独创性（或创新性）声明

本人声明所呈交的论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得北京邮电大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

本人签名：刘晓蕾　　　　日期：2008年3月27日

关于论文使用授权的说明

学位论文作者完全了解北京邮电大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属北京邮电大学。学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存、汇编学位论文。（保密的学位论文在解密后遵守此规定）

保密论文注释：本学位论文属于保密在__年解密后适用本授权书。非保密论文注释：本学位论文不属于保密范围，适用本授权书。

本人签名：刘晓蕾　　　　日期：2008年3月27日

导师签名：[illegible]　　　　日期：2008年3月27日

非线性偏微分方程的Painlevé性质及其精确解的推导

摘　要

本硕士论文以偏微分方程理论为基础，借助于计算机符号计算系统Maple，研究了变系数KP方程的Painlevé检验和HBK系统的首次积分解法等问题，并取得了一些新颖而又有意义的成果。

随着科学技术的迅猛发展，非线性科学在自然科学的各个领域内得到了广泛的应用，取得了一系列可喜的成果。由于非线性问题常常用非线性偏微分方程来描述， 这使得非线性偏微分方程越来越与其它学科密切相连，因而非线性偏微分方程的求解和对其解的性质的研究成为了理论和实践中一个备受关注的研究课题。

求出非线性偏微分方程的精确解是讨论非线性偏微分方程问题的首要任务。但由于非线性偏微分方程本身的复杂性，至今仍没有求解这类方程的统一的有效解法。虽然已经求出很多非线性偏微分方程的精确解，但是求解方法也是各有技巧，有大量的偏微分方程无法求出精确解。因此为了给数值计算等方法提供理论依据，讨论非线性偏微分方程的解可能具有的性质，在不求解方程的情况下，直接研究偏微分方程解的特性也成为人们研究偏微分方程问题的一个有效途径。

一般来说，如果一个偏微分方程可以用反演散射法求解，则称它是完全可积的。完全可积的非线性偏微分方程往往具有 Painlevé 性质、Bäcklund 变换、Darboux 变换、Lax 对等一些非常好的特性。然而却没有一个系统的方法来确定一个微分方程是否可以用反演散射法求解。1983 年，Weiss、Tabor 和 Carnevale 提出的 WTC 算法给出了检验一个偏微分方程(组)是否完全可积的一个必要条件—检验一个方程（组）是否具有 Painlevé 性质。如果一个方程(组)通过 Painlevé 检验，具有 Painlevé 性质，则它满足完全可积的必要条件；如果这个方程或方程组不能通过 Painlevé 检验，不具有 Painlevé 性质，则可以断定这个方程(组)不是完全可积的。

已经发现并取得相当成果的求解偏微分方程精确解的方法有：齐次平衡法、Tanh 函数法、Bäcklund 变换法、反演散射方法、达布(Darboux)变换法、Hirota 双线性方法、相似约化法等。其中在 2002

年，由冯兆生在研究 Burgers-KdV 方程的精确解时提出的首次积分法，是基于除法定理和 Hilbert 零点定理的一种求方程精确解的有效方法。

基于上述理论和方法本文完成了以下三个方面的工作：一、应用 WTC 算法对变系数 KP 方程作了 Painlevé 分析，得到了变系数组合 KP 方程在满足一定约束条件的情况下具有 Painlevé 性质的结论，同时也得到了这个方程的自 Bäcklund 变换。二、应用首次积分法求解了 HBK 系统，得到了一些新的精确解。三、应用 tanh 法求解了 Ginzburg-Landau 方程和 Noyes—Field 方程组，得到了一些新的精确解。以上述第二部分内容为基础的学术论文《HBK 系统的精确解》已发表在《中国科学技术学报》2006 年第 5 期上。

关键词： Painlevé 性质　变系数 KP 方程　首次积分法　tanh 方法　孤立波解

THE STUDY ON THE PROPERTY AND EXACT SOLUTIONS FOR NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

In this dissertation, based on the theory of nonlinear partial differential equations and with the aid of computer symbolic computing system-- Maple, the Painlevé property for the variable coefficient KP equation have been studied, and the exact solutions for a kind of reaction diffusion equations are obtained by the first integral method, some results are new and significative.

Along with the rapid development of science and technology, the nonlinear science is widespread applied in various fields of natural sicnce, and a series of remarkable achievements is obtained in recent years. Because of the nonlinear problems are often described with nonlinear partial differential equations (PDEs), the nonlinear PDEs are more and more close to connected with other subjects, such as physics, chemistry, biology and engineering. Solving the nonlinear PDEs and researching the properties for their solutions becomes a very important research topic in theory and the practice.

For the complexity of nonlinear PDEs, there is no a general solving method for nonlinear PDEs. Although exact solutions for a lot of PDEs have been studied, the solving process has each skill respectively, thus there still have many PDEs whose exact solutions are unable to be obtained. For this reason, sometimes we don't solve the equations, but research about properties for their solutions accoding to equation itself directly.

Generally, a nonlinear PDEs is said to be completely integrable if it can be solved by the Inverse scattering transformation(IST) method. The completely integrable equations often have remarkable properties, such as the Painlevé property, Bäcklund transformation, Darboux transformations and a Lax pair and so on. But there is no systematic way to determine whether a PDE can be solved by the IST method. The WTC algorithm which was proposed by Weiss, Tabor and Carnevale in 1983, can examine a PDE (group) whether has Painlevé property. If a PDE (group) pass Painlevé test, it will satisfy the essential condition of completely integrable; otherwise, the PDE (group) is not completely integrable.

There are some methods for solving nonlinear PDES, shch as homegeneous balancing method、Tanh function method、Bäcklund transformation、Inverse scattering method、Darboux transformation、Hirota bilinear method、similarity reduction eta. Base on Division Theorem and Hilbert-Nullstellensatz Theorem, Z. S. Feng proposed a new approach for studing the compound Burgers-KdV equation in 2002, which is currently called the first integral method and becoming an effective method for solving some nonlinear PDES.

According to the above theory and methods, two aspects work are completed in this paper. Firstly, the Painlevé test is proposed for the variable coefficient combined KdV equation with forcedterm, and the conclusion that the variable coefficient combined KdV equation with forcedterm own Painlevé property when satisfy a certain constraint conditions is drawed, as well as auto-Bäcklund transformations for the variable coefficient combined KdV equation with forcedterm are obtained. Secondly, applying the first integral method, exact solutions for a kind of reaction diffusion equations are gained. The achievement about this paper includes: the paper “Exact solutions for the HBK system” which based on the second part is accepted by “Journal of science and technology”.

KEY WORDS: Painlevé property, the variable coefficient combined KP equation, first integral method, reaction diffusion equations, solitary wave solutions

第一章 绪论

1.1 非线性方程的发展概述

近几十年来，非线性科学得到了迅速的发展，现在人们已经普遍认识到非线性科学是处于自然科学前沿的学科，它作为一门研究非线性现象共性的交叉学科，被誉为20世纪继相对论、量子力学之后的又一次“科学革命”。非线性科学也是人类认识自然的一次飞跃，它正在改变着人们对传统学科的划分和科学研究的方法。其实非线性问题在数学、物理和力学中早已存在，但从前的人们只是对具体问题采取新颖的技巧或特殊的算法个别地解决，没有认识到它们之间的内在联系，不能用解析方法一般地处理。20世60年代以后，由于计算机的广泛应用和由此发展起来的“计算物理”和“实验数学”方法的利用，一方面，人们从研究可积系统无穷多自由度的非线性偏微分方程的过程中，在浅水波方程里发现了“孤立子”，并得出了一套求解一大类非线性偏微分方程的逆散射法；另一方面，从一些看起来不甚复杂的不可积系统的研究中，发现了确定性动力系统中存在着对初值极为敏感的混沌运动。在现实世界中，能解的、有序的线性系统才是少见的例外，非线性才是大自然的普遍特性。线性系统其实只是对少数简单非线性系统的一种理论近似，非线性才是世界的魂魄，而且正是非线性才构成了现实世界的无限多样性、曲折性、突变性和演化性。这样，就逐渐形成了贯穿物理学、力学、数学、天文学、生物学、生命科学、空间科学、气象科学和环境科学等广泛领域，揭示非线性系统的共性，探讨复杂性现象朴实方法的新的科学领域——“非线性科学”。随着人们认识的不断深入，非线性科学这门新兴学科所包含的内容也在不断地充实和变化着。

80年代初，美国著名的Los Alamos国家实验室(以造出第一颗原子弹著称于世)率先成立了非线性科学中心。它的负责人D.Campbell在80年代中期将非线性科学要研究的问题归结为：(1)孤立子和逆序结构；(2)混沌和分形；(3)斑图(pattern)的形成。

为研究上述各种非线性问题，人们往往借助于它们的数学模型——非线性方程来研究，由于非线性方程中一般含有时间项，于是将含时间项的非线性方程称

为非线性演化方程(nonlinear evolution equations)或非线性发展方程。

1.2 孤立子理论产生的历史背景及其发展状况

上世纪 60 年代中期以来，非线性科学的研究有了惊人的进展并且越来越引起人们的广泛重视。孤立子理论是非线性科学中的一个重要研究分支就是在那个时候发展起来的，孤立子理论得到迅速发展的原因是孤子现象无所不在。从天上涡旋星系的密度波、海上的冲击波、等离子体(plasma)、分子系统、生物系统、光纤中光的传播、激光传播、非线性传输线、超流氦-3、超导 Josephson 结、磁学、结构相变、液晶、流体力学以及基本粒子(elementary particle)等，都与孤立子有关。孤立子理论自 1965 年由 Zabusky 和 Kruskal 将他们发现的孤立波命名为孤立子(soliton，简称孤子)以后，得到了迅猛的发展。其发展大致分为三个阶段：

阶段一

这个阶段始于十九世纪三、四十年代。最早讨论孤立子问题的是英国科学家，造船工程师 J.S. Russell[1]，他于 1844 年 9 月在英国科学促进协会第 14 次会议上作了《论波动》的报告。报告中讲述了 1834 年 8 月，他在运河里发现了一个波形不变的单个凸起的水团，这个水团运动一二英里之后在河流拐弯处消失了。他以物理学家的敏锐注意到这个现象绝非一般水波，因为在一般情况下，人们所观察到的水波总是由一串具有周期特点的波列组成的，数学上可由一个波动方程描述，其解是周期性的波列。Russell 把这种始终保持在水面上，向前平移的孤立水峰叫做“孤立波”(solitary wave)。Russell 认识到孤立波是具关键性质的新现象，对当时的数学家未能从流体力学运动方程出发预言这种现象提出了意见，他请求当时的数学家至少在事后能给现象以理论证明。但遗憾的是，由于受当时科学水平的限制，在他有生之年(1882 年逝世)，还无法从理论上对 Russell 在 1834 年观察到的孤立波现象给以圆满的解释。

1895 年，即 Russell 发现孤立波现象的 60 年之后，在瑞典 Amsterdam 大学数学教授 Korteweg 指导下，他的学生 de. Vries[2]写了一篇博士论文，找到了一种流体中单向波传播的数学模型，即著名的 KdV 方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c(1+\frac{3}{2}\frac{u}{h})\frac{\partial u}{\partial z}+r\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}=0$$

并给出了一个类似于Russell孤立波的解析解，才在理论上求得了与Russell观察一致的形状不变的孤立波解。孤立波的存在才得到普遍承认。上述KdV方程中，u是深为h的水道中水波离水平面的高度；在波动很小而波长很长时，c是水波的速度（$\frac{u}{h}$和三阶微商项可忽略）。这个波速当然是与水深有关的波振幅的函数；最后一项是线性的，它描述波的色散，因为该项依赖于三阶微商而被称为三阶色散；这表明波速还与波长有关。注意到此方程仅出现对时间的一阶微商项，在方程中若只考虑波在单一方向上传播，则KdV方程可以简化。这种类型的波由于波速与振幅成正比，振幅较大的波比振幅较小的波速度快，因而振幅较大的波可以追上振幅较小的波，可能发生碰撞。然而这样的孤立波是否稳定，两个这样的孤立波相遇且发生“碰撞”后能否保持形状和速度不变等问题，一直是科学家们感兴趣而又无法证实的问题。孤立波在自然界中并不罕见。但上述现象的物理本质当时引起了广泛的争论，长期未能得到正确的理论解释。

阶段二：

大致可划在 1955-1975 年。1955 年，Fermi， Pasta， Ulam(FPU)用计算机进行了一维非线性晶格(lattice)在各个振动模之间的实验研究，发现在时间足够长以后，能量似乎又回到了开始的分布。这与经典的理论是背道而驰的，即：任何微弱的非线性作用，可导致系统由非平衡状态向平衡状态过渡。由于 FPU 问题是在频域内考察的，因此未能发现孤立波解。后来，Toda 研究了这种模式的非线性振动，得到了孤立波解，从而表明了在流体力学以外的物理领域也出现孤立波，同时也使 FPU 问题得到了正确的解答，从而激发起人们对孤立波的研究兴趣。1962 年，Perring 和 Skyrme 将 Sine-Gordan 方程用于基本粒子研究；1965 年，Zabusky 和 Kruskal 把 KdV 方程用于等离子体波的研究并用孤立子(Soliton)来表示孤立波的粒子行为；1967 年 Gardner，Greene，Kruskal 和 Miura[3] (GGKM)发明了求解 KdV 方程的逆散射方法，同年，McCall 和 Hah。作出了激光自感应透明的孤子实验；1973 年，Scott， Chu， McLaughlin 发表综述文章，在电子、光学界普及了孤子知识； 同年 Hasegawa 和 Tappert 预言光纤孤子的存在；1975 年，Krumhansl 和 Schieffer 开始研究孤波的统计力学。

阶段三

这个阶段大致从 1973 年开始，主要工作是把孤子概念及理论广泛应用于物理学、生物学、天文学等各个领域。1980 年非线性效应专刊 Physica D 问世，同时，开展了高维孤子、离散孤子和光纤中孤子的研究。

孤立子理论与数学的许多分支都有关系，经典分析和泛函分析，李群李代数，近代微分几何，拓扑学，动力系统以及计算数学都对孤立子的研究有重要作用。在数学领域内，孤立子理论提供了一个新的求解非线性偏微分方程的途径，发现有这么一类方程，它们的某一特解都具有孤立了的特性，我们称这类方程为孤子方程，它们的孤波解称为孤立子解。然而确切地说，虽然孤立子一词在广泛的范围内被引用，但还没有一个确切的定义，因为它还在发展中，给它下严格的定义比较困难，且为时过早。比较恰当的做法是把如下三点作为孤立子的工作定义，即：

(1)孤立子(孤波)是波动问题中的一种能量有限局域解；

(2)能在空间给定区域稳定存在；

(3)相互作用不改变各自的特性。

虽然孤立子最初是源于 KdV 方程的孤立波，随着研究的深入发展，人们很快发现，除 KdV 方程外，许多具有物理意义的重要的非线性演化方程都具有孤立子解。如 Sine-Gordon 方程 $u_{xt}=\sin u$ 有扭状孤立子解；非线性 Schrödinger 方程 $iu_t+u_{xx}+r|u|^2u=0$ 有包络孤立子解；其他如 Boussinesq 方程，Hirota 方程，都有形式不同的孤立子解。孤立子是各种各样的，除上面说过的脉冲状或钟状的孤立子，扭状孤立子，包络孤立子外，还有正孤立子，反孤立子，呼吸子，boomerons，tranppons 以及它们叠加形成的形形色色的孤立子。孤立子的重要表现在于粒子性质，而不在于其形状。

1.3 本文主要工作和结构安排

孤立子理论所涉及的内容已经成为当前国际国内科学工作者研究的热门问题，也是非线性科学研究的一大重点问题，孤子理论中非线性孤子方程的求解问题是这一领域中一个非常重要和非常有意义的问题。由于现在孤立子理论的研究正在向更加深入，更加本质的方向发展，从单个方程向非线性耦合方程组发展，

从常系数方程向变系数方程发展等，这样就使得孤子方程的求解问题变得更加困难，因此改进已有的求解方法和提出新的基于符号计算软件的机械化算法就显得尤为重要。

经过几十年的发展，出现了多种多样求非线性偏微分方程精确解尤其是孤子解的方法，比较常见的解法包括：齐次平衡法、Tanh 函数法、Bäcklund 变换法、反散射方法、Hirota 双线性算子方法、Jacobi 椭圆函数展开法、相似变换法、Painlevé 分析法[8, 14, 15, 26, 27]和首次积分法[28-30]等等。

本论文在已有理论和方法的基础上，借助于计算机符号计算系统Maple，完成了以下工作：一、应用WTC算法对变系数KP方程作了Painlevé分析，得到了变系数组合KP方程在满足一定约束条件的情况下具Painlevé性质的结论，同时也得到了这个方程的自Bäcklund变换。二、应用首次积分法求解了HBK系统，得到了一些新的精确解。三、应用tanh法求解了Ginzburg-Landau方程和Noyes—Field方程组，得到了一些新的精确解。

本文的主要成果有：以上述第二部分内容为基础的学术论文《HBK 系统的精确解》已发表在《中国科学技术学报》2006 年第 5 期上。

另外在实习期间根据实习期的经验总结还发表了《PKCS#11 中有关 Session 的研究与实现》发表期刊：《计算机安全》；《中间件的设备管理实现》接收期刊：《计算机与现代化》；《CSP 与 PKCS#11 对象的存储讨论》接收期刊：《计算机应用实践》。

本文的结构安排如下：第一章介绍了非线性科学的产生与发展以及孤立子理论和当前解非线性偏微分方程的若干方法。介绍了一些关于这些学科的国内外学者的研究成果；第二章介绍了求解非线性偏微分方程的主要和常用的方法；第三章介绍了奇点的分类和 Painlevé 性质以及 WTC 算法， 并用 WTC 算法对变系数组合 KP 方程作了 Painlevé 分析；第四章介绍了首次积分算法，并应用首次积分法求得了(2+1)维的 HBK 系统的精确解。第五章介绍了 tanh 算法，并应用 tanh 法求得了一类反应扩散方程的精确解，Noyes-Filed 方程组的形波解以及利用复 tanh 方法求解 Ginzburg-Landau 方程。

第二章 非线性偏微分方程的求解方法综述

2.1 引言

在孤立子理论中，已有一系列方法用来求孤立子方程的精确解，如反散射法(IST)[4-6]，Darboux 变换法[7]、Hirota 双线性法[8]，Painlevé 分析方法[9-11]、Lax 对非线性方法[12]、Lie 对称方法[13]以及齐次平衡法[14]等。这些方法的发现和应用，使得大量的非线性偏微分方程得以成功求解。对非线性科学的发展和应用具有重要意义。近年来，随着计算机的发展和符号运算系统如 Maple 和 Mathematics 的出现，使复杂冗长的代数运算可以在计算机上完成，为非线性偏微分方程的求解提供了新的方法和强有力的工具。而计算机绘图软件的应用，为研究孤立子方程解的性质提供了更为直观的手段。

许多物理上的重要的非线性系统具有孤立子解这种事实，必定反映出了相当普遍的非线性现象的一种特性。因此研究孤立子及其互相作用，不仅有助于弄清物质在非线性作用下的运动规律，还直接推动物理学相关分支的发展方程的求解方法与技巧的发展。如反散射方法的发现，就是由此推动而获得的突出成就之一。总之，孤立子的非凡性质及其与数学描述有关的丰富的结构，它的深刻的物理根源和正在开拓的广阔的应用领域，都向人们施展着愈来愈大的科学魅力。

孤立子理论是应用数学和数学物理的一个重要组成部分，研究内容和方法十分丰富。近年来，国内外学者们以不同的风格和角度推动着这一理论的向前发展。特别是近十几年来，随着数学物理及计算机科学的迅速发展，使得这个学科的发展更为迅速，成果更为瞩目，在此，我们从几个基本方面加以综述。求解非线性偏微分方程是古老而重要的问题，多年来，许多数学家和物理学家做了大量工作，但由于微分方程的复杂性，已有的大量的重要方程无法求出精确解，即使能够求得，也需要很多的技巧，尚无统一的方法。况且，具有物理意义的新解还有待于进一步的构造和发现。值得庆幸的是经过数学家和物理学家们的不断努力，发现了孤立子理论中蕴藏着一系列构造精确解的有效方法，如反散射方法，Darboux 变换，Bäcklund 变换，Hirota 双线性法，分离变量法，齐次平衡法，Lie 群方法，Tanh 方法，等等。随着各种求解方法的出现。不但过去难于求解的方程得到解

决，而且新的、具有重要物理意义的解不断被发现和应用，出现了一个层出不穷的势头。

2.2 反散射方法

自从 Gardner， Greene， Kruskal 和 Miura 简称 GGKM，发现可以用 Schrödinger 的反散射理论求解 KdV 方程的初值问题以来，这种求解非线性偏微分方程的方法发展很快，现在又成功地用于求解许多在应用中十分重要的的非线性偏微分方程，它无疑是数学物理的重大发现[15]。反散射方法，由于求解过程类似于 Fourier 变换及逆变换，故又称为非线性 Fourier 变换法。GGKM [16]利用量子力学中 Schrödinger 方程的特征值问题(正散射问题)及其反问题(反散射问题)的关系，导出了 KdV 方程的初值问题的解简化为三个求解线性方程的问题，结果得到了 N 孤子解。1968 年 Lax [12]将 GGKM 方法的上述思想加以扩充、提高，提出了用反散射方法求解其他孤子方程的更一般的框架，并且指出用反散射方法求解方程的前提是找到该方程的 Lax 表示(Lax 对)。 1972 年 Zakharov 和 Shabat [17]利用 Lax 思想，本质地推广了这一方法，求解了高阶 KdV 方程，立方 Schrödinger 方程等，从而第一次用实例证明了反散射方法的更一般性。同年 Kruskal 用它求解了 Sine-Gordon 方程、Wadati [18]引用类似的方法求解了 mKdV 方程。1973 年，Ablowitz,、Kaup、 Newwcll 和 Segure 编了一个软件包，通过反散射来求解大批方程的解。1975 年，Wahlpuis 和 Etiuibrook [19]提出了只有两个独立变量的非线性偏微分方程的延拓方法。该方程的一个重要应用是借助了 Lie 代数，可以得到方程的线性表示(Lax 表示)。这为用反散射求解方程提供了必要条件。另外指出该方法与其他方法的关系，但是，利用 W-E 方法求解复杂。利用陆启铿教授建立的非线性联络理论，郭汉英教授[20-23]简化了 W-E 方法，完整的建立了非线性方程延拓方法，更简单的获得了 Lax 对，代数结构和解的变换。这个方法的关键取决于三个方面：

(1)首先给定一个特征值问题

$$L\varphi = \lambda\varphi, \tag{2-1}$$

其自共轭线性微分算子 L 是与方程孤立子解 $u(x,t)$ 有关的线性算子，$\varphi = \varphi(x,t)$ 称为波函数。找到该特征值问题的正散射问题(如 L 是 Schrödinger 算子时，给定位势 $u(x,t)$，求 $\lambda_m = -k_m^2, C_m(k_m)$ 及波函数 φ)及反散射问题(如给定散射数据而求位

势 $u(x,t)$)。

(2)再找一个合适的线性算子 A，使得

$$\varphi_t = A\varphi. \tag{2-2}$$

当 $|x|\to\infty$ 时的渐近态，可确定散射数据随数据时间 t 的发展规律。

(3)设特征值 λ 与 t 无关，称为谱不变(isospectral)，即

$$\lambda_t = 0, \tag{2-3}$$

由此可推出

$$L_t\varphi + L\varphi_t = L_t\varphi + LA\varphi = \lambda_t\varphi + \lambda\varphi_t = \lambda A\varphi = AL\varphi \tag{2-4}$$

因此得到

$$L_t = AL - LA = [A,L]. \tag{2-5}$$

记号[A，L]=AL-LA 称为交换子。上述算子方程叫做 Lax 方程。算子 A，L 称为 Lax 对。正确选择 A，L，使 Lax 方程与非线性偏微分方程等价，则其非线性偏微分方程的初值问题可用 IST 方法求解。

解法的步骤如下：

第一步，对初值 u(x，0)的特征问题(2-1)进行处理，找到 t=0 时的散射数据；

第二步，利用(2-2)及 $|x|\to\infty$ 时的渐近态，可确定散射数据随时间 t 的发展规律。

第三步，利用 L 在时刻 t 的散射数据，决定 u(x，t)。

这种思想是很简练，但是 A，L 如何找，却很难。

2.3 Bäcklund 变换和 Darboux 变换

1886 年，瑞典几何学家 Bäcklund 在研究复常数曲面时，得到了 Sine-Gordon 方程的有趣的性质。

设 u 和 u' 是 Sine-Gordon 方程 $u_{\xi\eta} = \sin u$ 的两个解，它们之间有如下的关系：

$$u'_\xi = u_\xi - 2\beta\sin(\frac{u+u'}{2}).\ u'_\eta = -u_\eta + \frac{2}{\beta}\sin(\frac{u-u'}{2}). \tag{2-6}$$

这就是 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换。该变换给出了从 Sine-Cordon 方程的一个解得到另一个解的方法[24]，另外得到了一个非线性叠加公式：

$$u_{12} = 4\arctan(\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\tan(\frac{u_1-u_2}{4})) + u_0. \tag{2-7}$$

在今天看来，这个公式在非线性理论中具有重要作用，但在当时，由于没有

得到广泛的应用，而被冷落了近百年。直到20世纪60年代，由于非线性光学，晶体位错等许多领域的研究都与Sine-Gordon方程有关。这时Bäcklund变换重新引起了人们的注意，并成为找到多个孤子的重要手段，尤其令人瞩目的是，Bäcklund变换的存在,可交换性定理和非线性叠加公式等事项不是Sine-Gordon方程所专有的。1973年，Wahlquist和Estabrook发现KdV方程[25]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{2-8}$$

也具有Bäcklund变换，令 $w = \int_{-\infty}^{\infty} u dx$，它满足

$$w_t + 3w_x^{\ 2} + w_{xxx} = 0. \tag{2-9}$$

做方程组

$$\begin{aligned} w'_x &= \beta - w_x - 1/2(w - w')^2. \\ w'_t &= -w_t + (w - w')(w_{xx} - w'_{xx}) - 2(w_x^2 + w_x w'_x + w_x'^2). \end{aligned} \tag{2-10}$$

容易验证，当u满足KdV方程，方程(2-10)完全可积，其解 w' 的导数 $u' = w'_x$ 也是(2-8)的解。不仅如此，对KdV方程也有类似的可交换性定理，其非线性叠加公式为：

$$\bar{w}_{12} = w_0 + 2\frac{\beta_1 - \beta_2}{w_1 - w_2}. \tag{2-11}$$

1976年Wablquist和Estabook提出了非线性方程的Bäcklund变换的延拓性，把Bäcklund变换，守恒律，反散射变换统一在一个新概念中——拟位势中。1983年，Weiss，Taboi和Caruval[26]推广了常微分方程的Painlevé可积的判定方法。提出了偏微分方程的Painlevé可积的判定方法，并用其来获得可积方程的Bäcklund变换，以及Darboux变换。

在一百多年前达布(J.G .Darboux)就发现，薛定愕方程

$$\phi_{xx} + u\phi = \lambda\phi. \tag{2-12}$$

在达布变换

$$\bar{\phi} = \phi_x + \sigma\phi, \bar{u} = u - 2\sigma_x = u + 2(\ln f(x,\lambda_l))_{xx}, \tag{2-13}$$

$$\sigma = \frac{-f_x(x,\lambda_l)}{f(x,\lambda_l)}, f_{xx} + uf = \lambda_l f. \tag{2-14}$$

下是不变的。即$\bar{\phi}$满足与(2-12)形式相同的方程

$$\bar{\phi}_{xx}+(\bar{u})\bar{\phi}=\lambda(\bar{\phi}). \qquad (2\text{-}15)$$

可以通过微分运算来获得非线性方程的新解和 Lax 对相应的解，有时人们将 Darboux 变换也称为 Bäcklund 变换，或者称为求 Bäcklund 变换的 Darboux 方法。1975 年，Wadati 等人将 Darboux 变换推广到 mKdV 和 Sine-Gordon 方程[27]。1986 年，中科院院士谷超豪等人将 Darboux 变换推广到 KdV 族，ANKS 族及(1+2)维高维方程组，并且将 Darboux 变换应用到微分几何中的曲面论和调和映照中。叠加公式则给出了解之间的代数运算，可由已知解求得新解。

目前，Bäcklund 变换已成为研究非线性方程的有力工具。特别，关于有限维可积系统的 Bäcklund 变换又引起了人们的广泛重视。我国数学家曾云波教授作了许多的研究工作[28]，王明亮教授和李志斌教授提出了求 Bäcklund 变换的有效而简便的方法。范恩贵教授发展了这一工作，阎振亚博士等也作了许多工作。

2.4 基于符号计算的一种统一的代数方法

范恩贵教授发展了一种基于符号计算的统一的代数方法[29]，可用于构造各种行波解，包括孤子解、有理解、三角函数周期解、Weierstrass 和 Jacobi 椭圆函数双周期解。

对于给定的非线性偏微分方程

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt})=0, \qquad (2\text{-}16)$$

用下列一阶微分方程代替 Riccati 方程(2-8)

$$\varphi'=\varepsilon\sqrt{\sum_{j=0}^{r}c_j\varphi^j}, \qquad (2\text{-}17)$$

其中$\varepsilon=\pm1$，r 为一正整数，$c_0,c_1,\cdots,c_r$为待定常数。与 Tanh 方法或广义 Tanh 方法不同，这种方法涉及两个平衡数 n 和 r，在一般情况下，平衡最高阶导数项和非线性项将给出 n 和 r 之间的一种关系。例如，对 MKdV 方程

$$u_t+u^2u_x+u_{xxx}=0,$$

我们得到

$$r=2(n+1) \qquad (2\text{-}18)$$

显然，任给一个 n 我们可得到一个 r，从而导致一种假设。如在(2-18)式中取 $n=1$，

可得到$r=4$，因此我们可寻找 MKdV 方程如下形式的解

$$u=a_0+a_1\varphi,\quad \varphi'=\varepsilon\sqrt{c_0+c_1\varphi+c_2\varphi^2+c_3\varphi^3+c_4\varphi^4}$$

我们看到r随着n的增大而增大，方程(2-16)的行波解依赖于方程(2-17)的可解性，其系数满足关于d,a_i,c_j的某一代数方程组。n和r越大，所得到的解越一般，但随着n和r的增大，求解这种方程将变得越来越复杂。目前我们仅考虑一种有趣的情形$r=4$，即

$$\varphi'=\varepsilon\sqrt{c_0+c_1\varphi+c_2\varphi^2+c_3\varphi^3+c_4\varphi^4} \tag{2-19}$$

方程(2-19)在不同情况下，具有如下各类行波解：

(i) 当$c_3=c_0=c_1$时，方程(2-19)具有钟状孤子解、三角函数和有理函数解

$$\varphi=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\sec h\left(\sqrt{c_2}\xi\right),\quad c_2>0,c_4<0\text{，} \tag{2-20}$$

$$\varphi=\sqrt{-\frac{c_2}{c_4}}\sec\left(\sqrt{-c_2}\xi\right),\quad c_2<0,c_4>0\text{，} \tag{2-21}$$

$$\varphi=-\frac{1}{\sqrt{c_4}\xi},\quad c_2=0,c_4>0 \tag{2-22}$$

(ii) 当$c_3=c_1=0,c_0=\dfrac{c_2^2}{4c_4}$时，方程(2-19)具有扭状孤子解、三角函数和有理函数解

$$\varphi=\sqrt{-\frac{c_2}{2c_4}}\tanh\left(\sqrt{-\frac{c_2}{2}}\xi\right),\quad c_2<0,c_4>0\text{，} \tag{2-23}$$

$$\varphi=\sqrt{\frac{c_2}{2c_4}}\tan\left(\sqrt{\frac{c_2}{2}}\xi\right),\quad c_2>0,c_4>0\text{，} \tag{2-24}$$

$$\varphi=-\frac{1}{\sqrt{c_4}\xi},\quad c_2=0,c_4>0 \tag{2-25}$$

(iii) 当$c_3=c_1=0$时，方程(2-19)具有三种 Jacobi 椭圆函数解

$$\varphi=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4(2m^2-1)}}cn\left(\sqrt{\frac{c_2}{2m^2-1}}\xi\right),\quad c_0=\frac{c_2^2m^2(m^2-1)}{c_4(2m^2-1)^2},\quad c_2>0\text{，} \tag{2-26}$$

$$\varphi=\sqrt{-\frac{c_2m^2}{c_4(m^2+1)}}sn\left(\sqrt{-\frac{c_2}{m^2+1}}\xi\right),\quad c_0=\frac{c_2^2m^2}{c_4(m^2+1)^2},\quad c_2<0\text{，} \tag{2-27}$$

$$\varphi=\sqrt{\frac{-c_2}{c_4(2-m^2)}}dn\left(\sqrt{\frac{c_2}{2-m^2}}\xi\right),\quad c_0=\frac{c_2^2(1-m^2)}{c_4(2-m^2)^2},\quad c_2>0 \tag{2-28}$$

当$m\to1$时，周期解(2-26)退化为钟状孤子解(2-27)，周期解(2-27)退化为扭状孤子解(2-28)。

(iv) 当$c_4=c_0=c_1=0$时，方程(2-19)具有如下钟状孤子解、三角函数周期解和有理解

$$\varphi=-\frac{c_2}{c_3}\sec h^2\left(\frac{\sqrt{c_2}}{2}\xi\right),\quad c_2>0, \tag{2-29}$$

$$\varphi=-\frac{c_2}{c_3}\sec^2\left(\frac{\sqrt{-c_2}}{2}\xi\right),\quad c_2<0, \tag{2-30}$$

$$\varphi=\frac{1}{c_3\xi^2},\quad c_2=0 \tag{2-31}$$

(v) 当$c_4=0,c_3>0$时，方程(2-19)具有 Weierstrass 椭圆函数解

$$\varphi=\wp\left(\frac{\sqrt{c_3}}{2}\xi,g_2,g_3\right), \tag{2-32}$$

其中$g_2=-4c_1/c_3$，$g_3=-4c_0/c_3$。

与 Tanh 或推广的 Tanh 函数法相比，这里提出方法的关键是用方程(2-19)的解代替 Tanh 函数。当$c_1=c_3=0,c_0=1,c_2=-2,c_4=1$时，方程(2-19)具有解$\tanh\xi$，此时这种方法退化为 Tanh 函数法，即 Tanh 函数法仅为上述方法的一个特殊情况(2-28)。当$c_1=c_3=0,c_0=b^2,c_2=2b,c_4=1$时，方程(2-19)退化为 Riccati 方程，此时上述方法退化为广义 Tanh 函数法。

2.5 Painlevé 检验

给定一个孤子方程，是否可用反散射方法求解是孤子理论中的一个基本而尚未解决的问题。用反散射法求解方程的初值问题是寻找该方程的 Lax 对。但是拥有 Lax 对的方程不一定可用反散射方法来求解。1978 年，Ablowitz，Segar 和 Raman 发现对可以用反散射方法求解的孤子方程来说，其经过相似约化方法得到的所有常微分方程都具有 Painlevé 性质。因此他们给出一个猜想——Painlevé 猜想：一个完全可积的偏微分方程的每一个相似约化的常微分方程具有 Painlevé 性质。这个猜测提供了证明一个 PDE 是否完全可积的必要条件。1993 年，Weiss，Tabor

和 carnevale[26]引入了 PDE 的 Painlevé 性质（或称 Painlevé PDE 检验)的概念，并且提出一个与 Ablowitz [30]用于判定 ODE 的 Painlevé 性质类似的方法。利用 PDE 的 Painlevé 检验可导出 Lax 对和 Bäcklund 变换。1984 年，Weiss 又推广了 Painlevé PDE 检验的范围，引人了条件 Painlevé 性质的概念，1982 年，Kruskal 等人引入了奇异流形上的函数(不妨设为两个变量)，其中一个变量为线性关系，即 $(x,t)=x+\phi(t)$，这大大简化了计算的复杂性。

2.6 双线性方法、齐次平衡法

1971 年 Hirota[31]提出一种获得孤子解的简单而直接的方法，在这个方法中，Hirota 引入两个函数的双线性导数概念，通过位势u的变换，孤子方程就可以化为双线性导数方程，将扰动展开式代入到方程中，在一定条件下该展开式可以截断，并可得到线性指数函数形式的单孤子解，双孤子解和三孤子解等具体表达式，由此猜测出 N 孤子解的一般表达式。此表达式可利用数学归纳法验证其成立[32]，但过程比较复杂。Hirota 方法所引入的位势u的变换，往往以反散射变换的结果为基础或者以 Painlevé 截断展开得到的结果为基础，但两者相比而言，后者要比前者更为简单和直接。

由于 Hirota 双线性方法以双线性导数为工具，且仅与求解方程有关，而不依赖于方程的谱问题或 Lax 对，具有简洁、直观的鲜明特点，已从最初求解 KdV 方程、MKdV 方程、Sine-Gordon 方程等的多孤子解发展成为一种可以求解一大批非线性偏微分方程多孤子解的十分普遍的方法。其使用范围几乎涵盖了所有反散射变换的方程；Hirota 等考虑了带有损耗和非均匀项的 KdV 方程，得到其多孤子解；陈登远教授、张大军博士和邓淑芳博士考虑了具有自容源的发展方程；而且借助于 Maple 等工具软件，双线性方法还可推广到方程族情形和一系列较复杂的离散、半离散的链孤子系统。这一方法的不足之处在于只能求解单一的方程；而且其对 N-孤子解表达式的猜测难以给出令人满意的证明。

许多学者一直致力于双线性方法的各种推广应用，使其有了进一步的发展和拓宽。如 Oishi 推得了孤子与波纹的碰撞解；而 Nakamura 利用双线性 Bäcklund 变换导出了衰减模式解(ripplon)以及周期解；Hirota， Ito 求得了孤子的共振解[26]；Jaworski 和 Zagrodzinski 得到了弱代数局域化解(positon， negaton)，这种

解不同于传统的指数衰减形式且表现出奇异性的特征；陈登远教授、张大军博士、邓淑芳博士等又直接推广了双线性方法，构造出了许多孤子方程新的一类具奇性的精确解；张解放等对破碎孤子方程进行了讨论。通过对已知的双线性 Bäcklund 变换进行适当的修正，导出了一些孤子方程也具类似奇性的一类精确解。在 2+1 维可积模型的求解中，双线性方法除了可以构造类同于 1+1 维情形的线孤子外，还可构造出比 1+1 维方程更为丰富的精确解，Satsuma， Ablowitz 和胡星标，Matsuno 都以双线性方法为基础，分别用不同的手段求得 KP 方程的块解（lump），这种解在各个方向以代数方式衰减，而不是通常的指数方式衰减；Hietainta 和 Hirota 构造出 DS 方程的 dromion 解，即在所有方向都呈指数衰减的一类相干结构，变称为“ghost”孤子；Gilson 则得到 DS 方程仅在一个方向趋于非零值，而其它方向都呈指数方式衰减的介于线孤子和 dromion 孤子之间的中间态，solitoff 解；Chow 不仅在 DS 方程上得到，而且在其它的孤子方程中也得到这种形式和其它更为丰富的精确解。上述事实说明，通过双线性方法可求得孤子方程丰富的精确解类型并且适用于很广泛的范围。此外，利用规范不变性还可将双线性推广到三线性甚至多线性。

1995 年，王明亮教授等人提出了齐次平衡法，并用这个方法求解了很多非线性偏微分方程。1998 年范恩贵教授将这一方法给以充分的发展。

齐次平衡原则的基本思想和步骤：

给定一个非线性偏微分方程

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0, \tag{2-33}$$

这里 P 是其变元的多项式， 其中包含 $u(x,t)$ 的非线性项和它的各阶导数项。

函数 $\varphi=\varphi(x,t)$ 称为 (2-33) 的拟解， 当且仅当存在一个单变元函数 $f=f(\varphi)$， 使 $f(\varphi)$ 为关于 x,t 的一些偏导数的适当的线性组合，即

$$u(x,t)=\frac{\partial^{m+n}f(\varphi)}{\partial x^m\partial t^n}+f(\varphi)+\text{一些关于 } f(\varphi) \text{ 对 } x,t \text{ 的低于}$$

$$m+n\text{阶偏导数的适当的线性组合,} \tag{2-34}$$

或者将上式改写为

$$u(x,t)=f^{(m+n)}(\varphi)\varphi_x^m\varphi_t^n+\varphi(x,t)\text{的各阶导数的}$$

一个多项式(不管 $f(\varphi)$ 及其各阶导数)， (2-35)

实际上(2-34)和(2-35)都是方程(2-33) 的解。这里 $f=f(\varphi)$，$\varphi=\varphi(x,t)$ 和非负整数 m,n 为待定函数或常数。

用齐次平衡方法求解非线性偏微分方程主要包含四步：

第一步， 利用(2-34)，(2-35) 平衡(2-33)中的最高阶非线性项及最高阶导数项， 确定出平衡阶数 m,n；

第二步， 确定是否存在表达式(2-34)，(2-35) 中的单变元函数 $f=f(\varphi)$；

第三步， 确定是否存在拟解 $\varphi=\varphi(x,t)$ 和(2-34)中的线性组合系数； 这一步通常是选择适当的系数来使得(2-33) 的拟解存在；

第四步， 如果前三步的解答是肯定的， 那么将结果代入(2-34) 或(2-35) 经过一些计算， 就得到(2-33) 的精确解。

到目前为止， 齐次平衡方法主要的应用都还是限于平衡阶数 m,n 为非负整数的情形。然而实际上出现的方程也有平衡阶数为负数和分数的情形。

2.7 行波法

求行波解是一种求解非线性偏微分方程的重要途径。它首先作变量代换，将非线性偏微分方程转化为常微分方程，然后求解所得到的常微分方程，即可得行波解。这种解法简洁明快，而且得到的解析解，主要是孤立波解，体现了非线性波的重要性质。

对于给定的非线性方程

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt})=0, \tag{2-36}$$

求其行波解的步骤如下：

第一步，设 u=u(ξ) $\xi=x-ct$ (2-37)

第二步，将(2-37)代入(2-36)，将(2-36)化成以 u 为函数，ξ 为自变量的常微分方程。

第三步，解得到的常微分方程

第四步，再还原变量

在整个求解过程中，第三步是关键，也是难点。求出来的行波解的类型很多，

常见的有孤立波解，椭圆函数解，双曲函数解，呼吸子解，三角函数解，多项式解等。

2.8 相似约化法

虽然迄今为止已经出现多种求解非线性偏微分方程的方法，但是直接寻找偏微分方程的解依然是一件困难的事。由于常微分方程的求解相对简单，并且对常微分方程的研究相对深入一些，因此，如果能够将偏微分方程化为常微分方程，通过常微分方程的解来得到偏微分方程的解，也不失为一个好的途径。

对非线性偏微分方程进行相似约化是达到这一目的的重要手段之一。目前存在很多有效的约化偏微分方程的方法，其中最常用的三种方法为：1）Lie 的经典无穷小变换法；2）Bluman 和 Cole 的非经典无穷小变换法；3）Clarkson 和 Kruskal 的 CK 直接法。

十九世纪末，挪威数学家 Sophus Lie 开创了微分方程连续对称群理论的研究。现在，对称这一概念已经在数学和物理的研究与发展中起着关键的作用。Lie 群与 Lie 代数理论已经被应用到数学的许多领域，如微分几何、代数拓扑、分岔理论等。Lie 的思想对经典力学、量子力学和其他应用领域得到的微分方程的研究产生了重要的影响。

Lie 对称的思想和原理在数学物理的研究中扮演着一个非常重要的角色。在一定的变换作用下，可以使用微分方程的这些对称去构造或寻找微分方程的精确解。Lie 对称的分析方法提供了获得微分方程的精确解或相似解的一种系统和精确的途径。此外，通过 Lie 对称技巧获得的群不变解可以对物理模型本身进行解释，同时这些精确解也可用于检验数值计算结果的正确性和精确度。

2.8.1 经典无穷小变换法

对于非线性偏微分方程

$$H(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0\,, \tag{2-38}$$

作变换

$$u'=u'(x,t,u)\,,\ \ x'=x'(x,t,u)\,,\ \ t'=t'(x,t,u)\,, \tag{2-39}$$

如果 $u=u(x,t)$ 为非线性偏微分方程(2-38)的解，将变换(2-39)代入方程(2-38)，得到

$$H\left(x',t',u',u'_{x'},u'_{t'},u'_{x'x'},u'_{x't'},u'_{t't'},\cdots\right)=0\text{，}\tag{2-40}$$

即 $u'=u'(x',t')$ 也是方程(2-38)的解，则称非线性偏微分方程(2-38)在变换(2-39)下不变，把(2-39)称为(2-38)的不变变换。

对于经典无穷小变换，也称为单参数 ε 的李变换群[24]

$$\begin{cases}u'=u+\varepsilon\eta(x,t,u)+O(\varepsilon^2)\\x'=x+\varepsilon\xi(x,t,u)+O(\varepsilon^2)\\t'=t+\varepsilon\tau(x,t,u)+O(\varepsilon^2)\end{cases}\tag{2-41}$$

由于

$$\begin{aligned}u'&=u+u_x(x'-x)+u_t(t'-t)+\cdots\\&=u+u_x(\varepsilon\xi)+u_t(\varepsilon\tau)+O(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{2-42}$$

即

$$u'=u+\varepsilon(u_x\xi+u_t\tau)+O(\varepsilon^2)\text{，}\tag{2-43}$$

将(2-43)式与(2-41)的第一式相比较，可得

$$\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\tau\frac{\partial u}{\partial t}=\eta\text{，}\tag{2-44}$$

(2-44)式称为非线性偏微分方程(2-38)的不变曲面条件或不变变换条件。它是关于 u 的一阶拟线性偏微分方程，其特征方程为

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dt}{\tau}=\frac{du}{\eta}\tag{2-45}$$

如果我们已经求得 ξ,τ,η，由 $\dfrac{dx}{\xi}=\dfrac{dt}{\tau}$ 解得 $f(x,t)=C_1$，由 $\dfrac{dt}{\tau}=\dfrac{du}{\eta}$ 解得 $g(x,t,u)=C_2$，其中 C_1,C_2 为常数。令 $f(x,t)=z$，$g(x,t,u)=V(z)$，即有

$$V(z)=g(x,t,u)\text{，}z=f(x,t)\text{，}\tag{2-46}$$

其中 $z,V(z)$ 称为相似变量，(2-46)式称为相似变换。若已知 $V(z)$，则可以从 $g(x,t,u)=V(z)$ 中解出 $u(x,t)$，称 $u(x,t)$ 为相似解。求 $V(z)$ 的方法就是将(2-46)代入非线性偏微分方程(2-38)中，一般可得到一个关于 $V(z)$ 的常微分方程，解此常微分方程可求得 $V(z)$，进而可求得非线性偏微分方程(2-38)的相似解。所以，求非线性偏微分方程(2-38)的相似解的关键在于求 ξ,τ,η，下面介绍如何求 ξ,τ,η。

第一步：求 x,t 与 x',t' 之间的导数关系。由

$$\begin{cases} x' = x + \varepsilon\xi(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ t' = t + \varepsilon\tau(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{2-47}$$

等式两端分别对 x' 求导，得

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial x'} + \varepsilon\left(\xi_x \dfrac{\partial x}{\partial x'} + \xi_t \dfrac{\partial t}{\partial x'} + \xi_u u_x \dfrac{\partial x}{\partial x'} + \xi_u u_t \dfrac{\partial t}{\partial x'}\right) + O(\varepsilon^2) \\ 0 = \dfrac{\partial t}{\partial x'} + \varepsilon\left(\tau_x \dfrac{\partial x}{\partial x'} + \tau_t \dfrac{\partial t}{\partial x'} + \tau_u u_x \dfrac{\partial x}{\partial x'} + \tau_u u_t \dfrac{\partial t}{\partial x'}\right) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{2-48}$$

将(2-48)看成关于 $\dfrac{\partial x}{\partial x'}$ 和 $\dfrac{\partial t}{\partial x'}$ 的方程组，整理后由克莱姆法则解得

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1 + \varepsilon(\tau_t + \tau_u u_t) + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon(\xi_x + \xi_u u_x + \tau_t + \tau_u u_t) + O(\varepsilon^2)} \tag{2-49}$$

利用几何级数 $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots, |x| < 1$，将上式的分母展开，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x'} &= [1 + \varepsilon(\tau_t + \tau_u u_t)] \cdot [1 - \varepsilon(\xi_x + \xi_u u_x + \tau_t + \tau_u u_t)] + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 - \varepsilon(\xi_x + \xi_u u_x) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{2-50}$$

同理可得

$$\frac{\partial t}{\partial x'} = -\varepsilon(\tau_x + \tau_u u_x) + O(\varepsilon^2) \tag{2-51}$$

类似的，(2-47)的两端分别对 t' 求导，得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t'} = -\varepsilon(\xi_t + \xi_u u_t) + O(\varepsilon^2) \\ \dfrac{\partial t}{\partial t'} = 1 - \varepsilon(\tau_t + \tau_u u_t) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{2-52}$$

由于不变变换条件 $\xi \dfrac{\partial u}{\partial x} + \tau \dfrac{\partial u}{\partial t} = \eta$ 是关于 u 的一阶拟线性偏微分方程，故可令 $\xi_u = \tau_u = 0, \eta_{uu} = 0$，将其代入(2-50)~(2-52)，可得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial x'} = 1 - \varepsilon\xi_x + O(\varepsilon^2), \\ &\frac{\partial t}{\partial x'} = -\varepsilon\tau_x + O(\varepsilon^2), \\ &\frac{\partial x}{\partial t'} = -\varepsilon\xi_t + O(\varepsilon^2), \\ &\frac{\partial t}{\partial t'} = 1 - \varepsilon\tau_t + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{2-53}$$

第二步：求 $u'(x',t')$ 对 x',t' 的各阶导数。

先求一阶导数，由

$$u' = u + \varepsilon\eta + O(\varepsilon^2),$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} \\ &= (u+\varepsilon\eta)_x\frac{\partial x}{\partial x'} + (u+\varepsilon\eta)_t\frac{\partial t}{\partial x'} + O(\varepsilon^2) \\ &= (u_x + \varepsilon\eta_x + \varepsilon\eta_u u_x)(1-\varepsilon\xi_x) + (u_t + \varepsilon\eta_t + \varepsilon\eta_u u_t)(-\varepsilon\tau_x) + O(\varepsilon^2) \\ &= u_x + \varepsilon[\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t] + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{2-54}$$

记$\frac{\partial u'}{\partial x'} = u_x + \varepsilon\eta_x^{(1)} + O(\varepsilon^2)$，其中

$$\eta_x^{(1)} = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t \tag{2-55}$$

称为u_x的一阶无穷小。同理可得$\frac{\partial u'}{\partial t'} = u_t + \varepsilon\eta_t^{(1)} + O(\varepsilon^2)$，其中

$$\eta_t^{(1)} = \eta_t + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_t u_x \tag{2-56}$$

称为u_t的一阶无穷小。

再求二阶导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u'}{\partial (x')^2} &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right) = \frac{\partial}{\partial x'}\left(u_x + \varepsilon\eta_x^{(1)}\right) + O(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \varepsilon\eta_x^{(1)}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t}\left(u_x + \varepsilon\eta_x^{(1)}\right)\cdot\frac{\partial t}{\partial x'} + O(\varepsilon^2) \\ &= \left[u_{xx} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_x^{(1)}\right)\right]\times(1-\varepsilon\xi_x) + \left[u_{xt} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\eta_x^{(1)}\right)\right]\times(-\varepsilon\tau_x) + O(\varepsilon^2) \\ &= u_{xx} + \varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_x^{(1)}\right) - \xi_x u_{xx} - \tau_x u_{xt}\right] + O(\varepsilon^2) \\ &= u_{xx} + \varepsilon\eta_{xx}^{(2)} + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{2-57}$$

其中

$$\begin{aligned}\eta_{xx}^{(2)} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta_x^{(1)}\right) - \xi_x u_{xx} - \tau_x u_{xt} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}[\eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t] - \xi_x u_{xx} - \tau_x u_{xt} \\ &= \eta_{xx} + (2\eta_{ux} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + +(\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt}\end{aligned} \tag{2-58}$$

同理，可以求出$u'(x',t')$对t'的二阶导数，$\frac{\partial^2 u'}{\partial (t')^2} = u_{tt} + \varepsilon\eta_{tt}^{(2)} + O(\varepsilon^2)$，其中

$$\eta_{tt}^{(2)} = \eta_{tt} + (2\eta_{tu} - \tau_{tt})u_t - \xi_{tt}u_x + (\eta_u - 2\tau_t)u_{tt} - 2\xi_t u_{xt}, \tag{2-59}$$

以及$\dfrac{\partial^2 u'}{\partial x'\partial t'} = u_{xt} + \varepsilon\eta_{xt}^{(2)} + O(\varepsilon^2)$，其中

$$\eta_{xt}^{(2)} = \eta_{xt} + (\eta_{xu} - \tau_{xt})u_t + (\eta_{tu} - \xi_{xt})u_x - \tau_x u_{tt} + (\eta_u - \xi_x - \tau_t)u_{xt} - \xi_t u_{xx} \quad (2\text{-}60)$$

第三步：将上面求出的$u'(x',t')$对x',t'的各阶偏导数代入方程(2-40)，再利用方程(2-38)，可以得到一组关于ξ,τ,η的偏微分方程，从而求出ξ,τ,η。

从上面的过程可以看出一阶、二阶导数的无穷小推导的过程很复杂，一般情况下，我们可以根据非线性偏微分方程自身所含有的偏导数项来确定需要求的无穷小项。

2.8.2 非经典无穷小变换法

上一节我们讨论了非线性偏微分方程 $H(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0$ 的单参数ε的李变换群

$$\begin{cases} u' = u + \varepsilon\eta(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ x' = x + \varepsilon\xi(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ t' = t + \varepsilon\tau(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (2\text{-}61)$$

并得到了非线性偏微分方程的不变变换条件

$$\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \tau\frac{\partial u}{\partial t} = \eta, \quad (2\text{-}62)$$

这是关于$u(x,t)$的一阶拟线性偏微分方程，其特征方程为

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\eta} \quad (2\text{-}63)$$

由于上式中ξ,τ,η只有两个是独立的，可以令$\tau=1$，则得到非经典无穷小变换，此时新的不变变换条件和特征方程为

$$u_t = \eta - \xi u_x, \quad \frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{\eta} \quad (2\text{-}64)$$

非经典无穷小变换的关键也是求ξ,η，方法同经典无穷小变换类似，但是要注意用新的不变变换条件$u_t = \eta - \xi u_x$。

事实上，非经典无穷小变换方法同经典无穷小变换方法相比计算量更大、更复杂。因为经典无穷小变换方法中关于ξ,τ,η的超定方程是一个线性系统，而非经典无穷小变换方法中的超定方程是一个非线性系统，同时新的不变变换条件的代入使很多独立的项不再独立。但它有可能求出新的不同于经典无穷小变换方法的相似变换和相似解。

2.8.3 CK 直接法

经典无穷小变换方法和非经典无穷小变换方法都用到了 Lie 群的思想，并且只能得到非线性偏微分方程的部分相似约化，1989 年，Peter A.Clarkson 和 Martin D.Kruskal 首次提出了“CK 直接法”，并用于研究 Boussinesq 方程[34]和修正的 Boussinesq 方程[35]，得到了一些用经典无穷小和非经典无穷小约化方法得不到的新的相似解。CK 直接方法的主要特点是避免了复杂的群论分析，不涉及群论的思想，可推广应用到高维的情形，而且可能得到更多的相似约化。这种方法被广泛应用在各种非线性偏微分方程上[20]，如：Bq 方程、mBq 方程、SRLW 方程、MBBM 方程等。

下面我们来简单介绍一下 CK 直接方法。

在前面介绍经典无穷小约化时已经给出了相似变换的定义，设函数 $u(x,t)$ 是偏微分方程（PDE）$P(u)=0$ 的解，作变换

$$x \to x', t \to t', u \to u', \tag{2-65}$$

使 $u'(x',t')$ 也是 PDE $P(u)=0$ 的解，即

$$P(u'(x',t'))=0$$

当(2-65)为单参数 Lie 群变换时，可以得到从 x, t, $u(x,t)$ 到 x', t', $u'(x',t')$ 的不变变换条件

$$\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\tau\frac{\partial u}{\partial t}=\eta \tag{2-66}$$

将(2-65)代入到(2-66)可以确定 $\xi(x,t,u)$, $\tau(x,t,u)$, $\eta(x,t,u)$，从而由(2-66)的特征方程

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dt}{\tau}=\frac{du}{\eta}$$

确定出相似变量和相似变换。

由 $\frac{dx}{\xi}=\frac{dt}{\tau}$ 解得 $f(x,t)=C_1$，令 $f(x,t)=z$，从中反解出 $x=h(z,t)$，由

$$\frac{dt}{\tau(x,t)}=\frac{du}{\eta(h(z,t),t,u)}$$

解得 $U(x,t,h(z,t),u)=C_2$，这时相似解可以表示为

$$u(x,t)=U(x,t,w(z(x,t))) \tag{2-67}$$

基于这一点，我们可以直接寻求 PDE $P(u)=0$ 的形如(2-67)的解。将(2-67)代入

$P(u)=0$，可以得到 $w(z)$ 满足的一个常微分方程(ODE)，这是 PDE 的一个一般的相似约化。

CK 直接法的基本思路是寻找给定偏微分方程的最一般形式的相似约化

$$u(x,t)=U(x,t,w(z(x,t))) \tag{2-68}$$

将这个变换代入偏微分方程，要求结果是关于 $w(z)$ 的常微分方程，将限制条件附加到 U 及其导数上以便解出 U。事实上，容易证明，对于大多数偏微分方程，可以采用下面的特殊形式

$$u(x,t)=\alpha(x,t)+\beta(x,t)w(z(x,t)) \tag{2-69}$$

其中 $\alpha(x,t),\beta(x,t),z(x,t)$ 都是待定函数。

第三章 Painlevé 检测与 WTC 方法及其应用

3.1 引言

给定一个非线性偏微分方程，是否可用反散射方法求解是孤立子理论中的一个基本而尚未解决的问题。用反散射法求解方程的初值问题是寻找该方程的 Lax 对，但是拥有 Lax 对的方程不一定可用反散射方法来求解。1978 年，著名的孤立子问题专家 Ablowitz， Ramani 和 Segur[9]（简称 ARS）研究发现，对可以用反散射方法求解的非线性偏微分方程来说，其用精确约化方法得到所有常微分方程都具有 Painlevé 性质，因此他们给出一个猜想—Painlevé 猜想：一个完全可积的偏微分方程的每一个相似约化得到的常微分方程都具有 Painlevé 性质。这个猜想提供了一个证明 PDE 是否完全可积的必要条件。在 1983 年，Weiss，Tabor 和 Carnevale（简称 WTC）将常微分方程的 Painlevé 判定方法推广到偏微分方程的可积性问题，提出了 Painlevé PDE 实验，它可以直接应用于给定的偏微分方程而无需约化为常微分方程[10]。利用 PDE 的 Painlevé 检验可以导出 Lax 对和 Bäcklund 变换。1984 年，Weiss 又推广了 Painlevé PDE 检验的范围，引入了条件 Painlevé 性质的概念。1982 年，Kruskal 等人引入了奇异流形上的函数（不妨设为两个变量），其中一个变量为线性关系，即 $\phi(x,t)=x+\psi(t)$，这大大简化了计算的复杂性。一般来讲，Painlevé ODE（或 PDE）检验不研究负共轭点的性质。1991 年，Jimbo，Fordy 和 Pickering 研究了负共轭点的重要意义，并且指出 Chazy 方程具有负共轭点 $(-1,-2,-3)$。曾云波教授[33]改进了 Painlevé 截断展开，导出了 Tode 方程的 Bäcklund 变换，给出了从给定具有 Painlevé 性质的方程出发构造具有 Painlevé 性质的一族方程的一般方法。

3.2 Painlevé 奇性分析原理

对于 n 阶线性常微分方程：

$$\frac{d^n u}{dx^n}+P_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}+\cdots+P_1(z)\frac{du}{dz}+P_0(z)u=0 \quad . \tag{3-1}$$

设 $P_i(x)$ 是解析的，那么方程（3-1）的解具有一些基本性质，如它的解满足叠加原理，这个原理将齐次和非齐次方程的解联系起来。线性方程的解的奇点由

其系数完全决定，除此以外，在其它位置不具有奇性。对于给定的线性方程，由于这类奇点的位置与初值条件和边界条件无关，故将其称为“固定奇点”。但在非线性方程的研究中，以上线性方程的解的性质不再成立即解的叠加原理不再成立。由于非线性方程的解的奇点不仅与系数有关，而且与初值有关，所以，对于非线性方程可能具有“固定奇点”和“流动奇点”两种奇点。

定义 2.1：除极点以外的奇点称为临界点，它包括代数奇点、对数奇点及本性奇点。

19 世纪末，数学家按奇性类型不同，对常微分方程进行了分类，1884 年，Fuch 证明了，对于一阶方程 $\frac{dy}{dx}=F(x,y)$ (其中 F 为 u 的有理函数且对 x 局部解析)，没有流动临界点的最一般的情形是 Riccati 方程

$$\frac{du}{dz}=a_1(z)+a_2(z)u+a_3(z)u^2 . \tag{3-2}$$

随后，Painlevé 研究了如下的二阶常微分方程

$$u''=F(u',u,z), \tag{3-3}$$

其中 F 是 u' 和 u 的有理函数，且为 z 的局部解析函数，发现所有形如上述方程的常微分方程只有 50 个没有移动的临界点。

定义 2.2： 如果一个常微分方程的解没有可移动的临界点，则称它具有 Painlevé 性质，并称方程为 Painlevé 型的。

而上述的 50 个方程的解在奇点 $z=z_0$ 处的 Laurent 展开式中负幂次项为有限项，即

$$u(z)=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n . \tag{3-4}$$

人们发现，Painlevé 性质和孤立子理论中的完全可积的非线性偏微分方程有密切的联系，几乎所有可积的 PDE 经过约化后得到的 ODE 都是 Painlevé 型的。Painlevé 猜想（或 Painlevé ODE 猜想）断言：一个完全可积的 PDE 经过相似约化所得到的每一个 ODE 都是 Painlevé 类型的（可能要经过一个变量替换）。但是不能把常微分方程的 Painlevé 检验直接运用到 PDE，一个主要的障碍是：必须先把 PDE 约化为 ODE，然后判定 ODE 是否具有 Painlevé 性质（可以经过变量替换）。尽管存在系统的方法去寻找相似约化，但常微分方程的 Painlevé 检验对那些只有有限个对称的 PDE（如修正 Benjamin-Bona-Mahoney 方程）来说，作用是不大的。当一个 PDE 没有对称的时候，这个方法就无能为力了。1983 年，J.Weiss， M.Tabor 和 G.Carnevate[34]将常微分情形的 Painlevé 性质判别法推广到了 PDE（简称 WTC 法）。这种方法不对 PDE 进行相似约化，

而是对给定的 PDE 直接检验。并且若给定的 PDE 具有 Painlevé 性质的话，该方法还可以导出它的 Lax 对和 Bäcklund 变换。

定义 2.3： 如果偏微分方程的解 u 具有如下的 Laurent 展开

$$u=\phi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^j \tag{3-5}$$

且满足

i) α 是一个整数；

ii) ϕ, u_j 为流形（3-5）邻域内的解析函数；

iii) 系数 u_j 满足的方程有自相容的解；

则称偏微分方程具有 Painlevé 性质。

3.3 WTC 方法的过程

对于一个给定的非线性偏微分方程

$$N(u(z_1,z_2......z_n))=0. \tag{1}$$

WTC 方法设其解具有展开式形式：

$$u(z_1,z_2......z_n)=\phi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^j \tag{2}$$

其中 $\phi(z_1,z_2.....z_n)=0$ 是一个任意的奇异流形，α 是一负整数. u_j 可以通过把展开式代入原方程后取的不同幂次等于零定出来， 但在 j 取某些数值时，u_j 不能被确定而是可以任意取，这样的项被称为共鸣项。 WTC 方法的具体过程如下：

步骤 1：首项分析

如果方程(1)有形如(2)的解，将 $u=u_0\phi^{\alpha}$ 代入方程(1)，比较关于 ϕ 的最低幂次，可以定出首项阶数 α 和首项系数 u_0。若 α 不是负整数解，表明方程有代数分支，此时 WTC 算法中止。

步骤 2：确定截断 Painlevé 展开

将截断展开式

$$u=u_0\phi^{\alpha}+u_1\phi^{\alpha+1}+u_2\phi^{\alpha+2}+...+u_{-\alpha}\phi^0$$

代入方程(1)，比较关于ϕ的同次幂项并令为零，求得$u_i(i=0,1,2....-\alpha)$的值，若存在u_i无解，则级数(2)不能截断到常数项。

步骤 3：寻找共振点

在每一个共振点 j 处，级数(2)中的系数u_j可能为任意函数。为确定共振点的值，只需将级数(2)的简化式$u_j=u_0\phi^{\alpha}+u_j\phi^{\alpha+j}$代入方程(1)，提取关于$\phi$的最低次幂项，得

$$Q(j)\Box u_j=0 \tag{3}$$

$Q(j)=0$为 j 的代数方程，代数方程的根就是方程(1)的共振点的集合。若代数方程(3)有非整数根，即方程存在非整型共振点，表明为代数分支，由 Painlevé 性质的定义，方程(1)不能通过 Painlevé 检测，WTC 方法中止。对单个方程而言，如果代数方程(3)有重根，表明存在代数支点，故方程(1)不能通过 Painlevé 检测，WTC 算法中止。若方程(1)是耦合方程组，则允许存在相同的共振点。

奇异流形ϕ为任意函数，故-1 通常是方程(1)的一个共振点。此外，0 也可能是共振点，它对应于级数(2)中u_0为变量 x，t 的任意函数。

步骤 4：检验相容性条件

如果方程(1)有形如(2)的解，每一个共振点引入一个相容性条件。验证相容性条件，不必考虑级数(2)的完整形式，只需将其有限展开式(4)的同次幂代入方程(1)，其中其中r_m为为最大共振点。在非共振点 j 处，取ϕ的同次幂项，计算出u_j的值。在共振点 r 处，利用已经确定的$u_0,u_1 \dots u_{r-1}$的值验证相容性条件是否满足。

$$u=\sum_{j=0}^{r_m}u_j\phi^{j+\alpha} \tag{4}$$

3.3 Bäcklund 变换

考虑一个二阶非线性偏微分方程

$$u_t=P(u) \tag{3-6}$$

它有两个解 $u(x,t)$和 $v(x,t)$，它们之间有以下关系

$$\begin{cases} u_x=P(u,v,v_x,v_t,x,t) \\ u_t=Q(u,v,v_x,v_t,x,t) \end{cases} \tag{3-7}$$

若上两式满足可积条件 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial t}$，则(3-7)式称为方程(3-6)的 Bäcklund 变换。同一个方程两个解之间的 Bäcklund 变换，称为自 Bäcklund 变换，简称自 BT（auto-Bäcklund-Transformation）.

例 3.1 寻求 Liouville 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^u \tag{3-8}$$

与线性波方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0 \tag{3-9}$$

之间的 Bäcklund 变换。

解：按定义，设

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}+ce^{k(u+v)}, \tag{3-10}$$

其中 a，b，c，k 待定。

为了利用原方程，对(3-10)式关于 y 求导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=a\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+cke^{k(u+v)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{3-11}$$

由方程(3-8)和(3-9)，并取 $b=0$，上式化为

$$e^u=cke^{k(u+v)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{3-12}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{ck}e^{u-k(u+v)}, \tag{3-13}$$

上式两边对 x 求导，并利用方程(3-8)和(3-9)，经整理得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{k}{1-k}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{ck}{1-k}e^{k(u+v)} \tag{3-14}$$

由(3-13)式和(3-14)式满足协调条件

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{3-15}$$

可得 $k=\frac{1}{2}$。这样得出方程(3-8)到方程(3-9)的 Bäcklund 变换

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+ce^{\frac{1}{2}(u+v)}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{2}{c}e^{\frac{1}{2}(u-v)}\end{cases}\tag{3-16}$$

其中 c 为任意常数。

例 3.2 寻求 Sine-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u\tag{3-17}$$

的自 Bäcklund 变换。

解：设 $u(\xi,\eta)$ 和 $v(\xi,\eta)$ 都是 Sine-Gordon 方程(3-17)的解，即 u 和 v 分别满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\sin u,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}=\sin v\tag{3-18}$$

仿 Liouville 方程，设

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=a\frac{\partial v}{\partial\xi}+b\frac{\partial v}{\partial\eta}+c\sin[k(u+v)],\tag{3-19}$$

其中 a，b，c，k 待定。

上式两边对 η 求导，并利用原方程，得

$$\sin u=a\sin v+b\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}+ck\cos[k(u+v)]\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\right),\tag{3-20}$$

取 $a=1,b=0$，解得

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=-\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\sin u-\sin v}{ck\cos[k(u+v)]}=-\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}}{ck\cos[k(u+v)]},\tag{3-21}$$

为简化，取 $k=\dfrac{1}{2}$，得

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=-\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{4}{c}\sin\frac{u-v}{2}\tag{3-22}$$

将 $a=1,b=0,k=\dfrac{1}{2}$ 代入(3-19)式，得到

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{\partial v}{\partial\xi}+c\sin\frac{u+v}{2}\tag{3-23}$$

可以验证

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) \tag{3-24}$$

因此 Sine-Gordon 方程(3-17)的自 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=-\dfrac{\partial v}{\partial\eta}+\dfrac{4}{c}\sin\dfrac{u-v}{2}\\ \dfrac{\partial u}{\partial\xi}=\dfrac{\partial v}{\partial\xi}+c\sin\dfrac{u+v}{2}\end{cases} \tag{3-25}$$

其中 c 为任意常数。

3.4 几个非线性偏微分方程的Painlevé分析和Bäcklund 变换

3.4.1 KdV 方程

KdV 方程 $u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$ (3-26)

设其 Painlevé 展开式为: $u=\phi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}u_j\phi^j$

(1)首项分析: 将 $u=u_0\phi^{\alpha}$ 代入(3-23)中的主项 $6uu_x+u_{xxx}$ 经平衡得:

$\alpha=-2\quad u_0=-2\phi_x^2$

(2)共振项分析:

将 $u=u_0\phi^{-2}+u_j\phi^{-2+j}$ 代入(3-23)中得:

j=-1,4,6

其中 j=-1 对应 $\phi(x,t)$ 的任意性, 因此称其为 movable sigularity manifold。由 KdV 方程的例子的首项分析得到的结果有:

$$u=u_0\phi^{-2}+u_1\phi^{-1}+u_2+u_3\phi^1+u_4\phi^2+u_5\phi^3+u_6\phi^4 \tag{3-27}$$

将(3-27)代入 KdV 方程(3-26)

ϕ^{-5}系数: $-12u_0\phi_x(u_0+2\phi_x^2)=0\qquad u_0=-2\phi_x^2$ (3-28a)

ϕ^{-4}系数: $30\phi_x^3(u_1-2\phi_{xx})=0\qquad u_1=2\phi_{xx}$ (3-28b)

ϕ^{-3}系数: $4\phi_x(\phi_t\phi_x+6u_2\phi_x^2-3\phi_{xx}^2+4\phi_x\phi_{xxx})=0$ (3-28c)

ϕ^{-2}系数:

$$u_{0t}-u_1\phi_t-3u_{1x}\phi_{xx}-3u_{1xx}\phi_x-u_1\phi_{xxx}+6u_1u_{1x}-12u_3u_0\phi_x+6u_2u_{0x}-u_1\phi_x+6u_0u_{2x}+u_3\phi_x$$
$$+u_{0xxx}=0 \tag{3-28d}$$

ϕ^{-1}系数：

$$u_{1xxx}+u_{1t}+6u_2u_{1x}+12u_4u_0\phi_x+6u_0u_{3x}+2u_4\phi_x+6u_3u_{0x}-u_1\phi_x+6u_1u_{2x}+u_3\phi_x=0 \tag{3-28e}$$

ϕ^0系数：

$$\begin{aligned}&u_3\phi_t+u_{2t}+3u_{3xx}\phi_x+3u_{3x}\phi_{xx}+u_3\phi_{xxx}+6u_5\phi_x^{\ 3}+6u_{4x}\phi_x^{\ 2}+6u_4\phi_x\phi_{xx}+u_{2xxx}\\&-12u_5u_0\phi_x+6u_4u_{0x}-u_1\phi_x+6u_2u_{2x}+u_3\phi_x+6u_0u_{4x}+3u_5\phi_x+6u_1u_{3x}+2u_4\phi_x=0\end{aligned} \tag{3-28f}$$

ϕ^1系数:

$$\begin{aligned}&24u_6\phi_x^{\ 3}+u_{3xxx}+6u_{4x}\phi_{xx}+6u_5u_{0x}-u_1\phi_x-12u_6u_0\phi_x+6u_3u_{2x}+u_3\phi_x\\&6u_2u_{3x}+2u_4u_{3x}+2u_4\phi_x+6u_4u_{1x}+6u_1u_{4x}+3u_5\phi_x+6u_0u_{5x}+4u_6\phi_x+\\&18u_5\phi_x\phi_{xx}+6u_{4xx}\phi_x+u_{3t}+2u_4\phi_t+2u_4\phi_{xxx}=0\end{aligned} \tag{3-28g}$$

若要满足 Painlevé 性质，共振点处相容条件成立。
(3)兼容性分析：
将(3-31 a-d)中解出的u_0--u_3带入到(3-31e)中得到$0\square u_4=0$，将u_0--u_3,u_5带入到(3-31g)个得到$0\square u_6=0$，故 KdV 方程通过 Painlevé 检测。方程本身具有 Painlevé 性质。

下面取“共振项”函数

$$u_4=u_6=0, \tag{3-29}$$

并且要求

$$u_3=0 \tag{3-30}$$

如果

$$u_{2t}+6u_2u_{2x}+u_{2xxx}=0, \tag{3-31}$$

容易证明

$$u_j=0,\quad j\geq 3 \tag{3-32}$$

因此，得到 KdV 方程的 Bäcklund 变换

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi+u_2, \tag{3-33}$$

3.4.2 方程组的 Painlevé 分析(Classical Boussinesq 方程组)

在这一小节中我利用 Classical Boussinesq 方程组[56-58]来举例研究方程组的 Painlevé 分析。

Classical Boussinesq 方程组

$$u_t + w_x + uu_x = 0 \tag{3-34a}$$

$$w_t + u_{xxx} + (uw)_x = 0 \tag{3-34b}$$

设其 Painlevé 展开式为： $u = \phi^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} u_j\phi^j$ ， $\mathrm{w} = \phi^{\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{w}_j\phi^j$

首项分析：

将 $u = u_0\phi^{\alpha}$ ， $w = w_0\phi^{\beta}$ 代入(11)中的主项 uu_x, w_t 和 $u_{xxx}, (uw)_x$ 经平衡得两个分支

（i） $\alpha = -1$ $\beta = -2$ ， $u_0 = 2\phi(x, t), w_0 = -2\phi(x, t)$

（ii） $\alpha = -1$ $\beta = -2$ ， $u_0 = -2\phi(x, t), w_0 = -2\phi(x, t)$

共振项分析：

将 $u = u_0\phi^{-1} + u_j\phi^{-1+j}$ ， $\mathrm{w} = \mathrm{w}_0\phi^{-2} + \mathrm{w}_j\phi^{-2+j}$ 代入(11)中得：

在（i）的情况下共振项为 j=2，3

在（ii）的情况下共振项为 j=2，3

首项分析得到的结果有：

$$u = u_0\phi^{-1} + u_1 + u_2\phi^1. \tag{3-35a}$$

$$w = w_0\phi^{-2} + w_1\phi^{-1} + w_2\phi + w_3\phi^1 \tag{3-35b}$$

将(3-35)代入 **Classical Boussinesq** 方程组

两支得到的非共振点的系数均为：

$u_1 = \dfrac{-\phi_t + \phi_{xx}}{\phi_x}$;

$w_1 = 2\phi_{xx}$;

相容条件：

由（3-35a-b）有：

$0 \cdot u_2 = 0$ ， $\phi_x^{\,2} \cdot w_2 + F_2(u_2, u_1, w_1, w_0, \phi......) = 0$

(12b)有 $0 \cdot u_2 = 0$ ，（12a）有 $\phi_x \cdot w_3 + F_3(u_2, u_1, w_1, w_0, \phi......) = 0$

要满足 Painlevé 性质必须有 ϕ_x=0;

即 ϕ 是关于 t 的函数时 Classical Boussinesq 方程满足 Plainleve 性质。

3.5 变系数KP方程的Painlevé分析

(2+1)维变系数广义 Kaadomtsev-Petviashvili（VCGKP）方程[35]

$$u_{xt}+F(t)u_{xxxx}+F_1(t)u_{yy}+6F_2(t)u_x+6F_4(t)(u_x^{\,2}+uu_{xx})+F_3(t)=0. \tag{3-36a}$$

F,F_1,F_2,F_3,F_4式中为时间t的函数．它是许多方程的统一和推广，有着广泛的物理背景，在流体力学、等离子体物理、气体动力学等领域有重要的应用．如取式(3-36a)中的$F_3=0$，则(3-36a)式演化为：

$$u_{xt}+F(t)u_{xxxx}+F_1(t)u_{yy}+6F_2(t)u_x+6F_4(t)(u_x^{\,2}+uu_{xx})=0. \tag{3-36b}$$

它也是物理学家和数学家感兴趣和研究的一个方程．如文献[36]利用截断展开法，文献[37]利用Backlund变换研究了广义KP方程的类孤波解；文献[38]用反散射法研究了变系数存在外力项的Korteweg—de Vries(KdV)方程精确解；文献[39，40]，用双线性法讨论(3+1)维KdV方程的解；文献[41]用综合的扩展双曲正切函数法，构造非线性方程的解；文献[42]用新的综合的扩展方法，找到了变系数KdV方程的解。

下面我们可以用与本文相同的方法检验变系数 KP 方程是否具有 Painlevé 性质，并进一步得到变系数 KP 方程的 Bäcklund 变换。

(1) 主项平衡

取 $u(x,t)\sim u_0(x,t)\phi^{-p}$， 则

$$u_x(x,t)\sim -pu_0(x,t)\phi^{-p-1}\phi_x,\qquad u_{xx}(x,t)\sim -p(-p-1)u_0(x,t)\phi^{-p-2}\phi_x^{\,2},$$

$$u_{xxx}(x,t)\sim -p(-p-1)(-p-2)u_0(x,t)\phi^{-p-3}\phi_x^3$$

代入到(3-36)的主项(即方程的最高阶非线性项和最高阶导数项)， 可得

$$(-p)(-p-1)(-p-2)(-p-3)Fu_0\phi_x^{\,4}\phi^{-p-4}+10(-p)(-p-1)F_4u_0^{\,2}\phi_x^{\,2}\phi^{-2p-2}=0$$

由ϕ的指数和系数分别平衡可得

$$p=2,\ \ u_0=0\text{或}\ u_0=\frac{-2F\phi_x^{\,2}}{F_4}.$$

取非 Bäcklund 变换的平凡解$u_0=-2\phi_x^{\,2}$， 接着进行下一步。

(2) 确定共振项

这一步是依据取定的α和$u_0(x,t)$计算叫做共振项的非负整数指数j。令$u\propto u_0\phi^{-1}+u_j\phi^{-1+j}$， 并代入方程(3-36)， 只考虑主项$6F_1(t)uu_{xx}+F_2(t)u_{xxxx}$， 得到

$$(j+1)(j-4)(j-5)(j-6)u_j=F(u_{j-1},u_{j-2},\cdots,u_1,u_0,\phi_x,\cdots). \tag{3-37}$$

由(3-37)式可知， 当j=4，5，6 时， u_j项的系数为零， 若(3-37)式右端也为零，则u_j可以是任意函数。这里j=-1 对应于$\phi(x,t)$的任意性，这里j= 4，5，6 时u_j称为共振项。

(3) 确定任意函数并检查相容性

将截断罗朗级数

$$u=\sum_{j=0}^{j_{max}}u_j\phi^{j-2}\ ,\tag{3-38}$$

(其中 j_{max} 表示最大共振项，在该问题中 j_{max}=6 代入(3-36)式，对于非共振项的 j，u_j 应该可以确定；对于共振项，u_j 是任意的. 我们将得到非线性偏微分方程(3-44)具有 Painlevé 性质所要满足的相容条件。 将(3-38)代入(3-36)， 比较 ϕ 的各次幂的系数， 我们有

j=0 时， 令 ϕ^{-6} 的系数 $120Fu_0\phi_x^{\ 4}+60F_4u_0^{\ 2}\phi_x^{\ 2}=0$ 可得

$$.\ u_0=\frac{-2F\phi_x^{\ 2}}{F_4}\quad 或者\ u_0=0\tag{3-39}$$

j=1 时， 将(3-39)式代入 ϕ^{-5} 的系数，并令其为零可得

$$\begin{aligned}&6F_4(-4u_0\phi_x(u_{0x}-u_1\phi_x)+u_0(2u_1\phi_x^{\ 2}-4u_{0x}\phi_x-2u_0\phi_{xx})+6u_0u_1\phi_x^{\ 2})\\&+F(-96u_{0x}\phi_x^{\ 3}+24u_1\phi_x^{\ 4}-144u_0\phi_x^{\ 2}\phi_{xx})=0\end{aligned}.\tag{3-40}$$

将(3-39)式代入(3-40)，可解得

$$u_1=\frac{2F\phi_{xx}}{F_4}\tag{3-41}$$

j=2 时， 将(3-39)，(3-41)式代入 ϕ^{-4} 的系数， 并令其为零可得

$$-12F(t)\phi_x^{\ 2}(-3F\phi_{xx}^{\ 2}+4F\phi_x\phi_{xxx}+6u_2\phi_x^{\ 2}F_4+F_1\phi_y^{\ 2}+\phi_x\phi_t)=0\tag{3-42}$$

由(3-42)可得

$$u_2=-\frac{1}{6\phi_x^{\ 2}F_4}[4F\phi_x\phi_{xxx}-3F\phi_{xx}^{\ 2}+\phi_x\phi_t+F_1\phi_y^{\ 2}]\tag{3-43}$$

j=3 时， 将(3-39)，(3-41)，(3-43)式代入 ϕ^{-3} 的系数， 并令其为零可得

$$\begin{aligned}&-4(4F^2F_4\phi_x\phi_{xx}\phi_{xxx}-F^2F_4\phi_x^2\phi_{xxxx}+FF_4\phi_{xx}\phi_t\phi_x-6F_2(t)\phi_x^3-3F^2F_4\phi_{xx}^{\ 3}+6FF_4^2u_3\phi_x^4\\&+FF_1F_4\phi_{xx}\phi_y^{\ 2}-F\phi_x^2\phi_{xt}-F_1FF_4\phi_x^2\phi_{yy})=0\end{aligned}\tag{3-44}$$

由(3-44)可得

$$u_3=\frac{\begin{array}{l}-\frac{1}{6}(4F^2F_4\phi_x\phi_{xx}\phi_{xxx}-F^2F_4\phi_x^2\phi_{xxxx}+FF_4\phi_{xx}\phi_t\phi_x+FF_{4t}\phi_x^3-6FF_4F_2\phi_x^3\\-F_4F_t\phi_x^3-3F^2F_4\phi_{xx}^{\ 3}+F_1FF_4\phi_{xx}\phi_y^2-FF_4\phi_x^2\phi_{xt}-FF_1F_4\phi_x^2\phi_{yy})\end{array}}{FF_4^2\phi_x^4}$$

(3-45)

j=4 时， 将(3-39)，(3-41)，(3-43)， (3-45)式代入ϕ^{-2}的系数， 并令其为零可得

$$\begin{aligned}&2(2F_4FF_1\phi_y\phi_{xxy}+18F_2F\phi_xF_4\phi_{xx}-F_1FF_4\phi_{xx}\phi_{yy}+FF_4\phi_{xxx}\phi_t-10FF_4^{\ 2}\phi_{xxx}^{\ \ 2}+10F_2F_4\phi_{xxx}^{\ \ 2}\\&-3FF_{4t}\phi_x\phi_{xx})+3FF_4\phi_x\phi_{xxt}+6F^2F_4\phi_{xxxxx}\phi x+3\phi_xF_tF_4\phi_{xx}+3F\phi_{xt}F_4\phi_{xx}+15F_2F_4\phi_{xxxx}\phi_{xx}\\&-18F_2F\phi_x\phi_{xx}F_4^{\ 2}-2F_1FF_4^{\ 2}\phi_x\phi^{xy2}+2F_4FF_1\phi_{xy}-6F\phi_x\phi_{xxxx}F_4^{\ 2}-3F\phi_x\phi_{xxt}F_4^{\ 2}-3F_t\phi_x\phi_{xx}F_4^{\ 2}\\&-F\phi_{xxx}\phi_tF_4^{\ 2}-15F\phi_{xx}\phi_{xxxx}F_4^{\ 2}-3F\phi_{xx}\phi_{xt}F_4^{\ 2}-2F_1FF_4\phi_{xy}^{\ \ 2}+F_1FF_4\phi_{yy}\phi_{xx}+2F_1FF_4\phi_x\phi_{xyy}\\&+3F\phi_xF_{4t}\phi_{xx}F_4-2F_1FF_4^{\ 2}\phi_{xxy}\phi_y+0\square u_4=0.\end{aligned}$$

(3-46)

j=5 时， 将(3-39)，(3-41)，(3-43)， (3-45)式代入ϕ^{-1}的系数， 并令其为零可得

$$0\square u_5=0. \tag{3-47}$$

j=6 时， 将(3-39)，(3-41)，(3-43)， (3-45)式代入ϕ^0的系数， 并令其为零可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}(6F_3F_4^{\ 3}\phi_x^{\ 3}F+F_4^{\ 2}F_{tt}\phi_x^{\ 3}-F_4FF_{4tt}\phi_x^{\ 3}+6\phi_x^{\ 3}F_4^{\ 2}FF_{2t}+3F_4^{\ 2}F_1\phi_y^{\ 2}F_t\phi_{xx}-4F_4FF_1\phi_y^{\ 2}F_{4t}\phi_{xx}\\&+24F_1F_4^{\ 2}F\phi_y^{\ 2}F_2(t)\phi_{xx}+18F2\phi_x^{\ 3}F_4^{\ 2}F_t-24F\phi_x^{\ 3}F_2F_4F_{4t}-3\phi_x^{\ 3}F_tF_4F_{4t}-48F_4^{\ 2}F\phi_xF_1\phi_y\phi_{xy}F_2\\&-6F_4^{\ 2}\phi_xF_1\phi_y\phi_{xy}F_t+8F_4F\phi_xF_1\phi_y\phi_{xy}F_{4t}+24F_1FF_4^{\ 2}\phi_x^{\ 2}\phi_y^{\ 2}F_2+3F_1F_4^{\ 2}\phi_x^{\ 2}\phi_{yy}F_t-4F_1FF_4\phi_x^{\ 2}\phi_{yy}F_{4t}\\&+72F_2^{\ 2}F\phi_x^{\ 3}F_4^{\ 2}-2F_4^{\ 2}F\phi_xF_{1t}\phi_y\phi_{xy}^{\ \ 2}+3\phi_x^{\ 3}FF_{4t}+F_4^{\ 2}FF_{1t}\phi_{xx}\phi_y^{\ 2}+F_4^{\ 2}FF_{1t}\phi_x^{\ 2}\phi_{yy})+6F_2(t)_t\phi_x^{\ 3}\\&-6F_3(t)\phi_x^{\ 3}+72F_2(t)^2\phi_x^{\ 3}+F_1(t)_t\phi_x\phi_{yy}-48F_1(t)\phi_x\phi_yF_2(t)\phi_{yx}+0\square u_6)=0\end{aligned}$$

(3-48)

由于$\phi^{-2},\phi^{-1},\phi^0$的系数都化简为与$u_4,u_5,u_6$无关的表达式，所以$u_4,u_5,u_6$是自由未知量。

显然当

$$\begin{aligned}&2(2F_4FF_1\phi_y\phi_{xxy}+18F_2F\phi_xF_4\phi_{xx}-F_1FF_4\phi_{xx}\phi_{yy}+FF_4\phi_{xxx}\phi_t-10FF_4^{\ 2}\phi_{xxx}^{\ \ 2}+10F_2F_4\phi_{xxx}^{\ \ 2}\\&-3FF_{4t}\phi_x\phi_{xx})+3FF_4\phi_x\phi_{xxt}+6F^2F_4\phi_{xxxxx}\phi x+3\phi_xF_tF_4\phi_{xx}+3F\phi_{xt}F_4\phi_{xx}+15F_2F_4\phi_{xxxx}\phi_{xx}\\&-18F_2F\phi_x\phi_{xx}F_4^{\ 2}-2F_1FF_4^{\ 2}\phi_x\phi^{xy2}+2F_4FF_1\phi_{xy}-6F\phi_x\phi_{xxxx}F_4^{\ 2}-3F\phi_x\phi_{xxt}F_4^{\ 2}-3F_t\phi_x\phi_{xx}F_4^{\ 2}\\&-F\phi_{xxx}\phi_tF_4^{\ 2}-15F\phi_{xx}\phi_{xxxx}F_4^{\ 2}-3F\phi_{xx}\phi_{xt}F_4^{\ 2}-2F_1FF_4\phi_{xy}^{\ \ 2}+F_1FF_4\phi_{yy}\phi_{xx}+2F_1FF_4\phi_x\phi_{xyy}\\&+3F\phi_xF_{4t}\phi_{xx}F_4-2F_1FF_4^{\ 2}\phi_{xxy}\phi_y=0.\end{aligned} \tag{3-49}$$

成立时，(3-47)、(3-48)也成立，所以，(3-49)是方程(3-36)的两个相容条件，因为 $j=4,j=5,j=6$ 是共振项。也就说当(3-46)、(3-47)、(3-48)成立时，变系数 KP 方程(3-46)在 $u_0=\frac{-2F\phi_x^2}{F_4}$ 通过 Painlevé 检验，具有 Painlevé 性质，即变系数 KP 方程(3-34)满足了完全可积的必要条件。

以下我们给出变系数 KP 方程(3-36)的自 Bäcklund 变换。方程(3-42)解的罗朗展开式为

$$u=u_0\phi^{-2}+u_1\phi^{-1}+u_2+\sum_{j=3}^{\infty}u_j\phi^{j-2}\ . \tag{3-50}$$

在(3-60)式中若取 $j_{\max}=\infty$，令 $u_i(i=3,4,5,6)$ 为零， 则可以证明 $u_i=0(i\geq 6)$。

$$将\ u=u_0\varphi^{-2}+u_1\varphi^{-1}+u_2\ , \tag{3-51}$$

代入变系数 KP 方程(3-38)，令 $u_i=0(i\geq 2)$，通过符号计算并令 ϕ 的各次幂的系数为零可得

$$\phi^{-6}:\quad 120Fu_0\phi_x^4+60F_4u_0^2\phi_x^2=0 \qquad \rightarrow u_0=\frac{-2F\phi_x^2}{F_4} \tag{3-52}$$

$$\begin{aligned}\phi^{-5}:\quad & 6F_4(-4u_0\phi_x(u_{0x}-u_1\phi_x)+u_0(2u_1\phi_x^2-4u_{0x}\phi_x-2u_0\phi_{xx})+6u_0u_1\phi_x^2)\\ & +F(-96u_{0x}\phi_x^3+24u_1\phi_x^4-144u_0\phi_x^2\phi_{xx})=0\\ & \rightarrow u_1=\frac{2F\phi_{xx}}{F_4}\end{aligned} \tag{3-53}$$

$$\phi^{-4}:\quad -12F(t)\phi_x^2(-3F\phi_{xx}^2+4F\phi_x\phi_{xxx}+6u_2\phi_x^2F_4+F_1\phi_y^2+\phi_x\phi_t)=0 \tag{3-54}$$

$$\begin{aligned}\phi^{-3}:\quad & 9F^2F_4\phi_x^2\phi_{xxxx}+3FF_4\phi_{xx}\phi_t\phi_x+F_tF_4\phi_x^3-FF_{4t}\phi_x^3-3F^2F_4\phi_{xx}^3+6FF_2F_4\phi_x^3\\ & +FF_1F_4\phi_{xx}\phi_y^2+3FF_4\phi_x^2\phi_{xt}+F_1FF_4\phi_x^2\phi_{yy}+4FF_1F_4\phi_x\phi_{xy}\phi_y+36F_4^2Fu_2\phi_x^2\phi_{xx}\\ & +12F_4^2F\phi_x^3u_{2x}=0\end{aligned} \tag{3-55}$$

$$\begin{aligned}\phi^{-2}:\quad & -18F_2F\phi_x\phi_{xx}F_4-6F_2F_4\phi_x\phi_{xxxx}-3F_2F_4\phi_{xx}\phi_{xxx}+2F_2F_4\phi_{xx}^2-F\phi_{xxx}\phi_tF_4\\ & -36F_4^2F\phi_t\phi_{xx}u_{2x}-6F_4^2F\phi_x^2u_{2xx}-18F_4^2Fu_2\phi_{xx}^2-24F_4^2Fu_2\phi_x\phi_{xxx}-3F_t\phi_x\phi_{xx}F_4\\ & -3F\phi_x\phi_{xxt}F_4+3F\phi_xF_{4t}\phi_{xx}-3F\phi_{xx}\phi_{xt}F_4-2F_1FF_4\phi_{xy}^2-2F_1FF_4\phi_x\phi_{xyy}-2F_1FF_4\phi_{xxy}\phi_y\\ & -F_1FF_4\phi_{xx}\phi_{yy}=0\end{aligned} \tag{3-56}$$

$$\phi^{-1}: \quad F_2\phi_{xxxxx}F_4 + F_1F\phi_{xxyy}F_4 + 12F_4^2F\phi_{xxx}u_{2x} + 6F_4^2F\phi_{xx}u_{2xx} + 6F_4^2Fu_2\phi_{xxxx} + F_t\phi_{xxx}F_4 + F\phi_{xxxt}F_4 - F\phi_{xxx}F_{4t} + 6F_2F\phi_{xxx}F_4 = 0 \tag{3-57}$$

$$\phi^0: \quad F_1u_{2yy} + Fu_{2xxxx} + u_{2xt} + 6F_4(u_{2x}^2 + u_2u_{2xx}) + 6F_2u_{2x} + F_3 = 0 \tag{3-58}$$

(3-58)表明 u_2 是方程(3-36)的解．(3-55)和(3-56)、(3-57)为为 ϕ 的约束条件。那么(3-51)就是方程(3-54)的自 Bäcklund 变换。

3.6 总结

根据 Weiss 的观点，当一个非线性偏微分方程的解关于任意活动奇异流形为单值时，称该 PDE 具有 Painlevé 性质。WTC 方法是判定非线性偏微分方程能否通过 Painlevé 检验最有效的方法之一，WTC 方法无需寻找偏微分方程的所有相似约化，可直接运用于偏微分方程。本章中我利用 WTC 方法验证了变系数 KP 方程的 Painlevé 性质，并找到其 Bäcklund 变换，对进一步研究此方程的解提供了有利的条件。寻找可积系统是孤立子理论中十分重要的研究课题，如何应用 Painlevé 检验算法得到新的可积系统尤其是高维或广义的 Painlevé 可积系统有待于进一步研究。

第四章 首次积分法及其应用

4.1 引言

首次积分法是冯兆生[43-45]于2002 年在Physics Letters A上一篇名为《On explicit exact solutions to the compound Burgers-KdV Equation》的文章中提出的。这个方法的基本原理就是先用行波变换将偏微分方程化为常微分方程，再利用除法定理找出这个常微分方程的一个首次积分，将这个常微分方程化为一阶可积的常微分方程再进行求解。

本文考虑的是（2+1）维的 HBK（高维的 Broer—Kaup 方程），运用首次积分法求出它的精确解。此系统是在 Kadomtsev-Petviashvili (KP)方程基础上加上一个对称的限制条件得到的[46]，它在统计物理、非线性光纤通讯、等离子体物理等许多领域有着广泛的应用。在 4.2 节中，我们简单介绍了首次积分法的算法；在 4.3 中我们应用首次积分法求解方程。

4.2 首次积分法的相关概念及步骤

定义4.1：首次积分

给定方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x; y_1, \cdots, y_n) \\ y_i(x_0) = y_i^0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad , \tag{1}$$

以及数域G 内连续可微且不恒等于常数的函数$\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$，如果其中的变量$y_i(i = 1, 2, \cdots n)$用方程组的任一解$y_i(x)(i = 1, 2, \cdots n)$代替时，它就取常数值(对不同的解，常数值也不同），则关系式

$$\varphi(x, y_1, \cdots, y_n) = c \tag{2}$$

称为方程组的首次积分（有时也称$\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$为首次积分），这里c 为可允许范围内的任意常数。

除法定理(Division Theorem)

设$P(\omega,z)$，$Q(\omega,z)$是复数域$C(\omega,z)$上的多项式，并且$P(\omega,z)$在$C(\omega,z)$上是不可约的(irreducible)。如果$Q(\omega,z)$不包含$P(\omega,z)$的全部零点，那么在$C(\omega,z)$上存在一个多项式$G(\omega,z)$，使得$Q(\omega,z)=P(\omega,z)\cdot G(\omega,z)$ (3)

首先阐述一下首次积分法的基本思想和步骤， 为简单起见， 这里以(1+1)维方程为例。设有（1+1）维非线性偏微分方程：

$$f(u,u_x,u_t,u_{xx}\ldots)=0. \tag{4}$$

用行波变换$u=u(\xi),\ \xi=x-ct$， 将偏微分方程(4)化为二阶常微分方程

$$f(u,u',u'')=0. \tag{5}$$

令$u(\xi)=x,\ u'=y.$ 方程(5)化为一阶常微分方程组

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=f(x,y). \end{cases} \tag{6}$$

设(4)这个常微分方程组的首次积分为$p(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)y^i=0$ （通常取i=2），其中$a_i(x)$（i=0,1,2.....n）是实数域上的待定多项式。根据除法定理[8]在实数域上存在$\alpha(x),\beta(x)$，使得

$$\frac{dp}{d\xi}=(\alpha(x)+\beta(x)y)p(x,y). \tag{7}$$

由（6）式确定$\alpha(x),\beta(x)$，$a_i(x)$(i=0,1,2....n)进而求出$p(x,y)$。将$x=u,y=u'$代入$p(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)y^i=0$，求解即可得到方程(4)的精确解。

例 4.1（2+1）维 Bugers 方程

$$(u_t+uu_x-u_{xx})_x+u_{yy}=0. \tag{4-1}$$

考虑 Bugers 方程的行波解$u=u(\xi),\xi=x-v_1t-v_2y$， 其中v_1, v_2是待定常数

表示波速。从而(1)可化为

$$\{-v_1u_\xi + uu_\xi - u_{\xi\xi}\}_\xi + v_2{}^2u_{\xi\xi} = 0. \tag{4-2}$$

将(2)式对ξ连续积分两次可得

$$-v_1u + \frac{1}{2}u^2 - u_\xi + v_2{}^2u = 0 \tag{4-3}$$

令$x=u, y=u'$（其中x, y都是关于ξ的函数），则(3)可化为

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -v_1x + \dfrac{1}{2}x^2 + v_2^2x, \end{cases} \tag{4-4}$$

下面根据(4)式和除法定理，确定方程组(1)，(2)，(3)的首次积分，设此首次积分为：

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{2} a_i(x)y^i = 0. \tag{4-5}$$

其中$a_i(x)$ (i=0,1,2…n)是是实数域上待定的多项式，将(4-4)和(4-5)两式代入到(7)式，并按照y的幂次整理，可得

$$\begin{aligned}&(a_2'(x)-\beta(x)a_2(x))y^3+(a_1'(x)-\beta(x)a_1(x)-a(x)a_2(x))y^2+\\&(a_0'(x)-2v_1a_2(x)+a_2(x)x^2-2a_2(x)v_2^2x-a(x)a_1(x)-\beta(x)a_0(x))y+\\&(-a_1(x)v_2^2x-a(x)a_0(x)-a_1(x)v_1x+1/2a_1(x)x^2).\end{aligned} \tag{4-6}$$

要使(4-6)式成立，要求y的各次幂的系数均为零。由于$a_2(x),\beta(x)$为多项式，并且

$$a_2'(x) - \beta(x)a_2(x) = 0\,, \tag{4-7}$$

可知a_2为常数，$\beta = 0$。不失一般性可以取$a_2(x)=1$。将$a_2(x)=1, \beta(x)=0$代入(4-6)式，由于y^2, y^1, y^0的系数分别为零可得

$$a_1'(x) - a(x) = 0; \tag{4-8}$$

$$a_0'(x) - 2v_1 + x^2 - 2v_2^2x - a(x)a_1(x) = 0; \tag{4-9}$$

$$-a_1(x)v_2^2x - a(x)a_0(x) - a_1(x)v_1x + 1/2a_1(x)x^2 = 0; \tag{4-10}$$

下面来确定$a_i(x)$ (i=0,1,2)。这里多项式$\alpha(x)$的次数为 0 或 1。这是因为若

$\deg[\alpha(x)]>1$，可令 $\deg[\alpha(x)]=\mathrm{k}(\mathrm{k}>1)$，由(4-8)，(4-9)可得 $\deg[a_1(x)]$=k+1，$\deg[a_0(x)]$=2k+2， 由(10)可知 k+3=3k+2， 从而 k=1/2，这与 k>1 矛盾。

当 $\deg[\alpha(x)]=1$ 时，$\deg[a_1(x)]=2$

在这种情况下，可令

$$a(x)=mx+b, \qquad a_1(x)=k_2x^2+k_1x+k_0(k_2\neq 0), \tag{4-11}$$

其中 m,k_2,k_1,k_0 为待定常数。将（4-11）式代入（4-9）和（4-10）中，有 $\boldsymbol{k_2=m/2,k_1=b,}$

$$\boldsymbol{m=0,k_2=0,} \qquad \boldsymbol{k_1=-\tfrac{2}{3}b,} \qquad \boldsymbol{-k_1v_1-k_1v_2^2+\frac{1}{2}k_0-bv_2^2-\frac{1}{2}b^2k_1-bv_1=0,}$$

$\boldsymbol{-k_0v_2^2-k_0v_1-b^2k_0=0.\ \ v_2^2+v_1=-b^2}$

则

$$y'=(-b-2v_1)x+\frac{1}{2}x^2$$

$$\text{解得 } \boldsymbol{u(\xi)=\frac{2(b+2v_1)}{1+2be^{(-b+2v_1)\xi}+4v_1e^{(-b+2v_1)\xi}}}$$

4.3 用首次积分方法求解（2+1）维 HBK 系统

现在我们用首次积分解法来求解（2+1）维的 HBK(高维的 Broer—Kaup 方程)系统

$$u_t+4(u_{xx}+u^3-3uu_x+3uw)_{xz}+12(uv)_{xx}=0, \tag{4-12a}$$

$$v_t+4(v_{xx}+3vu^2+3uv_{xx}+3vw)_x=0, \tag{4-12b}$$

$$v_x-w_z=0. \tag{4-12c}$$

由方程(4-12c)可知 $v_x=w_z$，则这个方程组存在一个特殊的解，

$$v=u_z, \qquad w=u_x. \tag{4-13}$$

则原方程组可以简化为

$$\{u_t+4(u_{xx}+u^3+3uu_x)_x\}_z=0. \tag{4-14}$$

对 HBK 系统进行行波变换 $u=u(\xi),\xi=x-v_1t-v_2z$， 其中 v_1, v_2 是待定常数表示波速。将 (4-14)可化为

$$-v_2\{-v_1u_\xi+4(u_{\xi\xi}+u^3+3uu_\xi)_\xi\}_\xi=0. \tag{4-15}$$

将(4-15)式对ξ连续积分两次可得

$$-v_1u+4(u_{\xi\xi}+u^3+3uu_\xi)=0. \tag{4-16}$$

令$x=u,y=u'$（其中x,y都是关于ξ的函数），则(4-16)可化为

$$\begin{cases}x'=y,\\ y'=\dfrac{1}{4}v_1x-x^3-3xy,\end{cases} \tag{4-17}$$

下面根据(4-17)式和除法定理，确定方程组(4-12a)，(4-12b)，(4-12c)的首次积分，设此首次积分为：

$$p(x,y)=\sum_{i=0}^{2}a_i(x)y^i=0. \tag{4-18}$$

其中$a_i(x)$(i=0,1,2…n)是是实数域上待定的多项式，将(4-17)和(4-18)两式代入到(4-16)式，并按照y的幂次整理，可得

$$\begin{aligned}&\left(a_2'(x)-\beta(x)a_2(x)\right)y^3+\left(a_1'(x)-6a_2(x)x-\alpha(x)a_2(x)-\beta(x)a_1(x)\right)y^2\\&+\left(a_0'(x)-3a_1(x)x+2a_2(x)(\frac{1}{4}v_1-x^3)-\alpha(x)a_1(x)-\beta(x)a_0(x)\right)y+\\&\left(a_1(x)(\frac{1}{4}v_1x-x^3)-\alpha(x)a_0(x)\right)=0.\end{aligned} \tag{4-19}$$

要使(4-19)式成立，要求y的各次幂的系数均为零。由于$a_2(x),\beta(x)$为多项式，并且

$$a_2'(x)-\beta(x)a_2(x)=0, \tag{4-20}$$

可知a_2为常数，$\beta=0$。不失一般性可以取$a_2(x)=1$。将$a_2(x)=1,\beta(x)=0$代入(4-19)式，由于y^2,y^1,y^0的系数分别为零可得

$$a_1'(x)-\alpha(x)-6a_2x=0, \tag{4-21}$$

$$a_0'(x)-3a_1+2a_2(\frac{1}{4}v_1x-x^3)-\alpha(x)a_1(x)=0,$$

(4-22)

$$a_1(\frac{1}{4}v_1x-x^3)-\alpha(x)a_0(x)=0. \tag{4-23}$$

下面来确定 $a_i(x)$ (i=0,1,2)。这里多项式 $\alpha(x)$ 的次数为 0 或 1。这是因为若 $\deg[\alpha(x)]>1$，可令 $\deg[\alpha(x)]=\mathrm{k}(\mathrm{k}>1)$，由(4-21)，(4-22)可得 deg[$a_1(x)$]=k+1，deg[$a_2(x)$]=2k+2，由(18)可知 k+4=3k+2，从而 k=1，这与 k>1 矛盾。事实上当 $\alpha(x)$ 的系数为零时，$a_1(x)$ 的系数是 2 这就有违(4-20)中 $a_1(x)$ 的系数为 k+1=1，这种情况下只能出现矛盾的结果，我们只就 $\alpha(x)$ 的系数为 1 的情况进行讨论。

deg[$\alpha(x)$]=1，相应的 deg[$a_1(x)$]=2，deg[$a_0(x)$]=4，取 $\alpha(x)=r_0x+r$，将其代入(4-21)，(4-22)可得

$$\begin{aligned}
&a_1(x)=\frac{1}{2}r_0x_2+r_1x+3x^2+r_2,\\
&a_0(x)=(\frac{3}{8}r_0+\frac{11}{4}+\frac{1}{4}r_0(\frac{1}{2}r_0+3))x^4\\
&+(r_1+\frac{1}{3}r_1(\frac{1}{2}r_0+3)+\frac{1}{3}r_0r_1)x^3\\
&+(\frac{3}{2}r_2-\frac{1}{4}v_1+\frac{1}{2}r_1^2+\frac{1}{2}r_0r_2)x^2+r_1r_2x+r_3.
\end{aligned}$$

其中 r_1,r_2,r_3 为积分常数。将 $a_i(x)$（i=0，1，2）代入(4-23)，整理 x 的各次幂，使其各次幂的系数分别为零可得如下方程组：

$$\begin{aligned}
&eq1:\ -\frac{13}{4}r_0-\frac{1}{8}r_0^3-3-\frac{9}{8}r_0^2=0,\\
&eq2:\ -\frac{15}{4}r_1-\frac{25}{8}r_0r_1-\frac{5}{8}r_0^2r_1=0,\\
&eq3:\ \frac{3}{4}v_1-r_2-\frac{3}{2}r_0r_2-r_0r_1^2-\frac{1}{2}r_0^2r_2-2r_1^2+\frac{3}{8}r_0r_1=0,\\
&eq4:\ -\frac{3}{2}r_0r_1r_2+\frac{1}{2}r_1v_1-\frac{1}{2}r_1^3-\frac{3}{2}r_1r_2=0,\\
&eq5:\ -r_1^2r_2+\frac{1}{4}r_2v_1-r_0r_3=0,\\
&eq6:\ r_1r_3=0.
\end{aligned}$$

解方程组($eq1-eq6$)可得到几组解,下面是各种解的情况和相应问题的讨论:

1. 当 $r_0=-2, r_1=0, r_2=0, r_3=0$ 时

$$a_1(x)=2x^2,\quad a_0(x)=x^4-\frac{1}{4}v_1x^2,\quad a_2(x)=1. \tag{4-24}$$

将(4-23)各式代入到 $p(x,y)=\sum_{i=0}^{2}a_i(x)y^i=0$ 中， 以 y 为未知数解方程可得

$$y_1=\frac{1}{2}(-2x+\sqrt{v_1})x,\quad y_2=\frac{1}{2}(-2x-\sqrt{v_1})x.$$

再由 $x=u, y=u'$ 可以求出方程组(1)， (2)， (3)的精确解为

$$u_1(x,t,z)=\frac{\sqrt{v_1}}{2+ce^{(-1/2\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2z))}}, \tag{4-25}$$

$$u_2(x,t,z)=\frac{\sqrt{v_1}}{-2+ce^{(-1/2\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2z))}}. \tag{4-26}$$

由于 c 在这里是任意常数，不妨取 c=2， 则可得到如下的类孤立子解

$$\begin{cases}u_1(x,t,z)=\frac{\sqrt{v_1}}{4}(\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2z)+1)\\ w_1(x,t,z)=\frac{v_1}{16}(1-\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2z)^2)\\ v_1(x,t,z)=-\frac{v_1v_2}{16}(1-\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2z)^2)\end{cases},\begin{cases}u_2(x,t,z)=-\frac{\sqrt{v_1}}{4}(\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2z)+1)\\ w_2(x,t,z)=-\frac{v_1}{16}(1-\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2z)^2)\\ v_2(x,t,z)=\frac{v_1v_2}{16}(1-\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2z)^2)\end{cases}$$

同理当 $\{r_0=-4, r_1=0, r_2=-v_1/4, r_3=\frac{1}{64}v_1^2\}$，

$\{r_0=-3, r_1=0, r_2=-3v_1/8, r_3=\frac{1}{32}v_1^2\}$，

$\{r_0=-2, r_1=0, r_2=-v_1/3, r_3=\frac{1}{24}v_1^2\}$.

时分别有解如下：

$$\begin{cases}u_3(x,t,z)=-\frac{1}{2}\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(-x+v_1t+v_2y)+\frac{1}{4}m)\sqrt{v_1}\\ w_3(x,t,z)=-\frac{1}{8}(1-\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(-x+v_1t+v_2y)+\frac{1}{4}m)^2)v_1v_2.\\ v_3(x,t,z)=\frac{1}{8}(1-\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(-x+v_1t+v_2y)+\frac{1}{4}m)^2)v_1\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_4(x,t,z)=\frac{1}{2}\tanh(\frac{1}{2}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2y)-1)\sqrt{v_1} \\ w_4(x,t,z)=-\frac{1}{8}(1-\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2y)+\frac{1}{4}m)^2)v_1v_2 \\ v_4(x,t,z)=\frac{1}{8}(1-\tanh(\frac{1}{4}\sqrt{v_1}(x-v_1t-v_2y)+\frac{1}{4}m)^2)v_1. \end{cases}$$

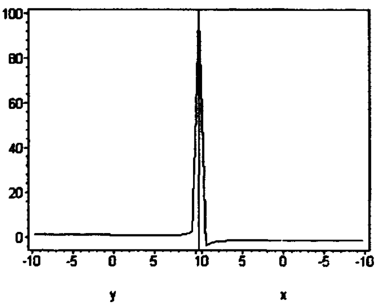
$$u_5(x,t,z)=\frac{2\sqrt{6}(t_1^{\ 2}-t_2^{\ 2})-(1+t_1t_2)^2-3(t^1+t^2)^2}{3(1+t_1t_2)^2-2\sqrt{6}(t_1^{\ 2}-t_2^{\ 2})+3(t^1+t^2)^2}.$$

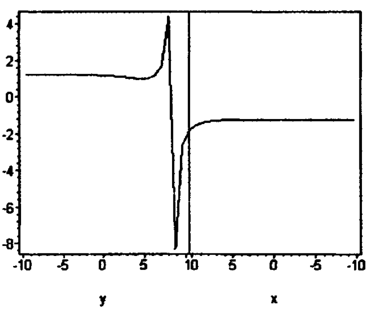
（相应的 $w_5=u_{5x},v_5=u_{5z}$ ）

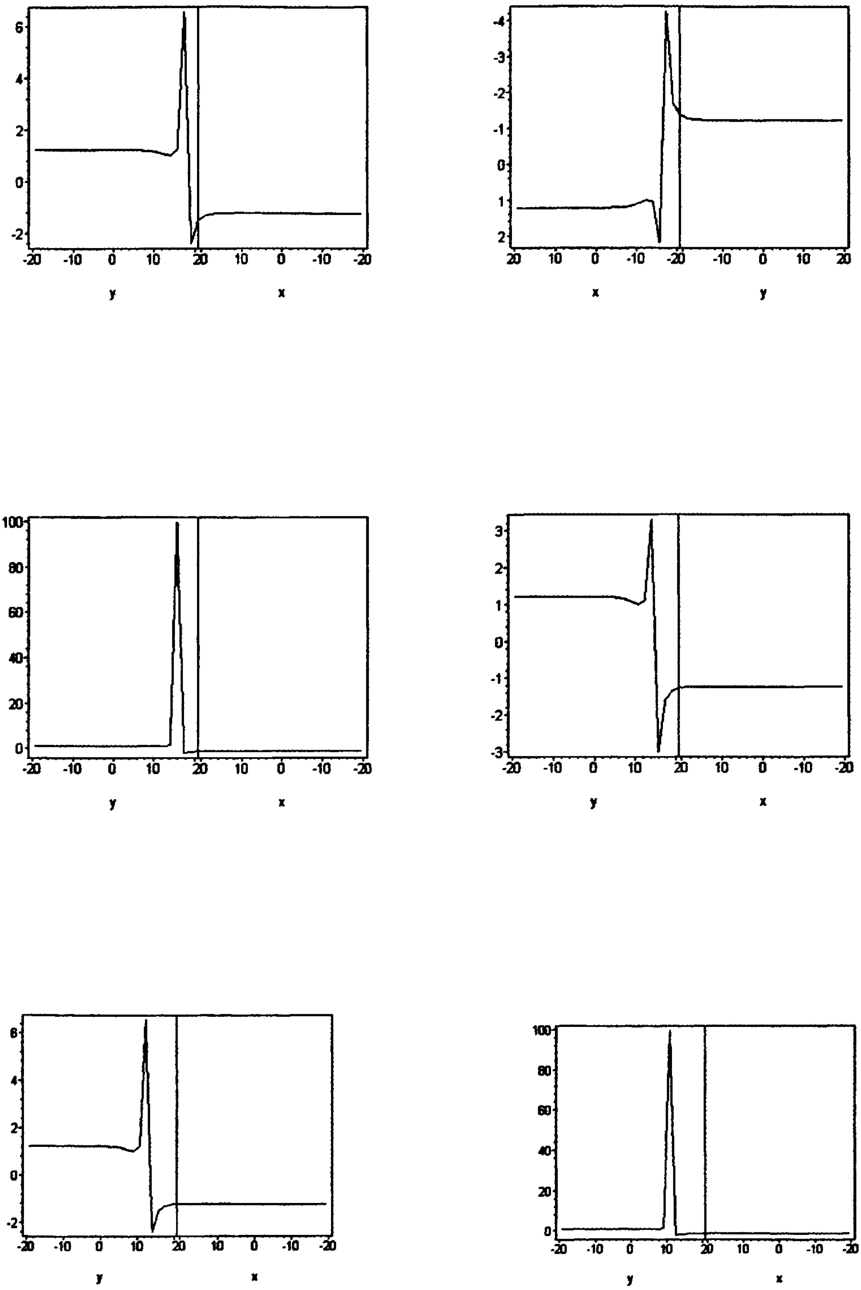
m 为常数， $t_1=\tanh(\frac{1}{4}(x-v_1t-v_2y)\sqrt{v_1}),t_2=\tanh(\frac{1}{4}const\sqrt{v_1})$

作图分析 $u_5(x,t,z)=\frac{2\sqrt{6}(t_1^{\ 2}-t_2^{\ 2})-(1+t_1t_2)^2-3(t^1+t^2)^2}{3(1+t_1t_2)^2-2\sqrt{6}(t_1^{\ 2}-t_2^{\ 2})+3(t^1+t^2)^2}.$

不失一般性，取解中的常数 $v_1=v_2=const=1,$ 分别就 t=0，2,3,4,5,6,8,10 时作图







$u_5(x,y,t)$ 是一个类多孤立波解，从图中可以较明显地看出孤立波是以约 5 为周期向前运动的情况。

4.4 总结

应用首次积分法并借助于计算机符号计算系统 Maple，本章求解 HBK 系统，并得到了它的精确解。这些精确解不仅包括了以前的论文中求得的类孤立波解，而且较之更具有一般性，因而扩展了 HBK 系统解的范围。

从文中我们可以得到如下结论，应用首次积分可以求得某些非线性偏微分方程的精确解，而且这些精确解比用双曲函数展开法或基于 Riccati 方程的辅助函数展开法所求得的精确解更为广泛。

第五章 Tanh 函数法及其应用

5.1 引言

在直接构造孤子方程的精确解的众多方法中，tanh 函数方法是非常有效的方法之一。为寻求 tanh 形式的孤波解，Hereman， Parkes， Dufy[47]提出了 tanh 函数法，此方法的出发点就是寻求可表示为 tanh 函数的多项式形式的解。最近，范恩贵[48-49]又进一步进行了有效的改进，广泛应用于常系数非线性演化方程的精确解的求解问题。这些方法的主要思想是把常系数非线性演化方程转化为一个常系数的非线性代数方程组，然后利用吴消元法求解此方程组，从而获得常系数非线性演化方程的精确解。后李德生，张鸿庆有进一步改进了上述方法，将变系数非线性演化方程转化为一个变系数的非线性一阶常微分方程组，求解此方程组从而获得变系数非线性演化方程的多种精确解。

5.2 tanh 函数法的基本思想和步骤

给定一个偏微分方程

$$P(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},...)=0 \tag{5-1}$$

这里 P 一般是其变元多项式，其中必须包含最高阶线性偏导数项与非线性项。通过使用形波变换，设(5-1)有如下形式的解

$$u(x,t)=\phi(\xi),\xi=x-\lambda t, \tag{5-2}$$

其中 λ 为待定常数。将(5-2)代入(5-1)，得

$$P(\phi,\phi',\phi'',...)=0, \tag{5-3}$$

其中 “'” 代表 $d/d\xi$ 。设(5-3)有如下形式的解

$$\phi(\xi)=\sum_{i=0}^{n}f(\xi)^{i-1}(b_i f(\xi)+a_i g(\xi))+a_0, \tag{5-4}$$

且 $f(\xi),g(\xi)$ 满足如下的方程和约束条件：

$$\frac{df(\xi)}{d\xi}=k(1-f(\xi)^2),\frac{dg(\xi)}{d\xi}=-f(\xi)g(\xi),g(\xi)^2=\mu(1-f(\xi)^2), \tag{5-5}$$

其中 $\mu=\pm1,h,a_i,b_i(i=1,2,...,n)$和$a_0$ 为待定常数。

步骤 1 将(5-3)中最高阶线性导数项与最高阶非线性项相平衡，得到 n 的值。

步骤 2 将(5-4)，(5-5)代入(5-3)中，得关于 $f^i g, f^{i+1}(i=0,1,2,...)$ 的多项式方程。借助于 Maple，这一步可在计算机上实现。

步骤 3 令步骤 2 中得到的关于 $f, g, f^2, fg, f^3, f^2 g, ...$ 的系数及常熟项等于零，得到关于未知数 $\mu, \lambda, h, a_0, a_i, b_i (i=1,2,...3)$ 的代数方程组。

步骤 4 不难直接验证，(5-5)有如下形式的解

（1） 当 $\mu=1$ 时，

$$\begin{cases} f(\xi)=\tanh k\xi \\ g(\xi)=\sec hk\xi \end{cases} \tag{5-6}$$

（2） 当 $\mu=-1$ 时，

$$\begin{cases} f(\xi)=\coth k\xi \\ g(\xi)=\csc hk\xi \end{cases} \tag{5-7}$$

步骤 5 解步骤 3 中所得方程组并结合(5-2)——(5-7)，得到式(5-1)的精确形波解。

如果(5-4)中 $a_i=0$，那么 $\phi(\xi)=\sum_{i=0}^{n} f(\xi)^i$，此时约束条件满足 $\frac{df(\xi)}{d\xi}=k(1-f(\xi)^2)$，即可。方程的一般解为：$f(\xi)=\tanh(k\xi), f(\xi)=\coth(k\xi)$（$h'$ 为常熟），当 $\mu=1$ 时，在利用双曲函数法求解非线性方程，就是通常说的 tanh 法。

另外在一些扩展的 tanh 法中可以将 $\phi(\xi)$ 简单的设为：

$$\phi(\xi)=\sum_{i=0}^{n} \mathrm{a}_i f(\xi)^i$$

5.3 用 tanh 法求解若干方程

Tanh 函数法应用范围比较广，相比较其他方法也比较灵活方便，因此被广泛的应用于求解各种非线性方程（组）下面我对几个比较典型的方程分别利用 tanh 方法求解。

5.3.1 Burgers-KdV 方程

$$u_t+uu_x-\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}=0, \tag{5-8}$$

对于以上方程作行波变换 $\xi = x - \lambda t$ 得：

$-\lambda u_\xi + uu_\xi - \alpha u_{\xi\xi} + \beta u_{\xi\xi\xi} = 0$,

令 $u(\xi) = \phi(\xi)$， $\phi(\xi) = \sum_{i=0}^{p} a_i f(\xi)^i$ 且约束条件满足 $\frac{df(\xi)}{d\xi} = k(1 - f(\xi)^2)$,

利用齐次平衡法得到 p=2，即可以令 $\phi(\xi) = \sum_{i=0}^{2} a_i f(\xi)^i$，代入方程，并利用约束条件，提取 $f(\xi)$ 的各次幂系数，并令各个系数均为零得到：

$f5:\ 2a_2{}^2 + 24\beta a_2 k^2 = 0;$
$f4: 6\alpha a_2 k + 3a_1 a_2 + 6\beta a_1 k^2 = 0;$
$f3: -2a_2{}^2 - 40\beta a_2 k^2 + a_1^2 - 2\lambda a_2 + 2a_0 a_2 + 2\alpha a_1 k = 0;$
$f2: -8\alpha a_2 k - 8\beta a_1 k^2 - 3a_1 a_2 + a_0 a_1 - \lambda a_1 = 0;$
$f1: -a_1{}^2 + 2\lambda a_2 + 16\beta a_2 k^2 - 2\alpha a_1 k - 2a_0 a_2 = 0;$
$f0: 2\beta a_1 k^2 - a_0 a_1 + 2\alpha a_2 + \lambda a_1 = 0;$

解以上的方程组：
得到一下情况：
情况一：
$a_0 = \frac{3\alpha^2 + 25\lambda\beta}{25\beta}$, $a_1 = \frac{6\alpha^2}{25\beta}$, $a_2 = \frac{3\alpha^2}{25\beta}$, $k = -\frac{\alpha}{10\beta}$,
情况二：
$a_0 = \frac{3\alpha^2 + 25\lambda\beta}{25\beta}$, $a_1 = -\frac{6\alpha^2}{25\beta}$, $a_2 = \frac{3\alpha^2}{25\beta}$, $k = \frac{\alpha}{10\beta}$,
方程的解为：
$u(x,t) = a_2 \tanh^2(k(x - \lambda t)) + a_1 \tanh(k(x - \lambda t)) + a_0$.

5.3.2 利用 tanh 法解一类反应扩散方程

方程

$$u_t - au_{xx} + b(u^3 + cu^2 + du) = 0, \tag{5-9}$$

称为反应扩散方程，其中 a,b,c,d 为常数。方程(5-9)具有重要的物理背景，囊括了许多著名的物理方程如 Chafee-Irdane 方程，广义 Fisher 方程，Fitzhugh-Nagun 方程 kohnogorof-Petrovsky-Piscounov 方程等.

对方程（5-9）进行行波变换后，得到：

$$-\lambda\phi'(\xi)-a\phi''(\xi)+b(\phi^3+c\phi^2+d\phi)=0, \tag{5-10}$$

平衡非线性项和最高阶导数项得 n=1；故$\phi(\xi)=a_0+a_1g(\xi)+b_1f(\xi)$, (5-11)

将(5-11)，(5-5)代入，(5-10)另用 Maple 整理各个项的系数：

当$\mu=1$时

得到几组解：

$1.a_0=a_0,a_1=0,b_1=-2a_0^{\,2},\lambda=0;$

$2.a_0=\dfrac{-\lambda a_1}{k^2},a_1=a_1,b_1=0,\lambda=\lambda;$

$3.a_0=a_1,a_1=a_1,b_1=0,\lambda=\lambda;$

$4.a_0=-a_1,a_1=a_1,b_1=0,\lambda=\lambda;$

$5.a_0=\dfrac{-1}{2}c,a_1=a_1,b_1=-a_1^{\,2},\lambda=\dfrac{b\lambda a_1}{k};$

$6.a_0=a_1,a_1=a_1,b_1=-a_1^{\,2},\lambda=\dfrac{-2ba_1(c+3a_1)}{k};$

$7.a_0=-a_1,a_1=a_1,b_1=-a_1^{\,2},\lambda=\dfrac{-2ba_1(c-3a_1)}{k};$

方程(5-9)解为：

$u_1=a_0+\sqrt{2}a_0\sec h(x),u_2=a_0-\sqrt{2}a_0\sec h(x);$

$u_3=\dfrac{-\lambda a_1}{2ak}+a_1\tanh(x-\lambda t),u_4=a_1+a_1\tanh(x-\lambda t),u_5=-a_1+a_1\tanh(x-\lambda t);$

$u_6=\dfrac{-1}{2}c+a_1\tanh(x-\dfrac{bca_1}{k}t)+ia_1\sec h(x-\dfrac{bca_1}{k}t),u_7=\dfrac{-1}{2}c+a_1\tanh(x-\dfrac{bca_1}{k}t)-ia_1\sec h(x-\dfrac{bca_1}{k}t);$

$u_8=-a_1-a_1\tanh(x-\dfrac{-2ba_1(c+3a_1)}{k}t)+ia_1\operatorname{sech}(x-\dfrac{-2ba_1(c+3a_1)}{k}t),u_9=a_1+a_1\tanh(x-\dfrac{-2ba_1(c+3a_1)}{k}t)$
$-ia_1\operatorname{sech}(x-\dfrac{-2ba_1(c+3a_1)}{k}t);$

当$\mu=-1$时

得到几组解：

$1.a_0=a_0,a_1=0,b_1=2a_0^{\,2},\lambda=0;$

$2.a_0=\dfrac{-\lambda a_1}{k^2},a_1=a_1,b_1=0,\lambda=\lambda;$

$3.a_0=a_1,a_1=a_1,b_1=0,\lambda=\lambda;$

$4.a_0=-a_1,a_1=a_1,b_1=0,\lambda=\lambda;$

$5.a_0=\dfrac{-1}{2}c,a_1=a_1,b_1=a_1^{\,2},\lambda=\dfrac{b\lambda a_1}{k};$

$6.a_0=a_1,a_1=a_1,b_1=a_1^{\,2},\lambda=\dfrac{-2ba_1(c+3a_1)}{k};$

$7.a_0=-a_1,a_1=a_1,b_1=a_1^{\,2},\lambda=\dfrac{-2ba_1(c-3a_1)}{k};$

此时方程(5-9)解为：

$u_1=a_0+\sqrt{2}a_0\operatorname{csc}h(x), u_2=a_0-\sqrt{2}a_0\operatorname{csc}h(x);$

$u_3=\frac{-\lambda a_1}{2ak}+a_1\coth(x-\lambda t), u_4=a_1+a_1\coth(x-\lambda t), u_5=-a_1+a_1\coth(x-\lambda t);$

$u_6=\frac{-1}{2}c+a_1\coth(x-\frac{bca_1}{k}t)+ia_1\operatorname{csc}h(x-\frac{bca_1}{k}t), u_7=\frac{-1}{2}c+a_1\coth(x-\frac{bca_1}{k}t)-ia_1\operatorname{csc}h(x-\frac{bca_1}{k}t);$

$u_8=-a_1-a_1\coth(x-\frac{-2ba_1(c+3a_1)}{k}t)+ia_1\operatorname{csch}(x-\frac{-2ba_1(c+3a_1)}{k}t), u_9=a_1+a_1\coth(x-\frac{-2ba_1(c+3a_1)}{k}t)$

$-ia_1\operatorname{csch}(x-\frac{-2ba_1(c+3a_1)}{k}t);$

5.3.3 利用 tanh 法解 Noyes—Field 方程组

Noyes—Field 方程组是在化学 Belousov-Zhabotinskii 反应中发现的[54-55]

$$u_t=u_{xx}+lrv+u-u^2-ruv, \tag{5-12a}$$

$$v_t=v_{tt}+mv-buv. \tag{5-12b}$$

式中l,r,m,b为常数；$u(x,t),v(x,t)$ 表示无量纲的化学浓度。

为了求方程的解，按照双曲函数的步骤，先对方程组作行波变换，令

$$u=\phi(\xi), v=\varphi(\xi).\ \xi=x-\lambda t.$$

则方程组可变为：

$$-\lambda\phi'=\phi''+lr\varphi+\phi-\phi^2-r\phi\varphi,$$
$$-\lambda\varphi'=\lambda^2\varphi''+m\varphi-b\phi\varphi.$$

其中$\phi'=\phi_\xi, \varphi'=\varphi_\xi$.

令 $\phi(\xi)=\sum_{i=0}^{n}a_i f(\xi)^i, \varphi(\xi)=\sum_{i=0}^{m}b_i f(\xi)^i$. 约束条件$\frac{df(\xi)}{d\xi}=k(1-f(\xi)^2)$，平衡非线性项和最高阶导数项，

由(5-12a)得 2n＝n+2 （2n>=n+m）， n+2=n+m (2n<=n+m)

由(5-12b)得m+2=m+n

综合上面的分析可得 n=2，m=2 或者 n=2，m=1；

先看第一种情况：（n=2，m=2）

$\phi(\xi)=\sum_{i=0}^{2}a_i f(\xi)^i, \varphi(\xi)=\sum_{i=0}^{2}b_i f(\xi)^i$. 代入到方程组$a_0,a_1,b_0,b_1,\lambda$为待定系数。

整理令各项系数为零得：

$f^4: 6a_2k^2-a_2^{\ 2}-ra_2b_2=0, 6\lambda^2b_2k^2-bb_2a_2=0;$

$f^3: -2a_1a_2+2a_1k^2-2\lambda a_2k-ra_1b_2-ra_2b_1=0, -2\lambda b_2k+2\lambda^2b_1k-bb_1a_2-bb_2a_1=0;$

$f^2:-8a_2k^2+a_2+lrb_2-2a_0a_2-a_1{}^2-\lambda a_1k-ra_0b_2-ra_2b_0-ra_1b_1=0,mb_2-\lambda b_1k-8\lambda^2b_2k^2-bb_0a_2$
$-bb_1a_1-bb_2a_0=0;$

$f:lrb_1-2a_0a_1+a_1+2\lambda a_2k-2a_1k^2-ra_1b_0-ra_0b_1=0,mb_1+2\lambda b_2k-2\lambda 2b_1k^2-bb_0a_1$
$-bb_1a_0=0;$

$f^0:-a_0-ra_0b_0+2a_2k^2+lrb_0+a_0+\lambda a_1k=0,2\lambda^2b_2k^2+mb_0-bb_0a_0+\lambda b_1k=0;$

由以上方程组可得 ：

$a_2=\dfrac{6}{b},b_2=\dfrac{6(b-1)}{rb},a_1=-\dfrac{6\lambda}{5b},b_1=-\dfrac{6(b-1)\lambda}{5br},$

$a_0=\dfrac{1}{50b}(25lb^2+25b-25lb-25mb+25m-3\lambda^2),$

$b_0=\dfrac{1-b}{50br}(25b+9-25lb+25lb^2-25mb-25m-3\lambda^2),$

$k=\dfrac{\lambda^2}{100},\lambda=\lambda_i(i=1,2,3,4)$

$\lambda_1=\dfrac{5}{6}\sqrt{\Delta},\lambda_2=-\dfrac{5}{6}\sqrt{\Delta},\lambda_3=\dfrac{5}{6}\sqrt{-\Delta},\lambda_4=-\dfrac{5}{6}\sqrt{-\Delta}$,而$\Delta=6\mathrm{mb}+6\mathrm{m}-6\mathrm{b}+6\mathrm{lb}\text{-}6\mathrm{lb}^2$.

和关系式

$$(-\mathrm{m}-1+\mathrm{lb})(-\mathrm{m}+1-1+\mathrm{lb})=0,$$

则原方程组的解为：

$$u=a_2\tanh^2(k(x-ct))+a_1\tanh(k(x-ct))+a_0,$$
$$v=b_2\tanh^2(k(x-ct))+b_1\tanh(k(x-ct))+b_0,$$

根据$\lambda_i(i=1,2,3,4)$的不同可以得到形似的不同的孤子解。

情形一：

m=lb-1且Δ_1=lb-l-b>0

当$\lambda=\lambda_1=\dfrac{5}{6}\sqrt{\Delta_1}$时，

$b_0=\dfrac{(b-1)\Delta_1}{4\mathrm{br}},\ \mathrm{a}_0=1+\dfrac{\Delta_1}{4\mathrm{b}},a_1=\dfrac{(1-b)\sqrt{\Delta_1}}{\mathrm{br}},$

$a_1=\dfrac{-\sqrt{\Delta_1}}{\mathrm{b}},b_2=\dfrac{6(b-1)}{\mathrm{br}},r_2=\dfrac{6}{\mathrm{b}},\ \mathrm{k}=\dfrac{\Delta_1}{24}$

情形二

m=lb-1且Δ_1=lb-1-b<0

当$\lambda=\lambda_3=\frac{5}{6}\sqrt{-\Delta_1}$时，

$$b_0=\frac{3(b-1)\Delta_1}{4br},\ a_0=1+\frac{3\Delta_1}{4b},a_1=\frac{(1-b)\sqrt{-\Delta_1}}{br},$$

$$a_1=\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{b},b_2=\frac{6(b-1)}{br},r_2=\frac{6}{b},\ k=\frac{-\Delta_1}{24}$$

情形三：

m=lb-1+1且Δ_2=lb-1+1 > 0

当$\lambda=\lambda_3=\frac{5}{6}\sqrt{\Delta_2}$时，

$$b_0=\frac{(b-1)\Delta_2}{4br},\ a_0=1+\frac{\Delta_2}{4b},a_1=\frac{(1-b)\sqrt{\Delta_2}}{br},$$

$$a_1=\frac{-\sqrt{\Delta_2}}{b},b_2=\frac{6(b-1)}{br},r_2=\frac{6}{b},\ k=\frac{\Delta_2}{24}$$

情形四：

m=lb-1+1且Δ_2=lb-1+1 < 0

当$\lambda=\lambda_3=\frac{5}{6}\sqrt{-\Delta_2}$时，

$$b_0=\frac{3(b-1)\Delta_2}{4br},\ a_0=\frac{3\Delta_2}{4b},a_1=\frac{(1-b)\sqrt{-\Delta_2}}{br},$$

$$a_1=\frac{-\sqrt{-\Delta_2}}{b},b_2=\frac{6(b-1)}{br},r_2=\frac{6}{b},\ k=\frac{-\Delta_2}{24}$$

5.4 复 tanh 函数法以及 Schrödinger 方程的解

复 tanh 法[50]就是将$\phi(\xi)$设为带有$\mathbf{a}_i\boldsymbol{i}\,\mathbf{tanh}(\xi)^i$的多项式，省略步骤一其他步骤与 tanh 法相同。这一节我们用复 tanh 法来求解著名的 Schrödinger 方程和 Ginzburg-Landau 方程，这些方程的特点是他们都含有复系数的项。

5.4.1 非线性 Schrödinger 方程

在高能物理、量子力学、非线性光学、超导及深水波等方面的研究中，起着非常重要的作用. Matsunchi K 在考察单色波的非线性相互作用时，提出了一类具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程组，在研究等离子物理孤立子问题，推导高频电子横向速度所满足的方程时，也得到了同一类型的方程. 郭柏灵证明了一类具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程组的初边值问题解的存在性、惟一性和正则性. 尚亚东得到非稳的非线性 Schrödinger 方程的一些显式精确解

[51]．文献[52-53]中采用谱方法和差分方法考查了具波动算子的非线性 Schrödinger 方程．文献[53]中已经利用复 tanh 法解了（2+1）维的 Schrödinger 方程和耦合的 Schrödinger 方程。本文考察具波动算子的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{aligned}&Wu-ia(u_t+u_x)+\delta^2u+\beta|u|^2u=0,\\&(Wu=u_{tt}-u_{xx}+ru_{tx},a,\beta,r,\delta\text{皆是常数})\end{aligned}\tag{5-13}$$

令 $\xi=x+ct$ 对（5-13）做形波变换得：

$$(c2-1+rc)u_{\xi\xi}-ia(c+1)u_\xi+\delta^2u+\beta|u|^2u=0,\tag{5-14}$$

令 $u(\xi)=\phi(\xi)=a_0+a_1\tanh(i\xi)$ ，由于：

$$u_{\xi\xi}=2a_1\tanh(i\xi)(1-\tanh(i\xi))^2,\tag{5-15a}$$

$$u_\xi=2a_1i(1-\tanh(i\xi))^2,\tag{5-15b}$$

$$|u|^2u=2a_1^2\tanh(i\xi)^2(a_0+a_1\tanh(i\xi)),\tag{5-15c}$$

则（5-15）代入（5-14）得

$$\begin{aligned}&2a_1(c2-1+rc)\tanh(i\xi)(1-\tanh(i\xi))^2+2a_1a(c+1)(1-\tanh(i\xi))^2\\&+\delta^2(a_0+a_1\tanh(i\xi))+2a_1^2\beta\tanh(i\xi)^2(a_0+a_1\tanh(i\xi))=0,\end{aligned}\tag{5-16}$$

令 $\tanh(i\xi)$ 各幂次项的系数均为零得到方程组：

$$\begin{aligned}&f1=-2(c^2-1+rc)a_1+2\beta a_1^3,\\&f2=-2a(c+1)a_1+2\beta a_0a_1^2,\\&f3=\delta^2a_1+2a_1c^2-2a_1+2a_1rc,\\&f4=\delta^2a_0+2a(c+1)a_1.\end{aligned}\tag{5-17a-5-17d}$$

由 f1 解得：

$$a_1=0,a_1=\frac{\sqrt{\beta(c^2-1+rc)}}{\beta},\quad a_1=\frac{-\sqrt{\beta(c^2-1+rc)}}{\beta}$$

由 f2 得

$$a_0=0,a_0=\frac{a\sqrt{\beta}}{\beta\sqrt{(c^2-1+rc)}},\quad a_0=\frac{-a\sqrt{\beta}}{\beta\sqrt{(c^2-1+rc)}}$$

再代入 f3，f4 得到条件表达式：

$\delta^2+2c^2-2+2rc=0$ 即有：

$$c=-\frac{r}{2}+\frac{\sqrt{r^2-2\delta^2+4}}{2},\quad c=-\frac{r}{2}-\frac{\sqrt{r^2-2\delta^2+4}}{2}$$

方程（1.3.1）的解是：

$$u(x,t)=\pm\frac{a\sqrt{\beta}}{\beta\sqrt{(c^2-1+rc)}}+\pm\frac{\sqrt{\beta(c^2-1+rc)}}{\beta}\tanh(i(x+\xi t)),$$

5.4.2 Ginzburg-Landau 方程

非线性耦合系统振幅的演变通常可以划为下列 Ginzburg-Landau 方程

$$iu_t+\alpha u_{xx}+\beta|u|^2u-bu-iau=0, \tag{5-18}$$

其中α，β分别称为频散系数和 Landau 系数，它们通常为复数，b 为故有频率，a 为增长率。

令$\xi=x+ct$对（5-18）做形波变换得：

$$icu_\xi+\alpha u_{\xi\xi}+\beta|u|^2u-bu-iau=0, \tag{5-19}$$

令$u(\xi)=\phi(\xi)=a_{-1}\tanh(i\xi)^{-1}+a_0+a_1\tanh(i\xi)$，

原方程可化为：

$$\begin{aligned}&ic\left(\frac{a_{-1}}{\tanh(i\xi)}+a_0+a_1\tanh(i\xi)\right)+a\left(\frac{-2a_{-1}(1-\tanh(i\xi)^2)^2}{\tanh(i\xi)^3}\right.\\&\left.+\frac{-2a_{-1}(1-\tanh(i\xi)^2)}{\tanh(i\xi)}+2a_{-1}\tanh(i\xi)(1-\tanh(i\xi)^2)\right)\\&+2\beta\left(\frac{a_{-1}}{\tanh(i\xi)}+a_0+a_1\tanh(i\xi)\right)\left(a_1\tanh(i\xi)+\frac{a_{-1}}{\tanh(i\xi)}\right)^2\\&-(b+ia)\left(\frac{a_{-1}}{\tanh(i\xi)}+a_0+a_1\tanh(i\xi)\right)=0,\end{aligned} \tag{5-20}$$

令$\tanh(i\xi)$各幂次项的系数均为零得到方程组：

$$
\begin{aligned}
&f1 = 2\beta a_1^{\ 3} - 2\alpha a_1 = 0, \\
&f2 = -i\alpha a_1 + 6\beta a_1^{\ 2}\alpha_{-1} + 2\alpha a_1 + ica_1 - ba_1 = 0, \\
&f3 = ia_0\alpha - ba_0 + 4\beta a_0 a_1 a_{-1} + ica_0 = 0, \\
&f4 = ica_{-1} - ba_{-1} + 2\alpha a_{-1} - i\alpha a_{-1} + 6\beta a_1 a_{-1}^{\ 2} = 0, \\
&f5 = 2\beta a_{-1}^{\ 3} - 2aa_{-1} = 0, \\
&f6 = 2\beta a_0 a_1^{\ 2} = 0, \\
&f7 = 2a_0 a_{-1}^{\ 2} = 0;
\end{aligned}
\qquad \text{(5-21a-5-21d)}
$$

由 f6，f7，f3 解得：

$a_0 = 0,$

当 $a_0 = 0,$ 由 f1，f5 得

$$a_1 = 0, a_1 = \frac{\sqrt{\beta\alpha}}{\beta},\ a_1 = \frac{-\sqrt{\beta\alpha}}{\beta}$$

$$a_0 = 0, a_0 = \frac{\sqrt{\beta\alpha}}{\beta},\ a_0 = \frac{-\sqrt{\beta\alpha}}{\beta}$$

再代入 f2，f4 得到条件表达式：

$\mathrm{i}(-\frac{\alpha\sqrt{\beta\alpha}}{\beta}+\frac{c\sqrt{\beta\alpha}}{\beta})+(-\frac{b\sqrt{\beta\alpha}}{\beta}+\frac{8\beta\sqrt{\beta\alpha}}{\beta})=0$ 即有：

$\mathrm{c}=\alpha$，$\mathrm{b}=8\alpha$

方程（5-18）的解是：

$$u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{\beta\alpha}}{\beta}\tanh(\,i(x+\xi t))^{-1} \pm \frac{\sqrt{\beta\alpha}}{\beta}\tanh(\,i(x+\xi t))\ ,$$

$$u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{\beta\alpha}}{\beta}\tanh(\,i(x+\xi t))^{-1} \text{或} u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{\beta\alpha}}{\beta}\tanh(\,i(x+\xi t))$$

5.5 总结

应用 tanh 法并借助于计算机符号计算系统 Maple，本章求解分别求解了 Noyes-Field 方程组，非线性 Schrödinger 方程和 Ginzburg-Landau 方程，从文中我们可以得到如下结论，tanh 方法可以求得多种非线性偏微分方程的精确解，尤其是对于一些比较复杂的非线性方程更能体现出这种方法的优越性。

第六章 总结与展望

众所周知，非线性问题十分复杂，计算机的使用使非线性科学取得了突破性的进展，使它成为当今世界科学的前沿与热点，对非线性科学的研究也跨越了原学科界限，它不仅贯穿数理科学、生命科学、空间科学、地球科学、环境科学和信息科学，还涉及人文社会科学的众多领域。在这些非线性问题的研究中非线性偏微分方程占有重要地位。

本论文主要围绕典型非线性偏微分方程的求解问题来研究非线性偏微分方程。

下面对本文的工作总结如：

1、本文研究内容之一为非线性偏微分方程的 Painlevé 性质。首先介绍了 Painlevé 性质的定义和奇异分析原理，而后介绍了 WTC 方法并利用这个方法著重验证了变系数 KP 方程的 Painlevé 性质，进而求得了变系数 KP 方程的自 Bäcklund 变换。

2、 本文的研究内容之二是非线性偏微分方程的求解方法之一——首次积分法。首先介绍了首次积分法的原理，而后利用这个方法求解 HBK 系统，并得到其精确解。最后利用 Maple 的画图功能描绘出 HBK 系统解孤立子解的形式，得到其解有周期的属性。

3、 本文的研究内容之三是非线性偏微分方程的求解方法之一——tanh 法。首先介绍了 tanh 法的原理，由于 tanh 法的应用范围比较广，应用此种方法能够比较灵活的求解各类非线性方程，因此我将其主要的应用如求解非线性方程，求解非线性方程组，求解带有复系数项的情况，分别给与实例，证明其应用的广泛性和灵活性。

基于以上的研究作者认为非线性偏微分方程求解方法的研究还待进一步发展。由于非线性偏微分方程本身的复杂性，人们目前还无法确定其通解的形式，本文的方法尽管对非线性偏微分方程的求解具有普适性，但是我们仅做了初步的探索，论文中所提到的首次积分法的应用范围相对较窄，目前还无法应用于高维的非线性方程，可对此方法进行进一步探究。而 tanh 方法虽然应用范围比较广，但是解的形式比较单一。

对于大多数非线性偏微分方程，目前，人们只找到了部分解，可对其进一步探索，寻求新解，从而获得非线性方程的新解。因此寻找新的有效的方法来研究非线性方程的精确解具有一个广阔的天地，需要很多人的进一步努力探索。

总之，对于非线性偏微分方程求解的研究任重而道远，我将继续努力。

参考文献

[1] J.S.Russell,Report on Waves,British Association Reports. John Murray. 1844.321.

[2] D.J. Korteweg de Vries G. Phil. Mag.1895(39):422.

[3] C.S.Gardner，J.M.Greene，M.D.Kruskal & R.M.Miura，Phys. Rev. Lett.，1967(19):1095.

[4] 刘式适,刘式达. 物理学中的非线性方程. 北京: 北京大学出版社, 2001; 32-53, 305-380.

[5] 杨伯君,赵玉芳. 高等数学物理方法. 北京: 北京邮电大学出版社, 2003; 59-158.

[6] P.A.Clarkson, E.L.Mansfield. On a shallow water equation. Nonlinearity, 7, 1994; 975-1000.

[7] C.H.Gu, Z.X.Zhou. On the Darboux matrix of Bäcklund transformations of the AKNS system. Lett. Math. Phys., 13, 1987; 179.

[8] R.Hirota. Exact solution of the Korteweg-de-Vries equation for multiple collisions of soliton. Phys. Rev. Lett., 27, 1971; 1192-1194.

[9] Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H., Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painlevé type, Lett. Nuovo Cimento, 23, 1978, 333-338.

[10] Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H., A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type I, J. Math. Phys. 21, 1980, 715-721; II, 21, 1980, 1006-1015.

[11] Weiss J., Bäcklund transformation and the Painlevé property, J. Math. Phys. 27, 1986, 1293-1305.

[12] P.D.Lax，Commu. Pure Appl. Math.. 1968(21):467.

[13] Olver P. J. Application of Lie group to Differential Equation. Berlin:1986. 1-178.

[14] 王明亮,李志斌,周宇斌.齐次平衡原则及其应用,兰州大学学报（自然科学版）,35（3）,1999,8－16.

[15] M.J.Ablowitz and P.A.Clarkson,Solitons,nonlinear evolution equations and Inverse scattering,Cambridge:Cambridge University Press, 1991.

[16] C. S. Gardner, etal., Method for solving the Kortoweg-deVries equation, Phys.Rev. Lett.,1967 19 : 1095.

[17] N.J. Zabusky and M .D .KruskalIn teraction of solitons in a collisionless plasma And there currence of initial status.Phys.Rev.Lett.1965, 14:2 40.

[18]M .Wadati,The modified Korteweg-deVries equation,J.Phys.Soe.Jp .,1972,32 :16 81.

[19]H.D.Waldquist and F.B.Estabrook, Prolongation structures of nonlinear evolution equation-J.Math .Phys.,1975,16:1 ; Prolongation structures of nonlinear evolution equations.11.1976,17:1293

[20]K.Wu,H.Y.Guo and S .k .Wang,Prolongation struclures of nonlinear systems in higher dimensions.Commun.Theor.Phys.,1983,2: 1425.

[21]H.Y.Gun, K.Wu and S. K. Wang, Inverse scattering transform and regular Riemann-Hilbert problem.Commun.Theor. Phys.,1983.2: 1169.

[22]H .Y .Guo,K.Wu and S.K.Wang,Prolongation structure,Bäcklund tr ansformation and principal homogeneous Hilbert problem in general relativity.Commun.Theor.Phys,1983,2 :883.

[23]H .Y .Guo,et al.,On the prolongation structure of Ernst equation.Cumutun.Theor,Phys.,1982,1: 661.

[24]C.Rogers,and W.R.Shadwick,Backlund transformations and their application,academic Press,New York , 1982.

[25]H.D.Wahlgnist and F.B.Estabronk,Backlund transformations for solitons of the Korleweg-de Vriu equation,Phys.Rev.Lett.,1973,31:1386-1390.

[26]J.weiss,M.Tabor andC.Carnvalo,The Painlevé property for partial differential equations.J.Ma th.Phys., 1983,24:522.

[27]M .Wadatietal.,Simple derivation of Backlund transfortation from Riccati form of inverse method Prog. Theor. phys.,1975,53:418.

[28]Y.B.Zeng, etal.,Canonical explicit Backlund transformations with spectrality for constrained B ows of solution hierarchies.Physica A ,2002,303:321.

[29]范恩贵.可积系统与计算机代数.北京:科学出版社，2003. 1-160.

[30]M.J.Ablowitzetal.,A connection between nonlinear evolution equations and ordinary Diffierential equations of P-type.J.Math.Phys.,1980,21 :715.

[31]R.Hirota,Exact solution of the Korteweg-de Vries.equation for multiple collisions of so litons.Ph ys.Rev. Lett.,1971,27:1112; Avariety of nonlinear network equations generated from theB acklund transformation for the Toda lattice.Prog.Theor.Phys.Suppl.,1976,59 :64

[32]X.B.Ilu and 11.W.Tom,Somenew result on the Blaszak-hlarciniak,3- field and 4 -field lattices.Rep. Math.Phys.,New integrable differential-difference systems:Lax

pairs,bilinear forms and Solution solutions.2000,46:99.

[33]曾云波.与 A_j 相联系的半 Toda 方程的 Lax 对与 Backlund 变换,数学学报,35,1992,454.

[34]J. Weiss, M. Tabor, G. Carnevale. The Painlevé property for partial equations. J. Math. Phys., 24, 1983; 522-526.

[35]Zhu Z N 1992 Acta Phys. Sin. 41 1561

[36]Zhang J F and Chen F Y 2001 Acta Phys. Sin. 50 1648

[37]Zhu Z N 1993 Phys. Lett. A 182 277

[38]Xie Y C 2oo3 ys. Lett. A 310 161

[39]Ma W X 2oo2 Phys. Lett. A 301 35

[40]Lou S Y 1996 J. Phys. A : Math. Gen. 29 5989

[41]Zheng X D, Chen Y and Zhang H Q 2003 Phys. Lett. A 311 145

[42]Sabry R, Zahran M A an d Fan E G 2004 Phys. Lett. A 326 93

[43]Z.S.Feng. On explicit exact solutions to the compound Burgers-KdV equation. J. Physics Letters A, 293, 2002; 57-66.

[44]Z.S.Feng. Exact solution to an approximate sine-Gordon equation in (n+1)-dimensional space. J. Physics Letters A, 302, 2002; 64-76.

[45]Z.S.Feng, X.H.Wang. The first integral method to the two-dimensional Burgers-Korteweg-de Vries equation. J. Physics Letters A, 308, 2003; 173-178.

[46]Ruan H Y, Chen Y X 1998 Acta Phys. Sin. (Over. Ed.)7 241

[47]Parkes E J,Duffy B R.An Automated Tanh-function Method for Finding Solitary Wave Solution to Nonlinear Evolultion Equations[J].Comp Phys Commun,1996(98):288.

[48]Fan Engui. Extended tanh-function method and its application to nonlinear equations[J].Physics Lett A, 2000,277:212-218.

[49]Fan Engui. Soliton solution for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation and a coupled MKdV equation[J].Physics Lett A,2001,282:18-22.

[50]Khuri S A. A complex tanh—function method applied to nonlinear equations of Schrodinger type[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2004; 20: 1037—1040

[51]Shang Ya dong. Explicit and exact solutions for unstable nonlinear Schrödinger equation[J]. Journal of Guangzhou University (Natural Scarce Edition), 2004, 3(1): 1 — 5.

[52] Chang Qian—shun, Guo Bo-ling. The finite diference method for multi—dimensional nonlinear Schrödinger equations with the wave operator[J]. J Comp

Math，1989，8(3)：146—157.

[53]Liang Zong-qi. The spectral methods for nonlinear Schrödinger equation with wave operator[J]. Journal of Shan xi Teachers' University(Natural Science Edition)，2002，16(2)：9—15.

[54]叶其考，李正元.反应扩散方程引论[M].北京：科学出版社，1990.

[55]WANG MING-XIN,XIONG SHU-LIN,YE QI-XIAO.Explicit wave front solutions of Noyes—Field for the Belousov-Zhaobotinskii reaction[J].J Math Anal Appl,1994,182(3):705-717.

[56]B.A Kupershmidt,Commun.Math.Phys.99(1985)51.

[57]Y.S.Li,W.X.Ma,and J.E.Zhang,Phys.Lett.A 275(2000) 60.

[58]D.S.Li and H.Q.Zhang,Commun.Theor.Phys.(Beijing, China)41(2004)499.

硕士期间录用的论文

[1] 刘晓蕾，郭玉翠. HBK 系统的精确解. 中国科学技术学报,2006,20(5):44-46,50.

[2]刘晓蕾，《PKCS#11 中有关 Session 的研究与实现》接收期刊：《计算机安全》.

[3] 刘晓蕾，《中间件的设备管理实现》接收期刊：《计算机与现代化》.

[4] 刘晓蕾，《CSP 与 PKCS#11 对象的存储讨论》接收期刊：《计算机应用实践》.

致 谢

首先我要深深地感谢我的导师郭玉翠教授。郭老师的高尚品德，严谨治学的态度，渊博的知识和孜孜不倦寻求教学真谛的精神，还有郭老师和蔼、乐观而又豁达的态度都对我产生了深远的影响。从郭老师那里，我不只学到了很多的科学知识，而且还有积极的进取精神和为人处事的道理，这将是我千金难买的人生财富，必将使我受益终生！值此论文完成之际，我要对郭老师的精心培养和辛勤指导表示诚挚的感谢！感谢几年来郭老师在学术科研上的精心指导，感谢郭老师在学习和生活上无微不至的关怀，感谢郭老师为我而倾注的大量心血。

衷心地感谢北京邮电大学理学院领导和老师们对我多年的教诲和帮助。

衷心地感谢李华英、徐淑奖、叶鹏、姜璐、孙亮、刘新源、方勤志、朱祥翠，感谢他们在共同学习期间给予我的热情帮助。

衷心地感谢我的室友曲苗苗、张亚星和向文，感谢她们在学习和生活上对我的关心和照顾，陪我渡过人生中难忘的一段时光。

深深感谢我的父母养育了我，给我精神和物质上的无私关心和支持，给我创造接受高等教育的机会。感谢在我成长道路上曾经关心和帮助过我的所有老师、同学、朋友和亲人！

硕士生涯即将结束，回首三年，历历在目，能同众多好老师、同学和朋友一起度过是我莫大的荣幸和收获。

刘晓蕾

2008年3月3日