置和北向位置的观测噪声。

设 DR 传感器的观测量为: 角速率陀螺的输出  $\omega(t)$ , 里程计 (或加速度计) 在一个采样周期内输出的距离  $s(t)$ , 根据 DR 原理(2-7), 则观测量与状态变量之间有如下关系:

$$\omega(t) = \frac{\partial}{\partial t} [\tan^{-1}(\frac{v_e}{v_n})] + \varepsilon_\omega = \frac{v_n a_e - v_e a_n}{v_e^2 + v_n^2} + \varepsilon_\omega \quad (5-51)$$

$$s = T \sqrt{v_e^2 + v_n^2} + \varepsilon_s \quad (5-52)$$

因此, DR 观测器的连续的观测方程为:

$$z_{dr} = \begin{bmatrix} \omega \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_n a_e - v_e a_n}{v_e^2 + v_n^2} \\ T \sqrt{v_e^2 + v_n^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_\omega \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} \quad (5-53)$$

其中,  $\varepsilon_\omega$  为陀螺漂移,  $\varepsilon_s$  为里程计 (或加速度计) 的观测噪声。

将观测方程离散化, 则得到 GPS 传感器离散的观测方程为:

$$z_{gps}(k) = h_{gps}[x(k)] + v_{gps}(k) \quad (5-54)$$

$$\text{其中, } z_{gps}(k) = \begin{bmatrix} e_k \\ n_k \end{bmatrix}, h_{gps}[x(k)] = \begin{bmatrix} x_{e(k)} \\ x_{n(k)} \end{bmatrix}, v_{gps}(k) = \begin{bmatrix} v_{1(k)} \\ v_{2(k)} \end{bmatrix}$$

得到 DR 传感器离散的观测方程为:

$$z_{dr}(k) = h_{dr}[x(k)] + v_{dr}(k) \quad (5-55)$$

$$\text{其中, } z_{dr}(k) = \begin{bmatrix} \omega_k \\ s_k \end{bmatrix}, h_{dr}[x(k)] = \begin{bmatrix} \frac{v_{n(k)} a_{e(k)} - v_{e(k)} a_{n(k)}}{v_e^2 + v_n^2} \\ T \sqrt{v_e^2 + v_n^2} \end{bmatrix}, v_{dr}(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{\omega(k)} \\ \varepsilon_{s(k)} \end{bmatrix}$$

按照 3.8.3 节的方法将观测模型线性化, 则得到 GPS 观测器的线性化模型:

$$z_{gps}(k) = H_{gps}(k)x(k) + v_{gps}(k) + h_{gps}[\hat{x}(k, k-1)] - H_{gps}(k)\hat{x}(k, k-1) \quad (5-56)$$

$$\text{其中: } H_{gps}(k) = \left. \frac{\partial h_{gps}[x(k)]}{\partial x(k)} \right|_{x(k)=\hat{x}(k, k-1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到 DR 观测器的线性化模型:

$$z_{dr}(k) = H_{dr}(k)x(k) + v_{dr}(k) + h_{dr}[\hat{x}(k, k-1)] - H_{dr}(k)\hat{x}(k, k-1) \quad (5-57)$$

$$\text{其中: } H_{dr}(k) = \frac{\partial h_{dr}[x(k)]}{\partial x(k)} \Big|_{x(k)=\hat{x}(k, k-1)} = \begin{bmatrix} 0 & h_1 & h_2 & 0 & h_3 & h_4 \\ 0 & h_5 & 0 & 0 & h_6 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 5.4.2 联合滤波仿真实验

仿真条件为：假设车辆以 $10\sqrt{2}m/s$ 的速度， $45^\circ$ 航向角匀速直线运动，采样周期 $T=1$ 秒，根据(2-18)， $v_1, v_2, \varepsilon_s, \varepsilon_w$ 为白噪声时，方差分别为： $\sigma_1^2 = (15m)^2$ ， $\sigma_2^2 = (16m)^2$ ， $\sigma_s^2 = (0.7m)^2$ ， $\sigma_w^2 = (0.005rad/s)^2$ ，东向和北向加速度的方差 $\sigma_{a_e}^2 = \sigma_{a_n}^2 = (0.3m/s^2)^2$ ， $\alpha_e = \alpha_n = 1$ ，初始值 $x(0) = diag[0, 10, 0, 0, 10, 0]$ ， $P(0) = diag[100, 1, 0.04, 100, 1, 0.04]$ ，仿真次数为400次。

因为有重置方式局部滤波精度要高些，所以，本节仿真仅考虑有重置方式滤波结构。图中，细实线为无噪声理想情况的运动轨迹，粗实线为有噪声情况下联合 $H_\infty$ 滤波的滤波轨迹，虚线为有噪声情况下联合卡尔曼滤波的滤波轨迹。

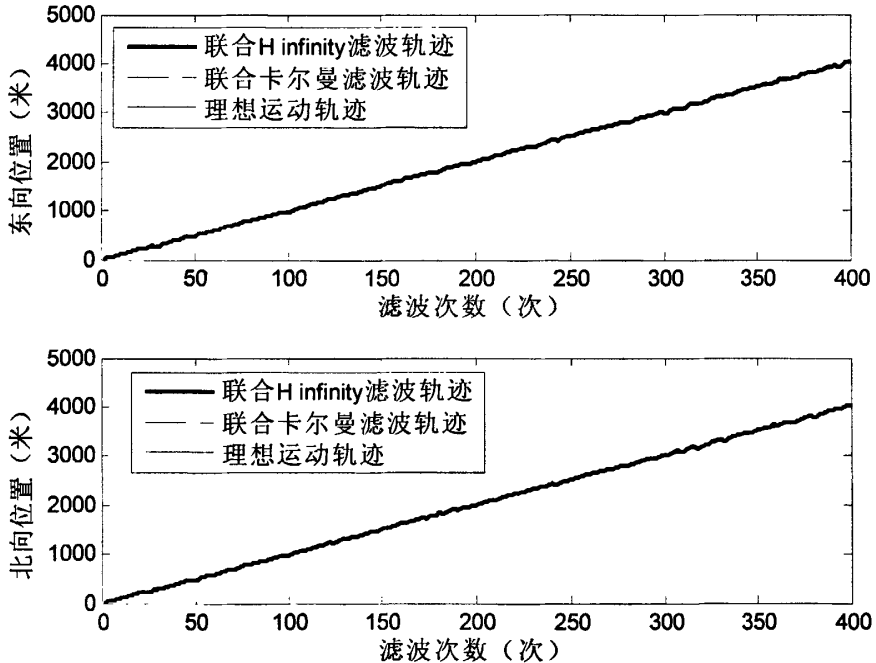


图 5.10 白噪声情况联合卡尔曼与联合 $H_\infty$ 滤波对比图

(基于“当前”统计模型)

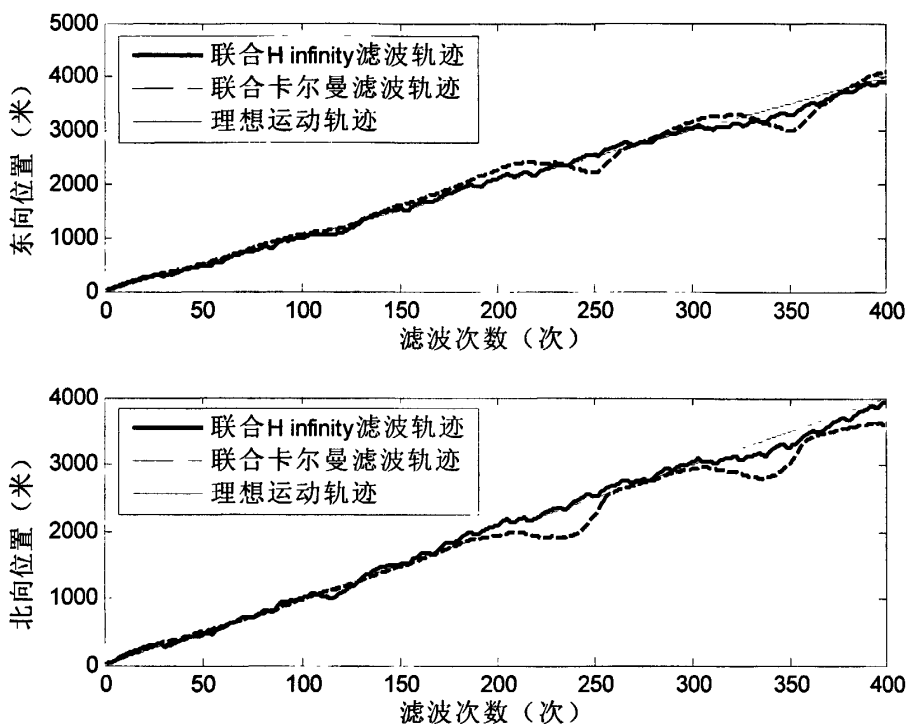


图 5.11 色噪声情况联合卡尔曼与联合  $H_{\infty}$  滤波对比图  
(基于“当前”统计模型)

从图 5.10 可以看到，在白噪声情况下，联合卡尔曼滤波与联合  $H_{\infty}$  滤波效果是相当的，而从图 5.11 可以看到，在色噪声情况下，联合  $H_{\infty}$  滤波的滤波精度要优于联合卡尔曼滤波，这也进一步反映了联合  $H_{\infty}$  滤波对噪声不敏感的特性。

## 5.5 本章小结

本章简要介绍了联邦卡尔曼滤波理论，验证了其理论中全局最优性和不同滤波结构和信息分配方式会造成不同的滤波效果的结论；根据目前在学术上为了提高全局或局部滤波最优性集中在信息分配系数的自适应算法探讨而无结果的情况下，作者将联邦卡尔曼滤波推广到联邦  $H_{\infty}$  滤波上，提出了联邦  $H_{\infty}$  滤波算法，证明了有关结论，仿真结果表明了联邦  $H_{\infty}$  滤波算法是对噪声不敏感，精度和稳健性能要优于联邦卡尔曼滤波的联合滤波算法。

## 第六章 GPS/DR 组合导航实验

### 6.1 引言

为了验证本文提出的理论算法，作者构建了 GPS/DR 组合导航实验系统，该实验系统采用第二章介绍的以带操作系统计算机（处理器）为核心的体系结构。为了防止对车辆的破坏性改造，实验中的距离传感器采用加速度计。实验中对采集的数据进行离线滤波计算，并通过轨迹比较滤波算法的效果与特点。

本章包括实验系统的硬件结构、软件结构和实验结果及分析三个方面的内容。

### 6.2 实验硬件系统

#### 6.2.1 概述

本文的 GPS/DR 组合导航实验系统硬件结构采用了第二章提到的以带操作系统计算机（处理器）为核心的硬件体系结构，该结构的优点在于利用便携式计算机（处理器）处理数据速度快，能大量处理数据，便于事后处理，对数据加以分析，适合实验系统。实验中，采用加速度计采集载体加速度信息，通过一次积分运算得到车体的速度信息，再次积分运算得到车体的里程信息，避免了采集里程表信息对车体的破坏性改造；航位信息的采集使用角速率陀螺，陀螺仪检测车体的即时转向角速率，通过积分运算可得到车体的航向信息；GPS 导航信息采用成熟的 GPS 模块；所有信息通过单片机采集数据，单片机并行采集陀螺仪、里程传感器信号，串行采集 GPS 信号，并将采集的信号存储在双口 RAM 的不同地址区域，通过串行口发送给便携机；便携机读入数据进行滤波运算并作有关分析。框架结构如图 6.1 所示。

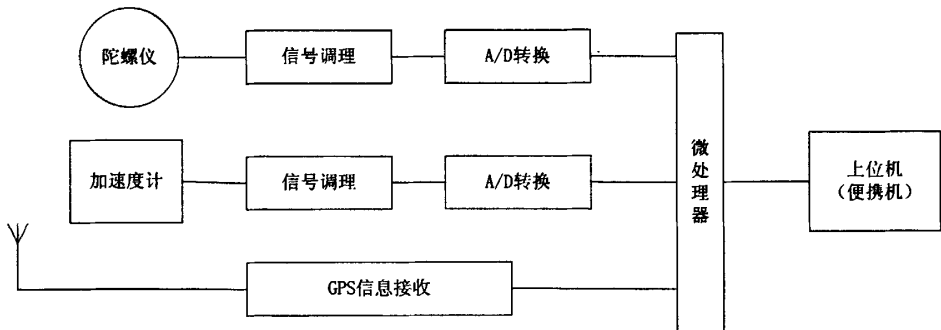


图 6.1 实验系统硬件结构图

## 6.2.2 传感器选型

### 1、陀螺仪

角速率陀螺实时测量角速度，通过对角速度积分得到相对航向。在车载导航中，多采用低成本的压电陀螺。角速率陀螺是通过角速率所产生的科里奥利（Coriolis）力而工作的。具体原理是：当压电陶瓷在垂直方向以共振频率振动，当系统有角速率时，因角速率而产生的科里奥利力将会导致陶瓷在水平方向振动，从而使陶瓷材料发生从左到右的材料弹性变形，这一变形使压电材料改变输入电压的相位角，使相位角从左边变到右边，当产生的科里奥利力为最大时，其影响将使信号延迟  $90^\circ$ ，力仅与角速率有关，位于双压电晶片上的传感器把角速率信号以模拟电压输出，原理如图 6.2 所示。

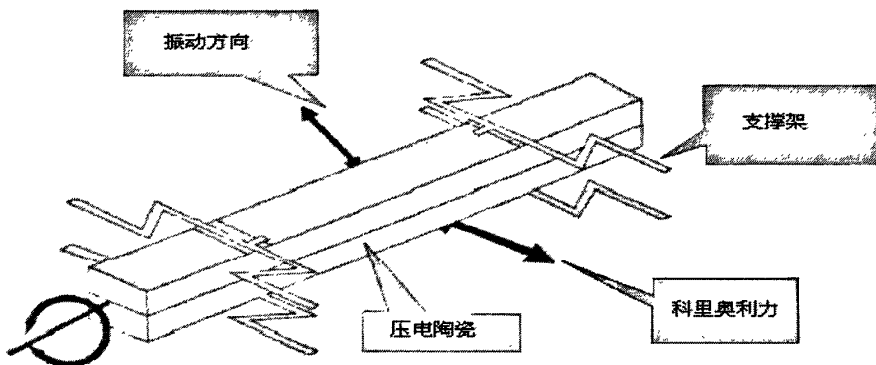


图 6.2 角速率陀螺工作原理

试验方案中采用了陕西航天长城科技有限公司的经济型角速度传感器（速率陀螺），它具有体积小、重量轻、接口简单等特点，适合应用于嵌入式系统中。外观及引脚定义如图 6.3 所示，具体参数如表 6.1 所示。

表 6.1 角速率陀螺指标

参数	指标
供电电压	5Vdc $\pm$ 0.25Vdc
电流消耗	15mA
测量范围	$\pm 70$ deg/s
零速率输出	2.5Vdc $\pm$ 0.4Vdc
比例系数	25.0mV/deg/s
分辨率	0.1deg/s
线性度	$\pm 0.5\%$ FS.
响应频率	10Hz

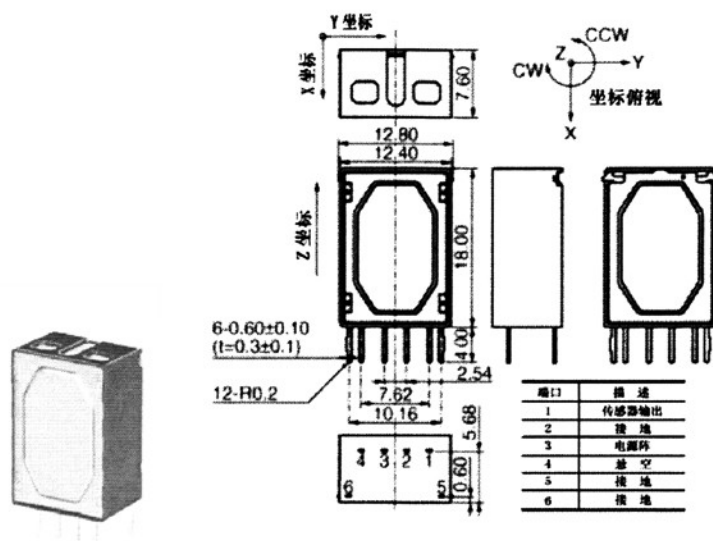


图 6.3 角速率陀螺

## 2、加速度计

本文采用 SCA610-C28H1A 型一维加速度传感器,如图 6.4 所示,该产品系列测量范围有  $\pm 0.5g(\pm 30^\circ)$ 、 $\pm 1g(\pm 90^\circ)$ 、 $\pm 1.5g$ 、 $\pm 1.7g$ 、 $2g$ 、 $3g$ 。本系统选用的是  $\pm 1.7g$  的产品,主要特点与性能是:体积小,灵敏度高,双向加速度测量,兼容 SPI 数字输出,具有优良的负载和抗冲击能力,集成度高,接口简单,无需额外组件即可工作,适用于加速度测量、倾角测量、运动测量、振动测量,适应性非常宽;采用单级+5V 供电,允许输入电压在 4.75~5.25V 之间,电流消耗比较小,标准为 2.0mA,最大 4.0mA,模拟输出阻抗为  $20k\Omega$ ,输出噪声在 DC-4KHz 范围内为 5mVrms 以内。主要参数指标如表 6.2 所示:

表 6.2 加速度计参数指标

参数	指标
测量范围	$\pm 1.7g$
测量方向	相对于安装平台平行方向
零点	Vdd/2
灵敏度	1.2V/g (室温)
零点误差	$\pm 125mg (-40-125^\circ C)$
灵敏度误差	$\pm 5\% (-40-125^\circ C)$
横轴灵敏度	4%
非线性	$\pm 20mg$
频响	$50 \pm 30Hz$
比例误差	2%

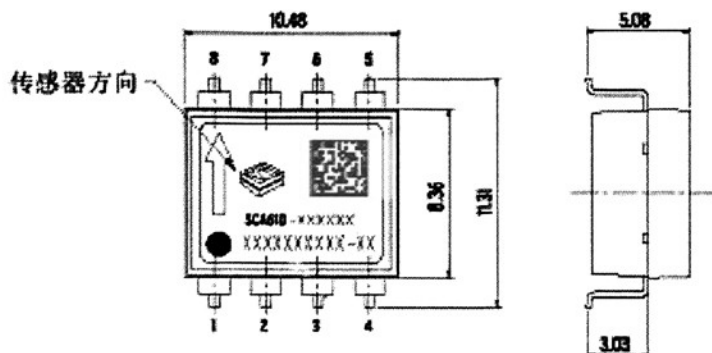


图 6.4 加速度计

### 3、GPS 模块

GPS 接收模块采用的是加拿大马可尼公司的 SUPERSTAR II GPS 接收模块。该模块的主要特点是：在苛刻的条件，如树叶遮挡，城市高楼林立下提供很高的可靠性和优异的性能，易于集成，可以应用于各种嵌入式系统，具有软件升级功能，可获得高精度 12 通道码和载波相位并行跟踪方式，位置、速度和时间 (PVT) 输出率最高可达 5Hz，载波相位原始数据的输出最高可达 10Hz，可以接收类似于广域和局域差分数据。

SUPERSTAR IIGP 模块提供 2 个对外串口，可以选择从 300 到 19200 波特率之间的任何通信速率，本系统利用一个串口获得导航数据。SUPERSTAR II GPS 模块对外可输出二进制数据格式或标准的 NMEA0183 数据格式，本系统使用 NMEA0183 数据格式。

本系统是将 SUPERSTAR II GPS 模块与 FlexPak 板一起使用，其中，FlexPak 板是 SUPERSTAR II GPS 模块与其他模块连接的接口，主要完成 TTL 电平与 232 电平的转换。

NMEA-0183 格式信息码是由美国国家海洋电子学协会制定的一种导航数据格式，其具体信息种类如表 6.3 所示。

表 6.3 NMEA-0183 信息内容

NMEA 码标识	英文解释	中文解释
GGA	Global positioning system fixed date	固定数据输出
GLL	Geographic position – latitude/longitude	地理位置纬度/经度
GSA	GNSS DOP and active satellites	当前卫星信息
GSV	GNSS satellites in view	可视卫星状态
RMC	Recommended minimum specific GNSS data	推荐定位信息
VTG	Course over ground and ground speed	地面速度信息



该模块通过软件设定可以输出表 6.3 所示的任何一种或者多种信息,输出频度均为每秒一帧。本系统采用单一的 RMC 信息输出。RMC 信息输出格式如表 6.4 所示。

表 6.4 RMC 信息格式

内容	示例	单位	描述
信息 ID	\$GPRMC		协议头
UTC 时间	161229.487		hhmmss.sss
定位状态	A		A=数据有效, V=数据无效
纬度	3723.2475		ddmm.mmmm
纬度指示	N		N=北 or S=南
经度	12158.3416		dddmm.mmmm
经度指示	W		E=东 or W=西
地面速度	0.13	节	
地面航向	309.62	度	实数
UTC 日期	120598		Ddmmyy
磁偏角		度	E=东 or W=西
校验和			
<CR> <LF>			一帧信息结束

### 6.2.3 单片机选型

组合导航实验系统的信息采集部分主要实现的功能是:

- 1、加速度计和陀螺仪输出模拟信号的 A/D 转换,转换精度要求大于 18 位,转换频率要求大于 10Hz;
- 2、采集转化后的传感器数据;
- 3、采集 GPS 模块信息;
- 4、将加速度、角速度数据以及 GPS 信息传输给上位机。

根据以上功能,本系统选定了集成有 24 位 A/D 转换的 TI 公司的 MSC1210 型单片机。MSC1210 是德州仪器推出的集成数字/模拟混合信号的高性能芯片,集成了大量的模拟和数字外围模块,具有很强的数据处理能力,非常适合于要求体积小、集成度高、运算速度快和精确测量的产片设计。

该型号单片机主要性能与特点是:

- 1、处理器具有 8 通道 24 位高精度 A/D 转换器,可在很大程度上简化电路设计,其 ADC 在数据输出速率为 10Hz 时可以得到 22 位的有效分辨率,满足本系统对采样精度的要求。
- 2、它具有两个 UART 全双工通信接口,无需扩展即可通过 UART 同时连接

上位机与 GPS 模块，大大简化了电路设计。

考虑实验系统设计的稳定和可靠性以及周期，本系统采用直接使用开发板设计的方法。本系统采用 TI 公司的 MSC1210EVM 开发板。该开发板具有丰富的资源，包括 MSC1210 微处理器、128KB RAM、11.0592MHz 振荡器、两个串口，以及一些辅助电路。结构原理图如图 6.5 所示。主要特点是：

1、MSC1210(U7)的时钟是由 11.0592MHz 的晶振提供，如果不使用该晶振也可以使用开关 SW3 将其紧掉。MSC1210 使用振荡器 X2，该振荡器使用片内电路提供时钟源。

2、使用串口可以将程序直接下载到 32KB 的 Flash 存储器中。另外 MSC1210 的片内 SRAM 可以实现外部 128KB RAM 访问。其中，64KB 的 RAM 可以直接地址访问。

3、开发板可以分别通过外接电源和电池供电，当接入外接电源时，输入电源和电池的连接将会自动断开，电池和外接电源都可以在板上调节，从而保证为系统提供+5V 模拟电压和+3.3V 的数字电压，开发板具有独立的模拟和数字电源模块，且可以独立调整电压。

4、开发板上还带有面积为  $3 \times 9\text{cm}$  的试验电路板，用于二次开发试验的电路焊接。所有 MSC1210 信号均可连接到这里，此外，模拟、数字电源和接地都有已经连接的焊接孔。

5、MSC1210EVM 具有两个 RS232 标准接口，串口除了正常的通信功能外，固件的升级也是通过串口进行。

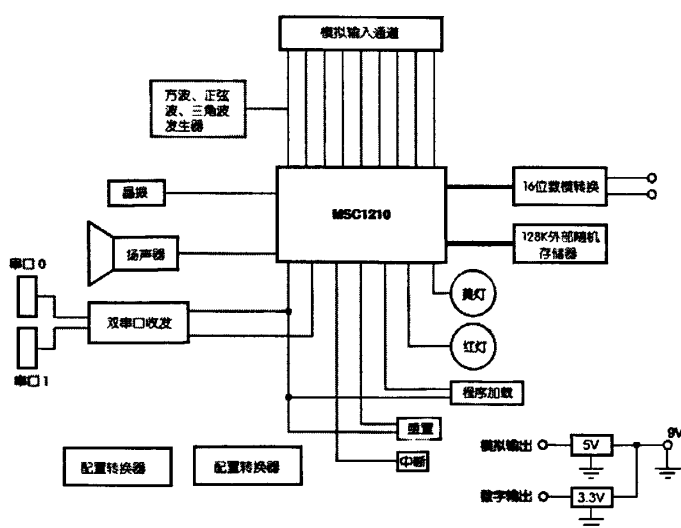


图 6.5 MSC1210EVM 结构框图

## 6.2.4 硬件集成设计

硬件集成的主要任务是将陀螺仪和加速度计传感器安装于开发板上。安装主要分为以下几个步骤：

1、加速度安装需确认其正加速度方向，并使其加速度方向平行于开发板，焊接于开发板上；

2、陀螺仪水平安装于开发板，使其测量平面与地面水平；

3、连接加速度计和陀螺仪的电源线、地线以及信号线；

4、两传感器的信号线连接到 MSC1210EVM 开发板的八个 ADC 输入通道的任意两个，本系统选用了通道 1 和通道 3。

5、将 GPS 模块输出与开发板用串口线连接，开发板与笔记本电脑之间用串口连接。

6、整套系统采用自备电源。开发板上自备电池插槽，安装上 9V 仪表电池即可工作。载有 SUPERSTARII 的 FlexPak 板需要 12V 电源供电，本系统自制了电池盒，内装串联 8 只 1.5V 电池，通过电源线输出给 FlexPak 板。

系统连接图如图 6.6 所示。

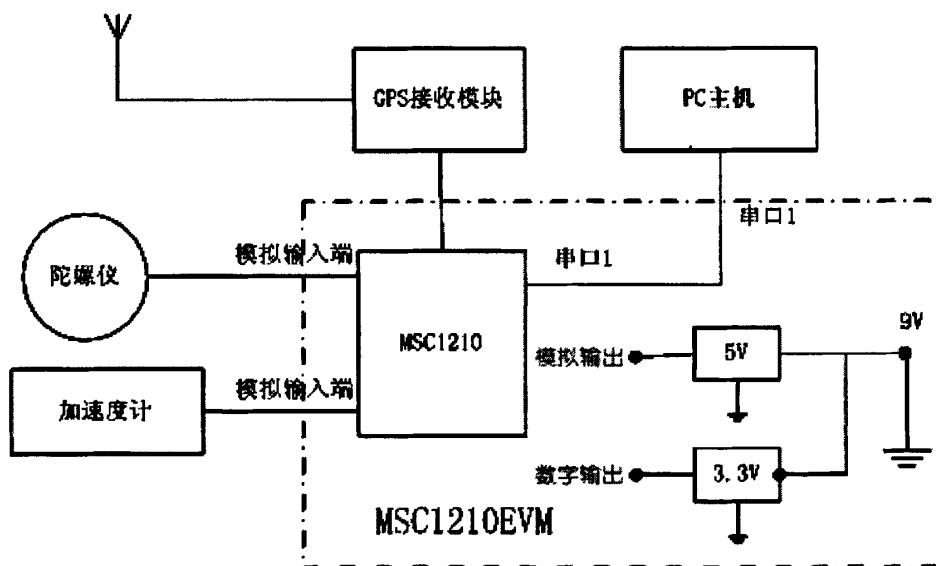


图 6.6 组合导航系统硬件连接图

本系统实物照片如图 6.7 所示。

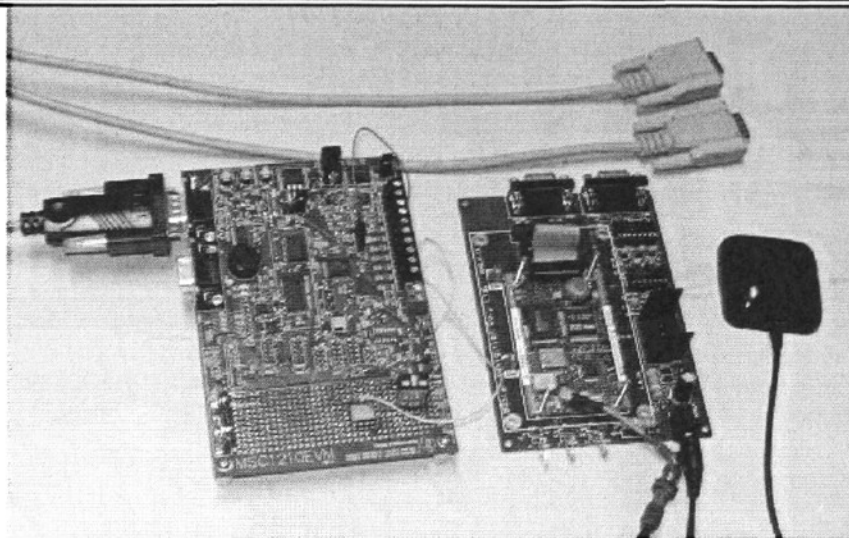


图 6.7 GPS/DR 组合导航实验系统实物图

另外，由于跑车实验需一更高精度的差分 GPS 数据作为基准轨迹，因此，本文采用带广域差分的北斗接收机来作为基准轨迹，广域差分北斗接收机的工作基本原理是：由于北斗卫星可广播 GPS 的广域差分信息，接收机内的 GPS 模块通过北斗模块获得 GPS 伪距中包含的电离层、对流层等误差修正信息，以及 GPS 卫星的星历修正信息，利用这些信息参与位置解算，从而获得高精度的位置轨迹。图 6.8 是广域差分接收机的模型图片。（由于保密原因，没有示出实物图片）



图 6.8 广域差分接收机模型图

## 6.3 实验软件系统

### 6.3.1 软件开发环境

---

本系统采用  $\mu$  Vision2 IDE 的集成开发环境，它是 Keil Software 公司为 8051 及其兼容产品提供的专门开发工具，用户可以用它们来编译 C 源码或汇编源代码，连接和重定位目标文件和库文件，创建 HEX 文件，调试和仿真目标程序等，开发环境主要包含以下内容。

### 1、集成开发环境 $\mu$ Vision2

它是一个集成项目管理，源代码编辑，程序调试等于一体的 Windows 应用程序。 $\mu$  Vision2 源代码级调试器是一个理想、快速、可靠的程序调试器，此调试器能够让用户高速模拟整个 8051 系统，包括片上外围器件和外部硬件，当用户从其中选择器件时，这个器件的特征将自动配置。 $\mu$  Vision2 调试器提供了在实际目标板上测试程序的方法。

### 2、C51 编译器

Keil C51 编译器完全遵照 ANSI C 语言标准，支持 C 语言的所有标准特征，作用是编译 C 源代码产生可重定位的目标文件，并直接支持 8051 结构的特征。

### 3、A51 宏汇编器

Keil A51 宏汇编器支持 8051 及其派生系列的全部指令集，作用是编译 8051 汇编源代码产生可重定位的目标文件。

### 4、BL51 连接/重定位器

BL51 连接/重定位器作用是利用从库中提取的目标和由编译器或汇编器生成的目标模块创建一个绝对地址的目标模块。绝对地址目标模块或文件包含不可重定位的代码和数据，所有的代码和数据被安置在固定的存储器单元中，绝对地址目标文件主要用于：写入 EPROM 或其他存储器件、供  $\mu$  Vision2 调试用来模拟和调试、供仿真器用来测试程序。

### 5、LIB51 库管理器

LIB51 库管理器作用是组合目标文件，生成可以被连接器使用的库文件。库是一种被特别地组织过并在以后可以被连接重用的对象模块，当连接器处理一个库时，仅仅那些被使用的目标模块才被真正使用。

### 6、OH51 目标文件到 HEX 格式的转换器

该转换器的作用是创建从绝对目标文件到 Intel HEX 格式的文件。

### 7、RTX51 单片机实时操作系统

RTX51 单片机实时操作系统是一个针对 8051 系列的多任务核，它本质上简化了对实时事件反应要求高的复杂应用的设计、编程和调试。RTX51 实时内核是完全集成到 C51 编译器中的，使用非常方便，任务描述表和操作系统的连接由 BL51 连接器/定位器自动控制，简化了对时间要求敏感的复杂软件项目开发。

## 6.3.2 软件流程设计

---

软件主要功能是完成传感器信息 A/D 转换、采集、GPS 信息接收，并将这些信息发送到上位机。

本系统程序流程如下：

1、设置串口的波特率，包含 MSC1210 和计算机之间的连接，以及 MSC1210 和 GPS 接收模块之间的串口连接，为了方便，本试验中均采用了 9600bit/S 的速率。

2、设置串口 1 中断，用来接收 GPS 接收模块送来的信息，在内存中开辟一段 GPS 信息缓冲区，每接收一个字节，写入缓冲区，当接收满一帧的时候，设置输出标志位，以表示可以输出 GPS 信息。检测一帧是否接收完毕，采用检测“\$”符号的方法，“\$”为 GPS 输出每一帧开始的标识。

3、设置 ADC 增益，ADC 增益与传感器的量程和比例因子有关。

完成 1、2、3 则相当于完成了程序的初始化，接下进入循环采样阶段。

4、选择 ADC 通道 1（陀螺仪所连接的转换通道），采集 ADC 数值，由于是轮流转换 ADC 通道，每次转换通道滤波器都有一个校准和稳定的过程，因此，每次采集舍弃前面 4 个转换结果，保存第五次转换结果，作为所要采集的信息。

5、选择 ADC 通道 2（加速度计所连接的转换通道），完成 ADC 采集。

6、检测是否完成 GPS 一帧信息的接收，输出 GPS 信息。

7、回到步骤 4，继续循环。

软件设计流程图如图 6.9 所示。

## 6.4 系统安装

系统安装于猎豹越野车，安装方式：

1、GPS 天线安装于汽车顶部，连线通过窗户连接到车内系统。

2、载有 DR 传感器的 MSC1210EVM 安装于汽车后轮中央位置。考虑到采用的是—维加速度计，不能测量横向运动，必须要保证安装位置没有横向运动，或者横向运动最小，在整车中只有后轮位置满足此要求。在安装中要保证加速度测量方向严格平行于车辆正向，使陀螺仪测量平面平行于地面，以尽量减小误差。

3、广域差分接收机置于车顶，通过串口线将数据采集到车内的计算机，数据是和 GPS、DR 数据同时采集的，以保证数据的一致性。

试验采用的方式是：先启动系统开始采集导航信息，可以先不开动汽车，采集 DR 系统的静态信息，事后做校零处理，然后启动采样，开车围绕校园南院一周，采集大约 300 秒的数据。

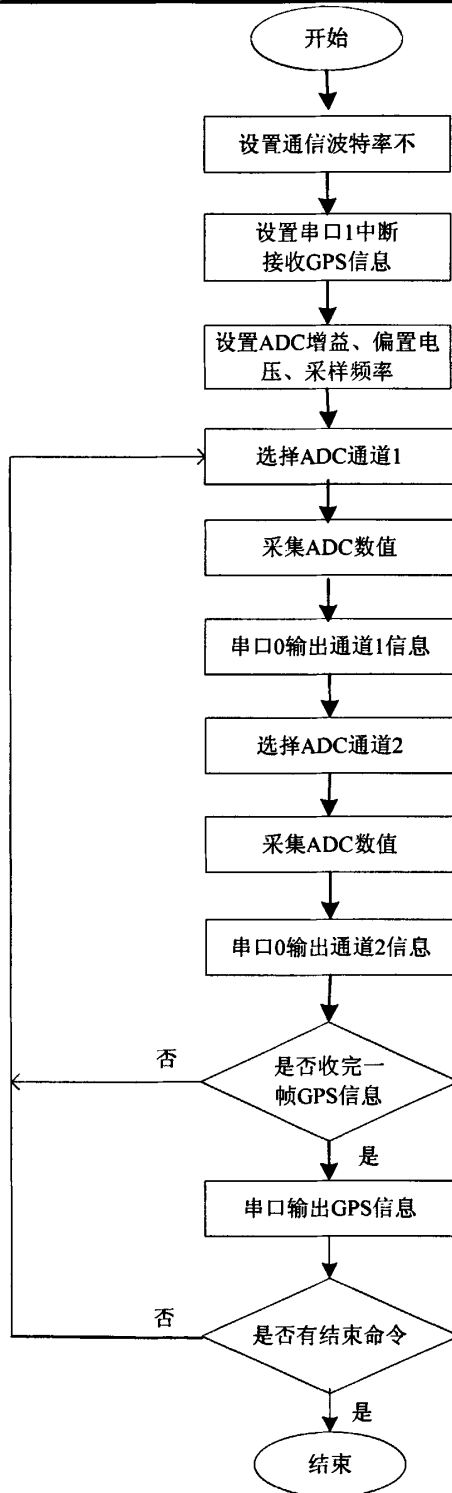


图 6.9 软件系统流程图

## 6.5 实验结果及分析

本节分别基于椭球模型和基于位置误差模型，将实验中采集的数据在计算机中作离线滤波，对前文提到的各种滤波算法作一比较分析。首先研究椭球模型下的各种滤波算法，其次研究基于位置误差模型的各种滤波算法。以下各图，虚线代表 GPS/DR 组合导航下各种滤波后的位置曲线，粗实线代表广域差分 GPS 的位置曲线。表 6.5 和表 6.6 表示的是各种滤波方式下的滤波曲线与广域差分 GPS 的位置曲线差值的标准差，包括经度、纬度方向以及合成的距离标准差，该统计量反映的是各种滤波方式下滤波结果对精度较高的差分定位曲线的逼近程度，也是衡量各种滤波方式精度的统计量。

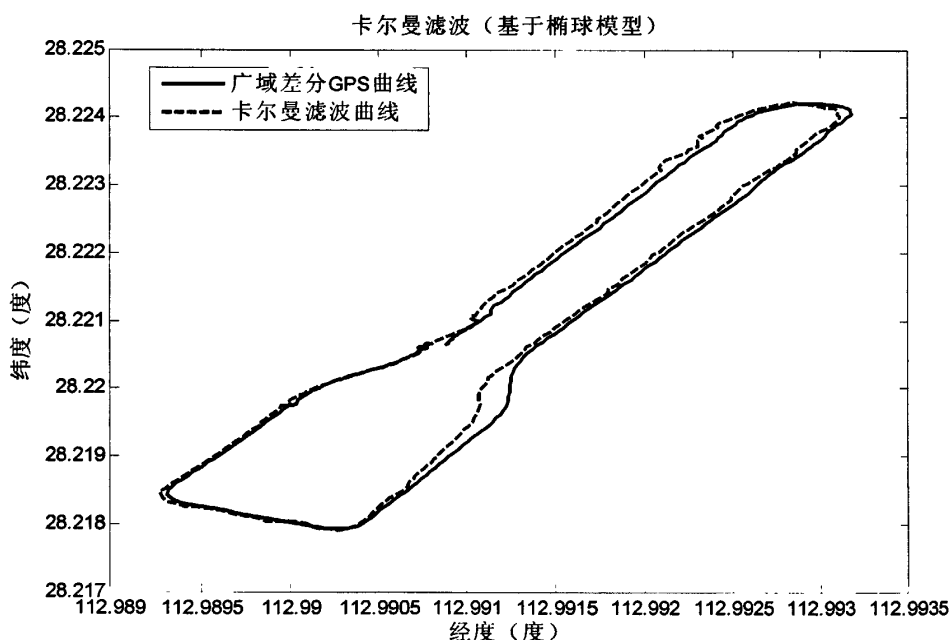


图 6.10 卡尔曼滤波实验结果

表 6.5 观测差值的标准差，单位：米（基于椭球模型）

滤波方式	东坐标标准差	西坐标标准差	距离标准差
卡尔曼滤波	8	13	16
$H_{\infty}$ 滤波	6	9	11
混合滤波	11	11	16
鲁棒卡尔曼滤波	9	12	16
鲁棒 $H_{\infty}$ 滤波	3	3	4



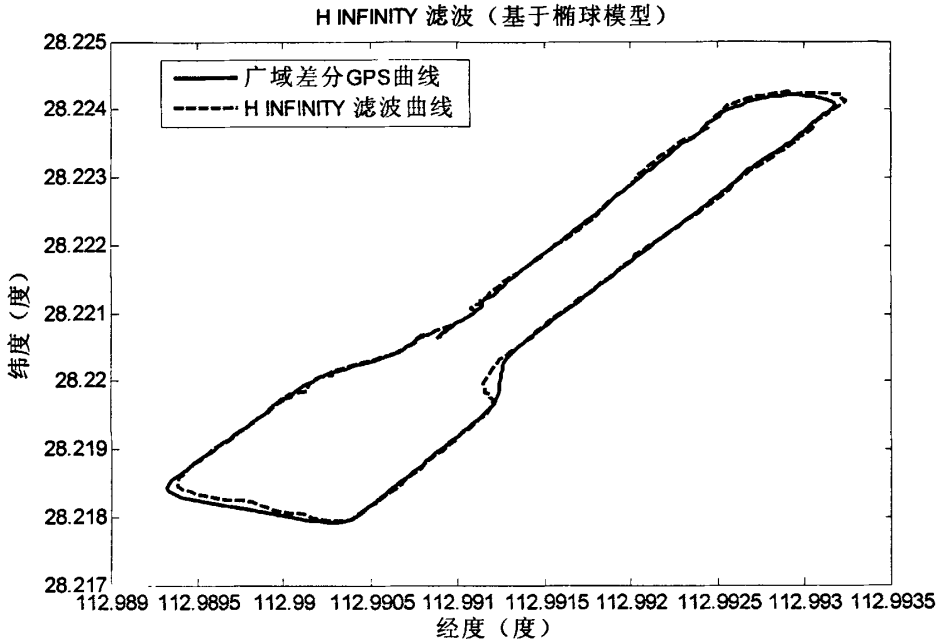


图 6.11  $H_{\infty}$  滤波实验结果

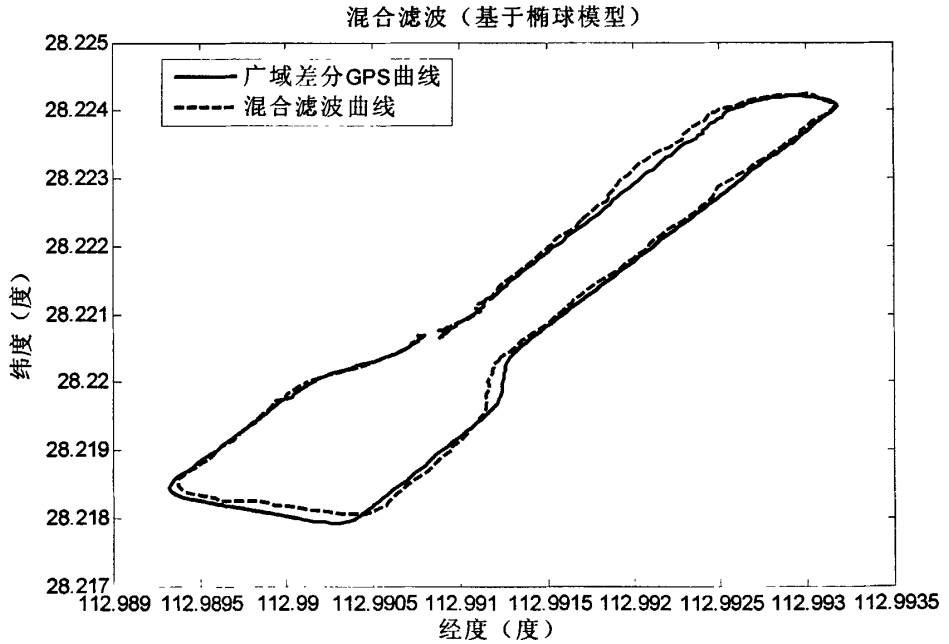


图 6.12 混合滤波实验结果

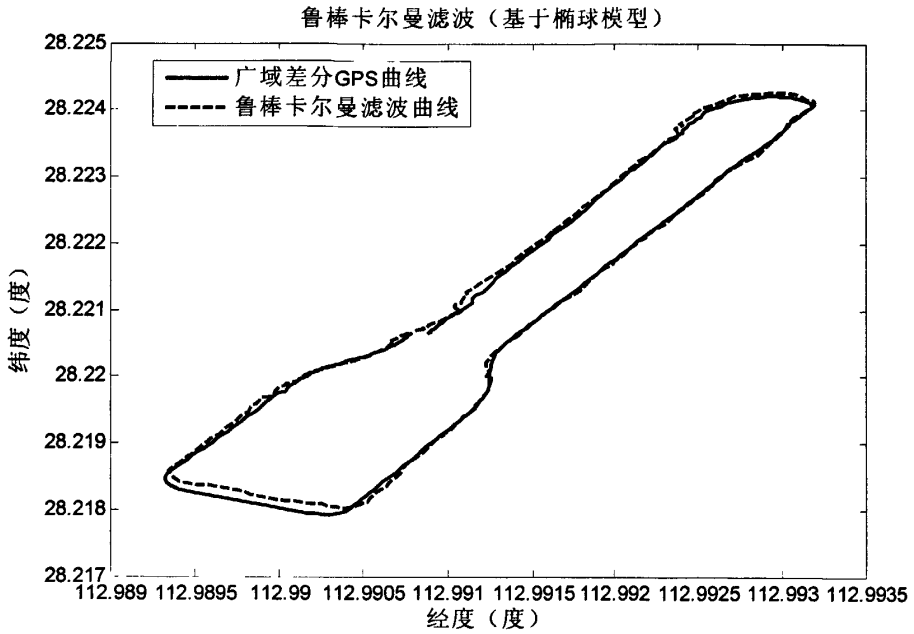
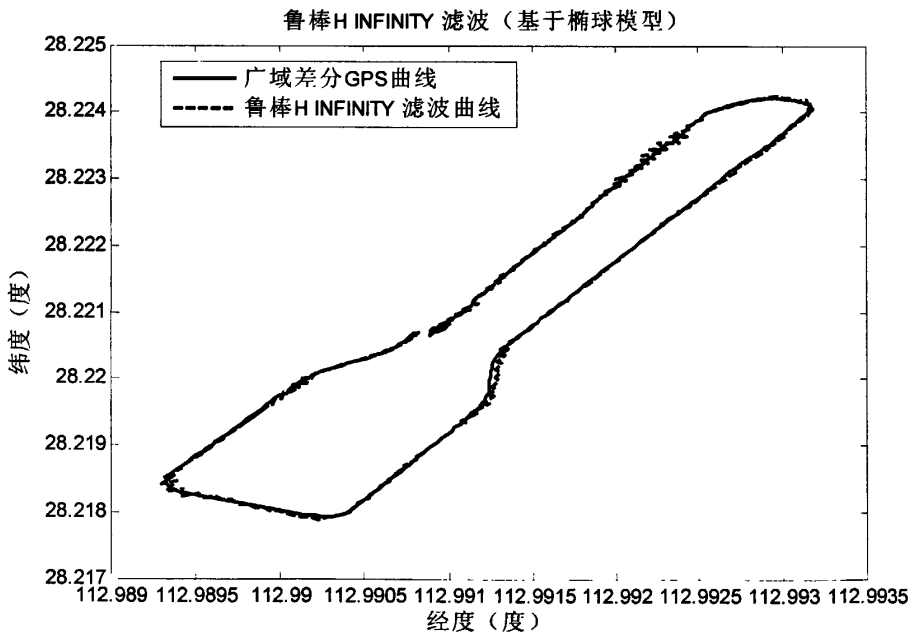
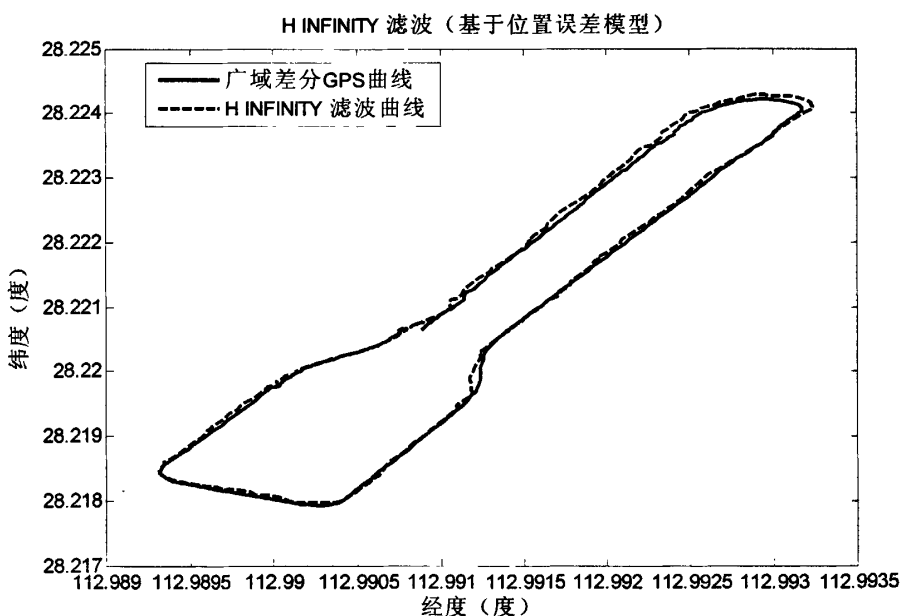
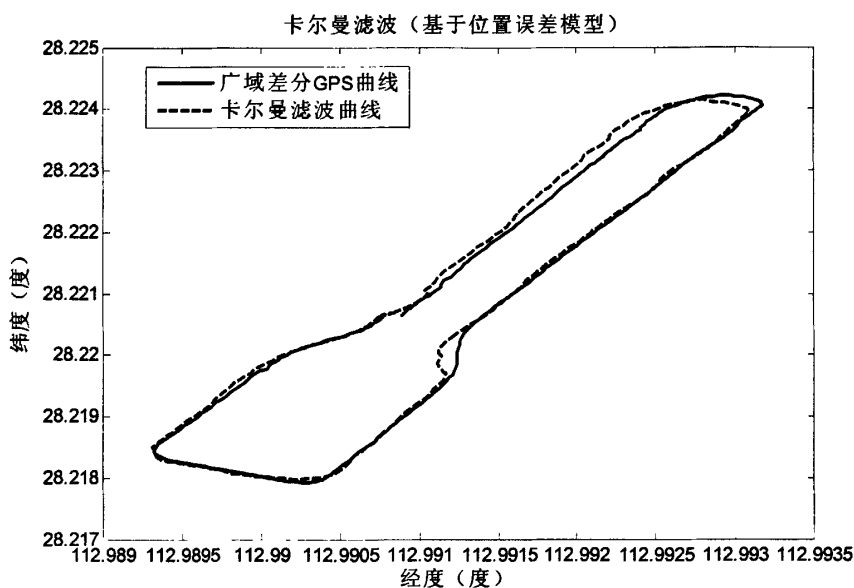


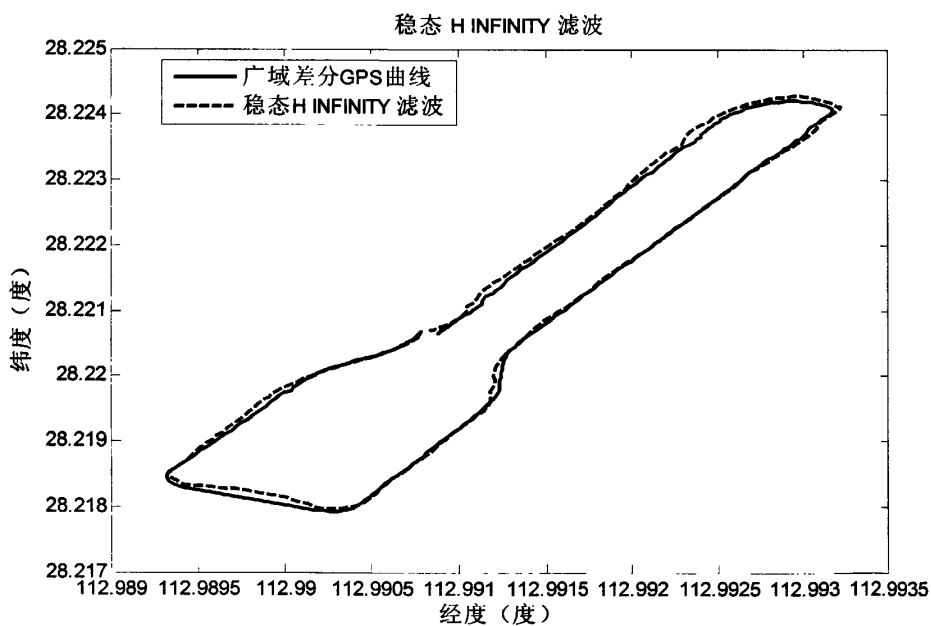
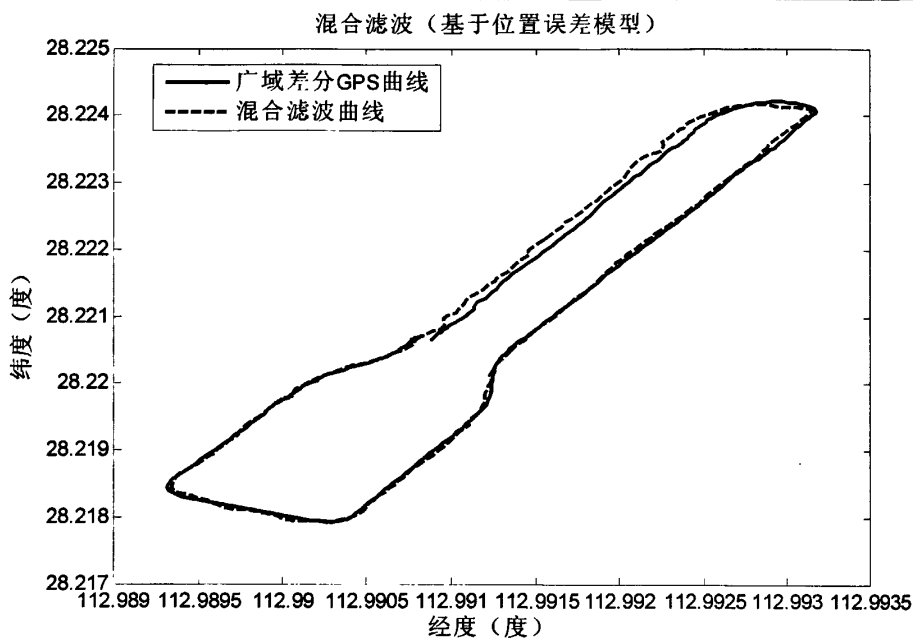
图 6.13 鲁棒卡尔曼滤波实验结果

图 6.14 鲁棒 $H_{\infty}$ 滤波实验结果

从图 6.10 到图 6.14 和表 6.5 来看，基于椭球模型下，鲁棒 $H_{\infty}$ 滤波效果最好，其次是 $H_{\infty}$ 滤波，混合滤波、鲁棒卡尔曼滤波、卡尔曼滤波的效果相当。出现这种

情况,可能是观测噪声中带有有色噪声,而卡尔曼滤波对噪声比较敏感,滤波效果不如其它滤波形式,混合滤波则根据方差最小的原则,对于 $H_2$ 和 $H_\infty$ 两个指标,谁的方差大,对增益的贡献就应该小,在本实验中,效果取决于 $H_\infty$ 指标,但同时受 $H_2$ 指标的影响,因此效果要比纯 $H_\infty$ 滤波差,与卡尔曼滤波相当。





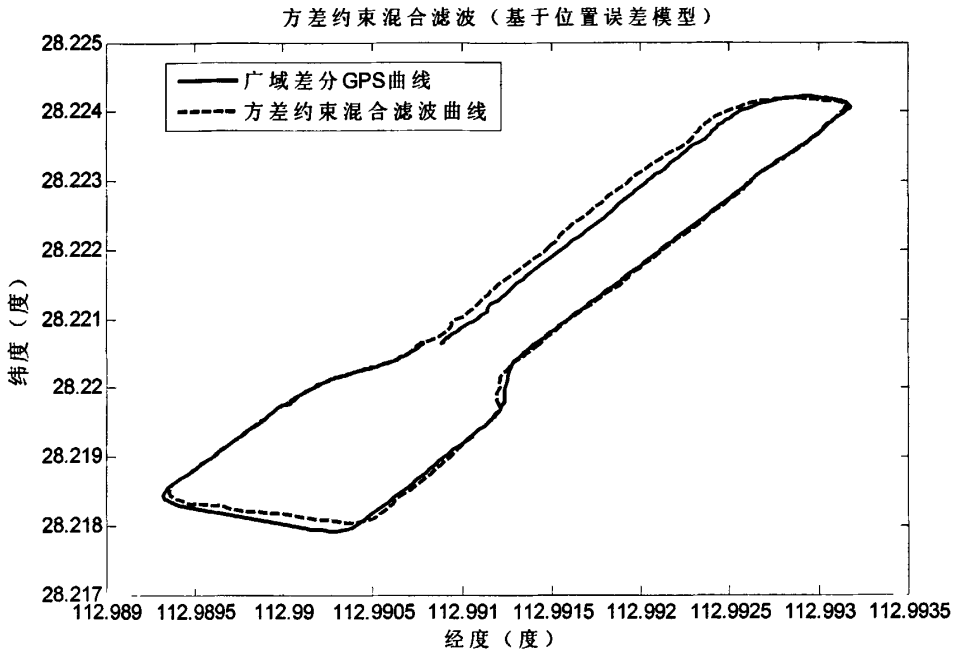


图 6.19 方差约束混合滤波实验结果

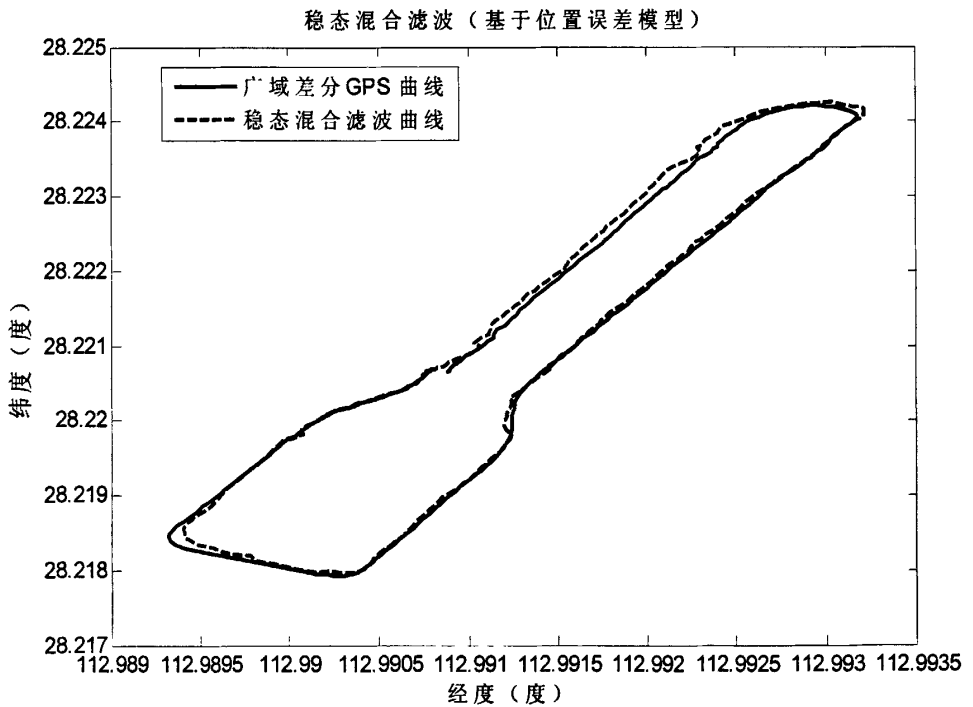


图 6.20 稳态混合滤波实验结果

表 6.6 观测差值的标准差, 单位: 米 (基于位置误差模型)

滤波方式	东坐标标准差	西坐标标准差	距离标准差
卡尔曼滤波	8	12	15
$H_{\infty}$ 滤波	7	11	13
混合滤波	8	10	13
稳态 $H_{\infty}$ 滤波	10	14	17
方差约束混合滤波	11	14	18
稳态混合滤波	8	11	14

从图 6.15 到图 6.20 和表 6.6 来看, 基于位置误差模型下, 混合滤波和  $H_{\infty}$  滤波的滤波结果比卡尔曼滤波效果要好,  $H_{\infty}$  滤波与混合滤波的效果相当, 在各种稳态滤波中, 稳态混合滤波效果最好, 稳态  $H_{\infty}$  滤波效果其次, 都比方差约束混合滤波要好, 稳态混合滤波的效果比卡尔曼滤波要好, 虽然稳态滤波方式普遍精度差点, 但差距并不很大, 而时间开销比迭代形式的滤波方式要好。

综合本实验, 从全局上看,  $H_{\infty}$  滤波, 鲁棒  $H_{\infty}$  滤波效果最好, 混合滤波和鲁棒卡尔曼滤波其次, 稳态形式的滤波效果与卡尔曼滤波效果相当或略优, 究其原因是在观测噪声中可能带有色噪声成分, 因此, 卡尔曼滤波就不是最优的, 此时, 带有  $H_{\infty}$  滤波形式的滤波方式就凸显其优势了。利用稳态滤波代替迭代形式的滤波以节约计算量, 在本实验中是证明也是可行的, 但是具体哪种稳态滤波形式在实践中更好, 还需不同环境下的各种应用实践来考证, 也许不同应用, 有不同的结论, 这需进一步研究。

## 6.6 本章小结

本章基于 GPS/DR 组合导航的一种框架, 利用距离、方向和 GPS 传感器搭建了组合导航的实验系统, 并进行了跑车实验, 实验结果表明本文论述的各种滤波算法在实践中的效果是不同的, 并验证了  $H_{\infty}$  滤波算法、鲁棒  $H_{\infty}$  滤波算法要优于卡尔曼滤波, 稳态形式的滤波效果与卡尔曼滤波相当或稍优于卡尔曼滤波, 但时间开销小于卡尔曼滤波。本实验的结论与本文前几章的理论分析是一致的。

## 第七章 总结与展望

### 7.1 总结

近些年,组合导航已推广至多传感器信息融合并取得了突飞猛进的发展,其中的信息融合手段主要采用卡尔曼滤波方法,但是,随着行业的发展,组合导航或多传感器信息融合对稳健性的要求越来越高,从鲁棒控制理论中发展起来的鲁棒滤波理论,尤其是 $H_{\infty}$ 滤波理论,对提高系统滤波稳健性提供了新的方向,本文重点研究了鲁棒滤波算法在组合导航中的应用,主要成果如下:

1、利用线性矩阵不等式的有关理论,推导了反映鲁棒程度的 $\gamma$ 参数的迭代算法,降低了滤波的保守性;推导了稳态 $H_{\infty}$ 滤波公式,推导了完全基于线性矩阵不等式的约束方差混合滤波算法,简化了滤波计算,提高了滤波运算效率。

2、提出了基于增益矩阵进行加权求和混合 $H_2/H_{\infty}$ 滤波算法,避免了传统的混合 $H_2/H_{\infty}$ 滤波方法鲁棒性指标 $\gamma$ 参数难于确定的难点,是混合 $H_2/H_{\infty}$ 滤波算法的一个重要补充。

3、建立了含不确定性参数系数矩阵的组合导航滤波模型,运用鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒 $H_{\infty}$ 滤波算法进行了滤波,使鲁棒卡尔曼滤波和鲁棒 $H_{\infty}$ 滤波理论朝实际应用更进了一步。

4、提出了与联邦卡尔曼滤波统一的联合 $H_{\infty}$ 滤波算法,为将鲁棒滤波理论纳入联合滤波框架下提供了必要的理论基础。

5、构建了GPS/DR组合导航实验平台,验证了所提出的鲁棒滤波算法,说明这些算法应用于实际是可行的。

### 7.2 展望

由于时间关系,组合导航中的鲁棒滤波还有以下问题有待进一步研究:

1、精度性能在数学上主要反映在方差和协方差上,方差越大,精度越差,但反映滤波鲁棒程度的 $\gamma$ 因子,与鲁棒性是线性关系还是其他函数关系需进一步研究,这也是第四章介绍的传统混合 $H_2/H_{\infty}$ 滤波不便于应用的原因。

2、模型参数的不确定性和噪声的不确定性同时存在的组合导航系统的混合 $H_2/H_{\infty}$ 滤波算法还需研究,该方面的理论已有不少研究成果,主要是基于线性矩阵不等式和凸优化的相关理论,但与实际应用还有相当距离。

3、本文仅研究了联合 $H_{\infty}$ 滤波算法,联邦混合 $H_2/H_{\infty}$ 滤波算法还需研究,因

为，在实际中各传感器的先验统计特性是不均等的，有些传感器可用卡尔曼滤波，有些则为  $H_\infty$  滤波，怎么在联合滤波框架下融合，进一步，状态方程系数有不确定性因素，又怎么在该框架下融合，等等。

4、在实验系统的基础上，创建各种环境，来考证各种滤波算法的优劣，特别是各种稳态滤波算法在不同场合下的最佳应用。



## 致 谢

在本论文完成之际，作者谨向在论文研究过程中给予过指导、关心和帮助的人们表示诚挚的谢意！

感谢导师匡纲要教授，在近五年的攻博期间，对我的科研工作和论文研究给予了有力的支持和指导。他在学术上的高深造诣，在学风上的严谨求实态度，在工作上的献身精神和忘我精神都是我一生学习的榜样。

感谢王浩副教授，为我的论文的研究创造了良好的条件，在论文研究过程中给予我的无私帮助和指导。

感谢贾坤教员、申若耀高工、邱磊硕士、王兰硕士、苑国强硕士、肖慧硕士、安静硕士生、吕洋硕士生、李鉴海硕士生等，大家在一起共同创造了良好的学习氛围。特别感谢邱磊硕士、王兰硕士、苑国强硕士，他们分担了我的一些工作，为我的论文完成创造了很多有利的条件。

特别要说明的是，亲人的关心、理解、支持和鼓励是我学习和工作的动力。感谢妻子廖慧、父母、奶奶、在外地工作的弟弟给予了我心理上的支撑，使我在困难的时候能够坚持下来，愿他们能够和我一起分享论文完成的喜悦。

## 参考文献

- [1] L.Xie and Y.C.Soh, Robust Kalman filtering for uncertain system, *Systems and Control Letters*, 22(2):123-130, 1994
- [2] C.E.de Souza and U.Shaked, Robust  $H_2$  filtering for uncertain systems with measurable inputs, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(8):2286-2292, 1999
- [3] M.Fu, C.E.de Souza and L.Xie,  $H_\infty$  estimation for uncertain systems, *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2(2):87-105, 1992
- [4] B.R.Barmish, Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system, *Journal of Optimization Theory and Application*, 46:399-408, 1985
- [5] K.Nishiyama, Robust estimation of a single complex sinusoid in white noise- $H$  infinity filtering approach, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(10):2853-2856, 1999
- [6] D.S.Berstein and W.M.Haddad, Steady-state Filtering with an  $H_\infty$  Error Bound, *System & Control Letters*, (12):9~16, 1989
- [7] 杨然, 周钢. 分布参数系统辨识的小波谱方法. *信号处理*, 2001, 17(4): 308~312
- [8] A.G. Parlos, S.K.Menon and A.F.Atiya. Adaptive state estimation using dynamic recurrent neural networks, *Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks*, P3361-3364, 1999
- [9] H.Carvalho, P.Moral, A.Monin and G.Salut, Optimal Nonlinear Filtering in GPS/INS Integration, *IEEE Trans.AES*, 33(3):835~850, 1997
- [10] Gondon N, Salmond D and Smith A F M, Novel Approach to Nonlinear/Non Gaussian Bayesian State Estimation, *IEE Proc.-F*, 140(2):107-113, 1993
- [11] H.Kwakernaak, A polynomial approach to minimax frequency domain optimization of multivariable feedback systems, *Int.J.Contr*, 44:117-156, 1986
- [12] J.C.Doyle, K.Glover, P.Khargonekar and B.francis, State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems, *IEEE Trans.Automat.Contr*, 34(8):831-847, Aug, 1989
- [13] D.H.Jacobson, Optimal stochastic linear systems with exponential performance criteria and their relation to deterministic games, *IEEE Trans.Automat.Contr*, AC18(2), Apr, 1973
- [14] J.Speyer, J.Deyst and D.H.Jacobson, Optimization of stochastic linear systems with additive measurement and process noise using exponential performance criteria, *IEEE Trans.Automat.Contr*, 19:358-366, Aug, 1974
- [15] Hassibi.B, Sayed.A.H and Kailath.T, *Linear Estimation in Krein Spaces-part*

- 
- 1:Theory, IEEE Transactions on Automatic Control, 41(1):18-33, 1996
- [16] Hassibi.B, Sayed.A.H and Kailath.T, Linear Estimation in Krein Spaces-part 2:Application, IEEE Transactions on Automatic Control, 41(1):34-49, 1996
- [17] L.Xie and Y.C.Soh, Robust Kalman filtering for uncertain system, System and Control Letters, 22(2):123-130, 1994
- [18] I.R.Petersen and D.C.McFarlane, Robust state estimation for uncertain system, Proceedings 30th Conference on Decision and Control, Brighton, England, 3(12):2630-2631, 1991
- [19] Uri.Shaked and Carlos.E.de Souza, Robust minimum variance filtering, IEEE Transaction on Signal Processing, 43(11):2474-2483, 1994
- [20] Hongsheng Xi, The guaranteed estimation performance filter for discrete-time descriptor systems with uncertain noise, International Journal of System Science, 28(1):113-121, 1997
- [21] C.E.de Souza and U.Shaked, Robust  $H_2$  filtering for uncertain system with measurable inputs, IEEE Transactions on Signal Processing, 47(8):2286-2292, 1999
- [22] I.Yaesh, U.Shaked, Design of linear tracking filters via robust  $H_2$  optimization, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 32(1):388-394, 1996
- [23] A.B.Trunov, M.M.Polycarpou, Robust nonlinear fault diagnosis:Application to robotic systems, IEEE Conference on Control Applications-Proceedings, 2:1424-1429, 1999
- [24] Zidong Wang, Jihong Zhu and H.Unbehauen, Robust filter design with time-varying parameter uncertainty and error variance constraints, International Journal of Control, 72(1):30-38, 1999
- [25] Ran Yang, Xiaoming Xu and Weidong Zhang, A new approach to robust filtering with specified error variance constraints, Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation, 3:2235-2239, 2000
- [26] I.Yaesh and U.Shaked, Design of linear tracking filters via robust  $H_2$  optimization, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 32(1):388-395, 1996
- [27] M.Fu, C.E.de Souza and L.xie,  $H_\infty$  estimation for uncertain systems, International Journal of Robust Nonlinear Control, 2(2):87-105, 1992
- [28] C.E.de Souza, U.Shaked and M.Fu, Robust  $H_\infty$  filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signal, IEEE Transactions on Signal Processing, 43(3):709-719, 1995
- [29] Huaizhang Li and Minyue Fu, A linear matrix inequality approach to robust  $H_\infty$  filtering, IEEE Transactions on Signal Processing, 45(9):2338-2350, 1997
-

- 
- [30] 王广雄, 李连锋. 鲁棒设计中 MATLAB 的应用. 电机与控制学报, 1999, 3(3): 138~142
- [31] 王广雄, 林俞根, 谢冰. 控制问题中的线性矩阵不等式及其求解. 电机与控制学报, 1998, 2(4): 191~193
- [32] Pramod P.Khargonekar and Mario A.Rotea, Mixed  $H_2/H_\infty$  Filtering, Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, 2:2299-2304, 1992
- [33] D.S.Berstein and W.M.Haddad, Steady-state Filtering with an  $H_\infty$  Error Bound, System & Control Letters, (12):9-16, 1989
- [34] W.M.Haddad, D.S.Berstein and D.Mustafa, Mixed-Norm  $H_2/H_\infty$  Regulation and Estimation:The Discrete-Time case, System & Control Letters, 16:235-247, 1991
- [35] Palhares R.M and Peres P.L.D, LMI Approach to the Mixed  $H_2/H_\infty$  Filtering Design for Discrete-Time Uncertain Systems, IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 37(1):292-296, 2001
- [36] 程煜明, 张炎华. 混合  $H_2/H_\infty$  滤波线性矩阵不等式方法. 上海交通大学学报, 1999, 33(4): 462~465
- [37] E.Yaz and R.E.Skelton, Continuous and Discrete State Estimation with Error Covariance Assignment, Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control, 3:3091-3092, 1991
- [38] Fuwen Yang and Y.S.Hung, Robust  $H_\infty$  Filtering with Error Variance Constraints for Uncertain Discrete-Time Systems, Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Application, ALASKA, P635-640, 2000
- [39] 朱纪洪, 郭治. 连续时变不确定系统约束方差鲁棒状态滤波. 控制理论与应用, 1997, 14(3): 389~392
- [40] Zidong Wang and Biao Huang, Robust  $H_2/H_\infty$  Filtering for Linear with Error Variance Constraints, IEEE Trans on Signal Processing, 48(8):2463-2467, 2000
- [41] B.M.Bell and F.W.Cathey, The iterated Kalman filter update as a Gauss-Newton method, IEEE Transactions on Automatic Control, 38(3):294-297, 1993
- [42] C.K.Chui, G.Chen and H.C.Cui, Modified extended Kalman filtering and real-time parallel algorithm for system parameter identification, IEEE Transactions on Automatic Control, 35:100-104, 1990
- [43] L.Glielmo, P.Mariro, R.Setola and F.Vasca, Reduced Kalman filtering for indirect adaptive control of induction motor, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 8(6):527-541, 1994
- [44] Jeff S.Shamma and Kuang-Yang Tu, Approximate set-valued observers for nonlinear systems, IEEE Transactions on Automatic Control, 42(5):648-658,
-

1997

- [45] U.SHAKED and N.Berman,  $H_{\infty}$  Nonlinear Filtering of Discrete-Time Processing, IEEE Trans.Signal Processing, 43(9):2205-2209, 1995
- [46] L.Xie, C.E.Souza, Y.Wang, Robust filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems:an H infinity approach, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 6(4):297-312, 1996
- [47] Luigi Glielmo, Roberto Setola and Francesco Vasca, An interlaced extended Kalman filter, IEEE Transactions on Automatic Control, 44(8):1546-1549, 1999
- [48] N.Berman and U.Shaked,  $H_{\infty}$  nonlinear filtering, Journal of Robust and Nonlinear Control, 6:281-296, 1996
- [49] B.R.Barmish, Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system, Journal of Optimization Theory and Application, 46:399-408, 1985
- [50] Ming Zhang, Hongwei Xie and Dinghan Shi, Robust  $H_{\infty}$  filtering for uncertain parameter system, IFAC, 14th Triennial World Congress, Beijing, China, P489-494, 1999
- [51] 赵伟, 袁信. 基于  $H_{\infty}$  滤波的 GPS/INS 全深组合导航系统研究. 中国空间科学技术, 2002(2): 9~14
- [52] 赵伟, 袁信, 林雪原. 采用  $H_{\infty}$  滤波器的 GPS/INS 全组合导航系统研究. 航空学报, 2002, 23(3): 265~267
- [53] 赵伟, 袁信, 林雪原. 基于  $H_{\infty}$  滤波技术的 GPS/INS 全组合导航系统研究. 宇航学报, 2002, 23(3): 39~43
- [54] 岳晓奎, 袁建平.  $H_{\infty}$  滤波算法及其在 GPS/SINS 组合导航系统中的应用. 航空学报, 2001, 22(4): 366~368
- [55] 赵龙, 陈哲.  $H_{\infty}$  自适应滤波的理论分析及其在导航系统中的应用研究. 系统仿真学报, 2004, 16(5): 1024~1026
- [56] U.S.DOT and ITS America, National Program Plan for Intelligent Transportation System, 1994
- [57] System Architecture Committee of ITS America, National ITS Architecture, January, 1997
- [58] Eric Abbot, David Powell, Land-Vehicle Navigation Using GPS, Proceedings of IEEE Position, Location and Navigation Symposium(PLANS'99), P145-162, Jan, 1999
- [59] 董绪荣, 张守信, 华仲春. GPS/INS 组合导航定位及应用. 长沙: 国防科技大学出版社, 1998.

- 
- [60] 申功勋, 孙建峰. 信息融合理论在惯性/天文/GPS 组合导航系统中的应用. 北京: 国防工业出版社, 1998.
- [61] W.W.Kao, Integration of GPS and Dead-Reckoning Navigation Systems, Proceedings of IEEE-IEE Vehicle Navigation and Information Systems Conference(VNIS'91), Society of Automotive Engineers, P635-643, Oct,1991
- [62] Willsky A S, Bello M G, Castanon D A, etal, Combining and updating of local estimates and regional maps along sets of one-dimensional tracks, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-279(4):799-813, 1982
- [63] Speyer J.L, Computation and transmission requirement for decentralized linear-quadratic-gaussian control, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-24(2):266-269, 1979
- [64] Kerr T H, Decentralized filtering and redundancy management for multisensor navigation, IEEE Trasaction on Aerospace and Electronic System, AES-23(1):83-119, 1987
- [65] Bierman G J, Belzer M, A Decentralized square root information filter/smoothing, Proceedings of 24th IEEE Conference on Decision and Control, P1902-1905, 1985
- [66] Carlson N A, Federated filter for fault-tolerant integrated navigation system, Proceeding of IEEE Positon Location and Navigation Symposium, P110-119, 1988
- [67] Carlson N A, Berarducci M P, Federated Kalman filter simulation results, Navigation, 41(3):297-321, 1994
- [68] Carlson N A, Federated square root filter for decentralized parallel processes, Proceedings of National Aerospace Electronics Conference, Dayton, OH, P1448-1456, 1987
- [69] 张其善, 吴今培, 杨东凯. 智能车辆定位导航系统及应用. 北京: 科学出版社, 2002.
- [70] 马昕, 于海田, 袁信. 组合导航系统中的联邦滤波算法研究. 东南大学学报, 1998, 28(5): 49~53
- [71] 刘广军, 吴晓平. 利用联邦滤波器设计 SINS/RDSS/GPS 组合导航系统. 武汉大学学报(信息科学版), 2001, 26(5): 441~445
- [72] 单茂华, 周百令, 黄丽斌. 联合  $H_{\infty}$  滤波算法及其在组合导航系统中的应用研究. 数据采集与处理, 2003, 18(4): 418~422
- [73] 黄显林, 卢鸿谦, 王宇飞. 组合导航非等间隔联合滤波. 中国惯性技术学报, 2002, 10(3): 1~7
- [74] Weng Z, Chen G, Shieh L, etal, Evolutionary programming Kalman filter, Information Sciences, 129(2):197-210, 2000
-

- 
- 
- [75] Guo S, Shieh L, Lin C, et al, Evolutionary-programming-based Kalman filter for discrete-time nonlinear uncertain systems, *Asian Journal of Control*, 3(4):310-333, 2001
- [76] Seuo S, Yukihiro K, Akihiko I, Static carrier phase differential positioning by applying the  $H_{\infty}$  filter, IONGPS-99[C].Nashville TN, P1241-1250, 1999
- [77] P.Bolzern and M.Maroni, New Conditions for the Convergence of  $H_{\infty}$  Filters and Predictors, *IEEE Trans.Automatic Control*, 44(8):1564-1568, 1999
- [78] 王松桂, 吴密霞, 贾忠贞. 矩阵不等式(第二版). 北京: 科学出版社, 2006.
- [79] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [80] Pascal Gahinet, Arkadi Nemirovski, Alan J.Laub, Mahmoud Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide*, Mathworks, 1995
- [81] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, Venkataramanan Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994
- [82] Rosen A, Mammao F J, Favout R, An Electronic Route Guidance System for Highway Vehicles, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 19(1):143-152, 1970
- [84] 邓自立. 卡尔曼滤波与维纳滤波——现代时间序列分析方法. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.
- [85] 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. 大地测量学基础. 武汉: 武汉大学出版社, 2001.
- [86] Xing Zhu, Yeng Chai Soh, Lihua Xie, Design and analysis of discrete-time robust kalman filters, *Automatica*, 38(6):1069-1077, 2002
- [87] 柏钢, 万德钧, 王庆, 吴秋平. 联合卡尔曼滤波在 GPS/DR 车辆导航系统中的应用. *东南大学学报*, 1999, 29(2): 23~27
- [88] 刘瑞华, 刘建业. 联邦滤波信息分配新方法. *中国惯性技术学报*, 2001, 9(2): 28~32
- [89] 顾启泰, 王颂. 联邦滤波器理论研究. *中国惯性技术学报*, 2002, 10(6): 34~40
- [90] 顾启泰, 王颂. 联邦滤波器的最优性. *清华大学学报(自然科学版)*, 2003, 43(1): 1460~1463
- [91] 顾启泰, 王颂. 联邦滤波器信息分配系数的优选算法. *中国惯性技术学报*, 2003, 11(6): 1~6.
- [92] 熊凯, 邱红专. 对“联邦滤波器理论研究”一文的商榷. *中国惯性技术学报*, 2003, 11(4): 1~6
- [93] 熊凯, 邱红专. 对“联邦滤波器信息分配系数的优选算法”一文的商榷. *中国惯性技术学报*, 2005, 13(2): 49~53
- [94] 柴霖. 联邦滤波器信息分配因子优选问题. *火力与指挥控制*, 2007, 32(8): 28~32
-

- 
- 
- [95] 张洪钺. 联邦滤波器的设计理论. 导航, 1998, 34(3): 61~80
- [96] 秦永元, 张洪钺, 汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
- [97] Jin S H.Park J B, Kim K K, et al, Krein space approach to decentralized  $H_{\infty}$  state estimation, IEE proceedings Control Theory and Application, 148(6):502-508, 2001
- [98] 荣军, 邱恺, 黄世超. 一种改进的联邦滤波算法及其应用研究. 传感技术学报, 2006, 19(2): 497~500
- [99] Zhou Hongren, Kurnar K S P, A current statistical model and adaptive algorithm for estimating targets, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, 7(5): 596-602, 1984
- [100] R F Poppen, D L Mathis, Integration of GPS with Dead-Reckoning and Map Matching for Vehicular Navigation, Proceedings of the 1993 ION national technical meeting, P21-24
- [101] M S K Sushko, Dead Reckoning Navigation (DRN) Assistance for GPS Based AVL Systems, Proceedings of the 1993 ION national technical meeting, P161-169
- [102] Lihua Xie, Carlos E. de Souza, Youyi Wang,  $H_{\infty}$  Filter Design for Discrete-Time Uncertain Nonlinear system, Proceedings of the 33rd conference on Decision and Control.Lake Buena Vista, P3937-3942, 1994
- [103] 吴钦, 郭治. 一种基于方差约束  $H_{\infty}$  鲁棒滤波新算法. 兵工学报, 2006, 27(2): 371~374
- [104] 杨万海. 多传感器数据融合及其应用. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2004.
- [105] 李朝肖. 单片机&外围数字 IC 技术手册. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2003.
- [106] 沙占友, 王彦朋, 孟志永. 单片机外围电路设计. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [107] 郭秀中. 惯导系统陀螺仪理论. 北京: 国防工业出版社, 1996.
- [108] 杨波. 信息融合推进导航应用. 中国计算机报, 2007.
- [109] 关桂霞, 邱德慧, 兰晓亭. GPS/DR 组合导航系统数据融合研究. 计算机应用与软件, 2006, 23(5): 54~55
- [110] 林雪原, 陈玉林. GPS/DR 组合系统的一种数据处理技术. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(6): 520~522
- [111] 张暄, 蒋浩宇, 范耀祖. 车载 GPS 与双 DR 组合定位系统的设计与实现. 计算机信息, 2006, 22(9-1): 252~254



- 
- 
- [112] 黄智, 钟志华. 改进联合滤波在 GPS/DR 组合定位中的应用. 汽车工程, 2006, 28(12): 1086~1089
- [113] 沈旸, 李树广. 基于 GPS/DR 的车载双星定位系统. 计算机工程, 2007, 33(9): 248~250
- [114] 沈雪松, 刘建业, 孙永荣, 陈武, 鹿鸣. 基于多传感器信息融合城市车辆导航定位. 传感器与微系统, 2006, 25(1): 85~88
- [115] 林雪原, 徐珂文, 金慧琴, 张锋. 基于量测预处理技术的 GPS/DR 组合算法研究. 海军航空工程学院学报, 2006, 21(4): 459~462
- [116] 孙希延, 纪元法, 施浒立. 卡尔曼滤波实现车载 GPS/DR 组合导航. 现代电子技术, 2006, 18(11): 149~152
- [117] 徐华中, 魏海, 石勇. 嵌入式 Linux 系统在车载导航中的应用. 武汉理工大学学报(信息与管理工程版), 2007, 29(2): 24~27
- [118] 马海波, 陈阳舟, 崔平远. 嵌入式车载导航系统信息平台的开发. 计算机测量与控制, 2007, 15(2): 188~190
- [119] 邱恺, 吴训忠, 张宗麟, 魏瑞轩. 全局最优联邦滤波器信息分配原则. 控制理论与应用, 2007, 24(1): 39~45
- [120] 张红梅, 刘胜, 张晓宇. 一种车载组合导航系统的联邦滤波新算法. 中国惯性技术学报, 2006, 14(6): 30~33
- [121] 刘钢, 余春暄. 一种新型的 GPS/DR 组合定位系统数据融合算法. 计算机仿真, 2006, 24(1): 107~110
- [122] 刘旭, 张其善, 杨东凯. 一种用于 GPS/DR 组合定位的非线性滤波算法. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(2): 184~187
- [123] 吴志高, 黄鸿志, 郑明波, 胡晓雷. 组合导航系统在智能交通系统中的应用. 福建电脑, 2007, 33(3): 98~99
- [124] 杨艳娟. 最优平滑算法在车辆 GPS/DR 组合导航系统中的应用. 弹箭与制导学报, 2006, 26(2): 7~9
- [125] Yin Zhu, Xiaoping Shi, Adaptive Robust Kalman Filtering via Krein Space Estimation, Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, P1818-1822, 2006
- [126] Harini Veeraraghavan, Nikolaos Papanikolopoulos, Paul Schrater, Deterministic Sampling-based Switching Kalman Filtering for Vehicle Tracking, Proceedings of the IEEE Intelligent Transportation Systems Conference, P1340-1345, 2006
- [127] Huijun Gao, Tongwen Chen,  $H_{\infty}$  Filtering for Uncertain Systems with Limited Communication Capacity, SICE-ICASE International Joint Conference, P1340-1345, 2006

- 
- 
- [128] Liang He, Aiguo Wu, Guangren Duan, Enhanced Mixed  $L_2-L_\infty/H_\infty$  Filtering for Continuous-time Uncertain Systems, system and control in Aerospace and Astronautics, P1444-1449, 2006
- [129] S.Cong, L.Hong, J.R.Layne, Iterative robust filtering for ground target tracking, Control Theory and Application, P372-380, 2007
- [130] Carlos E.de Souza, Alexandre Trofino and Karina A.Barbosa, Mode-Independent  $H_\infty$  Filters for Markovian Jump Linear Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, P1837-1841, 2006
- [131] Carlos E.de Souza, Karina A.Barbosa, Alexandre Trofino Neto, Robust  $H_\infty$  Filtering for Discrete-Time Linear Systems With Uncertain Time-Varying Parameters, IEEE Transactions on Signal Processing, P2110-2118, 2006
- [132] Liang He, Guang-Ren Duan, Ai-Guo Wu, Robust  $L_1$  Filtering with Pole Constraint in a Disk via Parameter-dependent Lyapunov Functions, SICE-ICASE International Joint Conference, P833-836, 2006
- [133] Salim Ibrir, Seffe Diop, Robust State Estimation of Linear Neutral-Type Delay Systems:A Convex Optimization Setting, Control and Automation, P2897-2909, 2006
- [134] Ping Sun, Ling Li, Yuanwei Jing, Ling Li, The Design of Robust  $H_\infty$  Filtering for Stochastic Uncertain Systems, Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, P2096-2100, 2006
- [135] 刘海颖, 王惠南. 基于广义卡尔曼滤波的伪距组合 GPS/INS 导航. 航天控制, 2004, 22(4): 52~56
- [136] 杨静, 张洪钺, 朱士青. 基于伪距、伪距率的 GPS/SINS 容错组合导航系统. 航天控制, 2003, 21(3): 17~25
- [137] 王朝光, 万彦辉. 基于伪距量测的 GPS/SINS 组合导航系统研究. 导航与控制, 2005, 4(2): 15~20
- [138] 肖乾. 伪距 GPS/INS 组合导航系统的多模型自适应卡尔曼滤波器设计. 船舶工程, 2005, 27(6): 59~62
- [139] 肖乾. 伪距 GPS/INS 组合导航系统的多模型自适应卡尔曼滤波器设计. 船舶工程, 2005, 27(6): 59~62
- [140] 邓勇. 嵌入式 GPS/INS 深组合导航系统的研究. 哈尔滨工业大学硕士论文, 2002
- [141] 谷智军. 星载卫星/惯性深层全组合导航技术研究. 国防科技大学硕士论文, 2004
- [142] 宋迎春, 陈正阳. GPS/INS 组合导航中的自适应滤波算法. 湘潭大学自然科学学报, 2006, 28(2): 95~98
-

- [143] 于德新, 杨兆升, 刘雪杰. 基于卡尔曼滤波的 GPS/DR 导航信息融合方法. 交通运输工程学报, 2006, 6(2): 65~69
- [144] 张涛, 徐晓苏. 基于模糊自适应的组合导航系统信息融合算法. 中国惯性技术学报, 2007, 15(2): 197~205
- [145] 杨易, 谷正气, 胡林. 基于遗传算法的模糊卡尔曼滤波在车辆导航中的运用. 中国机械工程, 2006, 17(8): 399~404
- [146] 马瑞平, 魏东, 张明廉. 一种改进的自适应卡尔曼滤波及在组合导航中的应用. 中国惯性技术学报, 2006, 14(6): 37~40
- [147] 卞鸿巍, 金志华, 王俊璞, 田蔚风. 组合导航系统新息自适应卡尔曼滤波算法. 上海交通大学学报, 2006, 40(6): 1000~1003
- [148] 缙娜, 王睿, 郭相科, 冯晓林. 组合导航系统中模糊自适应卡尔曼滤波器的设计. 空军工程大学学报(自然科学版), 2007, 8(2): 36~39

## 博士期间参与完成的科研课题

- 1、某军区联勤部的《星地一体后勤移动指挥系统》研制开发
- 2、某部《某部战略后勤应急支援保障系统》研制开发
- 3、某军区司令部的《某军区边防勤务动态监控系统》研制开发
- 4、某部、某军区《某部东南沿海后勤车辆监控系统》研制开发

以上项目在指挥控制、战场实时信息收集、动态物流管理、应急机动通信、打击效果评估、战场搜救、武器装备升级改造等方面发挥了重要作用，是部队基于北斗用户机进行信息化建设的重要内容。本文作者是主要研发人员，负责基于北斗用户机的车载导航系统研制开发。

5、《易燃易爆危险品运输智能调度监控系统论证报告》的撰写，该报告是北京中兴恒和能源科技有限公司基于北斗用户机危险品运输项目的预研论证报告，该报告在评审过程中得到了院士的高度评价，称之为北斗用户机在民用特殊行业应用提供了蓝本。本文作者是主要撰写人。

## 作者在学期间取得的学术成果

- [1] 第一作者. 基于线性矩阵不等式离散时间系统约束方差估计. 计算机应用研究 (已录用, 于 2008 年 12 月发表)
- [2] 第一作者.  $H_2/H_\infty$  混合滤波在 GPS/DR 组合导航中的应用研究 I. 信号处理 (已录用, 2009 年第 2 或 3 期发表)
- [3] 第一作者.  $H_2/H_\infty$  混合滤波在 GPS/DR 组合导航中的应用研究 II. 信号处理 (已录用, 2009 年第 2 或 3 期发表)
- [4] 第一作者. 基于球面模型 GPS/DR 组合导航系统研究. 计算机工程与科学 (已录用, 2008 年第 4 期发表)
- [5] 第一作者. 基于椭球 GPS DR 导航模型的鲁棒波研究. 测绘科学 (已录用, 2009 年第 1 期, 2009 年 1 月 20 日出版)
- [6] 第一作者. 联合  $H_\infty$  滤波研究. 数据采集与处理 (已录用)
- [7] 第一作者. GIS 导航信息处理中的若干关键问题. 微型机与应用. 2003, 22(7):54~55.
- [8] 第三作者. 联合卡尔曼滤波的改进方法及其在组合导航中的应用. 第二届全国水下导航应用技术研讨会论文集. 青岛, 2006.9
- [9] 第二作者. 超长 PN 码的延迟一等待直接捕获方法. 通信学报. 2006, 27(1):99~102.

由于保密原因, 在部队参与的科研项目不便于发表论文。