2—1　设水位自动控制系统的原理方案如图 1—18 所示，其中 Q_1 为水箱的进水流量，　Q_2 为水箱的用水流量，H 为水箱中实际水面高度。假定水箱横截面积为 F，希望水面高度　为 H_0，与 H_0 对应的水流量为 Q_0，试列出水箱的微分方程。

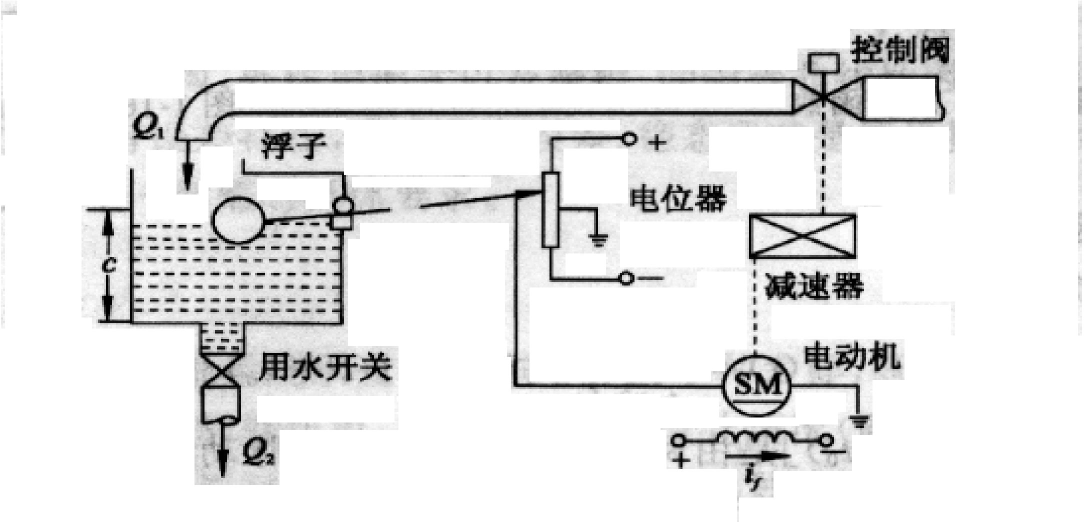


图 1-18　液位自动控制系统

解　当 $Q_1 = Q_2 = Q_0$ 时，$H = H_0$；当 $Q_1 \neq Q_2$ 时，水面高度 H 将发生变化，其变化率与流量差 $Q_1 - Q_2$ 成正比，此时有

$$F\frac{d(H-H_0)}{dt} = (Q_1 - Q_0) - (Q_2 - Q_0)$$

于是得水箱的微分方程为

$$F\frac{dH}{dt} = Q_1 - Q_2$$

2—2　设机械系统如图 2—57 所示，其中 x_i 为输入位移，x_0 为输出位移。试分别列写各系统的微分方程式及传递函数。

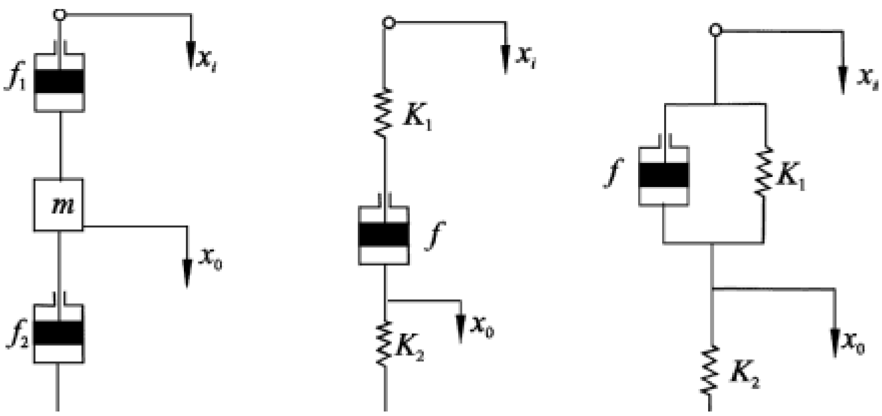


图 2—57　机械系统

解　①图 2—57(a)：由牛顿第二运动定律，在不计重力时，可得

$$f_1(\dot{x}_i-\dot{x}_0)-f_2\dot{x}_0=m\ddot{x}_0$$

整理得

$$m\frac{d^2x_0}{dt^2}+(f_1+f_2)\frac{dx_0}{dt}=f_1\frac{dx_i}{dt}$$

将上式进行拉氏变换，并注意到运动由静止开始，即初始条件全部为零，可得

$$\left[ms^2+(f_1+f_2)s\right]X_0(s)=f_1sX_i(s)$$

于是传递函数为

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{f_1}{ms+f_1+f_2}$$

②图 2—57(b)：其上半部弹簧与阻尼器之间，取辅助点 A，并设 A 点位移为 x，方向朝下；而在其下半部工。引出点处取为辅助点 B。则由弹簧力与阻尼力平衡的原则，从 A 和 B 两点可以分别列出如下原始方程：

$$K_1(x_i-x)=f(\dot{x}-\dot{x}_0)$$

$$K_2x_0=f(\dot{x}-\dot{x}_0)$$

消去中间变量 x，可得系统微分方程

$$f(K_1+K_2)\frac{dx_0}{dt}+K_1K_2x_0=K_1f\frac{dx_i}{dt}$$

对上式取拉氏变换，并计及初始条件为零，得系统传递函数为

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{fK_1s}{f(K_1+K_2)s+K_1K_2}$$

③图 2—57(c)：以 x_0 的引出点作为辅助点，根据力的平衡原则，可列出如下原始方程：

$$K_1(x_i-x)+f(\dot{x}_i-\dot{x}_0)=K_2x_0$$

移项整理得系统微分方程

$$f\frac{dx_0}{dt}+(K_1+K_2)x_0=f\frac{dx_i}{dt}+K_1x_i$$

对上式进行拉氏变换，并注意到运动由静止开始，即

$$x_i(0)=x_0(0)=0$$

则系统传递函数为

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{fs+K_1}{fs+(K_1+K_2)}$$

2-3 试证明图2-58(a)的电网络与(b)的机械系统有相同的数学模型。

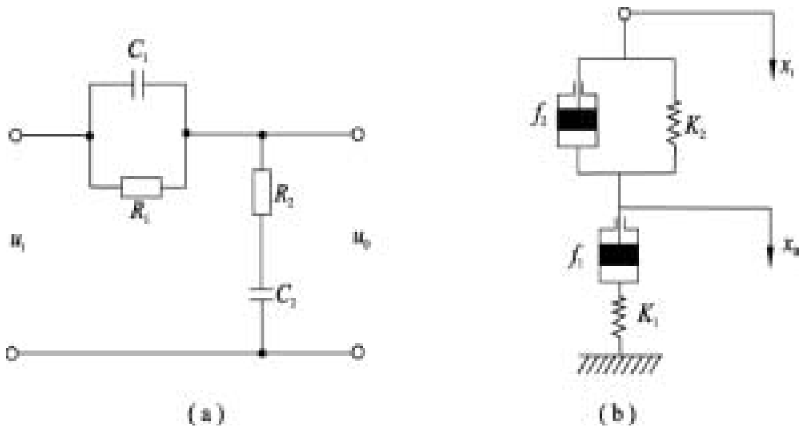


图 2-58　　电网络与机械系统

解：（a）：利用运算阻抗法得：$Z_1 = R_1 // \frac{1}{C_1 s} = \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{R_1 + \frac{1}{C_1 s}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} = \frac{R_1}{T_1 s + 1}$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = \frac{1}{C_2 s}\left(R_2 C_2 s + 1\right) = \frac{1}{C_2 s}\left(T_2 s + 1\right)$$

所以：$\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{C_2 s}(T_2 s + 1)}{\frac{R_1}{T_1 s + 1} + \frac{1}{C_2 s}(T_2 s + 1)} = \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{R_1 C_2 s + (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$

(b)以 K_1 和 f_1 之间取辅助点 A，并设 A 点位移为 x，方向朝下；根据力的平衡原则，可列出如下原始方程：

$K_2(x_i - x_0) + f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) = f_1(\dot{x}_0 - \dot{x})$　（1）

$K_1 x = f_1(\dot{x}_0 - \dot{x})$　（2）

所以 $K_2(x_i - x_0) + f_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) = K_1 x$　（3）

对（3）式两边取微分得

$K_2(\dot{x}_i - \dot{x}_0) + f_2(\ddot{x}_i - \ddot{x}_0) = K_1 \dot{x}$　（4）

将（4）式代入（1）式中得

$$K_1 K_2 (x_i - x_0) + K_1 f_2 (\dot{x}_i - \dot{x}_0) = K_1 f_1 \dot{x}_0 - f_1 K_2 (\dot{x}_i - \dot{x}_0) - f_1 f_2 (\ddot{x}_i - \ddot{x}_0)$$

整理上式得

$$\begin{aligned} & f_1 f_2 \ddot{x}_0 + f_1 K_2 \dot{x}_0 + K_1 f_1 \dot{x}_0 + K_1 f_2 \dot{x}_0 + K_1 K_2 x_0 \\ &= f_1 f_2 \ddot{x}_i + f_1 K_2 \dot{x}_i + K_1 f_2 \dot{x}_i + K_1 K_2 x_i \end{aligned}$$

对上式去拉氏变换得

$$\left[f_1 f_2 s^2+(f_1K_2+K_1f_1+K_1f_2)s+K_1K_2\right]X_0(s)$$
$$=\left[f_1 f_2 s^2+(f_1K_2+K_1f_2)s+K_1K_2\right]X_i(s)$$

所以：

$$\frac{X_0(s)}{X_i(s)}=\frac{f_1f_2s^2+(f_1K_2+K_1f_2)s+K_1K_2}{f_1f_2s^2+(f_1K_2+K_1f_1+K_1f_2)s+K_1K_2}=\frac{\frac{f_1f_2}{K_1K_2}s^2+(\frac{f_1}{K_1}+\frac{f_2}{K_2})s+1}{\frac{f_1f_2}{K_1K_2}s^2+(\frac{f_1}{K_1}+\frac{f_2}{K_2})s+1+\frac{f_1}{K_2}}$$

$$=\frac{(\frac{f_1}{K_1}s+1)(\frac{f_2}{K_2}s+1)}{(\frac{f_1}{K_1}s+1)(\frac{f_2}{K_2}s+1)+\frac{f_1}{K_2}}$$

所以图 2-58(a)的电网络与(b)的机械系统有相同的数学模型。

2—4 试分别列写图 2-59 中个无源网络的微分方程式。

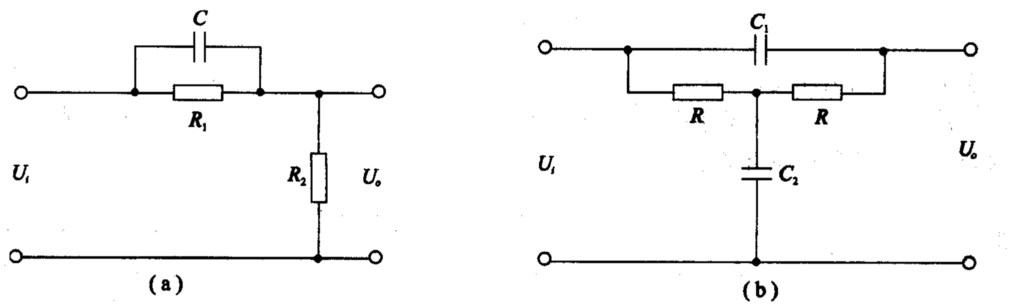


图 2-59 无源网络

解：(a) :列写电压平衡方程：

$$u_i-u_0=u_C \qquad i_C=C\frac{du_C}{dt} \qquad i_{R1}=\frac{u_C}{R_1}$$

$$u_0=(i_C+i_{R1})R_2=\left[C\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{R_1}\right]R_2=\left[C\frac{d(u_i-u_0)}{dt}+\frac{u_i-u_0}{R_1}\right]R_2$$

整理得：

$$CR_2\frac{du_0}{dt}+\left(C\frac{R_2}{R_1}+1\right)u_0=CR_2\frac{du_i}{dt}+C\frac{R_2}{R_1}u_i$$

(b) :列写电压平衡方程：

$$u_i-u_0=u_{C1} \quad (1) \qquad i_{C1}=C_1\frac{du_{C1}}{dt} \quad (2)$$

$$i_{C2}=\frac{u_{C1}+i_{C1}R}{R}+i_{C1}=\frac{u_{C1}}{R}+2i_{C1}=C_2\frac{du_{C2}}{dt}=C_2\frac{d(u_0-i_{C1}R)}{dt} \qquad (3)$$

即：$\dfrac{u_{C1}}{R}+2i_{C1}=C_2\dfrac{d(u_0-i_{C1}R)}{dt}$ （4）

将（1）（2）代入（4）得：

$$\frac{u_i-u_0}{R}+2C_1\frac{d(u_i-u_0)}{dt}=C_2\frac{du_0}{dt}-C_1C_2R\frac{d^2u_{C1}}{dt^2}$$

即：$\dfrac{u_i}{R}-\dfrac{u_0}{R}+2C_1\dfrac{du_i}{dt}-2C_1\dfrac{du_0}{dt}=C_2\dfrac{du_0}{dt}-C_1C_2R\dfrac{d^2u_i}{dt^2}+C_1C_2R\dfrac{d^2u_0}{dt^2}$

整理得：

$$C_1C_2R\frac{d^2u_0}{dt^2}+(C_2+2C_1)\frac{du_0}{dt}+\frac{u_0}{R}=C_1C_2R\frac{d^2u_i}{dt^2}+\frac{u_i}{R}+2C_1\frac{du_i}{dt}$$

2-5　设初始条件均为零，试用拉氏变换法求解下列微分方程式，并概略绘制x(t)曲线，指出各方程式的模态。

（1）$2\dot{x}(t)+x(t)=t;$

解：对上式两边去拉氏变换得：

（2s+1）X（s）=1/s²→ $X(s)=\dfrac{1}{s^2(2s+1)}=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}+\dfrac{4}{2s+1}$

运动模态 $e^{-0.5t}$

所以：$x(t)=t-2(1-e^{-\frac{1}{2}t})$

（2）$\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=\delta(t)$ 。

解：对上式两边去拉氏变换得：

$$(s^2+s+1)X(s)=1\rightarrow \quad X(s)=\frac{1}{(s^2+s+1)}=\frac{1}{(s+1/2)^2+3/4}$$

运动模态 $e^{-t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

所以：$x(t)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

（3）$\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)=1(t)$ 。

解：对上式两边去拉氏变换得：

$$(s^2+2s+1)X(s)=\frac{1}{s}\rightarrow X(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+1)}=\frac{1}{s(s+1)^2}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

运动模态$e^{-t}(1+t)$

所以：$x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}=1-e^{-t}(1+t)$

2-6　在液压系统管道中，设通过阀门的流量满足如下流量方程：

$$Q=K\sqrt{P}$$

式中K为比例常数，P为阀门前后的压差。若流量Q与压差P在其平衡点(Q_0,P_0)附近作微小变化，试导出线性化方程。

解：

设正常工作点为A，这时$Q_0=K\sqrt{P_0}$

在该点附近用泰勒级数展开近似为：

$$y=f(x_0)+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0}(x-x_0)$$

即$Q-Q_0=K_1(P-P_0)$

其中$K_1=\left(\frac{dQ}{dP}\right)_{P=P_0}=\frac{1}{2}K\frac{1}{\sqrt{P_0}}$

2-7 设弹簧特性由下式描述：

$$F=12.65y^{1.1}$$

其中，是弹簧力；是变形位移。若弹簧在变形位移附近作微小变化，试推导的线性化方程。

解：

设正常工作点为A，这时$F_0=12.65y_0^{1.1}$

在该点附近用泰勒级数展开近似为：

$$y=f(x_0)+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0}(x-x_0)$$

即$F-F_0=K_1(y-y_0)$

其中$K_1=\left(\frac{dF}{dy}\right)_{y=y_0}=12.65\times1.1y_0^{0.1}=13.915\times1.1y_0^{0.1}$

2-8 设晶闸管三相桥式全控整流电路的输入量为控制角，输出量为空载整流电压，它们之间的关系为：

$$e_d=E_{d_0}\cos\alpha$$

式中是整流电压的理想空载值，试推导其线性化方程式。

解：

设正常工作点为A，这时$E_d=E_{d0}\cos\alpha_0$

在该点附近用泰勒级数展开近似为：

$$y = f(x_0) + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0}(x - x_0)$$

即 $e_d - E_{d_0}\cos\alpha_0 = K_s(\alpha - \alpha_0)$

其中 $K_s = \left(\frac{de_d}{d\alpha}\right)_{\alpha=\alpha} = -E_{d0}\sin\alpha_0$

2-9 若某系统在阶跃输入r(t)=1(t)时，零初始条件下的输出响应 $c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}$，试求系统的传递函数和脉冲响应。

解：对输出响应取拉氏变换的：

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \frac{s^2 + 4s + 2}{s(s+1)(s+2)}$$ 因为：$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{s}\Phi(s)$

所以系统的传递函数为：$\Phi(s) = \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{s}{(s+1)(s+2)} = 1 - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$

系统的脉冲响应为：$g(t) = \delta(t) - e^{-t} + e^{-2t}$

2-10 设系统传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

且初始条件 c(0)=-1, $\dot{c}$(0)＝0。试求阶跃输入 r(t)=1(t)时，系统的输出响应 c(t)。

解：由系统的传递函数得：

$$\frac{d^2c(t)}{dt^2} + 3\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = 2r(t) \qquad (1)$$

对式（1）取拉氏变换得：

$$s^2C(s) - sc(0) - \dot{c}(0) + 3sC(s) - 3c(0) + 2C(s) = 2R(s) \qquad (2)$$

将初始条件代入（2）式得

$$(s^2 + 3s + 2)C(s) + s + 3 = 2\frac{1}{s}$$

即：$C(s) = \frac{2 - s^2 - 3s}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{2}{s} - \frac{2s + 6}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{2}{s+2}$

所以：$c(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$

2-11 在图 2-60 中，已知和两方框相对应的微分方程分别是

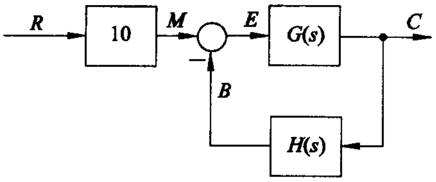


图 2-60 题 2-11 系统结构图

$$6\frac{dc(t)}{dt}+10c(t)=20e(t)$$

$$20\frac{db(t)}{dt}+5b(t)=10c(t)$$

且初始条件均为零，试求传递函数 $C(s)/R(s)$ 及 $E(s)/R(s)$

解：系统结构图及微分方程得：

$$G(s)=\frac{20}{6s+10} \qquad H(s)=\frac{10}{20s+5}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{10G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{10\dfrac{20}{6s+10}}{1+\dfrac{20}{6s+10}\dfrac{10}{20s+5}} \qquad \frac{E(s)}{R(s)}=\frac{10}{1+G(s)H(s)}=\frac{10}{1+\dfrac{20}{6s+10}\dfrac{10}{20s+5}}$$

$$=\frac{200(20s+5)}{(6s+10)(20s+5)+200}=\frac{200(20s+5)}{120s^2+230s+250} \qquad =\frac{10(20s+5)(6s+10)}{(6s+10)(20s+5)+200}=\frac{1200s^2+1500s+500}{120s^2+230s+250}$$

2-12 求图 2-61 所示有源网络的传递函数

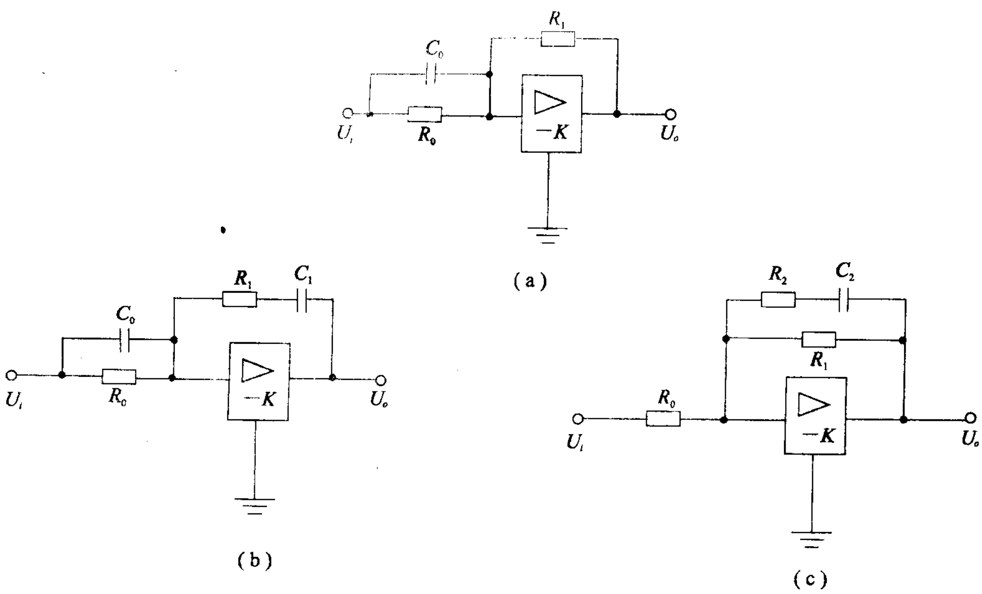


图 2-61 有源网络

解：(a) $Z_0=R_0//\dfrac{1}{C_0s}=\dfrac{R_0\dfrac{1}{C_0s}}{R_0+\dfrac{1}{C_0s}}=\dfrac{R_0}{T_0s+1} \qquad T_0=R_0C_0$

$$\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_1}{Z_0} = -\frac{R_1}{R_0}(T_0 s + 1)$$

(b) $Z_0 = R_0 // \frac{1}{C_0 s} = \frac{R_0 \frac{1}{C_0 s}}{R_0 + \frac{1}{C_0 s}} = \frac{R_0}{T_0 s + 1}$ $\qquad T_0 = R_0 C_0$

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_1 s} = \frac{T_1 s + 1}{C_1 s} \qquad T_1 = R_1 C_1$$

$$\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_1}{Z_0} = -\frac{1}{R_0 C_1 s}(T_1 s + 1)(T_0 s + 1)$$

$$Z_{12} = R_1 //(R_2 + \frac{1}{C_2 s}) = R_1 // \frac{T_2 s + 1}{C_2 s}$$

(c) $= \frac{R_1 \frac{T_2 s + 1}{C_2 s}}{R_1 + \frac{T_2 s + 1}{C_2 s}} = \frac{R_1 (T_2 s + 1)}{T_2 s + R_1 + 1}$ $\qquad T_2 = R_2 C_2$

$$\frac{U_0(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_{12}}{R_0} = -\frac{R_1}{R_0} \frac{T_2 s + 1}{T_2 s + R_1 + 1}$$

2-13由运算放大器组成的控制系统模拟电路如图2-62所示，试求闭环传递函数Ｕｃ（ｓ）／Ｕｒ（ｓ）。

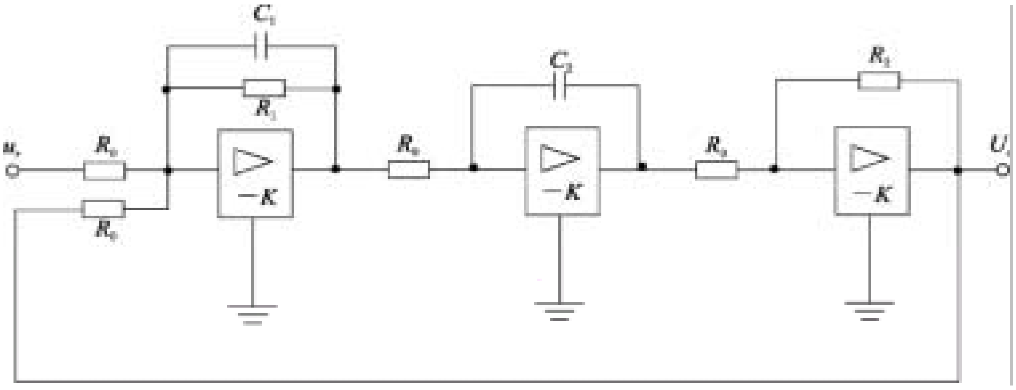


图2-62　控制系统模拟电路

解：$\frac{U_1(s)}{U_0(s) + U_i(s)} = -\frac{Z_1}{R_0}$ (1) $\quad \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Z_2}{R_0}$ (2) $\quad \frac{U_0(s)}{U_2(s)} = -\frac{R_2}{R_0}$ (3)

式（1）（2）（3）左右两边分别相乘得

$$\frac{U_0(s)}{U_0(s)+U_i(s)}=-\frac{Z_1}{R_0}\frac{Z_2}{R_0}\frac{R_2}{R_0}$$ 即

$$\frac{U_0(s)+U_i(s)}{U_0(s)}=-\frac{R_0{}^3}{Z_1Z_2R_2} \qquad 1+\frac{U_i(s)}{U_0(s)}=-\frac{R_0{}^3}{Z_1Z_2R_2}$$

所以： $$\frac{U_i(s)}{U_0(s)}=-\frac{R_0{}^3}{Z_1Z_2R_2}-1$$

$$\frac{U_0(s)}{U_i(s)}=-\frac{1}{\dfrac{R_0{}^3}{Z_1Z_2R_2}+1}=-\frac{Z_1Z_2R_2}{R_0{}^3+Z_1Z_2R_2}=-\frac{\dfrac{R_1}{T_1s+1}\dfrac{1}{C_2s}R_2}{R_0{}^3+\dfrac{R_1}{T_1s+1}\dfrac{1}{C_2s}R_2}$$

$$=-\frac{R_1R_2}{(T_1s+1)C_2sR_0{}^3+R_1R_2}$$

2-14 试参照例2-2给出的电枢控制直流电动机的三组微分方程式，画出直流电动机的结构图，并由结构图等效变换求出电动机的传递函数 $\Omega_m(s)/U_a(s)$ 和 $\Omega_m(s)/M_c(s)$

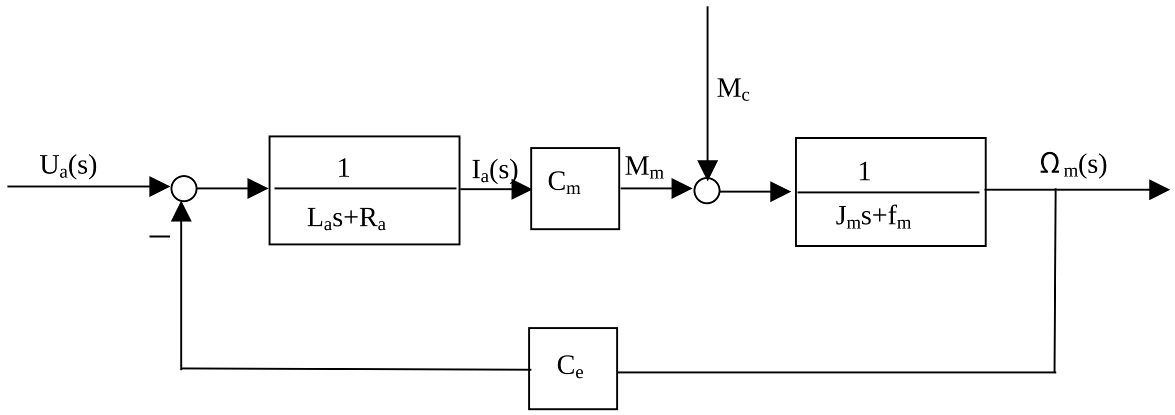
解：由公式（2-2）、（2-3）、（2-4）取拉氏变换

$$\frac{U_a(s)-E_a(s)}{L_as+R_a}=I_a(s) \qquad E_a(s)=C_e\Omega_m(s)$$

$$C_mI_a(s)=M_m(s)$$

$$\frac{M_m(s)-M_c(s)}{J_ms+f_m}=\Omega_m(s)$$

得到系统结构图如下：



$$\frac{\Omega_m(s)}{U_a(s)}=\frac{\dfrac{C_m}{L_as+R_a}\dfrac{1}{J_ms+f_m}}{1+\dfrac{C_eC_m}{L_as+R_a}\dfrac{1}{J_ms+f_m}}=\frac{C_m}{(L_as+R_a)(J_ms+f_m)+C_eC_m}$$

$$\frac{\Omega_m(s)}{M_c(s)}=\frac{\dfrac{1}{J_ms+f_m}}{1+\dfrac{C_eC_m}{L_as+R_a}\dfrac{1}{J_ms+f_m}}=\frac{L_as+R_a}{(L_as+R_a)(J_ms+f_m)+C_eC_m}$$

2-15 某位置随动系统原理方块图如图2-63所示。已知电位器最大工作角度$\theta_{\max}=330^o$，功率放大级放大系数为K3,要求：

(1) 分别求出电位器传递系数K0、第一级和第二级放大器的比例系数K1和K2；

(2) 画出系统结构图；

(3) 简化结构图，求系统传递函数$\theta_0(s)/\theta_i(s)$。

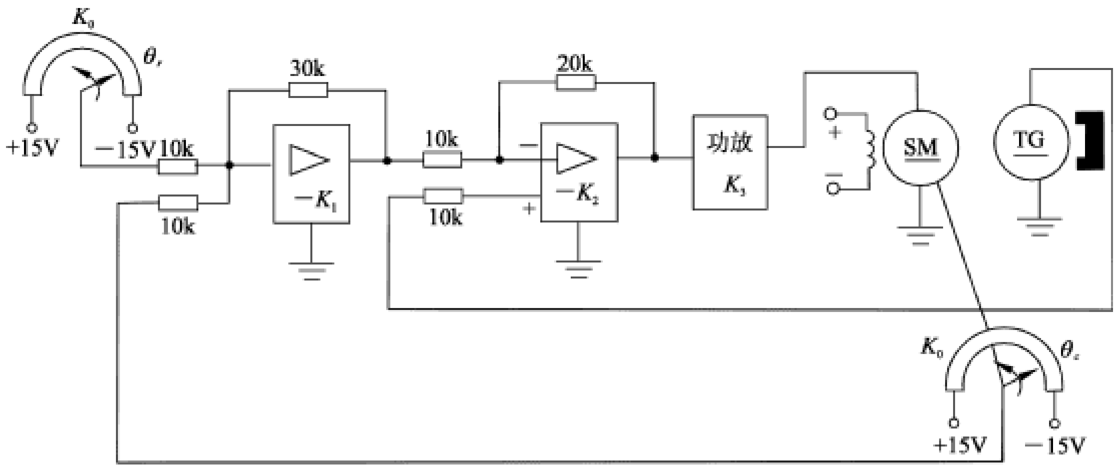


图2-63　 位置随动系统原理图

解：

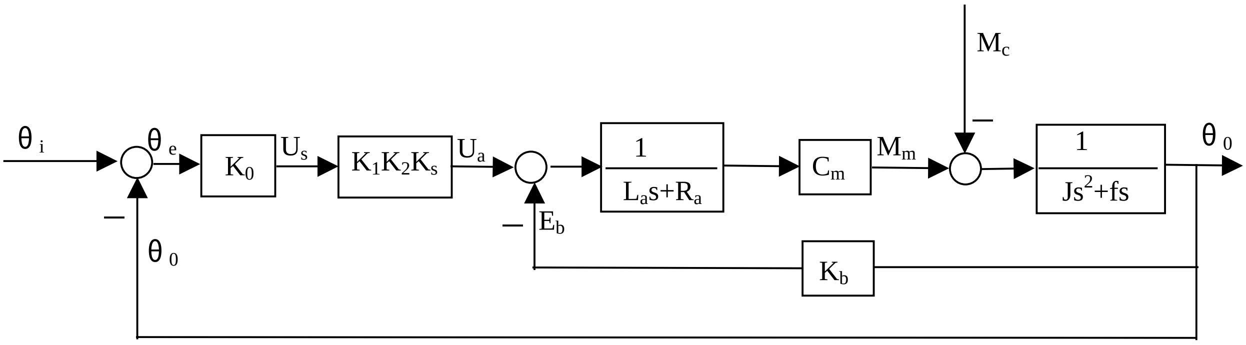
(1) $K_0=\dfrac{15V}{165^0}$　　$K_1=\dfrac{30}{10}=3$　　$K_2=\dfrac{20}{10}=2$

(2) $\theta_e(s)=\theta_i(s)-\theta_0(s)$　　$U_s(s)=K_0\theta_e(s)$　　$U_a(s)=K_1K_2K_sU_s(s)$

$U_a(s)=R_aI_a(s)+L_asI_a(s)+E_b(s)$　　$M_m(s)=C_mI_a(s)$

$Js^2\theta_0(s)+fs\theta_0(s)=M_m(s)-M_c(s)$　　$E_b(s)=K_b\theta_0(s)$

系统结构图如下：



(3) 系统传递函数$\theta_0(s)/\theta_i(s)$

$$\frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)}=\frac{K_0K_1K_2K_s\dfrac{\dfrac{C_m}{s(L_as+R_a)(Js+f)}}{1+\dfrac{C_mK_b}{s(L_as+R_a)(Js+f)}}}{1+K_0K_1K_2K_s\dfrac{\dfrac{C_m}{s(L_as+R_a)(Js+f)}}{1+\dfrac{C_mK_b}{s(L_as+R_a)(Js+f)}}}=\frac{\dfrac{K_0K_1K_2K_sC_m}{s(L_as+R_a)(Js+f)+C_mK_b}}{1+\dfrac{K_0K_1K_2K_sC_m}{s(L_as+R_a)(Js+f)+C_mK_b}}$$

$$=\frac{K_0K_1K_2K_sC_m}{s(L_as+R_a)(Js+f)+C_mK_b+K_0K_1K_2K_sC_m}$$

2-16 设直流电动机双闭环调速系统的原理线路如图 2-64 所示：要求

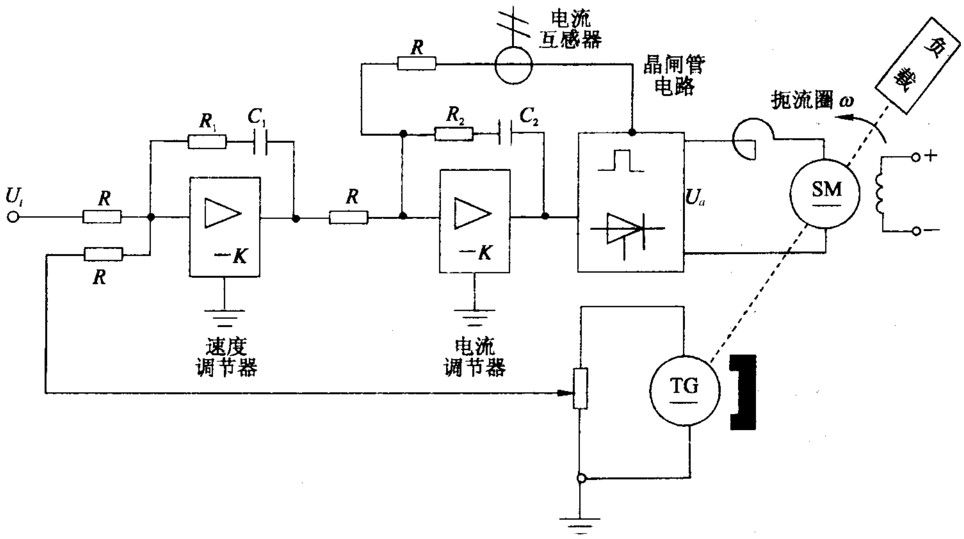


图 2-64 直流电动机调速系统原理图

(1) 分别求速度调节器和电流调节器的传递函数

(2) 画出系统结构图（设可控硅电路传递函数为$K_3/(\tau_3 s+1)$；电流互感器和测速发电机的传递函数分别为

K_4和K_5；直流电动机的结构图用题 2-14 的结果）；

（3） 简化结构图，求系统传递函数$\Omega(s)/U_i(s)$

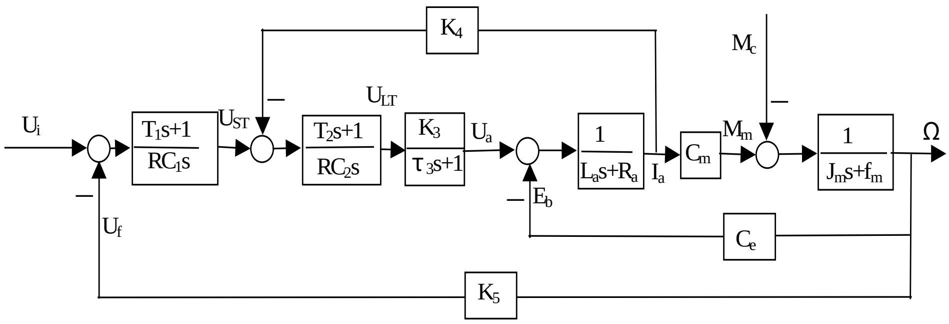
解：（1）速调

$$\frac{U_{ST}(s)}{U_i(s)-U_f(s)}=\frac{Z_1}{R}=\frac{R_1+\dfrac{1}{C_1 s}}{R}=\frac{R_1C_1s+1}{RC_1s}=\frac{T_1s+1}{RC_1s}$$

流调

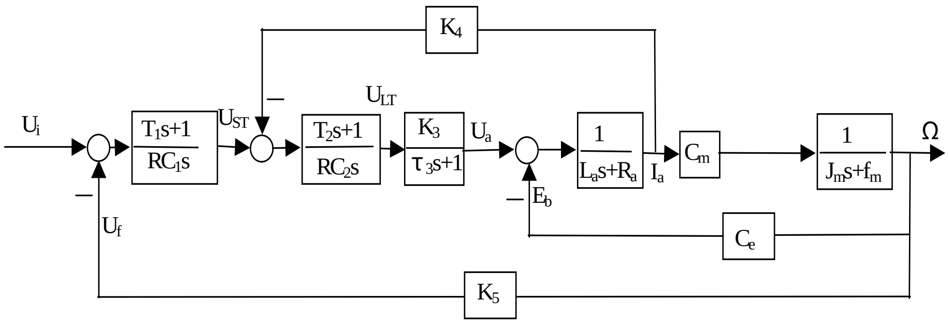
$$\frac{U_{LT}(s)}{U_{ST}(s)-U_{dlfk}(s)}=\frac{Z_2}{R}=\frac{R_2+\dfrac{1}{C_2 s}}{R}=\frac{R_2C_2s+1}{RC_2s}=\frac{T_2s+1}{RC_2s}$$

（2）系统结构图如下：

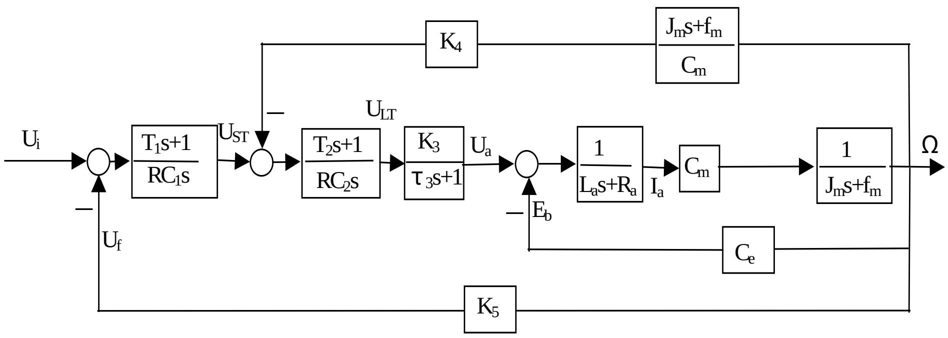


(3) 简化结构图，求系统传递函数$\Omega(s)/U_i(s)$

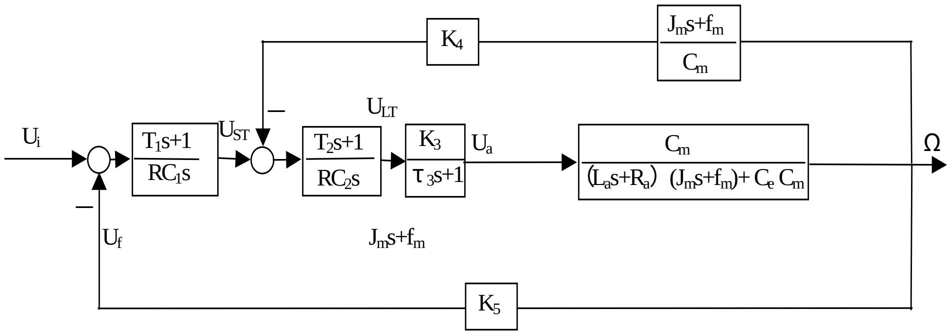
因为求系统传递函数$\Omega(s)/U_i(s)$，所以令$M_c=0$，系统结构图如下：



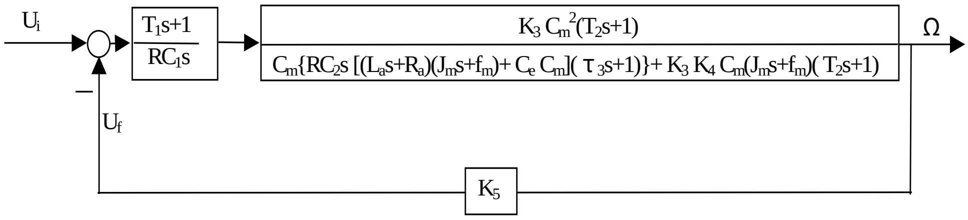
将 K4 后移到输出Ω，系统结构图化简如下：



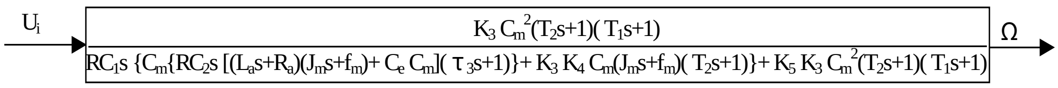
进一步化简得：



进一步化简得：



进一步化简得：



所以：

$$\frac{\Omega(s)}{U_i(s)}=$$

$$\frac{K_3C_m^2(T_2s+1)(T_1s+1)}{RC_1s\{C_m\{RC_2s[(L_as+R_a)(J_ms+f_m)+C_eC_m](\tau_3s+1)\}+K_3K_4C_m(J_ms+f_m)\}+K_5K_3C_m^2(T_2s+1)(T_1s+1)}$$

2-17 已知控制系统结构图如图2-65所示。试通过结构图等效变换求系统传递函数C(s)/R(s)。

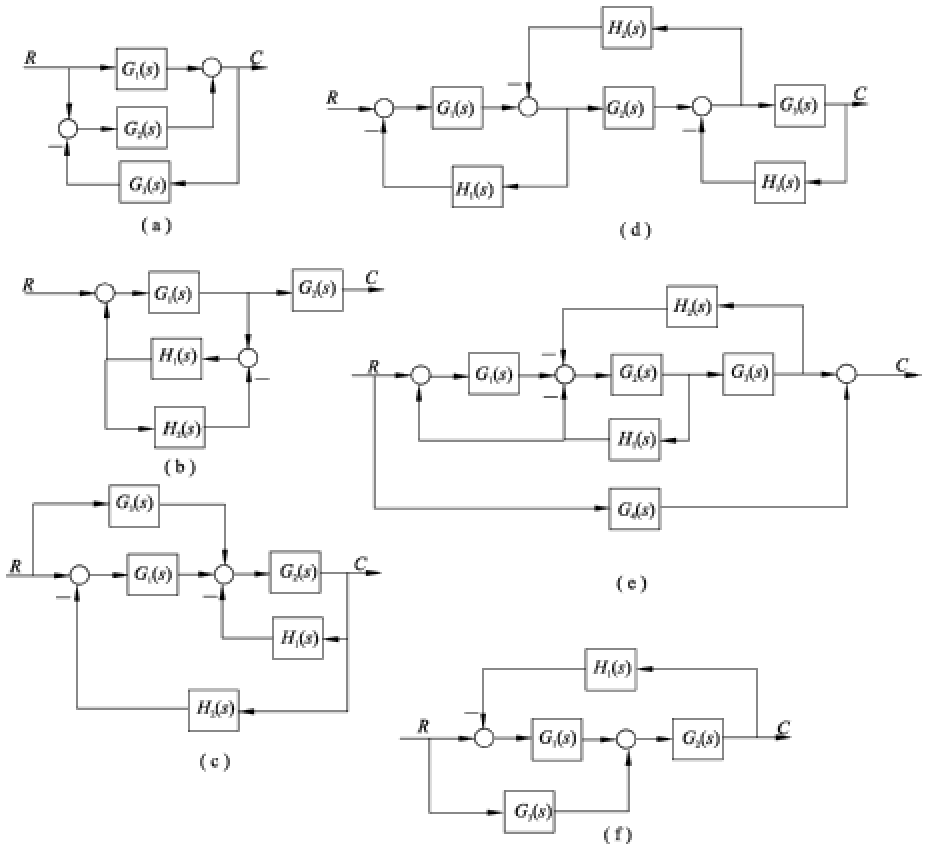
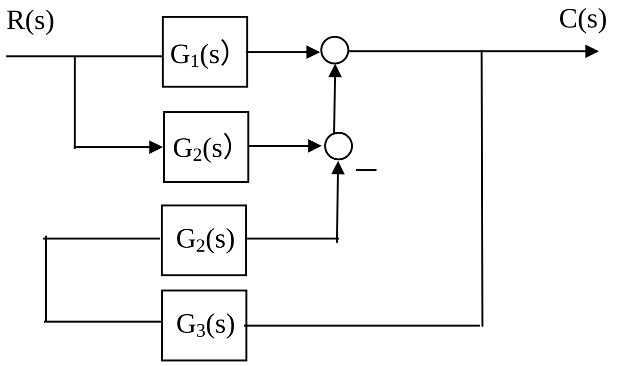
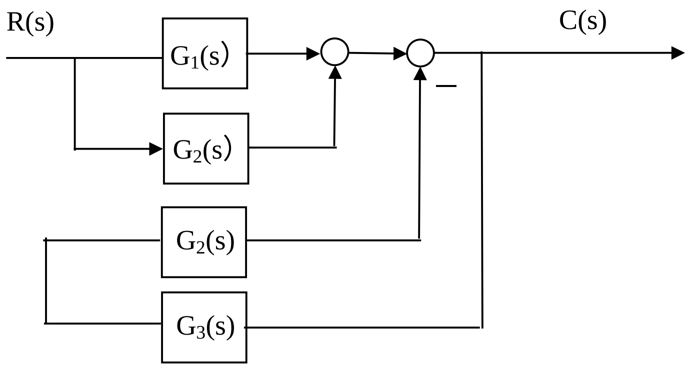
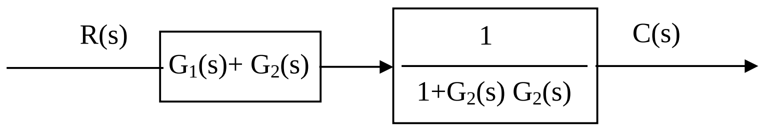


图2-65　　　题2-17系统结构图

解：(a)

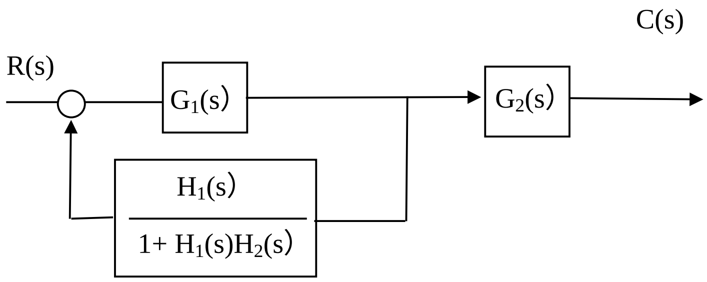


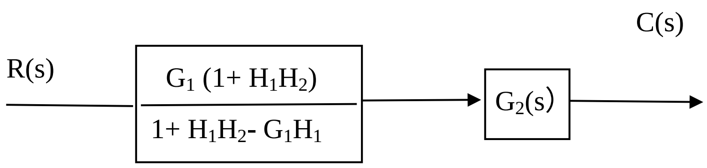




所以：$\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1+G_2}{1+G_2G_3}$

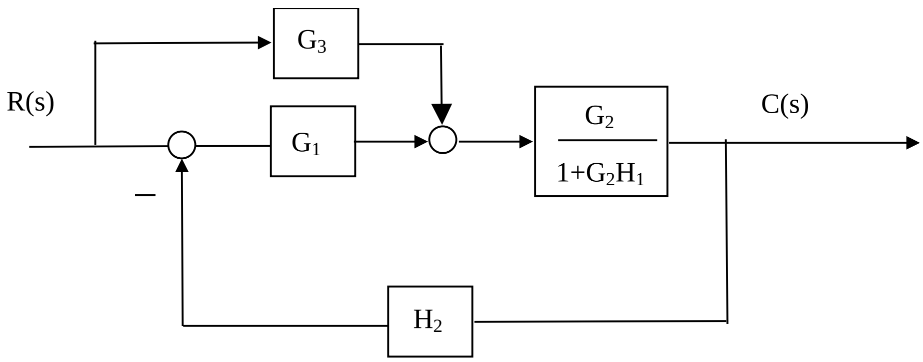
(b)

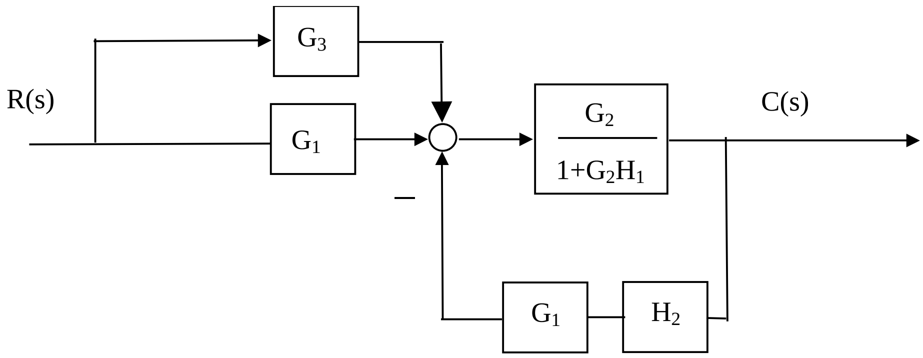


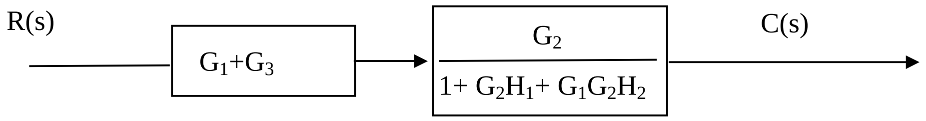


所以：$\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1G_2(1+H_1H_2)}{1+H_1H_2-G_1H_1}$

(c)

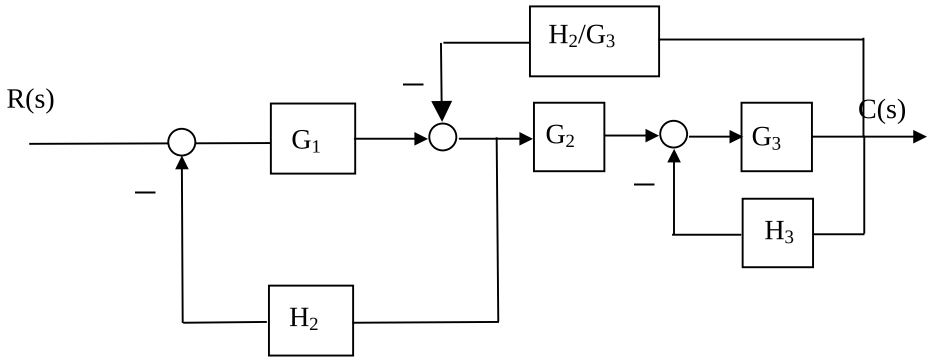


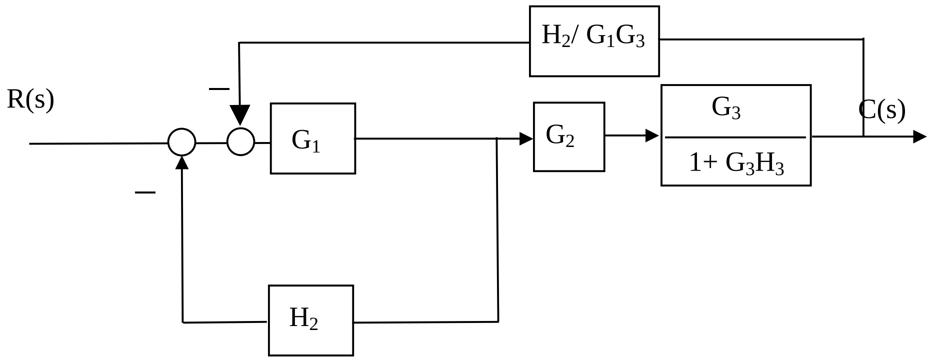


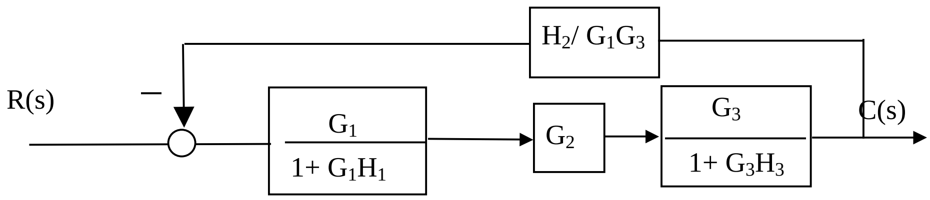


所以：$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_2(G_1+G_3)}{1+G_2H_1+G_1G_2H_2}$

(d)

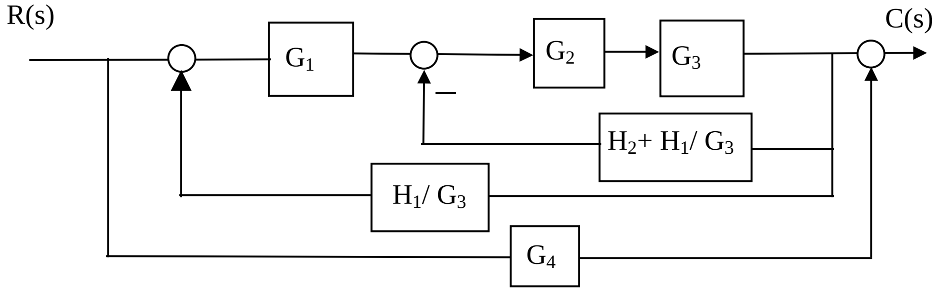


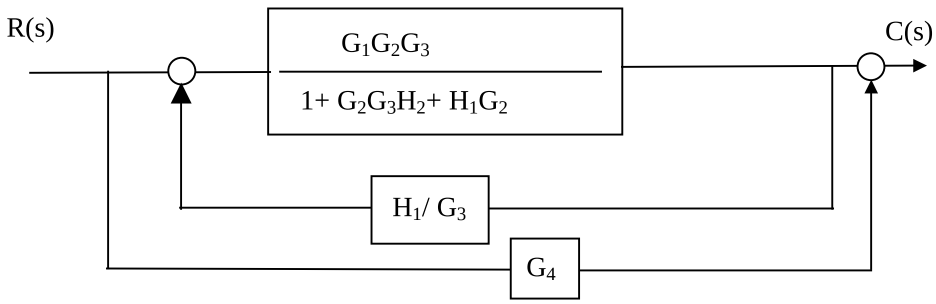


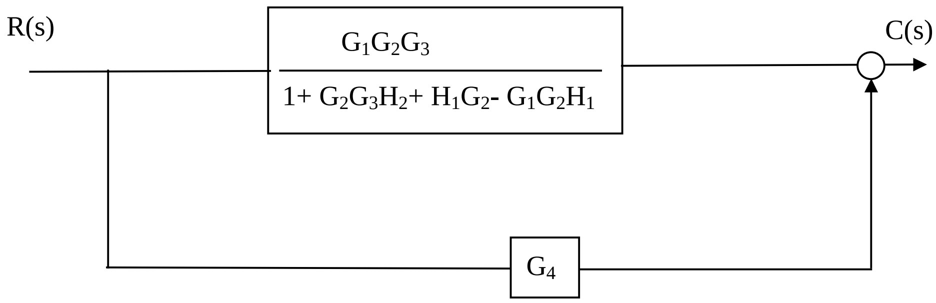


所以：$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3}{(1+G_1H_1)(1+G_3H_3)+G_2H_2}$

(e)

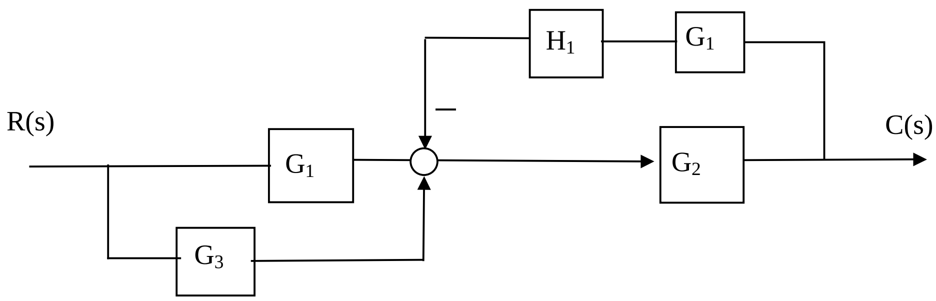


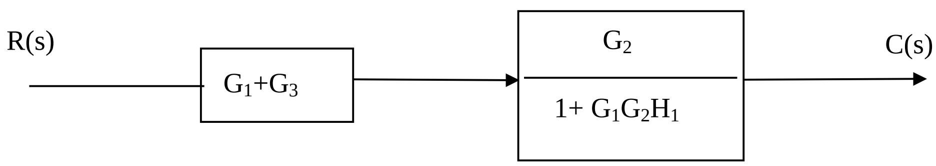




所以：$\dfrac{C(s)}{R(s)} = G_4 + \dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2+H_1G_2-G_1G_2H_1}$

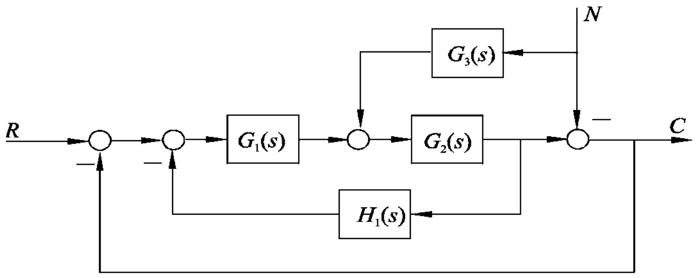
(f)





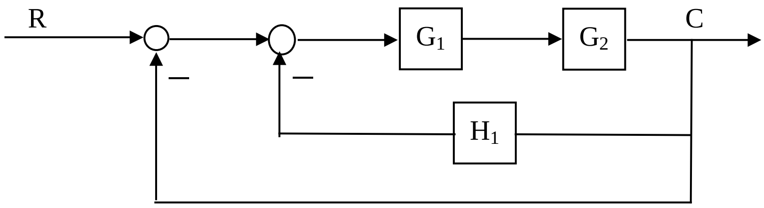
所以：$\dfrac{C(s)}{R(s)} = \dfrac{(G_1+G_3)G_2}{1+G_1G_2H_1}$

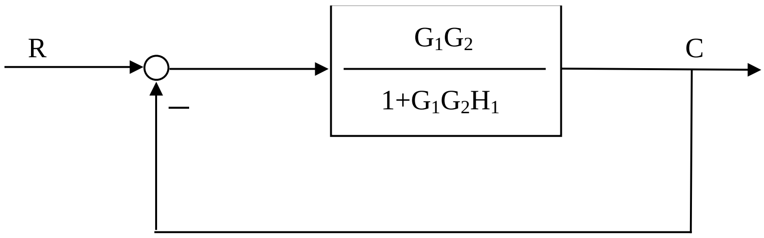
2-18 试简化图2-66中的系统结构图，并求传递函数C(s)/R(s)和C(s)/N(s)。



（a）

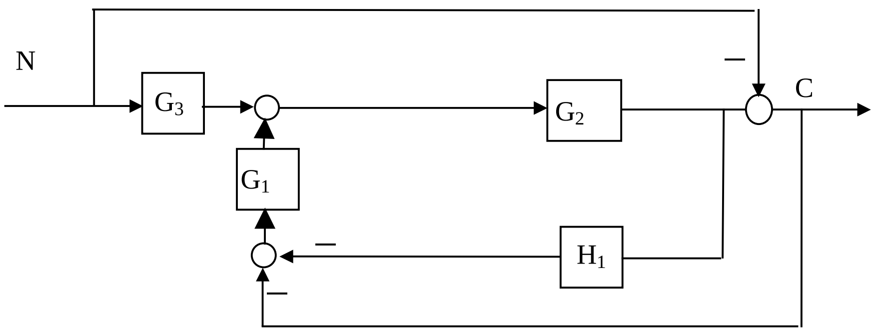
解：（1）求$\dfrac{C(s)}{R(s)}$时，$N=0$这时结构图变为：



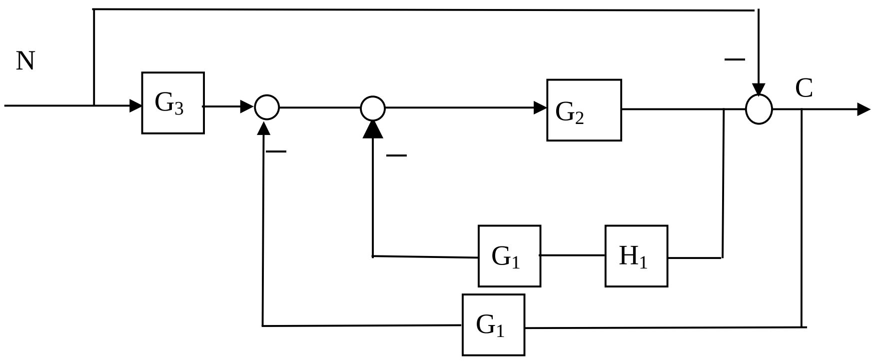


所以：$\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1G_2}{1+G_1G_2H_1+G_1G_2}$

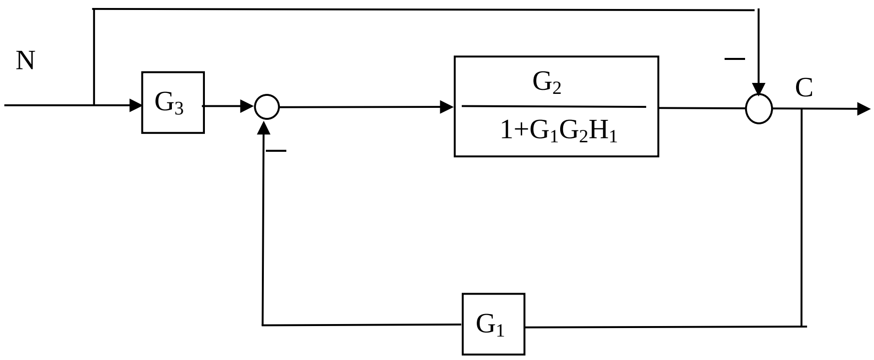
（2）求$\dfrac{C(s)}{N(s)}$时，$R=0$这时结构图变为：



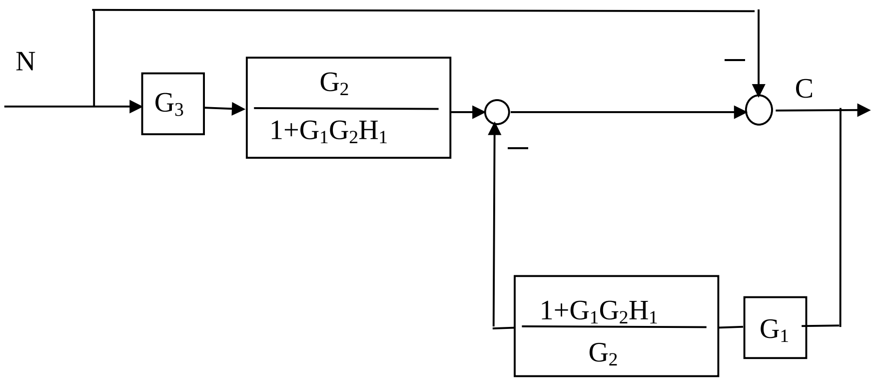
进一步化简得



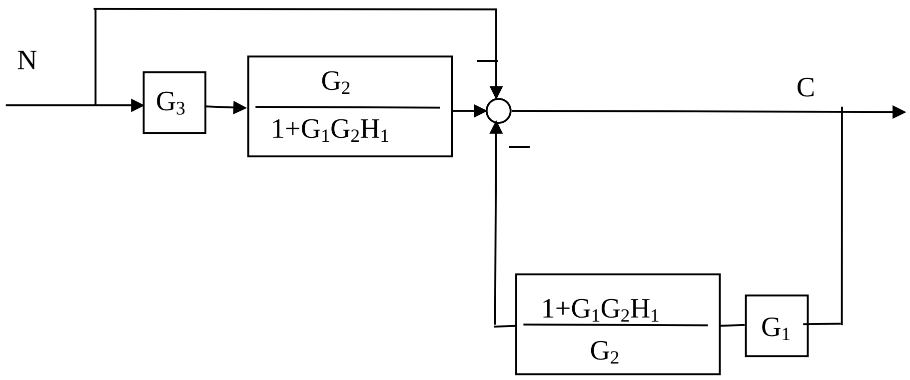
再进一步化简得：



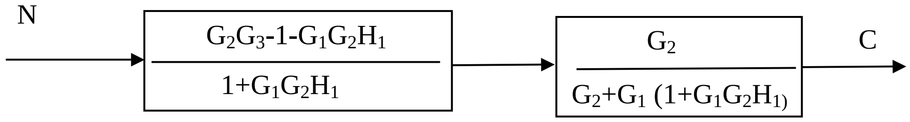
再进一步化简得：



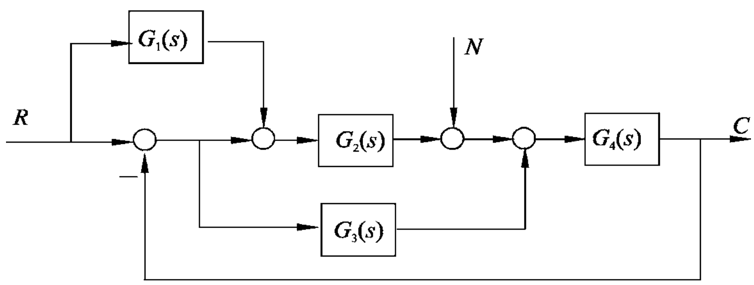
再进一步化简得：



再进一步化简得：



所以：$\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_2(G_2G_3-1-G_1G_2H_1)}{(1+G_1G_2H_1)[G_2+G_1(1+G_1G_2H_1)]}$

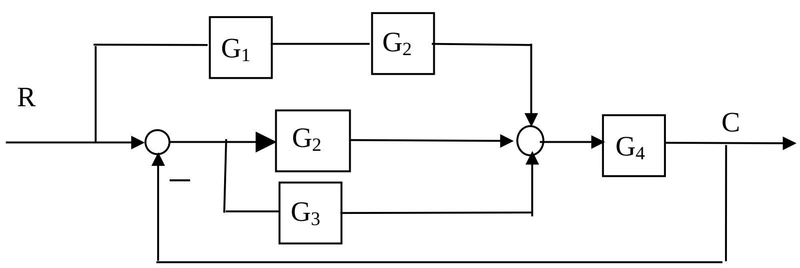


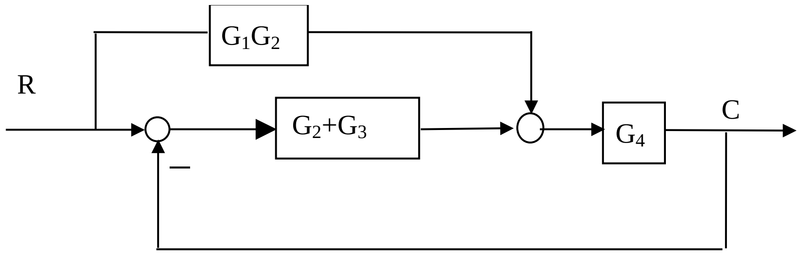
(b)

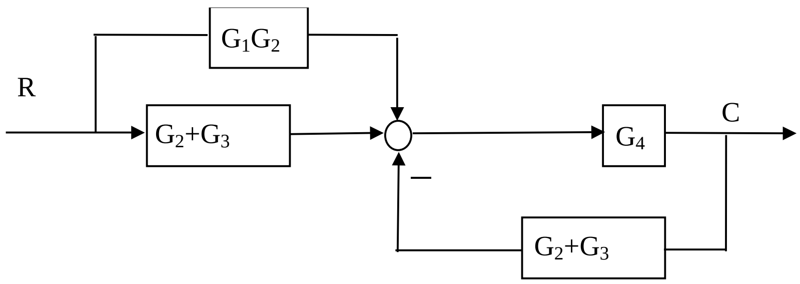
图2-66　　题2-18系统结构图

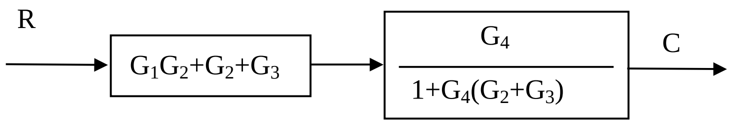
解：

(1)　　求$\dfrac{C(s)}{R(s)}$时，$N=0$这时结构图变为：



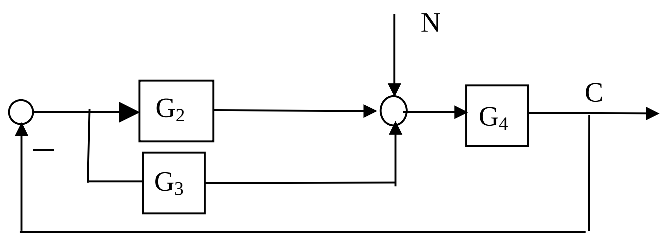


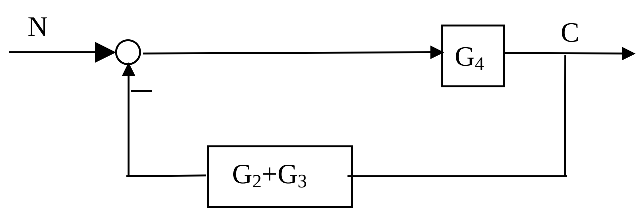




所以：$\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_4(G_1G_2+G_2+G_3)}{1+G_4(G_2+G_3)}$

（2）求$\dfrac{C(s)}{N(s)}$时，$R=0$这时结构图变为：





所以：$\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{G_4}{1+G_4(G_2+G_3)}$

3-1 设随动系统的微分方程为： $T\ddot{x}_0 + \dot{x}_0 = K_2 u$

$$u = K_1[r(t) - x_f]$$

$$T_f \dot{x}_f + x_f = x_0$$

其中 T,Tf, K2 为正常数。如果在外作用 r(t)=1+t 的情况下，使 x_0 对 r(t)的稳态误差不大于正常数

ε_0 ,试问 k1 应满足什么条件？

见习题 3-20 解答

3-2 设系统的微分方程式如下：

(1) $0.2\dot{c}(t) = 2r(t)$

(2) $0.04\ddot{c}(t) + 0.24\dot{c}(t) + c(t) = r(t)$

试求系统的单位脉冲响应 k(t)和单位阶跃响应 h(t)。已知全部初始条件为零。

解：

(1) 因为 $0.2sC(s) = 2R(s)$

单位脉冲响应：$C(s) = 10/s \qquad k(t) = 10 \qquad t \ge 0$

单位阶跃响应 h(t) $C(s) = 10/s^2 \qquad h(t) = 10t \qquad t \ge 0$

(2) $(0.04s^2 + 0.24s + 1)C(s) = R(s) \qquad C(s) = \dfrac{R(s)}{0.04s^2 + 0.24s + 1}$

单位脉冲响应：$C(s) = \dfrac{1}{0.04s^2 + 0.24s + 1} \qquad k(t) = \dfrac{25}{3} e^{-3t} \sin 4t$

单位阶跃响应 h(t) $C(s) = \dfrac{25}{s[(s+3)^2 + 16]} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{s+6}{(s+3)^2 + 16}$

$$h(t) = 1 - e^{-3t} \cos 4t - \frac{3}{4} e^{-3t} \sin 4t$$

3-3 已知系统脉冲响应如下，试求系统闭环传递函数Φ（s）。

(1) $k(t) = 0.0125 e^{-1.25t}$

(2) $k(t) = 5t + 10\sin(4t + 45^0)$

(3) $k(t) = 0.1(1 - e^{-t/3})$

解：

(1) $\Phi(s) = \dfrac{0.0125}{s + 1.25}$

（2） $k(t)=5t+10\sin 4t\cos 45^0+10\cos 4t\sin 45^0$

$$\Phi(s)=\frac{5}{s^2}+5\sqrt{2}\frac{4}{s^2+16}+5\sqrt{2}\frac{s}{s^2+16}=\frac{5}{s^2}+5\sqrt{2}\frac{s+4}{s^2+16}$$

（3） $\Phi(s)=\dfrac{0.1}{s}-\dfrac{0.1}{s+1/3}$

3-4 已知二阶系统的单位阶跃响应为

$$h(t)=10-12.5e^{-1.2t}\sin(1.6t+53.1^o)$$

试求系统的超调量σ%、峰值时间tp和调节时间ts。

解：$h(t)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t+\beta)$

$$\beta=\arccos\xi \qquad \sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} \qquad t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

$$\xi=\cos\beta=\cos 53.1^0=0.6$$

$$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}=e^{-\pi 0.6/\sqrt{1-0.6^2}}=e^{-\pi 0.6/\sqrt{1-0.6^2}}=9.5\%$$

$$t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}=\frac{\pi}{1.6}=1.96(s)$$

$$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}=\frac{3.5}{1.2}=2.92(s)$$

3-5　设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{0.4s+1}{s(s+0.6)}$$

试求系统在单位阶跃输入下的动态性能。

解：闭环传递函数

$$G_B(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\dfrac{0.4s+1}{s(s+0.6)}}{1+\dfrac{0.4s+1}{s(s+0.6)}}=\frac{0.4s+1}{s^2+s+1}$$

$$C(s)=G_B(s)R(s)=\frac{1}{s}\frac{0.4s+1}{s^2+s+1}=\frac{0.4}{s^2+s+1}+\frac{1}{s(s^2+s+1)}$$

$$=\frac{0.4}{s^2+s+1}+\frac{1}{s}-\frac{s+1}{s^2+s+1}=\frac{1}{s}-\frac{s+0.6}{s^2+s+1}$$

$$c(t)=1-e^{-0.5t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{2\times0.6}{\sqrt{3}}e^{-0.5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

$$=1-1.22e^{-0.5t}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t+55.3^0)$$

$$h(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t+\beta)$$

$$\beta=\arccos\xi \qquad \sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \qquad t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n} \qquad t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}$$

$$\xi=\cos\beta=\cos55.3^0=0.569$$

$$\sigma\%=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}=11.37\%$$

$$t_p=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_n}=\frac{\pi\times2}{\sqrt{3}}=3.63s$$

$$t_s=\frac{3.5}{\xi\omega_n}=\frac{3.5}{0.5}=7s$$

3-6 已知控制系统的单位阶跃响应为

$$h(t)=1+0.2e^{-60t}-1.2e^{-10t}$$

试确定系统的阻尼比ζ和自然频率ωn。

解：

求拉氏变换得

$$H(s)=\frac{1}{s}+\frac{0.2}{s+60}-\frac{1.2}{s+10}=\frac{(s+60)(s+10)}{s(s+60)(s+10)}+\frac{0.2s(s+10)}{s(s+60)(s+10)}-\frac{1.2s(s+60)}{s(s+60)(s+10)}$$

$$=\frac{600}{s(s+60)(s+10)}=\frac{600}{s(s^2+70s+600)}=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

显然闭环传递函数为 $\dfrac{\omega_n^2}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

其中 $\omega_n^2=600 \qquad \omega_n=10\sqrt{6} \qquad 2\xi\omega_n=70 \qquad \xi=\dfrac{7}{2\sqrt{6}}$

根据（3-17）

$$h(t)=1+\frac{e^{-t/T_1}}{T_2/T_1-1}+\frac{e^{-t/T_{12}}}{T_1/T_2-1}$$

解：根据公式（3-17）

$$h(t)=1+\frac{e^{-\frac{t}{T_1}}}{T_2/T_1-1}+\frac{e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1/T_2-1}$$

$$T_1=\frac{1}{\omega_n(\xi-\sqrt{\xi^2-1})}\qquad T_2=\frac{1}{\omega_n(\xi+\sqrt{\xi^2-1})}$$

显然：$T_1=\frac{1}{10}\qquad T_2=\frac{1}{60}$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}=6=\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{\xi^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{\xi^2}}}\qquad \text{解方程得}\ \xi=\frac{7}{2\sqrt{6}}$$

由 $T_1=\frac{1}{\omega_n(\xi-\sqrt{\xi^2-1})}=\frac{1}{10}$ 得到 $\omega_n(\xi-\sqrt{\xi^2-1})=10$

所以 $\omega_n=\frac{10}{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}=\frac{10}{\frac{7}{2\sqrt{6}}-\sqrt{\frac{49}{24}-1}}=\frac{10\times2\sqrt{6}}{2}=10\sqrt{6}$

3-7 设图 3-42 是简化的飞行控制系统结构图，试选择参数 K１和 Kt，使系统ωｎ＝6、ζ＝1。

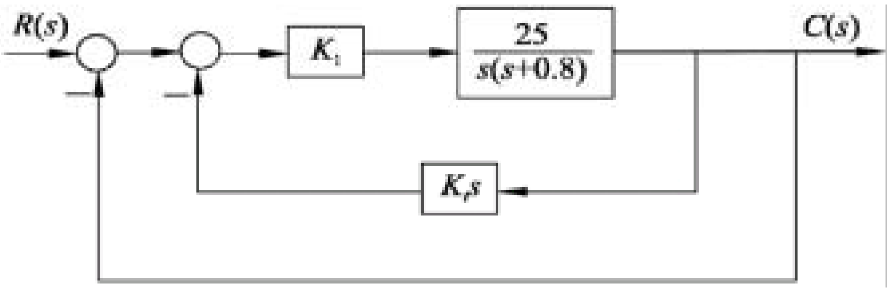


图 3-42　　飞行控制系统

解：系统开环传递函数

$$G_0(s)=\frac{\frac{25K_1}{s(s+0.8)}}{1+\frac{25K_1}{s(s+0.8)}K_ts}=\frac{25K_1}{s(s+0.8)+25K_1K_ts}$$

$$=\frac{25K_1}{s(s+0.8+25K_1K_t)}=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$\omega_n^2=36=25K_1\qquad K_1=\frac{36}{25}$

$2\xi\omega_n = 0.8 + 25K_1K_t = 12$　　所以 $K_t = \dfrac{14}{45}$

3-8　试分别求出图 3-43 各系统的自然频率和阻尼比，并列表比较其动态性能。

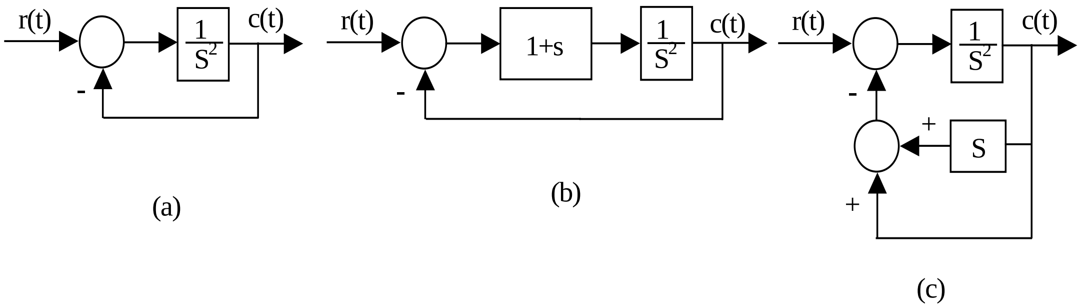


图 3-43　控制系统

解：

（a）$\omega_n = 1$　　$\xi = 0$　　系统临界稳定。

（b）$\Phi(s) = \dfrac{s+1}{s^2+s+1}$　　$\omega_n = 1$　　$\xi = 0.5$　　$\sigma\% = 29.8\%$　　$t_s = 7.51s$

（c）$\Phi(s) = \dfrac{s+1}{s^2+s+1}$　　$\omega_n = 1$　　$\xi = 0.5$　　$\sigma\% = 16.3\%$　　$t_s = 8.08s$

3-9 设控制系统如图 3-44 所示。要求：

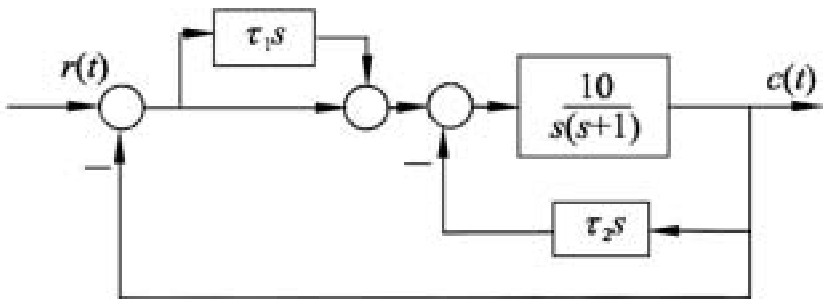


图 3-44　控制系统

(1) 取τ1＝0，τ2＝0．1，计算测速反馈校正系统的超调量、调节时间和速度误差；
(2) 取τ1＝0．1，τ 2＝0，计算比例-微分校正系统的超调量、调节时间和速度误差。
解：(1) 系统开环传递函数

$$G_0(s) = (1+\tau_1 s)\frac{\dfrac{10}{s(s+1)}}{1+\dfrac{10\tau_2 s}{s(s+1)}} = \frac{10(1+\tau_1 s)}{s(s+1)+10\tau_2 s} = \frac{10}{s(s+2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$\omega_n^2 = 10$　　$\omega_n = \sqrt{10}$　　$2\xi\omega_n = 2$　　$\xi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\sigma\% = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} = 35.1\%$

$$t_s = \frac{3.5}{\xi\omega_n} = 3.5s$$

$$K_V = 5$$

（2）

3-10 图 3-45 所示控制系统有（a）和（b）两种不同的结构方案，其中 T＞0 不可变。要求：

（1）　在这两种方案中，应如何调整 K_1， K_2 和 K_3，才能使系统获得较好的动态性能。

比较说明两种结构方案的特点。

解：

3-11 已知系统特征方程为

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$$

试用劳思稳定判据和赫尔维茨判据确定系统的稳定性。

解：

列劳思表如下：

s^4	3	5	2
s^3	10	1	
s^2	$\frac{47}{10}$	2	
s^1	$-\frac{1530}{47}$	0	
s^0	2		

由劳思表可以得到该系统不稳定。

3-12 已知系统特征方程如下，试求系统在 s 右半平面的根数及虚根值。

（1）　$s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 24s^2 + 32s + 48 = 0$

（2）　$s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$

（3）　$s^5 + 3s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 35s + 25 = 0$

解：（1）列劳思表如下：

s^5	1	12	32
s^4	3	24	48
s^3	4	16	
s^2	12	48	
s^1			
s^0			

有一对虚根，系统不稳定

（2）列劳思表如下：

$$\begin{array}{lllll}
s^6 & 1 & -4 & -7 & 10 \\
s^5 & 4 & 4 & -8 & \\
s^4 & -5 & -5 & 10 & \\
s^3 & & & & \\
s^2 & & & & \\
s^1 & & & & \\
s^0 & & & &
\end{array}$$

系统不稳定

（3）列劳思表如下：

$$\begin{array}{llll}
s^5 & 1 & 12 & 35 \\
s^4 & 3 & 20 & 25 \\
s^3 & \frac{16}{3} & \frac{80}{3} & \\
s^2 & 5 & 25 & \\
s^1 & 10 & & \\
s^0 & 25 & &
\end{array}$$

有一对虚根，系统不稳定

3-13 已知单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K(0.5s+1)}{s(s+1)(0.5s^2+s+1)}$$

试确定系统稳定时的 K 值范围。

解：系统特征方程为

$$s(s+1)(0.5s^2+s+1)+K(0.5s+1)=0$$

将上述方程化简得到：

$$0.5s^4+1.5s^3+2s^2+(1+0.5K)s+K=0$$

劳思表如下：

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 0.5 & 2 & K \\
s^3 & 1.5 & 1+0.5K & \\
s^2 & \frac{2.5-0.25K}{1.5} & K & \\
s^1 & \frac{2.5-1.25K-0.125K^2}{2.5-0.25K} & & \\
s^0 & K & &
\end{array}$$

3-14 已知系统结构图如图 3-46 所示。试用劳思稳定判据确定能使系统稳定反馈参数 τ 的取值范围。

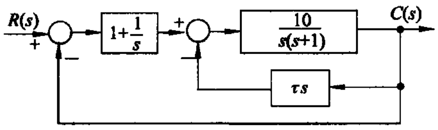


图 3-46 控制系统

解：系统开环传递函数为

$$G_0(s)=(1+\frac{1}{s})\frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\frac{10\tau s}{s(s+1)}}=\frac{s+1}{s}\frac{10}{s(s+1)+10\tau s}=\frac{10s+10}{s^3+(1+10\tau)s^2}$$

系统特征方程为：

$$s^3+(1+10\tau)s^2+10s+10=0$$

劳思表如下：

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 1+10\tau & 10 \\ s^1 & \dfrac{10\tau}{1+10\tau} & \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

所以能使系统稳定反馈参数τ的取值范围为$\tau>0$

3-15 已知单位反馈系统的开环传递函数

（1） $G(s)=\dfrac{100}{(0.1s+1)(s+5)}$

（2） $G(s)=\dfrac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}$

（3） $G(s)=\dfrac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$

试求输入分别为 $r(t)=2t$ 和 $r(t)=2+2t+t^2$ 时，系统的稳态误差。

解：

（1）因为是二阶系统，且系数大于零，所以系统稳定。

$$K_p=\lim_{s\to0}G(s)=20 \qquad K_V=\lim_{s\to0}sG(s)=0 \qquad K_a=\lim_{s\to0}s^2G(s)=0$$

所以当$r(t)=2t$时 $e_{ss}=\dfrac{R_2}{K_V}=\infty$

当$r(t)=2+2t+t^2$ $e_{ss}=\dfrac{R_1}{1+K_p}+\dfrac{R_2}{K_V}+\dfrac{R_3}{K_a}=\infty$

（2）应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \qquad K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = 10 \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0$$

所以当 $r(t) = 2t$ 时 $e_{ss} = \dfrac{R_2}{K_V} = 0.2$

当 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ $e_{ss} = \dfrac{R_1}{1+K_p} + \dfrac{R_2}{K_V} + \dfrac{R_3}{K_a} = \infty$

（3）应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \qquad K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = \infty \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0.1$$

所以当 $r(t) = 2t$ 时 $e_{ss} = \dfrac{R_2}{K_V} = 0$

当 $r(t) = 2 + 2t + t^2$ $e_{ss} = \dfrac{R_1}{1+K_p} + \dfrac{R_2}{K_V} + \dfrac{R_3}{K_a} = 20$

3-16 已知单位反馈系统的开环传递函数

(1) $G(s) = \dfrac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}$

（2） $G(s) = \dfrac{K}{s(s^2+4s+200)}$

（3） $G(s) = \dfrac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$

试求位置误差系数Ｋp，速度误差系数Ｋv，加速度误差系数Ｋa。

解：

（1）应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = 50 \qquad K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0 \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0$$

（2）应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \qquad K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{K}{200} \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 0$$

（3）应先检查系统的稳定性。

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty \qquad K_V = \lim_{s\to 0} sG(s) = \infty \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = 1$$

3-17 设单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = 1/Ts$。试用动态误差系统法求出当输入信号分别为 $r(t) = t^2/2$ 和 $r(t) = \sin 2t$ 时，系统的稳态误差。

3-18 设控制系统如图 3-47 所示。其中

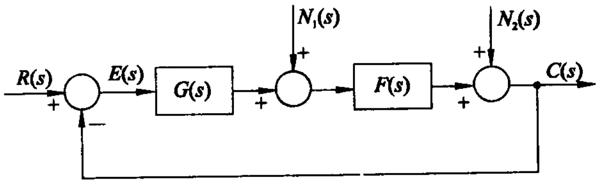


图 3-47 控制系统

$$G(s)=K_p+\frac{K}{s} \qquad F(s)=\frac{1}{Js}$$

输入$r(t)$以及扰动$n_1(t)$和$n_2(t)$均为单位阶跃函数。试求：

(1) 在$r(t)$作用下系统的稳态误差

(2) 在$n_1(t)$作用下系统的稳态误差

(3) 在$n_1(t)$和$n_2(t)$同时作用下系统的稳态误差

解：

(1) 在$r(t)$作用下系统的稳态误差

这时系统的开环传递函数为：

$$G_0(s)=G(s)F(s)=\frac{K_ps+K}{Js^2}$$

系统位置误差系数为$K_P=\lim_{s\to 0}G(s)=\infty$

在$r(t)$作用下系统的稳态误差$e_{ssr}=\frac{R_1}{1+K_p}=0$

(2) 在$n_1(t)$作用下系统的稳态误差

这时系统的开环传递函数为：

$$G_0(s)=G(s)F(s)=\frac{K_ps+K}{Js^2}$$

系统位置误差系数为$K_P=\lim_{s\to 0}G(s)=\infty$

在$n_1(t)$作用下系统的稳态误差$e_{ssn1}=\frac{R_1}{1+K_p}=0$

(3) 在$n_1(t)$和$n_2(t)$同时作用下系统的稳态误差

$n_2(t)$ 作用下系统的稳态误差

这时系统的开环传递函数为：

$$G_0(s) = G(s)F(s) = \frac{K_p s + K}{Js^2}$$

系统位置误差系数为 $K_P = \lim_{s\to 0} G(s) = \infty$

在 $n_2(t)$ 作用下系统的稳态误差 $e_{ssn2} = \dfrac{R_1}{1+K_p} = 0$

所以在在 $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 同时作用下系统的稳态误差为

$$e_{ssn} = e_{ssn1} + e_{ssn2} = 0 + 0 = 0$$

3-19 设闭环传递函数的一般形式为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

误差定义取 $e(t) = r(t) - c(t)$。试证：

(1) 系统在阶跃信号输入下，稳态误差为零的充分条件是：$b_0 = a_0, b_i = 0 (i = 1,2,\cdots,m)$

(2) 系统在斜坡信号输入下，稳态误差为零的充分条件是：$b_0 = a_0, b_1 = a_1, b_i = 0 (i = 2,3,\cdots,m)$

解：(1) 系统在阶跃信号输入下这时

$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad C(s) = R(s)\Phi(s) = \frac{1}{s}\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{aligned}
E(s) = R(s) - C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\
&= \frac{1}{s}\left[1 - \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\right] \\
&= \frac{1}{s}\frac{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) - (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\
&= \frac{1}{s}\frac{(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s) - (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s) + (a_0 - b_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}
\end{aligned}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s)-(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s)+(a_0-b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

如果 $e_{ss}=0$　则 $a_0=b_0$　　且 $a_0\neq 0$

（2）系统在斜坡信号输入下这时

$$R(s)=\frac{1}{s^2}\qquad C(s)=R(s)\Phi(s)=\frac{1}{s^2}\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$E(s)=R(s)-C(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$=\frac{1}{s^2}\left[1-\frac{b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}\right]$$

$$=\frac{1}{s^2}\frac{(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)-(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$=\frac{1}{s^2}\frac{(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2s^2)+-(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_2s^2)+(a_1-b_1)s+(a_0-b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=$$

$$\lim_{s\to 0}=\frac{1}{s}\frac{(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2s^2)+-(b_ms^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_2s^2)+(a_1-b_1)s+(a_0-b_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

如果 $e_{ss}=0$　则 $a_0=b_0$　 $a_1=b_1$　　且 $a_0\neq 0$

3-20 设随动系统的微分方程为

$$T_1\frac{d^2c(t)}{dt^2}+\frac{dc(t)}{dt}=K_2u(t)$$

$$u(t)=K_1[r(t)-b(t)]$$

$$T_2\frac{db(t)}{dt}+b(t)=c(t)$$

其中，T1、T 2和 K2为正常数。若要求 r(t)=1+ t 时，c(t)对 r(t)的稳态误差不大于正常数ε 0，试问 K1应满足什么条件？ 已知全部初始条件为零。

解：

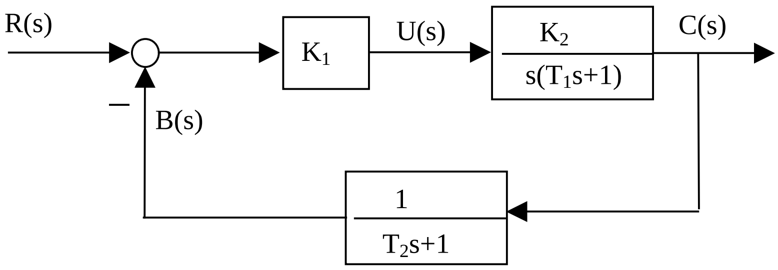
由上述方程得到拉氏变换如下：

$$(T_1s^2+s)C(s)=K_2U(s)\qquad C(s)=\frac{K_2}{T_1s^2+s}U(s)$$

$$U(s)=K_1[R(s)-B(s)]$$

$$(T_2 s+1)B(s)=C(s) \qquad B(s)=\frac{1}{T_2 s+1}C(s)$$

由此得到系统结构图如下：



系统闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{\dfrac{K_1K_2}{s(T_1s+1)}}{1+\dfrac{K_1K_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}=\frac{K_1K_2(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

当 $r(t)=1+t$ 时 $\quad R(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^2}=\dfrac{s+1}{s^2}$

$$C(s)=R(s)\Phi(s)=\frac{s+1}{s^2}\frac{K_1K_2(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

$$E(s)=R(s)-C(s)=\frac{s+1}{s^2}-\frac{s+1}{s^2}\frac{K_1K_2(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

$$=\frac{s+1}{s^2}\left[1-\frac{K_1K_2(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\right]$$

$$=\frac{s+1}{s^2}\left[\frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2-K_1K_2(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\right]$$

$$=\frac{s+1}{s}\left[\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)-K_1K_2T_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\right]$$

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=$$

$$\lim_{s\to 0}(s+1)\left[\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)-K_1K_2T_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\right]$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)-K_1K_2T_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

$$=\frac{1-K_1K_2T_2}{K_1K_2}\le \varepsilon_0$$

所以

$$\frac{1}{K_2(T_2+\varepsilon_0)} \le K_1$$

系统特征方程为：

$$s(T_1 s+1)(T_2 s+1)+K_1K_2 = T_1T_2 s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2=0$$

劳思表如下：

$$\begin{array}{lcc}
s^3 & T_1T_2 & 1 \\
s^2 & T_1+T_2 & K_1K_2 \\
s^1 & \dfrac{T_1+T_2-K_1K_2T_1T_2}{T_1+T_2} & 0 \\
s^0 & K_1K_2 &
\end{array}$$

如果系统稳定，则

$$\frac{T_1+T_2-K_1K_2T_1T_2}{T_1+T_2} > 0 \text{即} K_1 < \frac{T_1+T_2}{K_2T_1T_2}$$

所以

$$\frac{1}{K_2(T_2+\varepsilon_0)} \le K_1 < \frac{T_1+T_2}{K_2T_1T_2}$$

4-1 设单位反馈控制系统的开环传递函数

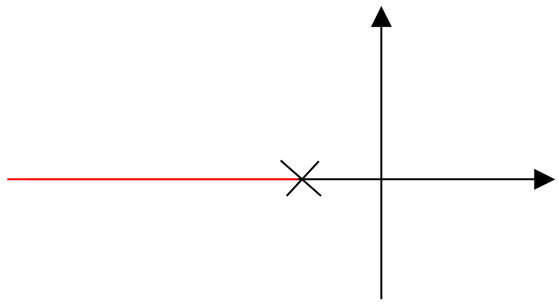
$$G(s)=\frac{K^*}{s+1}$$

试用解析法绘出 K^* 从零变到无穷时的闭环根轨迹图，并判断下列点是否在根轨迹上：

（－2＋j0），（0＋j1），（－3＋j2）

解：

有一个极点：(－1＋j0)，没有零点。根轨迹如图中红线所示。



（－2＋j0）点在根轨迹上，而（0＋j1），（－3＋j2）点不在根轨迹上。

4-2 设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K\ (3s+1)}{s(2s+1)}$$

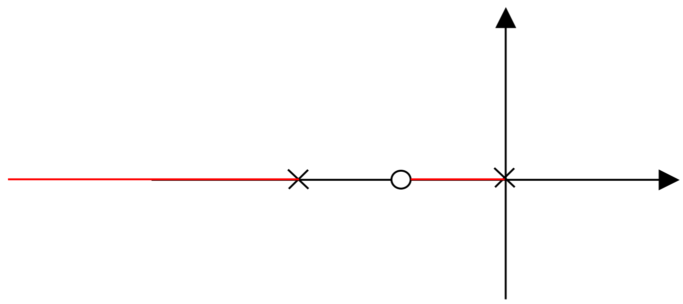
试用解析法绘出开环增益 K 从零增加到无穷时的闭环根轨迹图。

解：

系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{3K\ \ /2(s+1/3)}{s(s+1/2)}=\dfrac{K_g(s+1/3)}{s(s+1/2)}$

有两个极点：(0＋j0)，(－1/2＋j0)，有一个零点（-1/3，j0)。

根轨迹如图中红线所示。



4-3 已知开环零、极点分布如图 4-28 所示，试概略绘出相应的闭环根轨迹图。

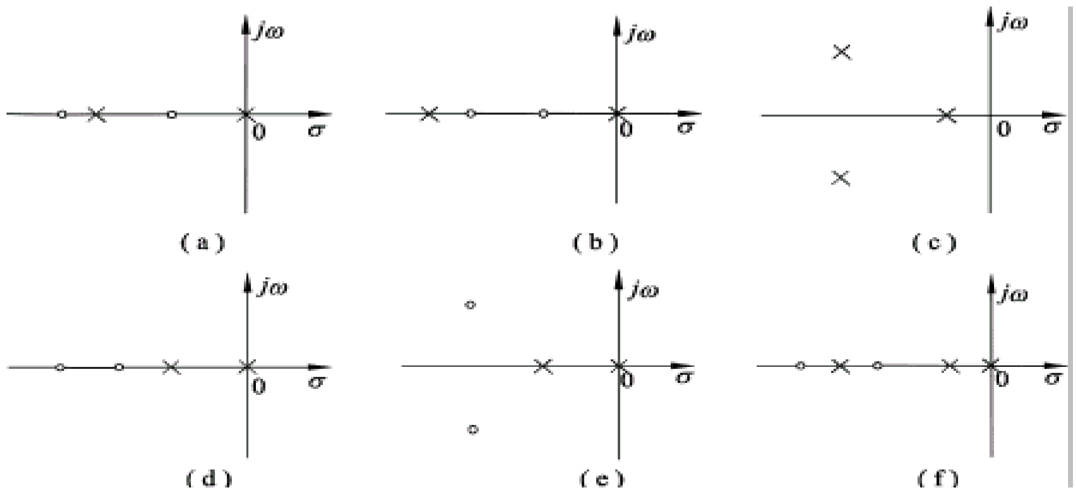
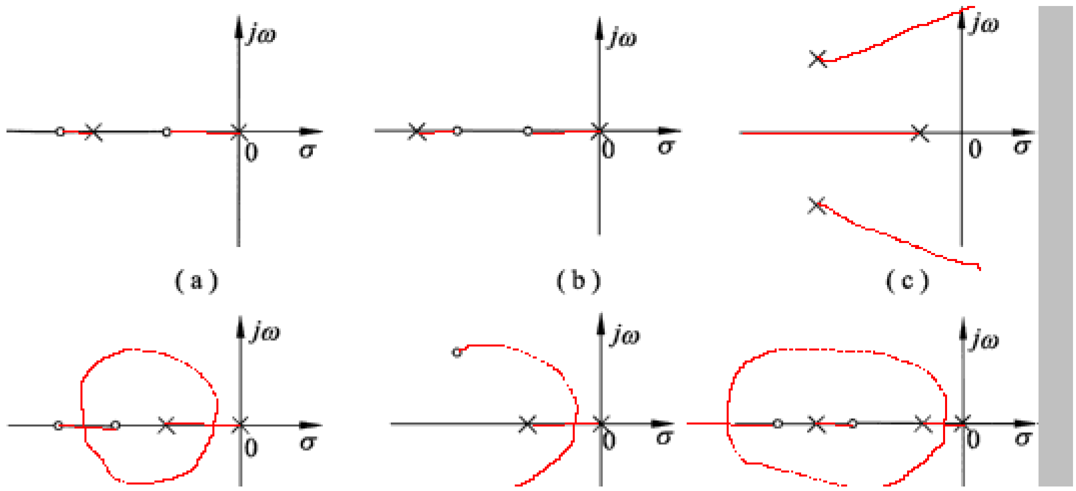


图 4-28　开环零、极点分布图



4-4 设单位反馈控制系统开环传递函数如下，试概略绘出相应的闭环根轨迹图(要求确定分离点坐标 d)：

(1)　$G(s)=\dfrac{K}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}$

解：

系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{10K}{s(s+5)(s+2)}=\dfrac{K_g}{s(s+5)(s+2)}$

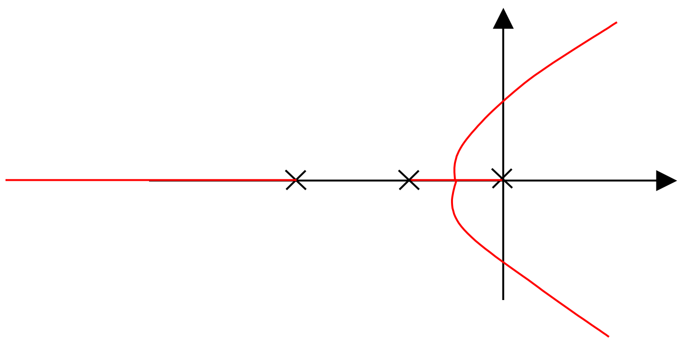
有三个极点：(0+ｊ０)，(—2+ｊ０)，(—5+ｊ０) 没有零点。

分离点坐标计算如下：

$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}+\dfrac{1}{d+5}=0$　$3d^2+14d+10=0$ 解方程的 $d_1=-3.7863$，$d_2=-0.88$

取分离点为 $d=-0.88$

根轨迹如图中红线所示。



（2） $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s(2s+1)}$

解：

系统开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K/2(s+1)}{s(s+0.5)}=\dfrac{K_g(s+1)}{s(s+0.5)}$

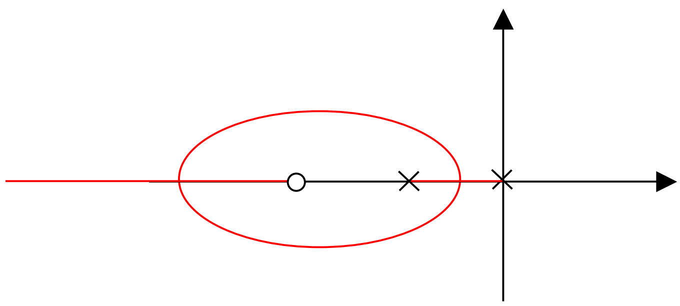
有两个极点：(0+ｊ０)，(—0.5+ｊ０)，有一个零点（—1+ｊ０)。

分离点坐标计算如下：

$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+0.5}=\dfrac{1}{d+1}$ $\quad d^2+2d+0.5=0$ 解方程的 $d_1=-1.7$，$d_2=-0.29$

取分离点为 $d_1=-1.7$，$d_2=-0.29$

根轨迹如图中红线所示。



（3） $G(s)=\dfrac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$

解：

系统开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$

有三个极点：(0+ｊ０)，(—2+ｊ０)，(—2+ｊ０)，有一个零点（—5+ｊ０)。

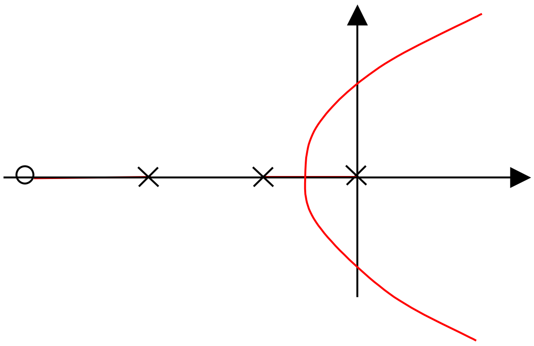
分离点坐标计算如下：

$\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d+2}+\dfrac{1}{d+3}=\dfrac{1}{d+5}$ $\quad d^3+10d^2+25d+15=0$ 解 方 程 的 $d_1=-6.5171$ ，

$d_2=-2.5964$，$d_3=-0.8865$

取分离点为$d=-0.8865$

根轨迹如图中红线所示。



4-5 已知单位反馈控制系统开环传递函数如下，试概略画出相应的闭环根轨迹图(要求算出起始角θ_{pi})：

（1） $G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$

解：

系统开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K^*(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}\dfrac{K_g(s+2)}{(s+1+j2)(s+1-j2)}$

有两个极点：$p_1=$（-1+ j 2），$p_2=$（−1- j 2），有一个零点（−2， j 0）。

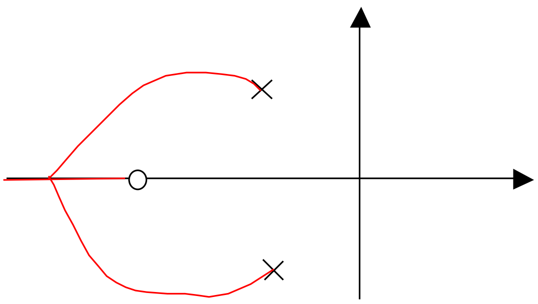
起始角：

$$\theta_{p_i}=(2k+1)\pi+\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{z_jp_i}-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\theta_{p_ip_i}\right)\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\theta_{p_1}=\pi+\varphi_{z_1p_1}-\theta_{p_2p_1}=180^0+45^0-90^0=135^0$$

$$\theta_{p_2}=\pi+\varphi_{z_1p_2}-\theta_{p_1p_2}=180^0-45^0+90^0=225^0$$

根轨迹如图中红线所示。



（2） $G(s)=\dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$。

解：

系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$

有三个极点：p_1 =（0，j0），p_2 =（-10+ j 10），p_3 =（—10- j 10），有一个零点 z_1 =（—20， j 0）。

起始角：

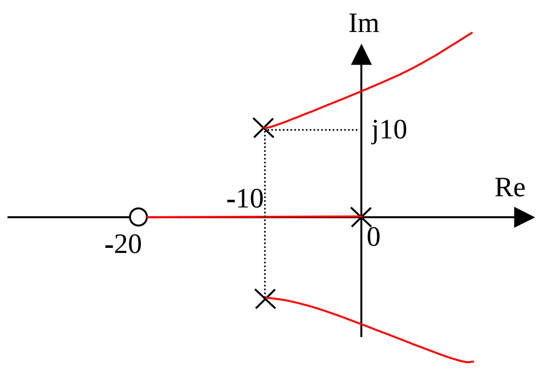
$$\theta_{p_i}=(2k+1)\pi+\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{z_jp_i}-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\theta_{p_jp_i}\right)\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\theta_{p_1}=180^0$$

$$\theta_{p_2}=180^0+\varphi_{z_1p_2}-\theta_{p_1p_2}-\theta_{p_3p_2}=180^0+45^0-135^0-90^0=0^0$$

$$\theta_{p_3}=180^0+\varphi_{z_1p_3}-\theta_{p_1p_3}-\theta_{p_2p_3}=180^0-45^0+135^0+90^0=0^0$$

根轨迹如图中红线所示。



4-6 设单位反馈控制系统的开环传递函数如下，要求：

(1) 确定 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+10)}$ 产生纯虚根的开环增益值。

解：系统特征方程为 $s^3+11s^2+10s+K^*=0$

令 $s=j\omega$ 代入特征方程中得：

实部方程为：$K^*-11\omega^2=0$

虚部方程为：$10\omega-\omega^3=0$

解上述方程得：$\omega^2=10$ $K^*=110$ 开环增益按一般定义：$K=K^*/10=11$

（2） 确定 $G(s)=\dfrac{K^*(s+z)}{s^2(s+10)(s+20)}$ 产生纯虚根为±ｊ1 的 z 值和 K^* 值。

解：系统特征方程为 $s^4+30s^3+200s^2+K^*s+K^*z=0$

令 $s=j1$ 代入特征方程中得：

实部方程为：$K^*z+1-200=0$

虚部方程为：$K^*-30=0$

解上述方程得：$K^*=30$ $z=199/30$

（3）概略绘出确定 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$ 的闭环根轨迹图。（要求确定根轨迹的分离点、起始角和与虚轴的交点）。

解：系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K^*}{s(s+1)(s+3.5)(s+3+j2)(s+3-j2)}$

有五个极点：p_1 =（0，j0），p_2 =（-1，ｊ0），p_3 =（−3.5，ｊ0），p_4 =（−3，ｊ2），p_5 =（−3，-ｊ2），没有零点。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+3.5}+\frac{1}{d+3.+j2}+\frac{1}{d+3.-j2}=0$$

$4d^4+35d^3+111.5d^2+146d+45.5=0$ 解方程的 $d_1=-3.5$，$d_2=-0.44$，$d_3=-2.4+j1.265$ $d_4=-2.4-j1.265$

取分离点为 $d=-0.44$

起始角：

$$\theta_{p_i}=(2k+1)\pi+\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{z_jp_i}-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\theta_{p_ip_i}\right)\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

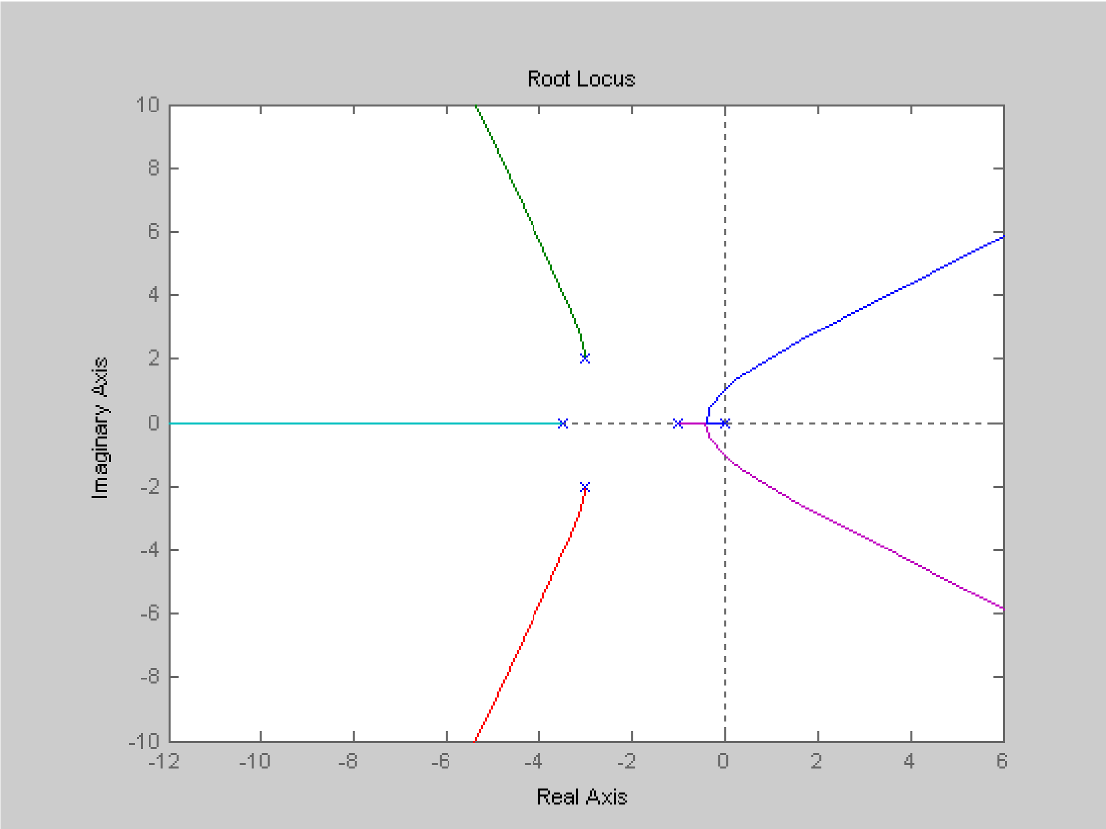
$\theta_{p_1} = 180^0$

$\theta_{p_2} = 0^0$

$\theta_{p_3} = 180^0 - \theta_{p_1p_3} - \theta_{p_2p_3} - \theta_{p_4p_3} - \theta_{p_5p_3} = 180^0 - 146.45^0 - 135^0 - 90^0 - 75.7 = 93^0$

$\theta_{p_4} = 180^0 - \theta_{p_1p_4} - \theta_{p_2p4} - \theta_{p_3p_4} - \theta_{p_5p_3} = 180^0 + 146.45^0 + 135^0 + 90^0 + 75.7 = -93^0$

根轨迹如图所示。



与虚轴的交点：令 $s = j\omega$ 代入特征方程中

$s^5 + 10.5s^4 + 43.5s^3 + 79.5s^2 + 45.5s + K^* = 0$

得到：

实部方程为：$10.5\omega^4 - 79.5\omega^2 + K^* = 0$

虚部方程为：$\omega^5 - 43.5\omega^3 + 45.5\omega = 0$

解方程得到：$\omega_1 = 6.5136 \quad \omega_2 = 1.0356$，将$\omega_1 = 6.5136$代入实部方程得到$K^* < 0$不符合要求，将$\omega_2 = 1.0356$代入实部方程得到$K^* = 73$满足要求。

所以取$\omega = 1.0356$　即根轨迹与虚轴的交点为$\omega = \pm 1.0356$

4-7 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+2)}{s(s+1)}$$

其根轨迹图见图 4-2。试从数学上证明：复数根轨迹部分是以(-2，j0)为圆心，以$\sqrt{2}$为半径的一个圆。

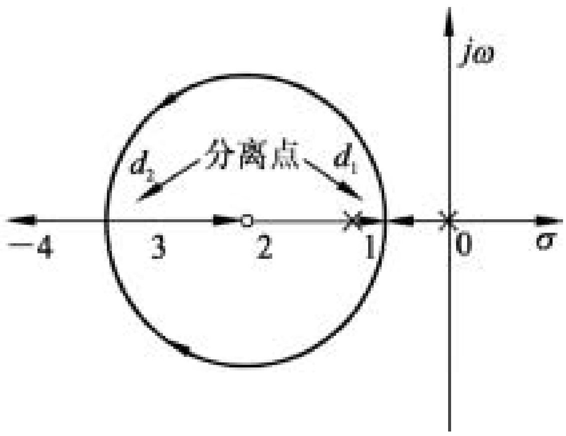


图 4-2　系统根轨迹图

解：证明如下：

根据辐角条件可知，根轨迹各点应满足

$$\angle(s+2) - \angle s - \angle(s+1) = 180^0$$

在复平面上$s = \sigma + j\omega$，于是得

$$\angle(\sigma + j\omega + 2) - \angle(\sigma + j\omega) - \angle(\sigma + j\omega + 1) = 180^0$$

亦即　$\arctan\dfrac{\omega}{2+\sigma} - \arctan\dfrac{\omega}{\sigma} = \arctan\dfrac{\omega}{1+\sigma} + 180^0$

利用反正切公式

$$\arctan X - \arctan Y = \arctan\frac{X-Y}{1+XY}$$

可把上式改写为

对上式的两边取正切，整理后即得圆方程式

$$(\sigma+2)^2+\omega^2=2$$

它的圆心为（-2，j0）半径等于$\sqrt{2}$。这个圆与实轴的交点即为分离点和会合点。

证毕。

4-8　已知开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

试概略画出闭环系统根轨迹图。

解：系统开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K^*}{s(s+4)(s^2+4s+20)}$$

有四个极点：$p_1=$（0，j0），$p_2=$（-4，j 0），$p_3=$（−2，j 4），$p_4=$（−2，- j 4），没有零点。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+4}+\frac{1}{d+2.+j4}+\frac{1}{d+2.-j4}=0$$

即$(2d^2+8d+20)(2d+4)=0$解方程的$d_1=-2$，$d_2=-2+j2.45$，$d_3=-2-j2.45$

取分离点为$d_1=-2$，$d_2=-2+j2.45$，$d_3=-2-j2.45$

起始角：

$$\theta_{p_i}=(2k+1)\pi+\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{z_j p_i}-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\theta_{p_i p_i}\right)\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

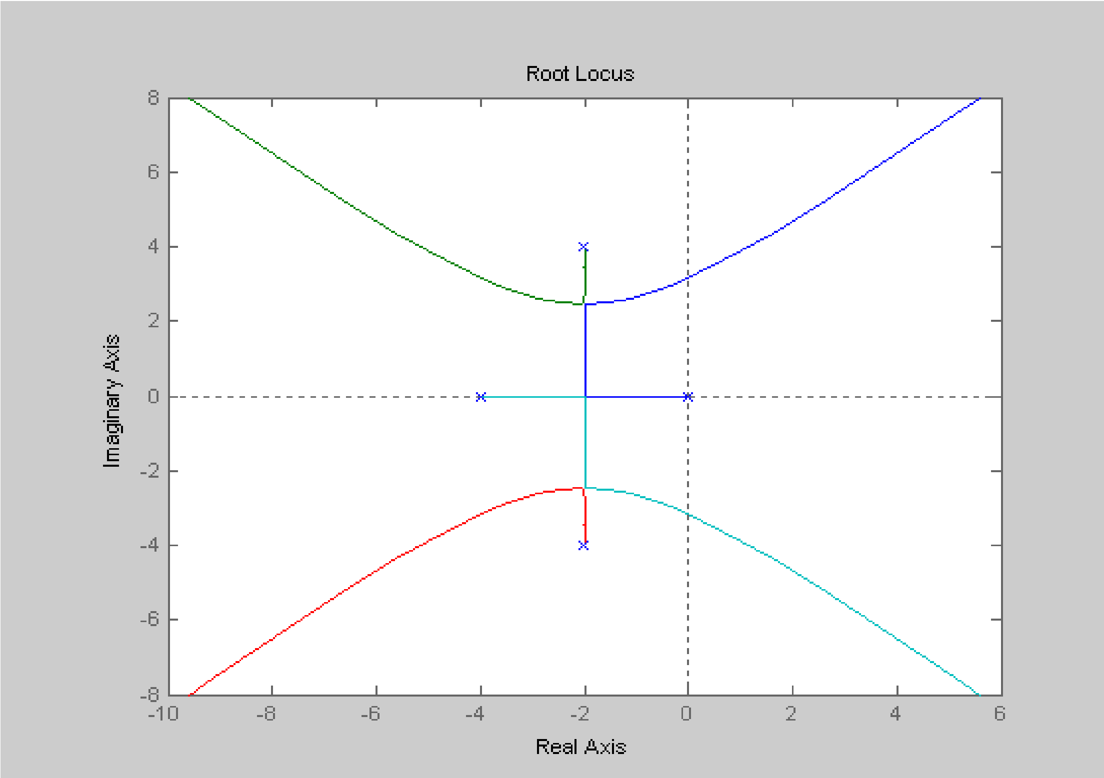
$$\theta_{p_1}=180^0$$

$$\theta_{p_2}=-90^0$$

$$\theta_{p_3}=+90$$

$$\theta_{p_4}=0^0$$

根轨迹如图所示。



4-9 已知开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{(s^2+4s+9)^2}$$

试概略绘制其闭环系统根轨迹。

解：系统有四个极点：$p_1=p_2=$（-2，j2.24），$p_3=p_4=$（-2，$-$ j 2.24），有一个零点 $z_1=$（-2， j 0）。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{2}{d+2+j2.24}+\frac{2}{d+2-j2.24}=\frac{1}{d+2}$$

即 $3d^2+12d+7=0$ 解方程的 $d_1=-3.29$， $d_2=-0.71$，

取分离点为 $d_1=-3.29$

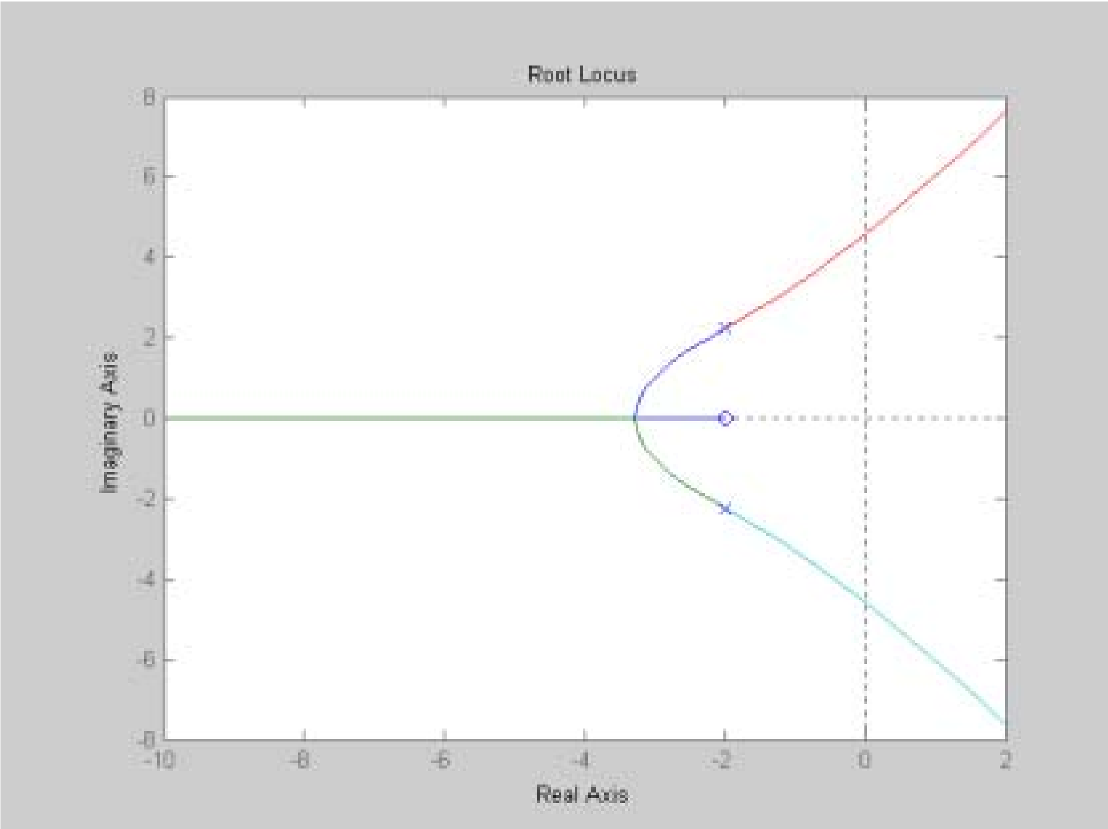
起始角：

$$\theta_{p_i}=(2k+1)\pi+\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{z_jp_i}-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\theta_{p_ip_i}\right)\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$2\theta_{p_1}=(2k+1)180^0+\varphi_{z_jp_i}-\theta_{p_ip_i}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$
$$=(2k+1)180^0+90^0-90^0-90^0=(2k+1)180^0-90^0$$

所以：$\theta_{p_1}=45^0,225^0$ 同理 $\theta_{p_2}=135^0,-45^0$

系统根轨迹如下图：



4-10　设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(0.01s+1)(0.02s+1)}$$

要求：

(1) 画出准确根轨迹(至少校验三点)；

(2) 确定系统的临界稳定开环增益 Kc ；

(3) 确定与系统临界阻尼比相应的开环增益 K。

解：系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(0.01s+1)(0.02s+1)}=\frac{5000K}{s(s+100)(s+50)}=\frac{K^*}{s(s+100)(s+50)}$$

有三个极点：$p_1=$ (0，j0)，$p_2=$ (-50， j 0)，$p_3=$ (—100， j 0)，没有零点。

分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+50}+\frac{1}{d+100}=0$$

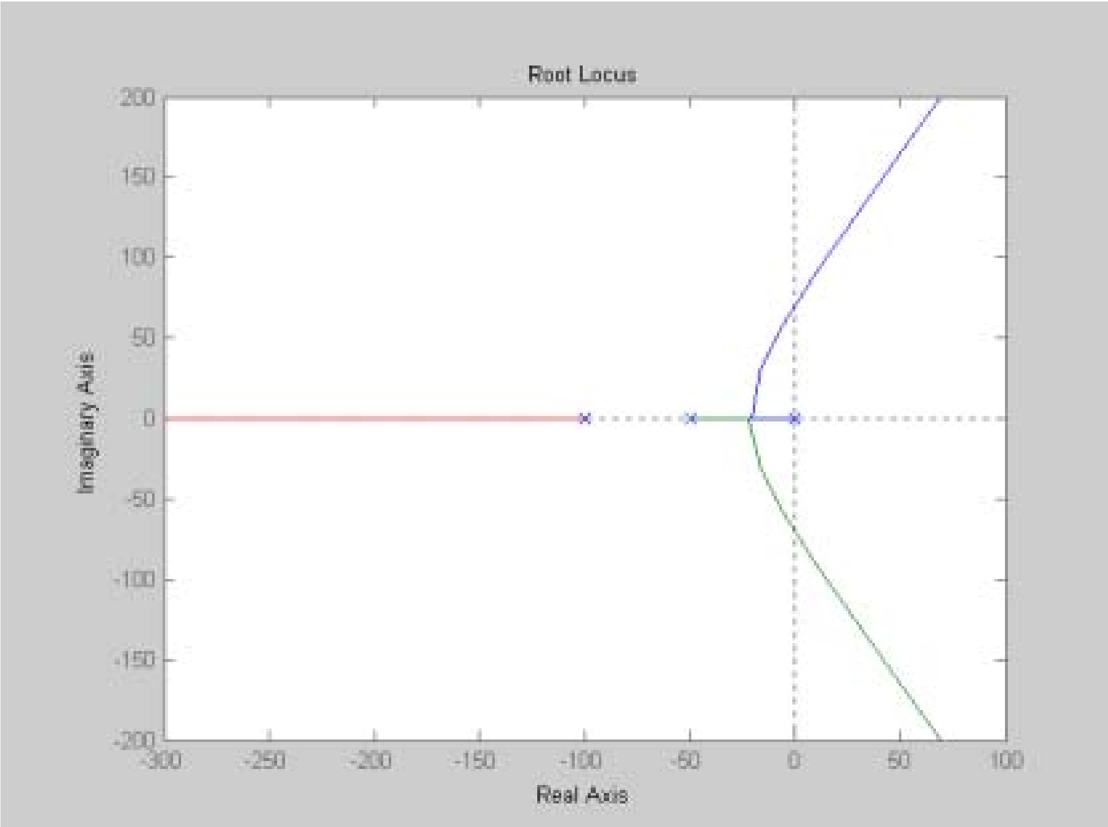
即解方程 $3d^2+300d+5000=0$ 得 $d_1=-78.9$，$d_2=-21.1$，

取分离点为 $d=-21.1$，
起始角：

$$\theta_{p_i}=(2k+1)\pi+\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_{z_jp_i}-\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n}\theta_{p_ip_i}\right)\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\theta_{p_1}=180^0\qquad\theta_{p_2}=0^0\qquad\theta_{p_3}=180^0$$

根轨迹如图所示。



（2）令 $s=j\omega$ 代入系统特征方程中 $s^3+150s^2+5000s+K^*=0$

得到实部方程为：$K^*-150\omega^2=0$

虚部方程为：$5000\omega-\omega^3=0$

解方程得：$\omega=70.7\qquad K^*=750000\qquad$ 所以 $K_c=150$

（3）令 $s=-21.1$ 代入系统特征方程中 $s^3+150s^2+5000s+K^*=0$

得到 $K^*=48112\quad$ 系统临界阻尼比相应的开环增益 $K=9.62$

4-11 一单位反馈系统，其开环传递函数

$$G(s)=\frac{6.9(s^2+6s+25)}{s(s^2+8s+25)}$$

试用根轨迹法计算闭环系统根的位置。

解：系统特征方程为：$s(s^2+8s+25)+6.9(s^2+6s+25)=0$

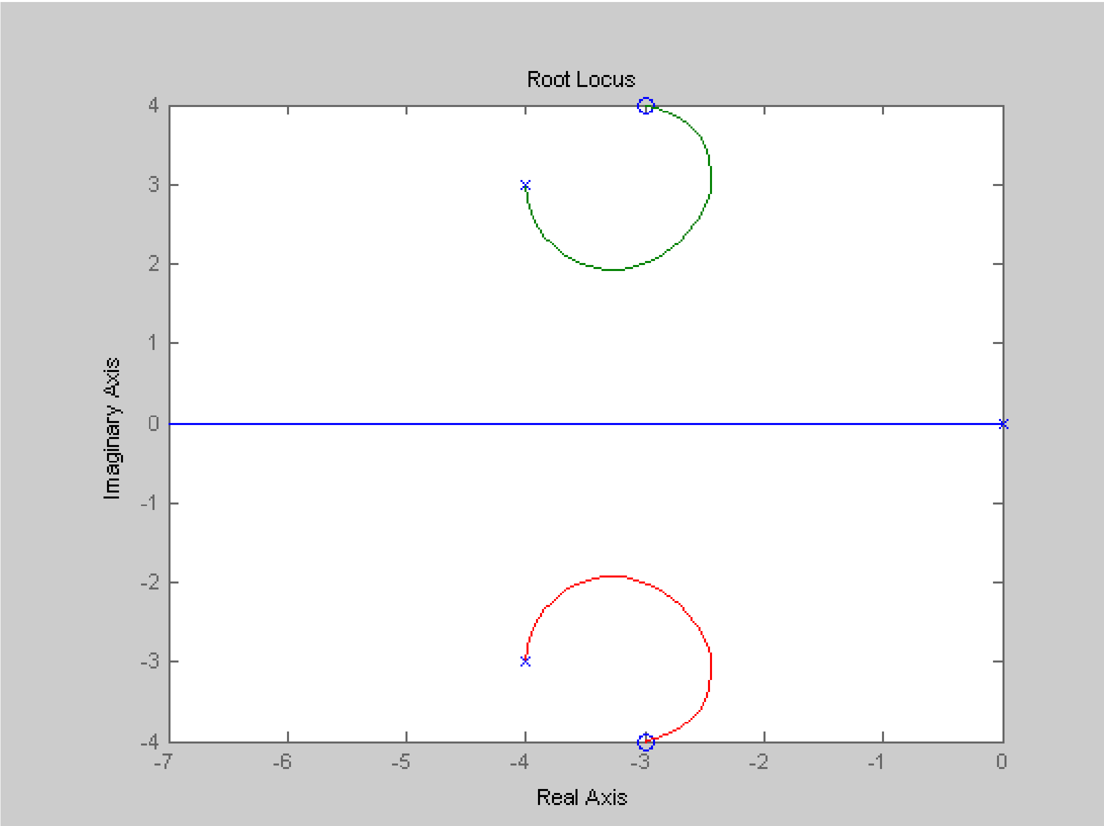
即：$s^3+14.9s^2+66.4s+172.5=0$

```
-9.9780
  -2.4610 + 3.3513i
  -2.4610 - 3.3513i
```

解方程得：$s_1=-9.978 \quad s_2=-2.461+j3.3513 \quad s_3=-2.461-j3.3513$

所以：闭环系统根的位置为 $s_2=-2.461+j3.3513 \quad s_3=-2.461-j3.3513$

根轨迹如图所示：



4-12 设反馈控制系统中

$$G(s)=\frac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)}, \qquad H(s)=1$$

要求：

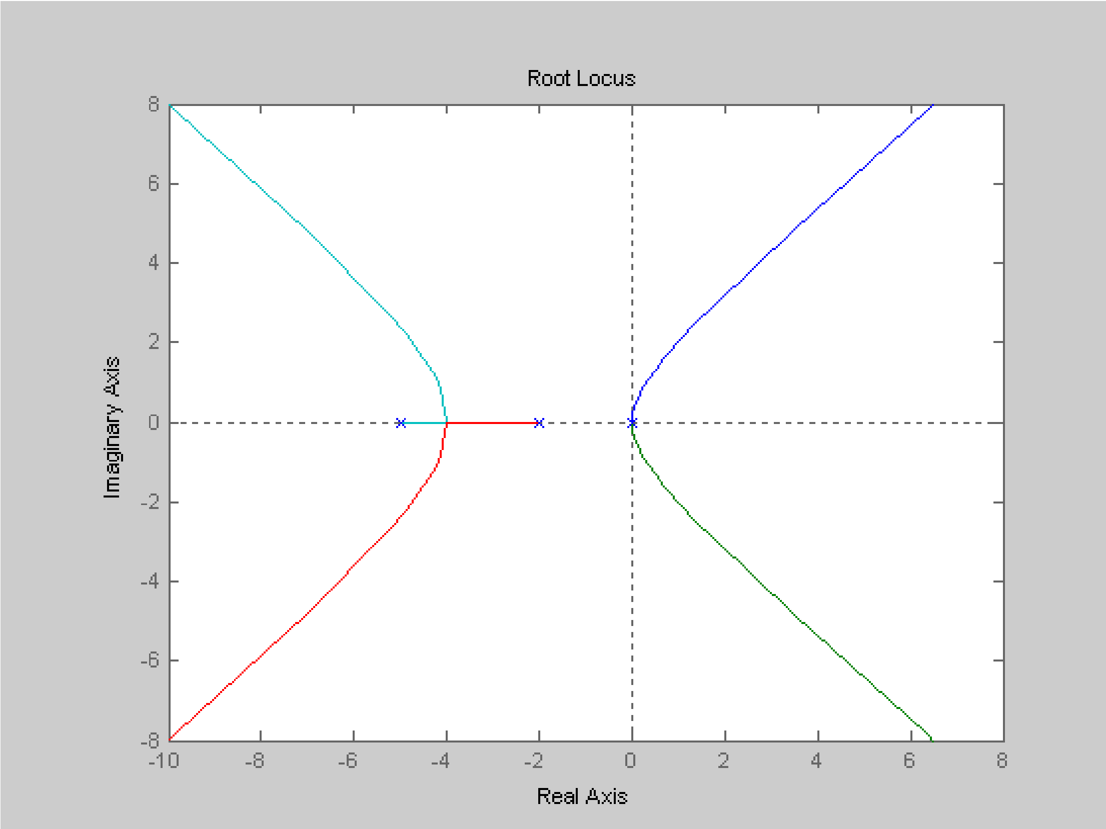
（1） 概略绘出系统根轨迹图，并判断闭环系统的稳定性；

（2） 如果改变反馈通路传递函数，使 $H(s)=1+2s$，试判断 $H(s)$ 改变后的系统稳定性，

研究由于 $H(s)$ 改变所产生的效应。

解：(1) 系统有四个极点 $p_1=(0,j0)$，$p_2=(0,j0)$，$p_3=(-2,j0)$，$p_4=(-5,j0)$；没有零点。

系统根轨迹如下图：

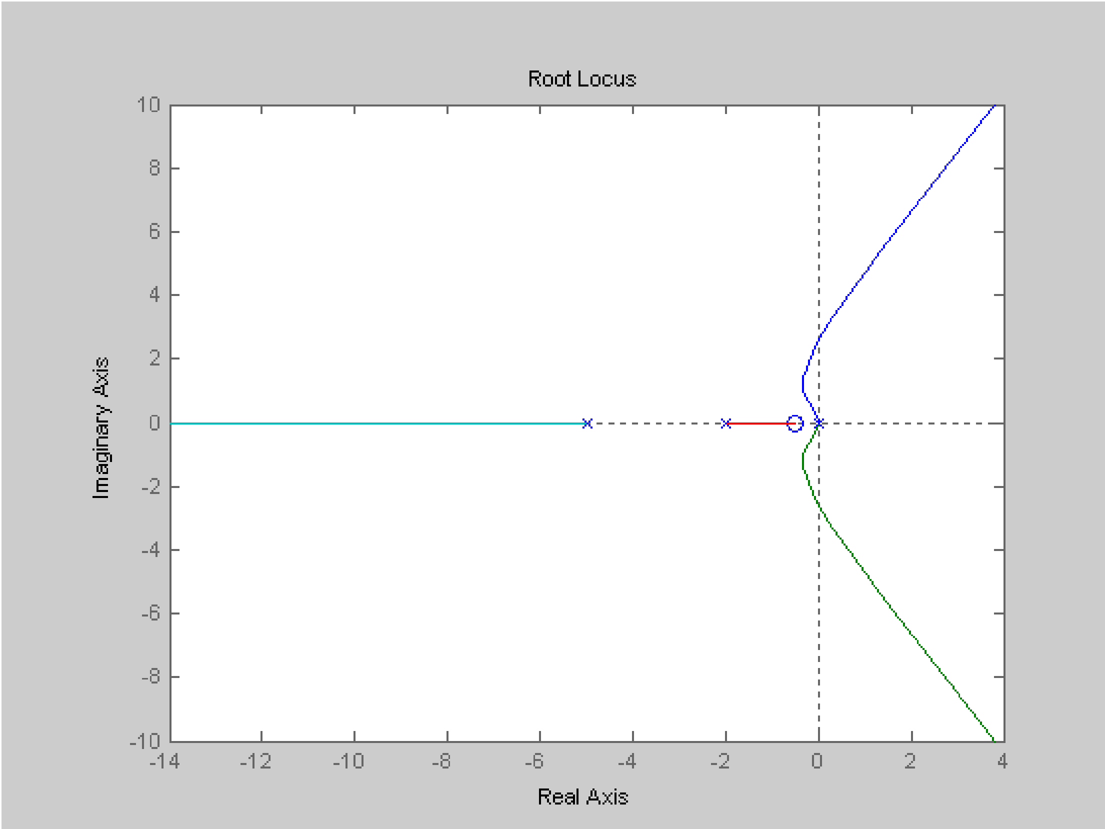


所以闭环系统不稳定。

(2) 如果 $H(s)=1+2s$，这时系统的开环传递函数为：

$$G(s)H(s)=\frac{K^*(2s+1)}{s^2(s+2)(s+5)}=\frac{K_g(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+5)} \qquad \text{其中 } K_g=2K^*$$

系统根轨迹如下图：



这时系统的特征方程为：

$$s^2(s+2)(s+5)+K_g(s+0.5)=s^4+7s^3+10s^2+K_g s+0.5K_g=0$$

令 $s=j\omega$ 代入特征方程中，得到：

实部方程为：$\omega^4-10\omega^2+0.5K_g=0$

虚部方程为：$K_g\omega-7\omega^3=0$

解上述方程得到：$K_g=45.5$ 这是系统的临界稳定的放大倍数。即 $0<K^*<22.75$ 闭环系统稳定。

4-13 试绘出下列多项式方程的根轨迹

(1) $s^3+2s^2+3s+Ks+2K=0$

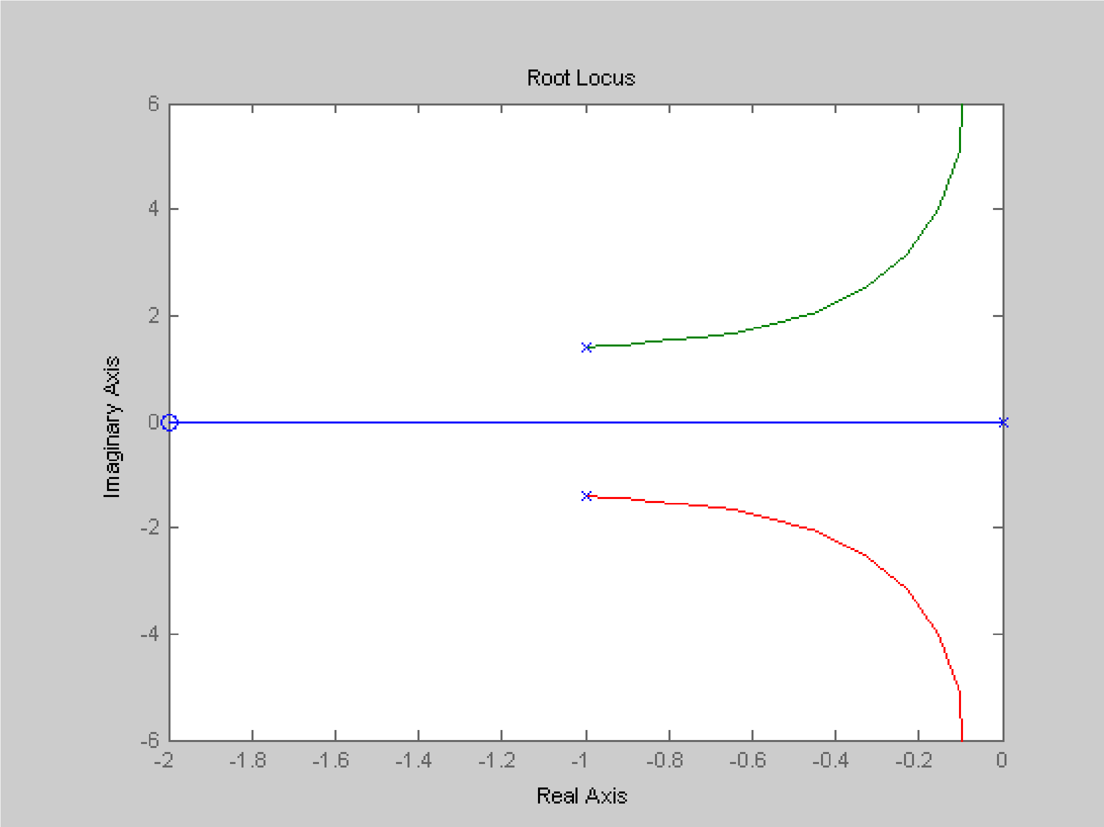
(2) $s^3+3s^2+(K+2)s+10K=0$

(1)解：设等效单位反馈传递函数为 $G(s)=\dfrac{K(s+2)}{s^3+2s^2+3s}$

则系统的特征方程为：$s^3+2s^2+3s+Ks+2K=0$

系统有三个极点：$p_1=$（0，j0），$p_2=$（−1，j1.414），$p_3=$（−1，−j1.414），有一个零点 $z_1=$（−2，j0）。

系统根轨迹如下图：



(2)解：设等效单位反馈传递函数为$G(s)=\dfrac{K(s+10)}{s^3+3s^2+2s}$

则系统的特征方程为：$s^3+3s^2+(K+2)s+10K=0$

系统有三个极点：$p_1=$（0，j0），$p_2=$（−1，j0），$p_3=$（−2，j 0），有一个零点$z_1=$（−10，j 0）。

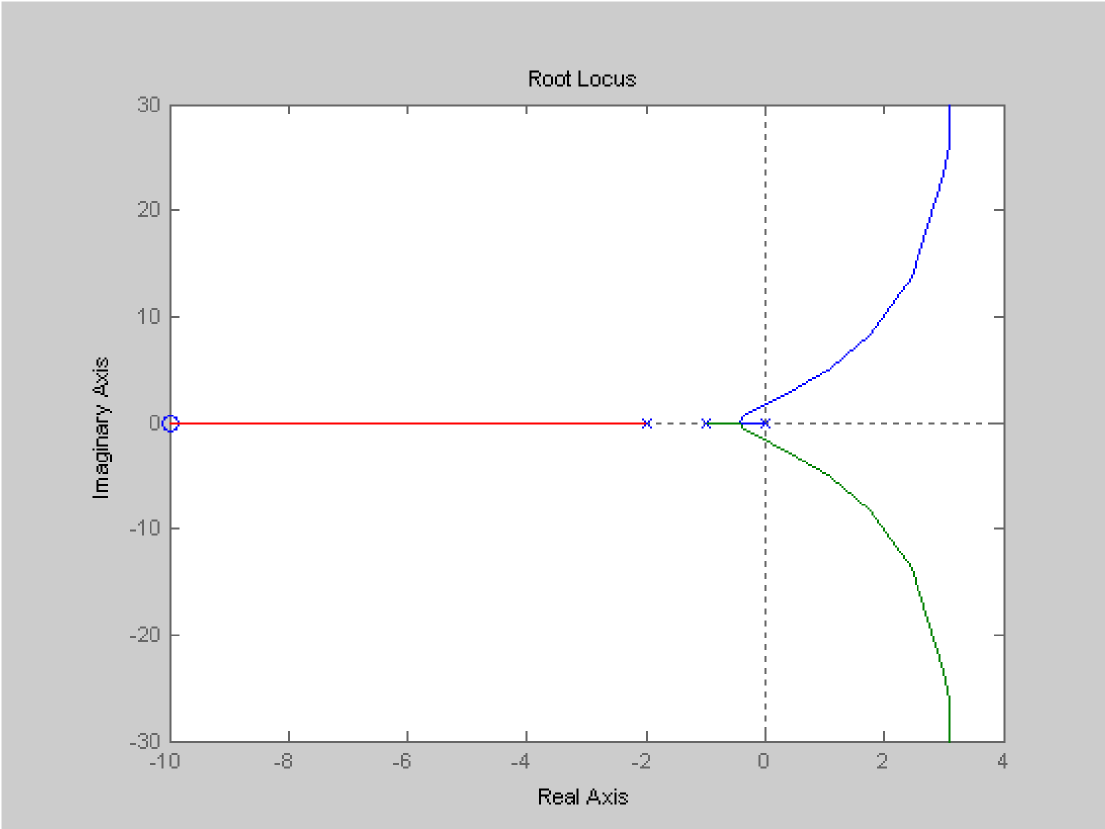
分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}=\frac{1}{d+10}$$

即$2d^3+33d^2+60d+20=0$解方程的$d_1=-0.4344$，$d_2=-1.59$，　$d_3=-14.5$

取分离点为　$d_1=-0.4344$

系统根轨迹如下图：



4-14 设系统开环传递函数如下，试画出 b 从零变到无穷时的根轨迹图。

(1) $G(s)=\dfrac{20}{(s+4)(s+b)}$

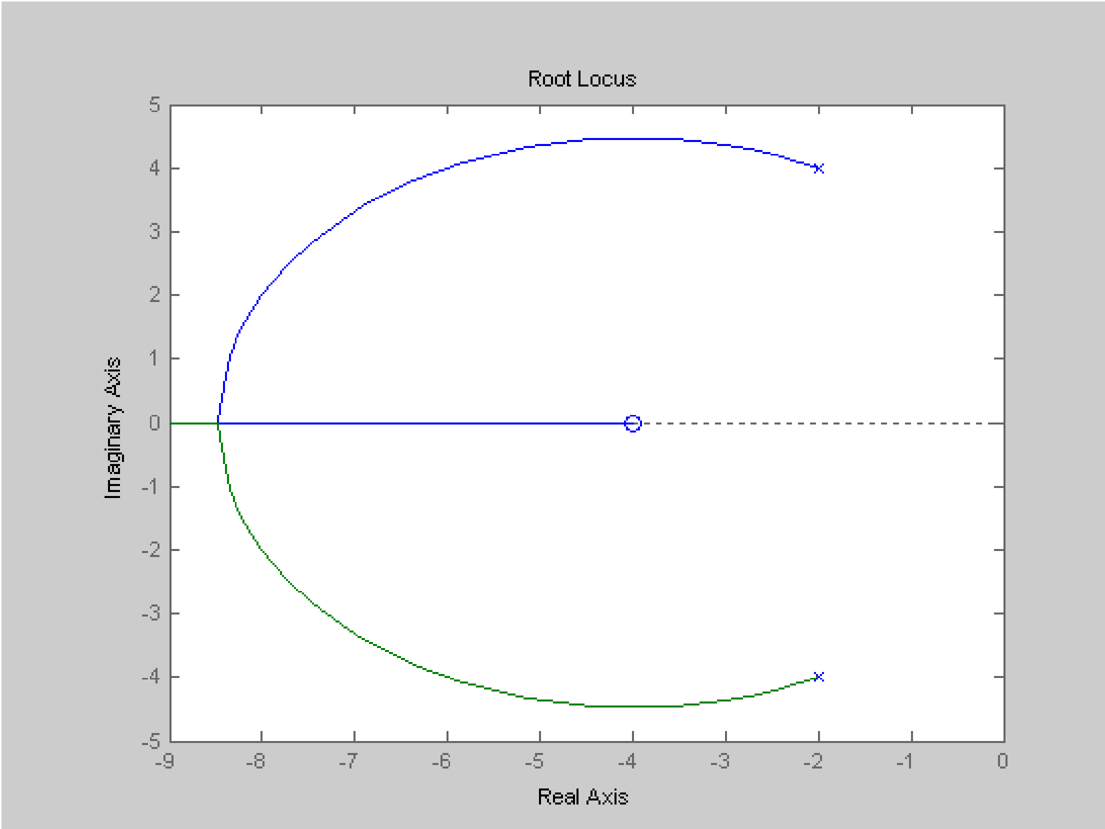
(2) $G(s)=\dfrac{30(s+b)}{s(s+10)}$

解：(1) 系统的特征方程为：$(s+4)(s+b)+20=s^2+4s+20+b(s+4)=0$

系统的等效单位反馈传递函数为：$G_{eq}(s)=\dfrac{b(s+4)}{s^2+4s+20}$

系统有两个极点 $p_1=(-2,j4)$， $p_2=(-2,-j4)$，有一个零点 $z_1=(-4,j0)$

系 统 根 轨 迹 图 如 下 ：

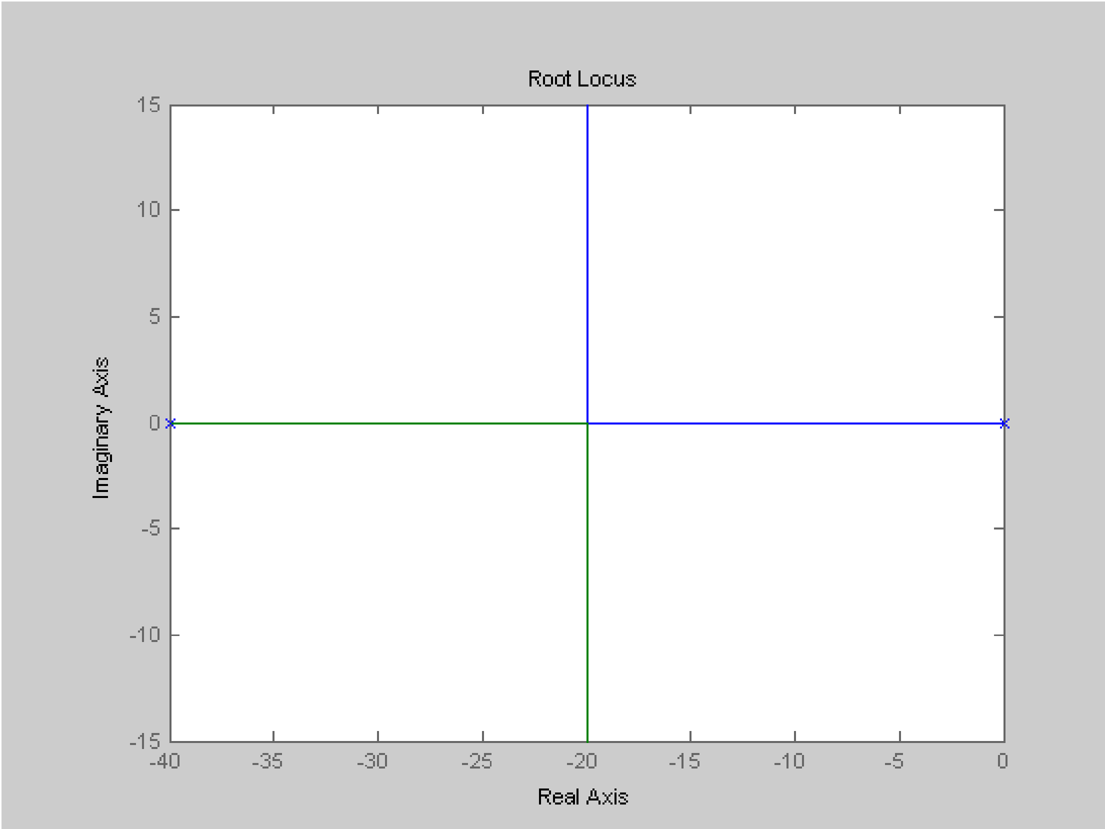


（2）系统的特征方程为：$s(s+10)+30(s+b)=s^2+40s+30b=0$

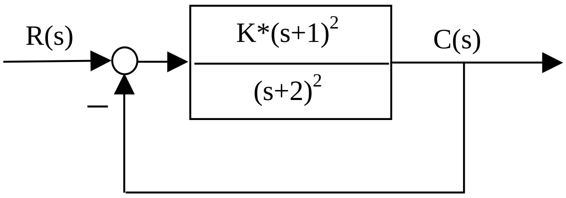
系统的等效单位反馈传递函数为：$G_{eq}(s)=\dfrac{30b}{s^2+40s}=\dfrac{b^*}{s^2+40s}$

系统有两个极点 $p_1=(0,j0)$， $p_2=(-40,j0)$，没有零点。

系统根轨迹图如下：



4-15 设控制系统结构图如图 4-29 所示，试概略绘制其根轨迹图。

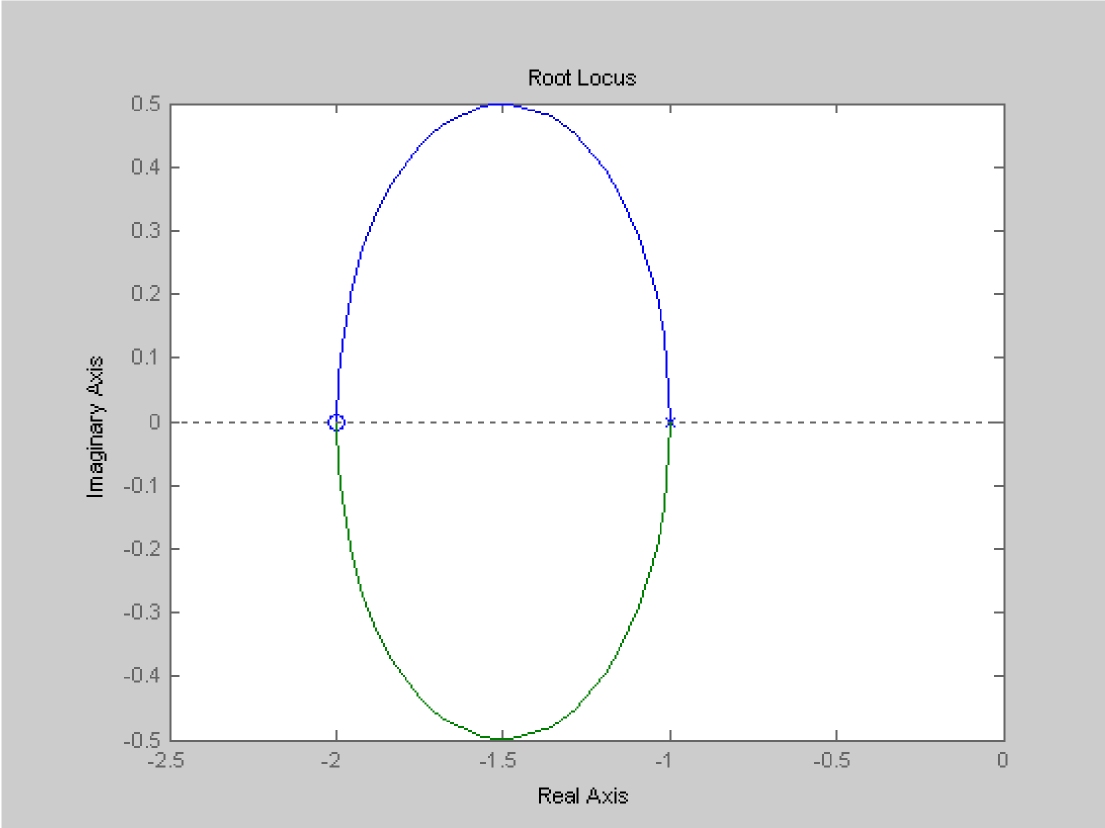


解：系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*(s+1)^2}{(s+2)^2}$$

系统有两个极点，$p_1=p_2=(-2,j0)$，有两个零点 $z_1=z_2=(-1,j0)$

系统根轨迹如下图：



4-16　设单位反馈控制系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*(1-s)}{s(s+2)}$$

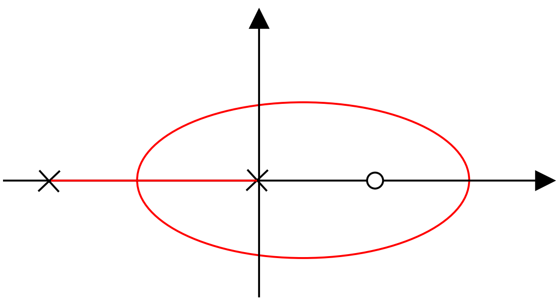
试绘制其根轨迹图，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 K^* 值。

解：系统开环传递函数为 $G(s)=-\dfrac{K^*(s-1)}{s(s+2)}$

系统有两个极点， $p_1=(0,j0), p_2=(-2,j0)$ ，有一个零点 $z_1=(1,j0)$

这是一个零度根轨迹。

系统根轨迹如下图：



分离点坐标计算如下：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}=\frac{1}{d-1}$$

即$d^2-2d-2=0$解方程的$d_1=-0.732$，$d_2=2.732$

取分离点为 $d_1=-0.732$，$d_2=2.732$

系统的特征方程为：$s(s+2)-K^*(s-1)=s^2+2s-K^*(s-1)=0$

将$s=-0.732$代入特征方程中得到：$K^*=0.5674$

将$s=2.732$代入特征方程中得到：$K^*=7.464$

以上两个K^*值是产生重实根的K^*值。

令$s=j\omega$代入特征方程中，得到：

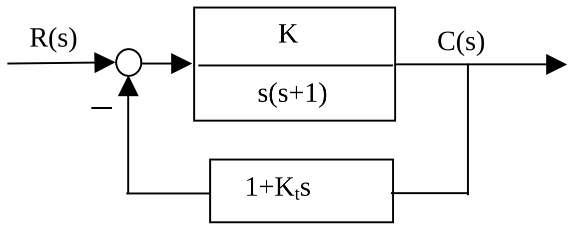
实部方程为：$K^*-\omega^2=0$

虚部方程为：$2\omega-K^*\omega=0$

解上述方程得到：$K^*=2$，$\omega=\sqrt{2}$

所以产生虚根的K^*值为$K^*=2$

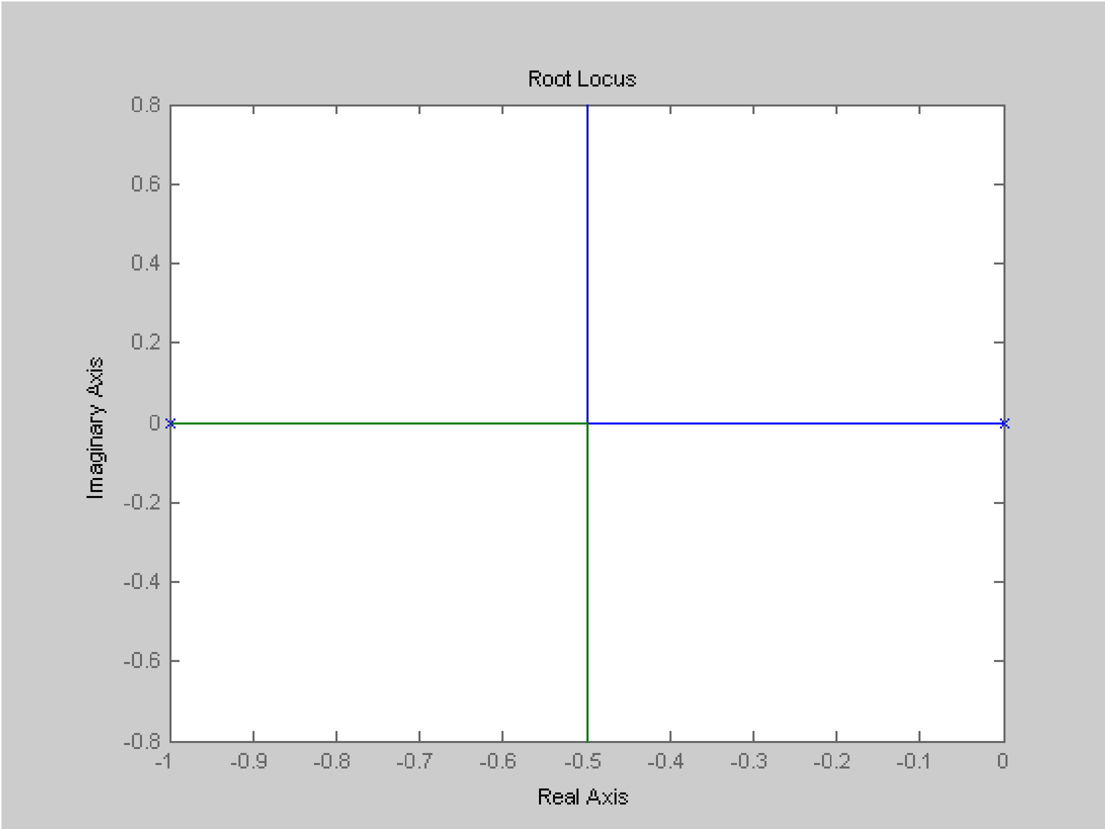
4-17　设控制系统如图 4-30 所示，试概略绘出$K_t=0$，$0<K_t<1$，$K_t>1$时的根轨迹和单位阶跃响应曲线。若取$K_t=0.5$，试求出$K=10$时的闭环零、极点，并估算系统的动态性能。



解：(1) $K_t=0$时系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

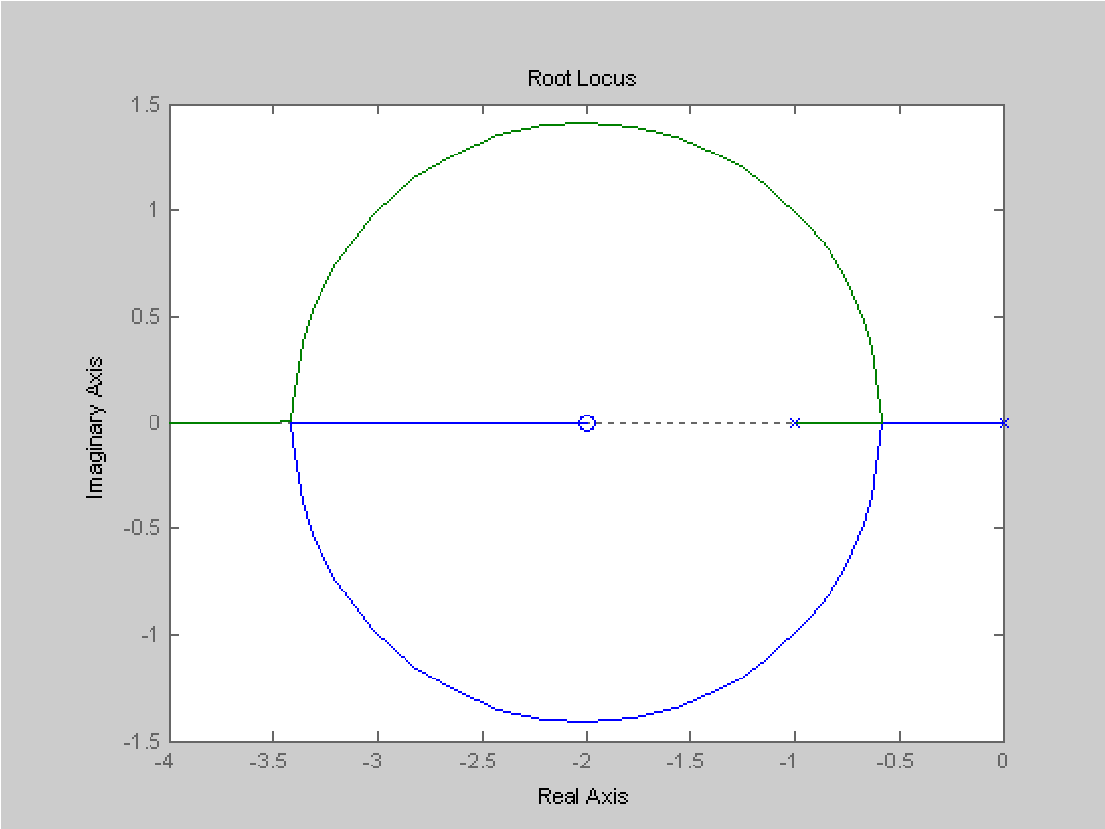
系统的根轨迹如下图：



（2） $0 < K_t < 1$ 时系统的开环传递函数为

$G(s)H(s)=\dfrac{K(1+K_t s)}{s(s+1)}$　此时 $G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+z)}{s(s+1)}$， $z>1$ 设 $K_t=0.5$ 则 $z=2$

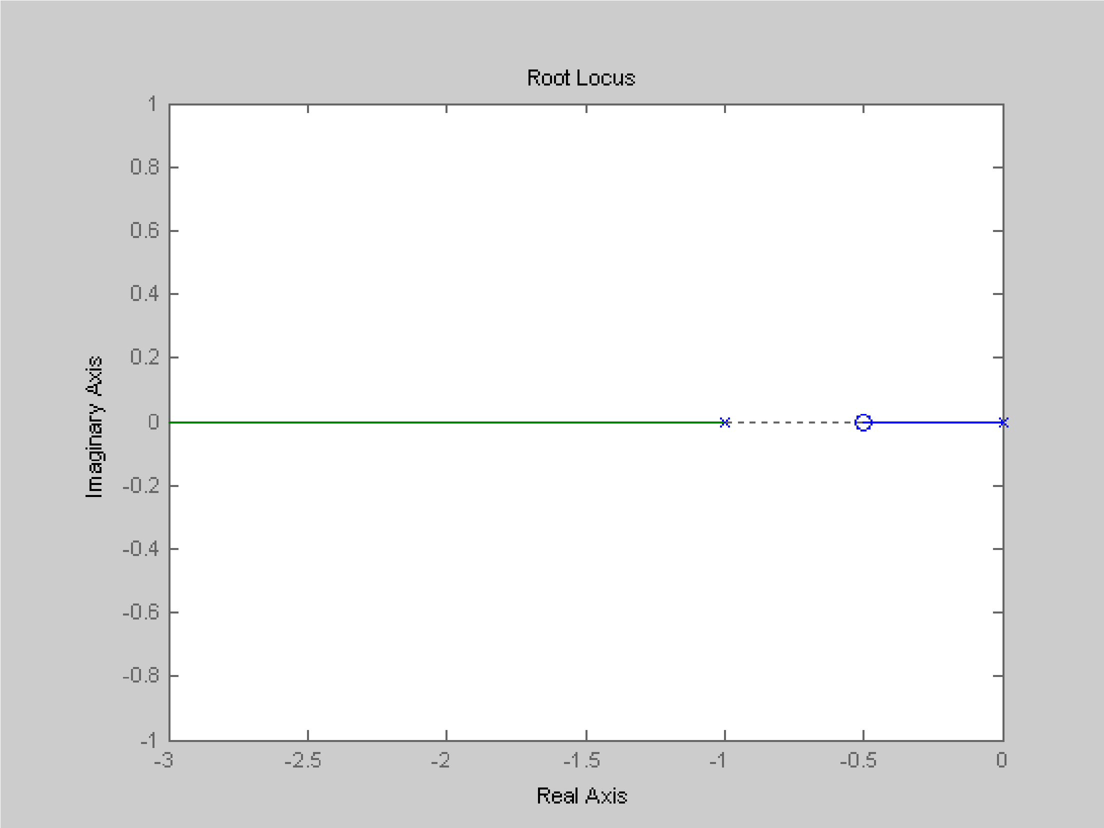
系统的根轨迹如下图：



(3) $K_t > 1$时系统的开环传递函数为

$G(s)H(s)=\dfrac{K(1+K_t s)}{s(s+1)}$ 此时$G(s)H(s)=\dfrac{K^*(s+z)}{s(s+1)}$， $z<1$设$K_t=2$则$z=0.5$

系统的根轨迹如下图：



（4）取 $K_t = 0.5$，试求出 $K = 10$ 时的闭环零、极点，并估算系统的动态性能。

系统的特征方程为：$s^2 + 6s + 10 = 0$ 解方程的 $s_1 = -3 + j$，$s_2 = -3 - j$

此时闭环系统没有零点、有一对共轭极点分别为 $s_1 = -3 + j$，$s_2 = -3 - j$

系统呈现二阶系统特性：阻尼比为 0.948，超调量近似为 1%。自然振荡角频率为 3.16。

4-19　设控制系统开环传递函数为

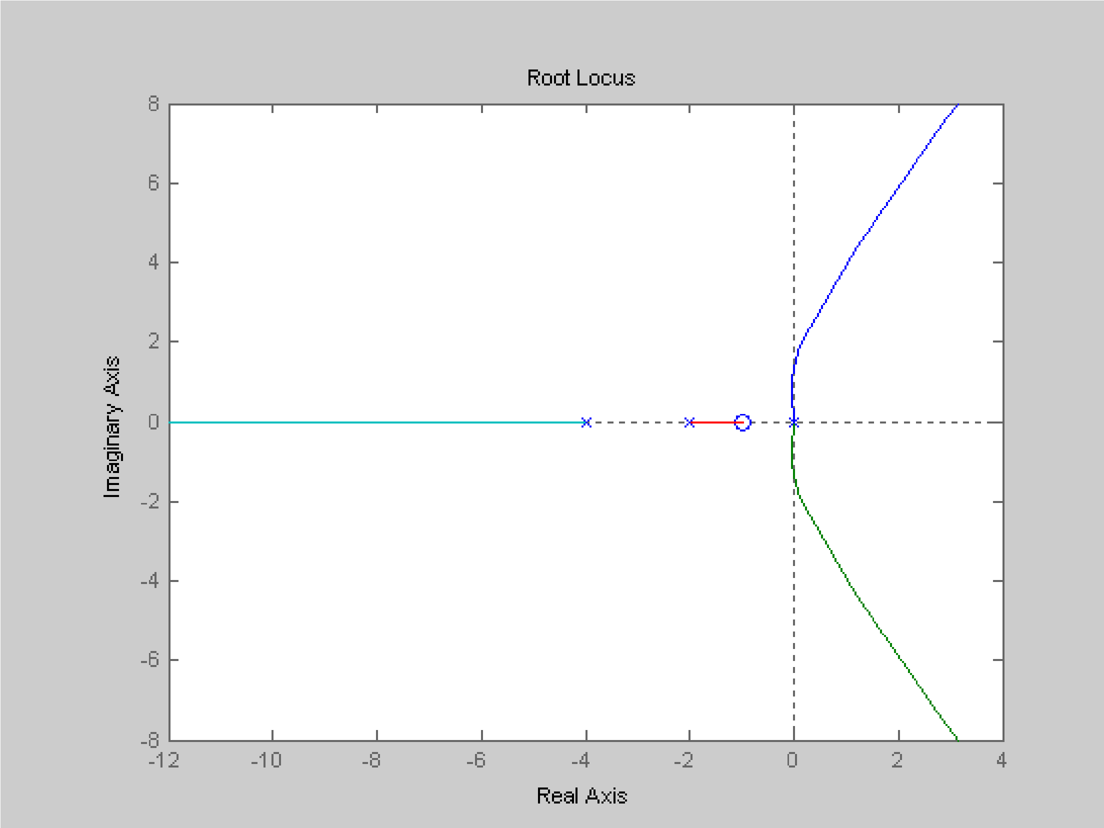
$$G(s) = \frac{K^*(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

试分别画出正反馈系统和负反馈系统的根轨迹图，并指出它们的稳定情况有何不同?

解：(1) 负反馈情况

系统有四个极点，$p_1 = p_2 = (0, j0), p_3 = (-2, j0), p_4 = (-4, j0)$，有一个零点 $z_1 = (1, j0)$

系统根轨迹如下图所示：



系统的特征方程为：$s^4+6s^3+8s^2+K^*(s+1)=0$

令 $s=j\omega$ 代入特征方程中，得到：

实部方程为：$\omega^4-8\omega^2+K^*=0$

虚部方程为：$K^*\omega-6\omega^3=0$

解上述方程得到：$K^*=12$，$\omega=\sqrt{2}$

所以当 $0<K^*<12$ 是系统稳定。

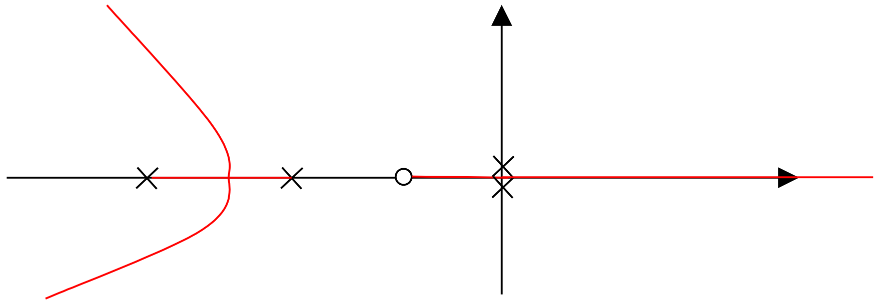
（2）正反馈情况

系统是一个零度根轨迹。

系统的特征方程为：$s^4+6s^3+8s^2-K^*(s+1)=0$

系统有四个极点，$p_1=p_2=(0,j0),p_3=(-2,j0),p_4=(-4,j0)$，有一个零点 $z_1=(1,j0)$

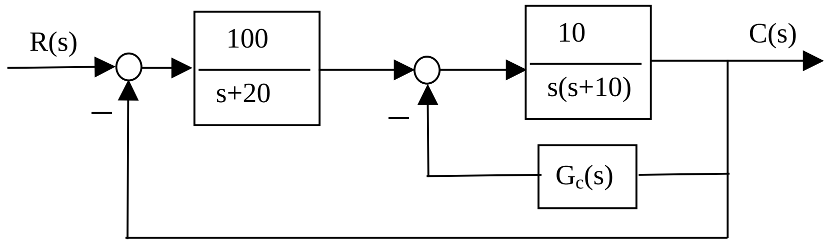
系统根轨迹如下图所示：



所以系统闭环不稳定。

4-20 设控制系统如图 4-31 所示，其中$G_c(s)$为改善系统性能而加入的校正装置。若$G_c(s)$

可从$K_t s$、$K_t s^2$和$K_t s^2/(s+20)$三种传递函数任选一种，你选哪一种？为什么？



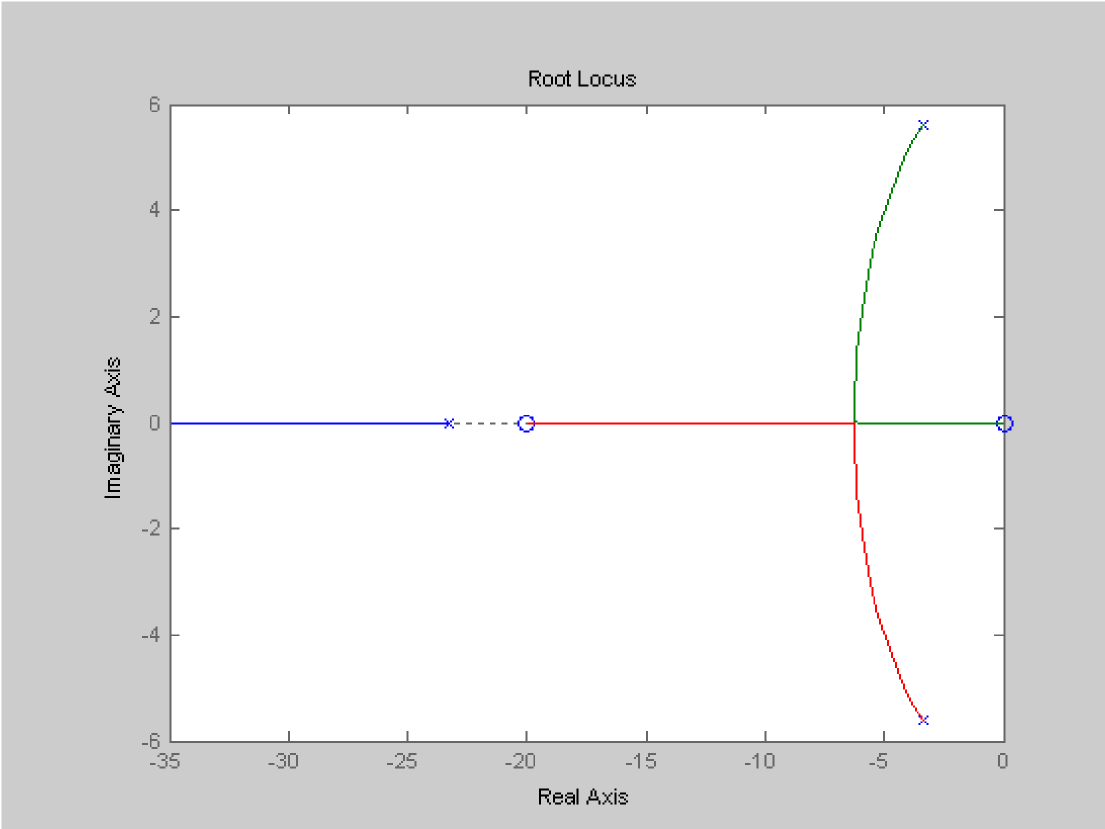
解：(1) $G_c(s)=K_t s$ 时系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{10}{s^2+10s+10K_t s}\dfrac{100}{s+20}$

即：$G(s)=\dfrac{1000}{s(s+10+10K_t)(s+20)}$

此时系统特征方程为：$s^3+30s^2+200s+1000+10K_t s(s+20)=0$

系统等效开环传递函数为：

$$G_{eq}(s)=\frac{10K_t s(s+20)}{s^3+30s^3+200s+100}$$



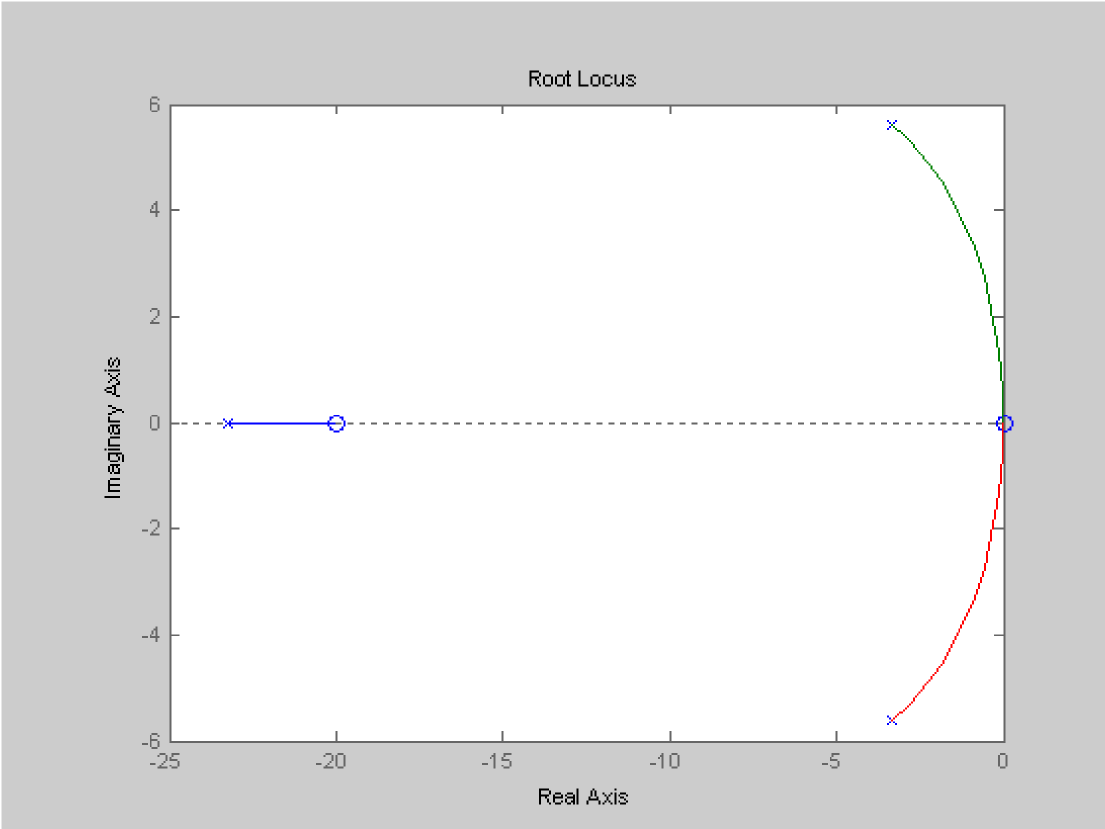
（2） $G_c(s)=K_t s^2$ 时系统的开环传递函数为： $G(s)=\dfrac{10}{s^2+10s+10K_t s^2}\dfrac{100}{s+20}$

即： $G(s)=\dfrac{1000}{s(s+10K_t s+10)(s+20)}$

此时系统特征方程为： $s^3+30s^2+200s+1000+10K_t s^2(s+20)=0$

系统等效开环传递函数为：

$$G_{eq}(s)=\frac{10K_t s^2(s+20)}{s^3+30s^3+200s+100}$$



（3） $G_c(s)=K_t s^2/(s+20)$ 时系统的开环传递函数为：

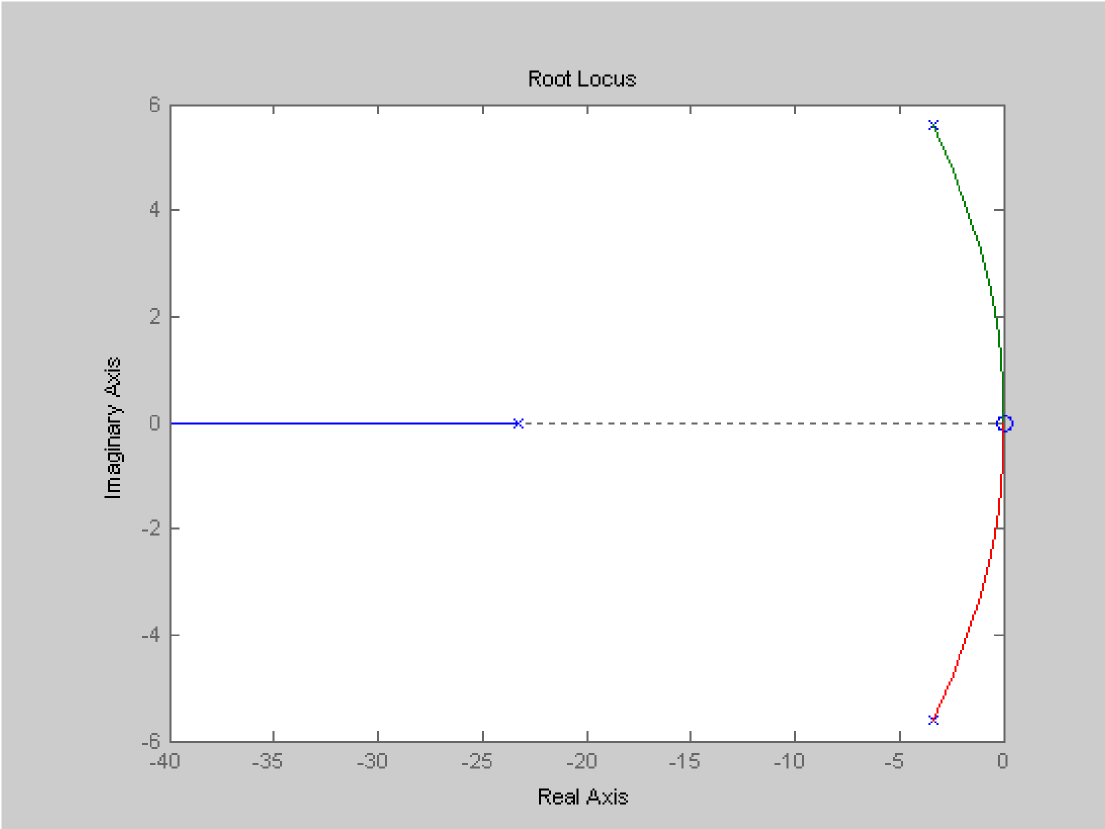
$$G(s)=\frac{10(s+20)}{s^3+30s^2+200s+10K_t s^2}\frac{100}{s+20}$$

即：$G(s)=\dfrac{1000}{s(s^2+10K_t s+30s+200)}$

此时系统特征方程为：$s^3+30s^2+200s+1000+10K_t s^2=0$

系统等效开环传递函数为：

$$G_{eq}(s)=\frac{10K_t s^2}{s^3+30s^3+200s+100}$$


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
6
4
2
0
-2
-4
-6
-40
-35
-30
-25
-20
-15
-10
-5
0

选第一种。

5-2 若系统单位阶跃响应为

$$h(t)=1-1.8e^{-4t}+0.8e^{-9t} \qquad (t\geq 0)$$

试确定系统的频率特性。
解：对单位阶跃响应取拉氏变换得：

$$\frac{1}{s}-\frac{1.8}{s+4}+\frac{0.8}{s+9}=\frac{36}{s(s+4)(s+9)}$$

即：$\dfrac{C(s)}{R(s)}=G(s)=\dfrac{36}{(s+4)(s+9)}$

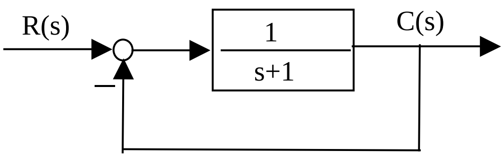
所以系统的频率特性为：

$$G(j\omega)=\frac{36}{(j\omega+4)(j\omega+9)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

其中：$A(\omega)=\dfrac{36}{\sqrt{(\omega)^2+16}\sqrt{(\omega)^2+81}}$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{4}-\arctan\frac{\omega}{9}$$

5-3 设系统结构图如图 5-49 所示，试确定输入信号



$$r(t)=\sin(t+30^0)-\cos(2t-45^0)$$

作用下，系统的稳态误差 $e_{ss}(t)$。

解：系统的闭环传递函数为：

$$G(s)=\frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{1}{s+1}}=\frac{1}{s+2}$$

根据公式（5-16）和公式（5-17）

得到：$c_{ss}(t)=A|G(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi+\angle G(j\omega))$

所以

$$c_{ss1}(t)=A_1|G(j\omega_1)|\sin(\omega_1 t+\varphi_1+\angle G(j\omega_1))$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(t+30^0-26.6^0)=0.447\sin(t+3.4^0)$$

$$c_{ss2}(t) = A_2 \left| G(j\omega_2) \right| \sin(\omega_2 t + \varphi_2 + \angle G(j\omega_2))$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{8}} \cos(2t - 45^0 - 45^0) = -0.354 \cos(2t - 90^0)$$

所以：$c_{ss}(t) = c_{ss1}(t) + c_{ss2}(t)$
$$= 0.447 \sin(t + 3.4^0) - 0.354 \cos(2t - 90^0)$$

$$e_{ss}(t) = c_{ss}(t) - r(t) = 0.447 \sin(t + 3.4^0) - 0.354 \cos(2t - 90^0) - \sin(t + 30^0) + \cos(2t - 45^0)$$

5-4　典型二阶系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

当取 $r(t) = 2\sin t$ 时，系统的稳态输出

$$c_{ss}(t) = 2\sin(t - 45^0)$$

试确定系统参数 ω_n, ζ。

解：根据公式（5-16）和公式（5-17）

得到：$c_{ss}(t) = A\left| G_B(j\omega) \right| \sin(\omega t + \varphi + \angle G_B(j\omega))$

其中：$G_B(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

所以：$\left| G_B(j\omega) \right| = \dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2) + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$

$$\angle G_B(j\omega) = -\arctan \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

根据题目给定的条件：$\omega = 1 \;\; A = 2$

所以：$\left| G_B(j\omega) \right| = \dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2) + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - 1) + (2\zeta\omega_n)^2}} = 1$　　　（1）

$$\angle G_B(j\omega) = -\arctan \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = -\arctan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2 - 1} = -45^0 \qquad (2)$$

由式（1）得 $\omega_n^4 = (\omega_n^2 - 1) + (2\zeta\omega_n)^2$

即：$2\omega_n^2 - 4\zeta^2\omega_n^2 - 1 = 0$　　　（3）

由式（2）得 $\arctan\dfrac{2\xi\omega_n}{\omega_n^2-1}=45^0$

即：$\omega_n^2-2\zeta\omega_n-1=0$　　　（4）

联立方程（3）和（4），解方程得：$\omega_n=1.848$　　$\xi=0.6532$

5-5　已知系统开环传递函数

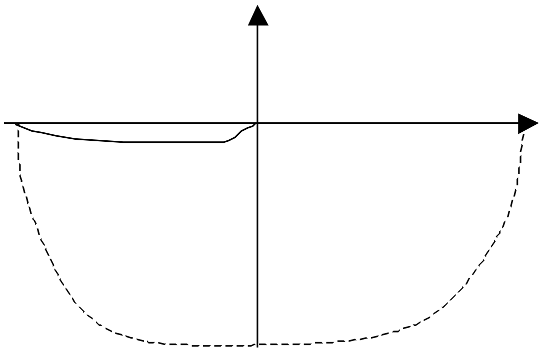
$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau s+1)}{s^2(Ts+1)};\qquad K,\tau,T>0$$

试分析并绘制 $\tau>T$ 和 $T>\tau$ 情况下的概略开环幅相曲线。

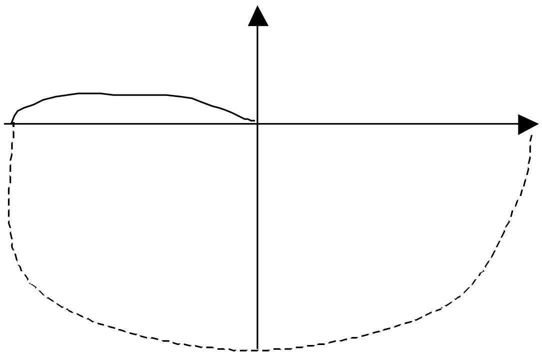
解：相频特性为

$$\varphi(\omega)=-180^0+\arctan\tau\omega-\arctan T\omega$$

(1)　$\tau>T$ 时，$\varphi(\omega)>-180^0$ 概略开环幅相曲线如下



(1)　$\tau<T$ 时，$\varphi(\omega)<-180^0$ 概略开环幅相曲线如下



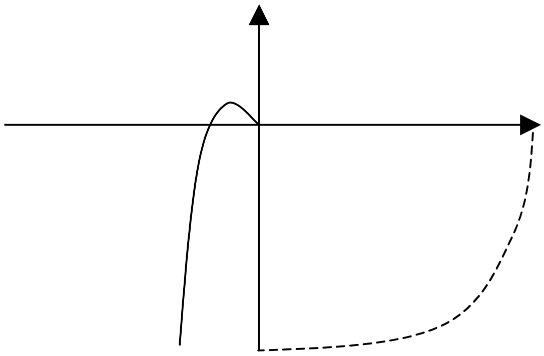
5-6　已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{1}{s^{\nu}(s+1)(s+2)}$$

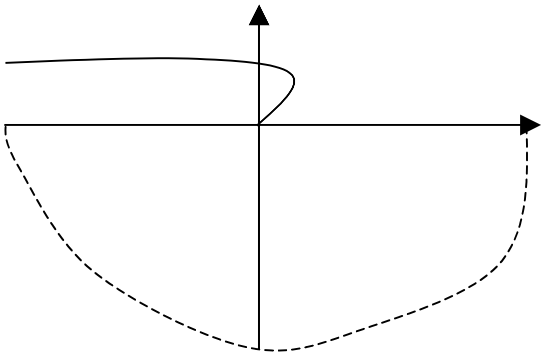
试分别绘制$\nu=1,2,3,4$时系统的概略开环幅相曲线。

解：

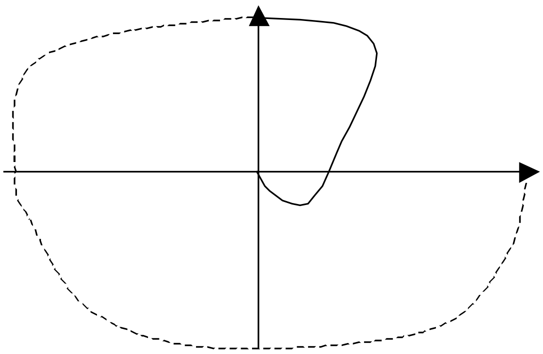
（1）$\nu=1$时系统的概略开环幅相曲线如下：



（2）$\nu=2$时系统的概略开环幅相曲线如下：



（3）$\nu=3$时系统的概略开环幅相曲线如下：



5-7　已知系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{K(-T_2s+1)}{s(T_1s+1)};\qquad K,T_1,T_2>0$$

当取$\omega=1$时，$\angle G(j\omega)=-180^0$，$|G(j\omega)|=0.5$。当输入为单位速度信号时，系统的稳态误差为 0.1，试写出系统开环频率特性表达式。

解：$K_V=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)=K=10$

当$\omega=1$时$|G(j\omega)|=\dfrac{K\sqrt{(T_2\omega)^2+1}}{\sqrt{(T_1\omega)^2+1}}=\dfrac{10\sqrt{(T_2)^2+1}}{\sqrt{(T_1)^2+1}}=0.5$

$$\angle G(j\omega)=-90^0-\arctan T_1\omega-\arctan T_2\omega$$

$$=-90^0-\arctan T_1-\arctan T_2=-90^0-\arctan\frac{T_1+T_2}{1-T_1T_2}=-180^0$$

即：$1-T_1T_2=0$ $\quad\quad T_1=\dfrac{1}{T_2}$代入到$\left|G(j)\right|=\dfrac{10\sqrt{(T_2)^2+1}}{\sqrt{(T_1)^2+1}}=0.5$中得到：

$$T_2=\frac{1}{20}\quad T_1=20$$

所以系统的开环传递函数为：$G(s)=\dfrac{10(-s/20+1)}{s(20s+1)}$

系统开环频率特性表达式为：$G(j\omega)=\dfrac{10(-j\omega/20+1)}{j\omega(20j\omega+1)}$

5-8　已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{10}{s(2s+1)(s^2+0.5s+1)}$$

试分别计算$\omega=0.5$和$\omega=2$时，开环频率特性的幅值$A(\omega)$和相位$\varphi(\omega)$。

解：

$$A(\omega)=\frac{10}{\omega\sqrt{4\omega^2+1}\sqrt{(1-\omega^2)^2+(0.5\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90^0-\arctan 2\omega-\arctan\frac{0.5\omega}{1-\omega^2}$$

（1）$\omega=0.5$时

$$A(\omega)=\frac{10}{\omega\sqrt{4\omega^2+1}\sqrt{(1-\omega^2)^2+(0.5\omega)^2}}=\frac{10}{0.5\sqrt{2}\sqrt{0.625}}=17.86$$

$$\varphi(\omega)=-90^0-\arctan 2\omega-\arctan\frac{0.5\omega}{1-\omega^2}=-90^0-45^0-18.4^0=153.4^0$$

（2）$\omega=2$时

$$A(\omega)=\frac{10}{\omega\sqrt{4\omega^2+1}\sqrt{(1-\omega^2)^2+(0.5\omega)^2}}=\frac{10}{2\sqrt{17}\sqrt{10}}=0.383$$

$$\varphi(\omega)=-90^0-\arctan 2\omega-\arctan\frac{0.5\omega}{1-\omega^2}=-90^0-76^0-180^0+18.4^0=327.6^0$$

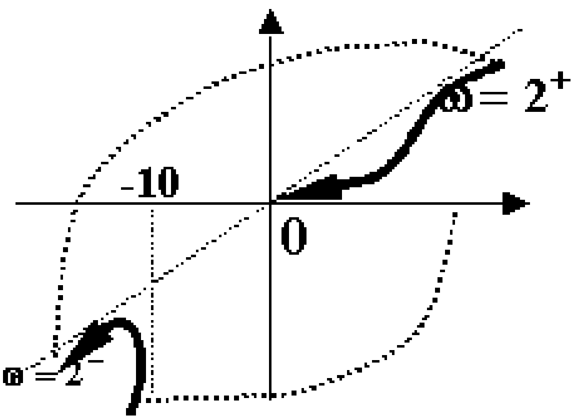
5-9　已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{10}{s(s+1)(s^2/4+1)}$$

试绘制系统概略开环幅相曲线。

解：

$$G(j0^+)=\infty\angle-90^\circ$$
$$G(j2^-)=\infty\angle-153.4^\circ$$
$$G(j2^+)=\infty\angle-333.4^\circ$$
$$G(j\infty)=0\angle-360^\circ$$



5-10　已知系统开环传递函数

$$G(s)H(s)=\frac{(s+1)}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s^2}{9}+\frac{s}{3}+1\right)}$$

要求选择频率点，列表计算 $A(\omega)$， $L(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$，并据此在对数坐标纸上绘制系统开环对数频率特性曲线。

解 由题给传递函数知，系统的交接频率依次为 1，2，3。低频段渐近线的斜率为-20，且过（1,0dB）点。

系统相频特性按下试计算 $\varphi(\omega)=-90^\circ+arctg\omega-arctg\frac{\omega}{2}-arctg\frac{\omega/3}{1-\omega^2/9}$

令 ω 为不同值，将计算结果列表如下

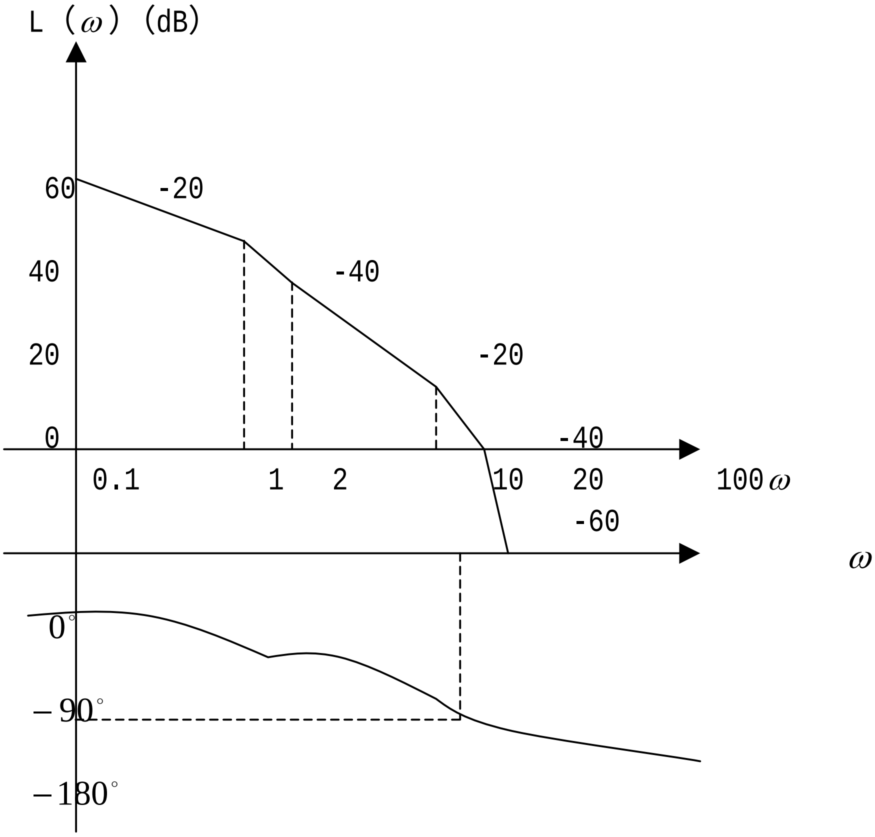
ω	0.1	0.5	1	3	5	7	10	15	20
$\varphi(\omega)$	-89°	-87.2°	-92.1°	-164°	-216°	-234.5°	-246°	-254°	-258°

ω	30	50	100
$\varphi(\omega)$	-262°	-265°	-267.7°

作系统开环对数频率特性图，求得 $\omega_c=1$，系统的穿越频率 $\omega_r=18$

系统的幅值裕度和相角裕度为 $h=\frac{1}{G(j\omega_c)}=0.512$

$$\gamma=180^\circ+\varphi(\omega_r)=-16.1^\circ$$



5-11 绘制下列函数的对数幅频渐进特性曲线：

（1）$G(s)=\dfrac{2}{(2s+1)(8s+1)}$

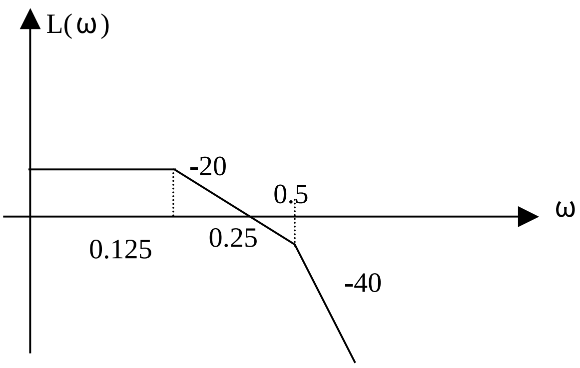
（2）$G(s)=\dfrac{200}{s^2(s+1)(10s+1)}$

（3）$G(s)=\dfrac{8(\frac{s}{0.1}+1)}{s(s^2+s+1)(\frac{s}{2}+1)}$

（4）$G(s)=\dfrac{10(\frac{s^2}{400}+\frac{s}{10}+1)}{s(s+1)(\frac{s}{0.1}+1)}$

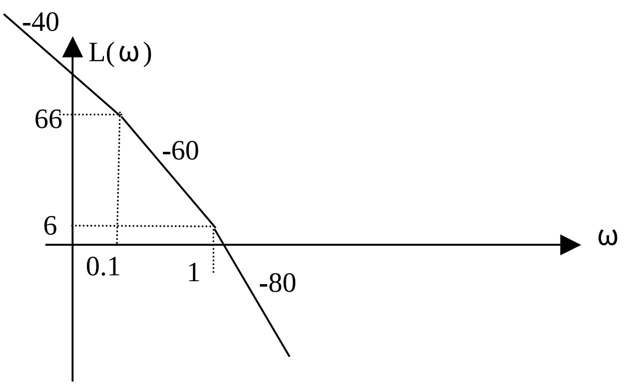
解：(1) 系统的交接频率为 0.125 和 0.5，低频段渐近线的斜率为-0，且过(0.125,6dB)点，截止频率为$\omega_c=0.25$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



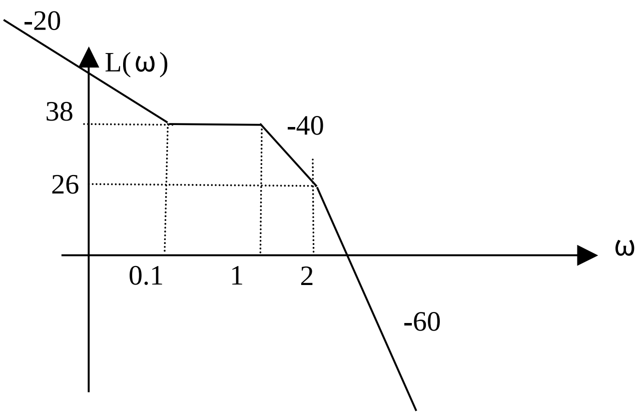
（2）系统的交接频率为 0.1 和 1，低频段渐近线的斜率为-40，且过（0.1,66dB）和（1,6dB）点，截止频率为 $\omega_c = 2.1$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



（3）系统的交接频率为 0.1 1 2，低频段渐近线的斜率为-20，且过（0.1,38dB）点，截止频率为 $\omega_c = 5.43$。

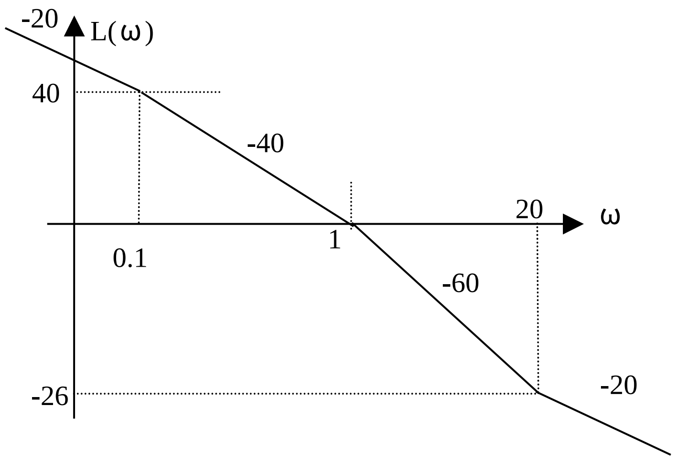
对数幅频渐进特性曲线如下：



（4）系统的交接频率为 0.1 1 20，低频段渐近线的斜率为-20，且过（0.1,40dB）

点，截止频率为$\omega_c = 1$。

对数幅频渐进特性曲线如下：



5-12 已知最小相位系统的对数幅频渐进特性曲线如图 5-50 所示，试确定系统的开环传递函数。

解：

(a) $G(s) = \dfrac{100(s/\omega_2 + 1)}{(s/\omega_1 + 1)(s/\omega_3 + 1)}$

由图（a）得到$\omega_3 = 100 \quad \omega_2 = 1000\omega_1$

所以：$G(s) = \dfrac{100(0.001s/\omega_1 + 1)}{(s/\omega_1 + 1)(s/100 + 1)}$

(b) $G(s) = \dfrac{\sqrt{10}(s/\omega_1 + 1)}{s^2(s/\omega_2 + 1)}$

(c) $G(s) = \dfrac{Ks^2\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s/10 + 1)}$

5-13 试用奈氏判据分宾判断题 5-5，5-6 系统的闭环稳定性。

解：5-5

（1）$\tau > T$ 时系统闭环稳定。

（2）$T > \tau$ 时系统闭环不稳定。

5-6

（1）$\nu = 1$ 时系统闭环稳定。

（2）$\nu = 2,3,4$ 时系统闭环不稳定。

5-14 已知下列系统开环传递函数（参数 $K, T, T_i > 0; i = 1,2,\cdots,6$）：

（1） $G(s) = \dfrac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$

（2） $G(s) = \dfrac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$

（3） $G(s) = \dfrac{K}{s^2 (Ts + 1)}$

（4） $G(s) = \dfrac{K(T_1 s + 1)}{s^2 (T_2 s + 1)}$

（5） $G(s) = \dfrac{K}{s^3}$

（6） $G(s) = \dfrac{K(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s^3}$

（7） $G(s) = \dfrac{K(T_5 s + 1)(T_6 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$

（8） $G(s) = \dfrac{K}{Ts - 1}$

（9） $G(s) = \dfrac{-K}{-Ts + 1}$

（10） $G(s) = \dfrac{K}{s(Ts + 1)}$

其系统开环幅相曲线分别如图 5-51（1）～（10）所示，试根据奈氏判据判定各系统的闭环稳定性，若系统闭环不稳定，确定其 s 右半平面的闭环极点数。

解：（1）系统闭环稳定

（2）系统闭环稳定

（3）系统闭环不稳定

（4）系统闭环稳定

（5）系统闭环不稳定

（6）系统闭环稳定

（7）系统闭环稳定

（8）系统闭环稳定

（9）系统闭环稳定

（10）系统闭环不稳定????

5-15 根据奈氏判据确定题 5-9 系统的闭环稳定性。

闭环不稳定。

5-16 已知系统开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(Ts+1)(s+1)};\qquad K,T>0$$

试根据奈氏判据，确定其闭环稳定条件：

（1） $T=2$ 时，K 值的范围。

（2） $K=10$ 时，T 值的范围。

（3） K,T 值的范围。

解：

（1）$T=2$ 时

$$\varphi(\omega)=-90^0-\arctan 2\omega-\arctan\omega=-90^0-\arctan\frac{2\omega+\omega}{1-2\omega^2}=-180^0$$

解以上方程得 $\omega=\sqrt{\frac{1}{2}}$

代入 $A(\omega)=\dfrac{K}{\omega\sqrt{4\omega^2+1}\sqrt{1+\omega^2}}=1$ 得到 $K=1.5$

所以：$K<1.5$ 时系统闭环稳定

（2）$K=10$ 时

$$\varphi(\omega)=-90^0-\arctan T\omega-\arctan\omega=-90^0-\arctan\frac{T\omega+\omega}{1-T\omega^2}=-180^0$$

解以上方程得 $\omega=\sqrt{\frac{1}{T}}$

代入 $A(\omega)=\dfrac{K}{\omega\sqrt{T\omega^2+1}\sqrt{1+\omega^2}}=1$ 中 $A(\omega)=\dfrac{\sqrt{T}10}{\sqrt{T\frac{1}{T}+1}\sqrt{1+\frac{1}{T}}}=\dfrac{10T}{\sqrt{2}\sqrt{T+1}}=1$ 得到

$T=0.1518$

所以 $T<0.1518$ 时系统闭环稳定

（3）$\varphi(\omega)=-90^0-\arctan T\omega-\arctan\omega=-90^0-\arctan\dfrac{T\omega+\omega}{1-T\omega^2}=-180^0$

解以上方程得 $\omega=\sqrt{\frac{1}{T}}$

代入 $A(\omega)=\dfrac{K}{\omega\sqrt{T\omega^2+1}\sqrt{1+\omega^2}}=1$ 得到

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{T}K}{\sqrt{T\frac{1}{T}+1}\sqrt{1+\frac{1}{T}}}=\frac{KT}{\sqrt{2}\sqrt{T+1}}=1$$

解以上方程得到：

$K < \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{T+1}}{T}$ 时系统闭环稳定

5-17　试用对数稳定判据判定题 5-10 系统的闭环稳定性。
系统闭环不稳定。
5-19 若单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{Ke^{-0.8s}}{s+1}$$

试确定使系统稳定的 K 值范围。
解：(1) $K > 0$ 时

$$\varphi(\omega) = -0.8\omega - \arctan\omega = -\pi$$

以上方程变形得到： $\arctan\omega = \pi - 0.8\omega < \dfrac{\pi}{2}$　　(1)
得到 $1.9365 < \omega$

解方程 (1) 得到 $\omega = 2.4483$ 代入 $A(\omega) = \dfrac{K}{\sqrt{\omega^2+1}}$ 中得到

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{2.4483^2+1}} = 1 \text{解得} K = 2.645$$

所以：$0 < K < 2.645$ 时系统闭环稳定
(2) $K < 0$ 时

$$\varphi(\omega) = -\pi - 0.8\omega - \arctan\omega$$

所以：$-1 < K < 0$ 时系统闭环稳定

5-20　若单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{5s^2e^{-\tau s}}{(s+1)^4}$$

试确定闭环系统稳定时，延迟时间 τ 的范围。
解：

$$A(\omega) = \frac{5\omega^2}{(\omega^2+1)^2} = 1$$

解方程得到：$\omega_1^2 = 2.618$　　$\omega_2^2 = 0.382$

即：$\omega_1 = 1.62$　　$\omega_2 = 0.618$

$$\varphi(\omega) = \pi - \tau\omega - 4\arctan\omega = -\pi$$

以上方程变形得到： $4\arctan\omega = 2\pi - \tau\omega$

即 $\arctan\omega + \tau\omega/4 = \dfrac{\pi}{2}$ （1）

即：$\arctan\dfrac{1}{\omega} = \tau\omega/4$ （2）

将$\omega_2 = 0.618$代入式（2）中得到

$\tau = 6.584$

将$\tau = 6.584$、$\omega_2 = 0.618$代入相频表达式中得到：

$\varphi(\omega) = \pi - 6.584 * 0.618 - 4\arctan 0.618 = -\pi$

满足相频表达式

将$\omega_1 = 1.62$代入式（2）中得到

$\tau = 1.366$

将$\tau = 1.366$、$\omega_1 = 1.62$代入相频表达式中得到：

$\varphi(\omega) = \pi - 1.336 * 1.62 - 4\arctan 1.62 = -3.0938 \neq -\pi$

不满足相频表达式。

所以取$\omega_2 = 0.618$、$\tau = 6.584$

即$\tau < 6.584$时系统闭环稳定。

5-21　设单位反馈控制系统的开环传递函数

$G(s) = \dfrac{as+1}{s^2}$

试确定相角裕度为45^0时参数a的值。

解：$A(\omega_c) = \dfrac{\sqrt{a^2\omega_c^2 + 1}}{\omega_c^2} = 1$ （1）

$\varphi(\omega_c) = -180^0 + \arctan a\omega_c = -135^0$ （2）

解方程（2）得到$a = \dfrac{1}{\omega_c}$代入（1）中得到$\omega_c = \sqrt[4]{2}$

所以：$a = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} = 0.84$

5-22 对于典型二阶系统，已知参数$\omega_n = 3, \zeta = 0.7$，试确定截止频率$\omega_c$和相角裕度$\gamma$。

解：典型二阶系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=\frac{\omega_n/2\zeta}{s(s/2\zeta\omega_n+1)}=\frac{K}{s(s/\omega_1+1)}$$

由于：$\omega_n=3,\zeta=0.7\quad K=\omega_n/2\zeta\quad \omega_1=2\zeta\omega_n$

所以：$K=\omega_n/2\zeta=3/1.4=2.143\qquad \omega_1=2\zeta\omega_n=2*0.7*3=4.2$

所以试确定截止频率$\omega_c=2.143$

相频表达式为：$\varphi(\omega_c)=-90^0-\arctan\dfrac{\omega_c}{\omega_1}=-90^0-27^0=-117^0$

相角裕度为：$\gamma(\omega_c)=180^0+\varphi(\omega_c)=180^0-117^0=63^0$

5-23 对于典型二阶系统，已知$\sigma\%=15\%,t_s=3s$，试计算相角裕度γ。

解：典型二阶系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}=\frac{\omega_n/2\zeta}{s(s/2\zeta\omega_n+1)}=\frac{K}{s(s/\omega_1+1)}$$

$$\sigma\%=e^{-\pi\varsigma/\sqrt{1-\varsigma^2}}=0.15$$

解得：$\varsigma=0.517$

$t_s=\dfrac{3.5}{\varsigma\omega_n}=\dfrac{3.5}{0.517*\omega_n}=3$所以：$\omega_n=2.26$

由于：$\omega_n=2.26,\zeta=0.517\quad K=\omega_n/2\zeta\quad \omega_1=2\zeta\omega_n$

所以：$K=\omega_n/2\zeta=2.26/(2*.517)=2.19\qquad \omega_1=2\zeta\omega_n=2*0.517*2.26=2.34$

所以试确定截止频率$\omega_c=2.19$

相频表达式为：$\varphi(\omega_c)=-90^0-\arctan\dfrac{\omega_c}{\omega_1}=-90^0-43^0=-133^0$

相角裕度为：$\gamma(\omega_c)=180^0+\varphi(\omega_c)=180^0-143^0=37^0$

5-24 根据题 5-11 所绘对数幅频渐进特性曲线，近似确定截止频率ω_c，并由此确定相角裕度γ的近似值。

解：(1) 截止频率为$\omega_c=0.25$

$$\varphi(\omega_c)=-\arctan 2\omega_c-\arctan 8\omega_c=-90^0$$

$\gamma(\omega_c)=180^0+\varphi(\omega_c)=90^0$

（2）截止频率为 $\omega_c=2.1$

$\varphi(\omega_c)=-180^0-\arctan\omega_c-\arctan10\omega_c=-331.8^0$

$\gamma(\omega_c)=180^0+\varphi(\omega_c)=-151.8^0$

（3）截止频率为 $\omega_c=5.43$

$\varphi(\omega_c)=-90^0+\arctan10\omega_c-\arctan0.5\omega_c-\arctan\dfrac{1}{1-\omega_c^2}=-248.7^0$

$\gamma(\omega_c)=180^0+\varphi(\omega_c)=-68.7^0$

（4）截止频率为 $\omega_c=1$

$\varphi(\omega_c)=-90^0-\arctan10\omega_c-\arctan\omega_c+\arctan\dfrac{\omega_c/10}{1-\omega_c^2/400}=-213.6^0$

$\gamma(\omega_c)=180^0+\varphi(\omega_c)=-33.6^0$

6-2　设单位反馈系统的开环传递函数

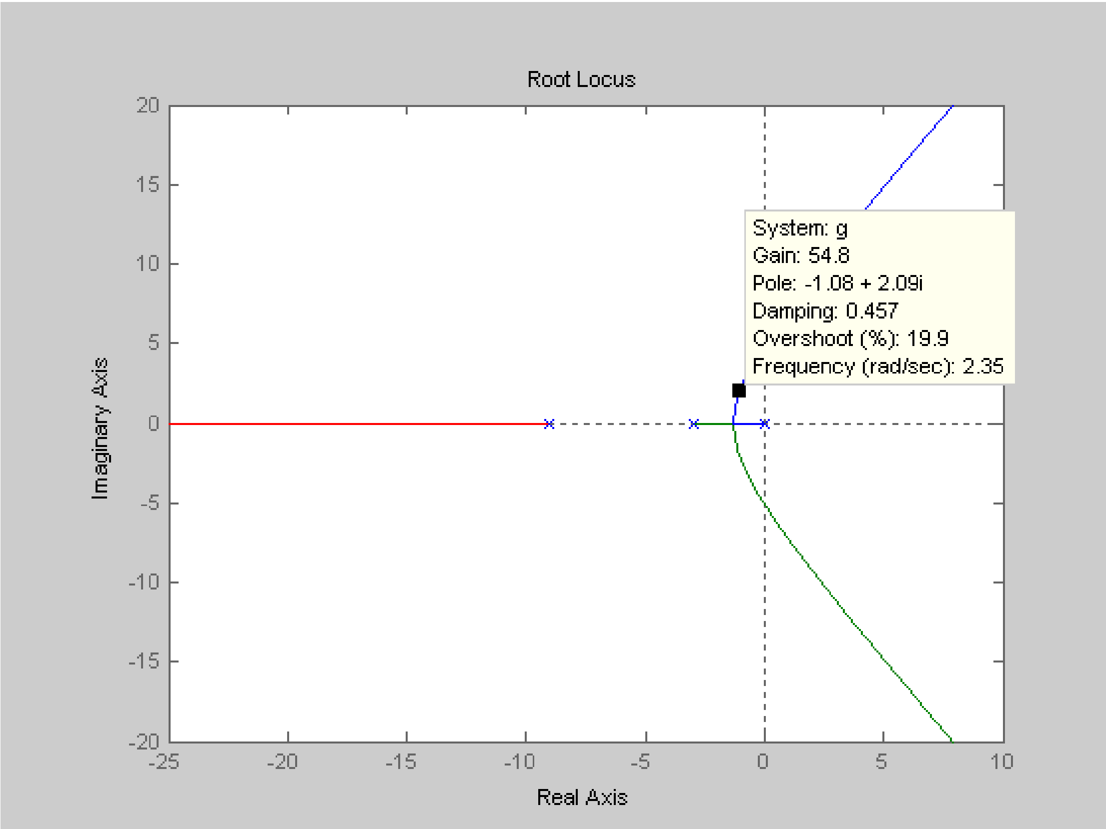
$$G(s)=\frac{K}{s(s+3)(s+9)}$$

(1)如果要求系统在单位阶跃输入作用下的超调量 $\sigma\%=20\%$，试确定 K 值；

(2)根据所求得的 K 值，求出系统在单位阶跃输入作用下的调节时间 t_s，以及静态速度误差系数 K_v。

(3)设计一串联校正装置，使系统的 $K_v\geq 20s^{-1}$，$\sigma\%\leq 15\%$，t_s 减小两倍以上。

解：(1) 系统根轨迹如下：



通过计算得到这时 $K=54.8$

这时系统呈现二阶系统特性，这时系统的 $\xi=0.457$　　$\omega_n=2.35$

(2) $t_s=\dfrac{3.5}{\xi\omega_n}=\dfrac{3.5}{0.457*2.35}=3.26s$

这时：$K_V=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)=\dfrac{54.8}{27}=2.03$

(3) $K_V=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)=\dfrac{K}{27}\geq 20$ 所以 $K\geq 540$

6-3　设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}$$

试设计一串联超前校正装置，使系统满足如下指标：

(1)相角裕度$\gamma \geq 45^0$；

(2)在单位斜坡输入下的稳态误差

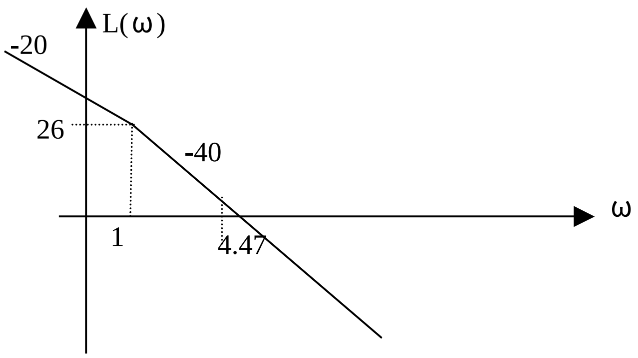
$$e_{ss}<\frac{1}{15}rad$$

(3)截止频率$\omega_c \geq 7.5rad/s$。

解：在单位斜坡输入下的稳态误差由于$e_{ss}<\frac{1}{15}rad$，所以$K>15$取$K=20$

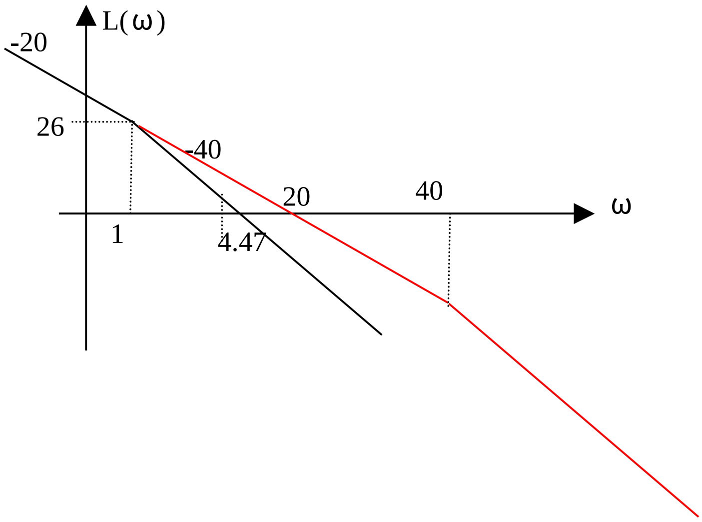
这时系统开环传递函数$G(s)=\dfrac{20}{s(s+1)}$

其对数频率渐进曲线如下：



截止频率为$\omega_c=4.47$，相角裕量$\gamma(\omega_c)=12.6^0$不满足要求。

其希望的对数频率渐进曲线如下（按二阶最佳校正）：



校正后的开环传递函数为$G(s)G_c(s)=\dfrac{20}{s(s/40+1)}$

所以$G_c(s)=\dfrac{G(s)G_c(s)}{G_c(s)}=\dfrac{s+1}{s/40+1}$

这是系统的截止频率为$\omega_c{}'=20$，相角裕量$\gamma(\omega_c)=65.5^0$满足要求。

6-4　已知一单位反馈控制系统，其固定不变部分传递函数$G_0(s)$和串联校正装置$G_c(s)$分别如图 6—42(a)，(b)和(c)所示。要求：

(1)写出校正后各系统的开环传递函数；

(2)分析各$G_c(s)$对系统的作用，并比较其优缺点。

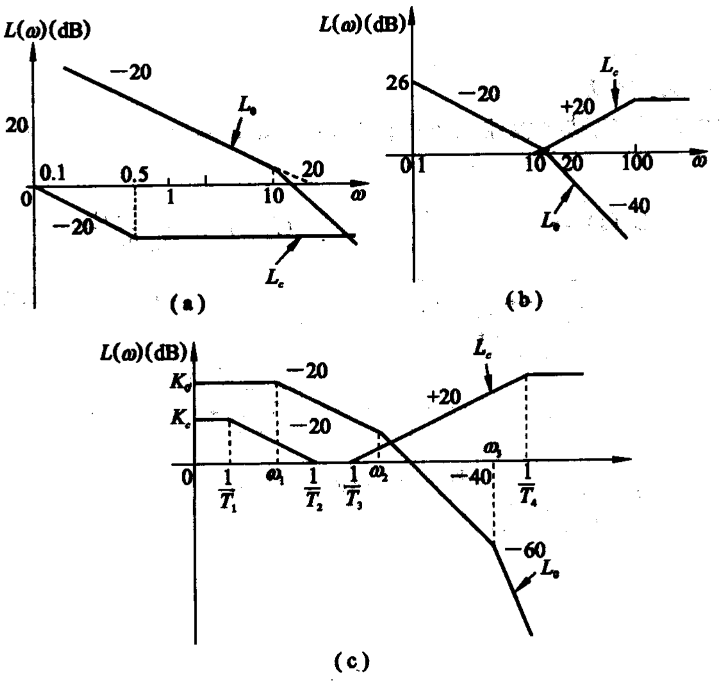


图 6-42　串联校正系统

解：(1)

(a)　$G(s)=\dfrac{20}{s(s/10+1)}$　　$G_c(s)=\dfrac{s/0.5+1}{s/0.1+1}$

所以校正后系统的传递函数为：$G(s)G_c(s)=\dfrac{20(s/0.5+1)}{s(s/10+1)(s/0.1+1)}$

（b） $G(s)=\dfrac{20}{s(s/20+1)}$　　$G_c(s)=\dfrac{s/10+1}{s/100+1}$

所以校正后系统的传递函数为：$G(s)G_c(s)=\dfrac{20(s/10+1)}{s(s/20+1)(s/100+1)}$

（c） $G(s)=\dfrac{K_0}{(s/\omega_1+1)(s/\omega_2+1)(s/\omega_3+1)}$　　$G_c(s)=\dfrac{K_c(T_2s+1)(T_3s+1)}{(T_1s+1)(T_4s+1)}$

所以校正后系统的传递函数为：

$$G(s)G_c(s)=\frac{K_0K_c(T_2s+1)(T_3s+1)}{(s/\omega_1+1)(s/\omega_2+1)(s/\omega_3+1)(T_1s+1)(T_4s+1)}$$

（2）

6-6　设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{8}{s(2s+1)}$$

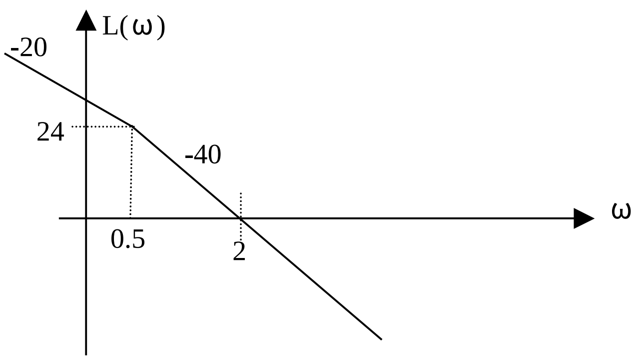
若采用滞后—超前校正装置

$$G_c(s)=\frac{(10s+1)(2s+1)}{(100s+1)(0.2s+1)}$$

对系统进行串联校正，试绘制系统校正前后的对数幅频渐近特性，并计算系统校正前后的相角裕度。

解：

系统校正前的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{8}{s(2s+1)}$，其对数幅频渐近特性如下：



截止频率为：$\omega_c=2$

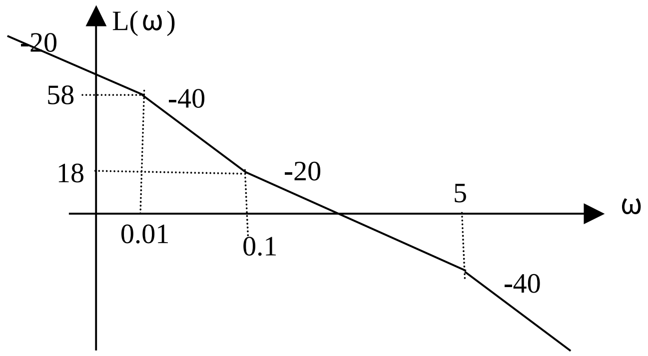
$$\varphi(\omega_c)=-90^0-\arctan 2\omega_c=-90^0-76^0=-166^0$$

$$\gamma(\omega_c)=\varphi(\omega_c)+180^0=14^0$$

系统校正后的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s)=\frac{8(10s+1)(2s+1)}{s(2s+1)(100s+1)(0.2s+1)}=\frac{8(10s+1)}{s(100s+1)(0.2s+1)}=\frac{8(s/0.1+1)}{s(s/0.01+1)(s/5+1)}$$

系统的交接频率为 0.01 0.1 5，其对数幅频渐近特性如下：



截止频率为：$\omega_c=0.8$

$$\varphi(\omega_c)=-90^0+\arctan 10\omega_c-\arctan 100\omega_c-\arctan 0.2\omega_c$$
$$=-90^0+82.9^0-89.3^0-9^0=-105.4^0$$

$$\gamma(\omega_c)=\varphi(\omega_c)+180^0=74.6^0$$

6-7　设单位反馈系统的开环传递函数

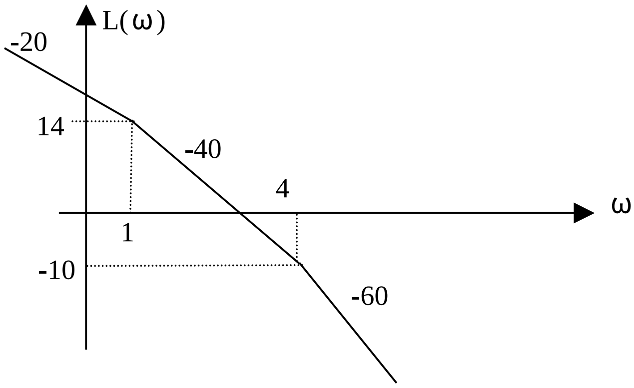
$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(0.25s+1)}$$

(1)若要求校正后系统的静态速度误差系数 $K_v\ge 5s^{-1}$，相角裕度 $\gamma\ge 45^0$，试设计串联校正装置；

(2)若除上述指标要求外，还要求系统校正后截止频率 $\omega_c\ge 2rad/s$，试设计串联校正装置。

解：(1) 因为 $K_v\ge 5s^{-1}$，所以 $K\ge 5s^{-1}$。取 $K=5s^{-1}$

系统校正前的对数幅频渐近特性如下：

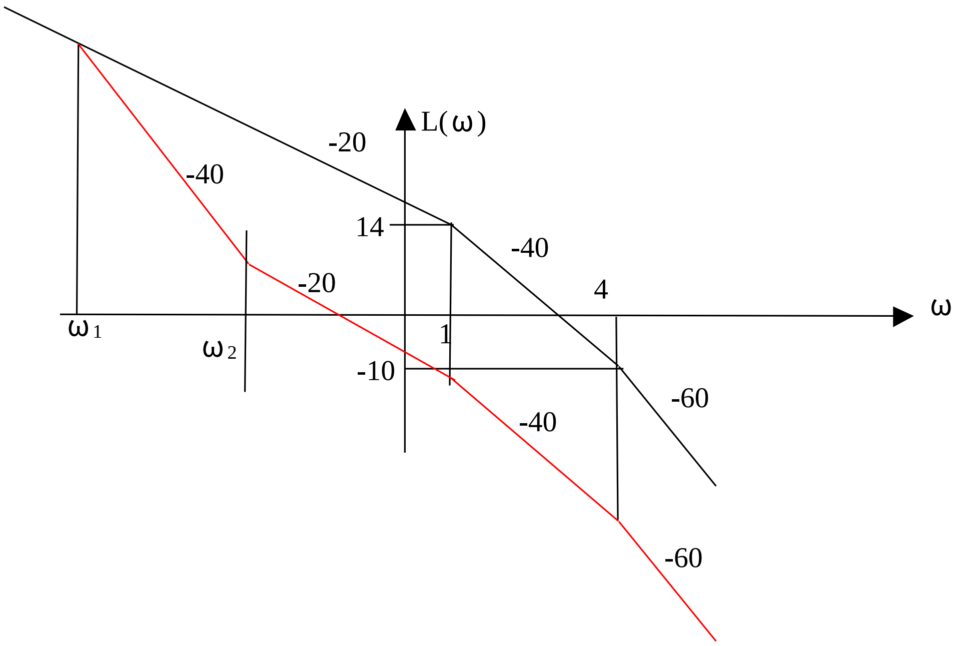


截止频率为：$\omega_c = 2.24$

$$\varphi(\omega_c) = -90^0 - \arctan\omega_c - \arctan 0.25\omega_c = -90^0 - 65.9^0 - 29^0 = -184.9^0$$

$$\gamma(\omega_c) = \varphi(\omega_c) + 180^0 = -4.9^0$$

系统不稳定，需要加串联校正装置。设采用滞后校正，校正后系统希望的对数幅频渐进曲线如下：



校正后的系统传递函数为：

$$G(s)G_c(s) = \frac{5(s/\omega_2 + 1)}{s(s/\omega_1 + 1)(s+1)(0.25s+1)}$$

设校正后系统中频段宽度为 16，校正后的截止频率 $\omega_c^{'} = 1/4 = 0.25 \quad \omega_2 = 1/16$

则 $A(\omega_c^{'}) = \dfrac{5 * \omega_c^{'} * 16}{\omega_c^{'}\omega_c^{'}/\omega_1} = 1$，经计算得 $\omega_1 = 1/320$

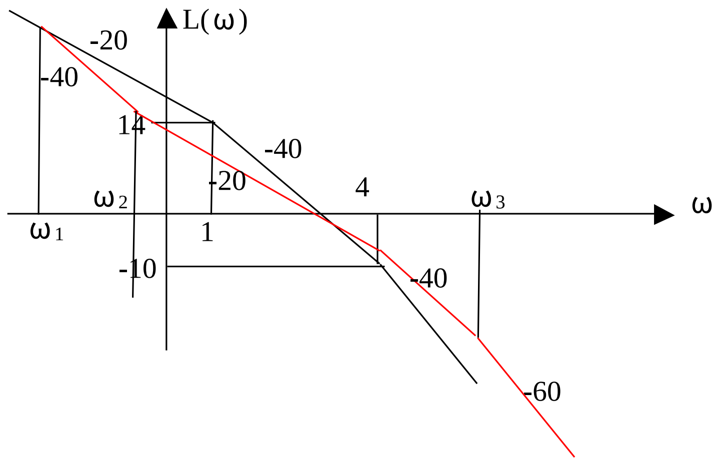
所以校正后的系统传递函数为：

$$G(s)G_c(s)=\frac{5(16s+1)}{s(320s+1)(s+1)(0.25s+1)}$$

这时
$$\begin{aligned}\varphi(\omega_c)&=-90^0+\arctan 16\omega_c'-\arctan 320\omega_c'-\arctan\omega_c'-\arctan 0.25\omega_c'\\&=-90^0+76^0-89.2^0-14^0-3.6^0=-120.8^0\end{aligned}$$

$$\gamma(\omega_c)=\varphi(\omega_c)+180^0=59.2^0$$

(2)设校正后系统希望的频率特性如下：



校正后的系统传递函数为：

$$G(s)G_c(s)=\frac{5(s/\omega_2+1)}{s(s/\omega_1+1)(0.25s+1)(s/\omega_3+1)}$$

设校正后的截止频率 $\omega_c=2\quad \omega_2=0.2$

则 $A(\omega_c)=\dfrac{5*\omega_c*5}{\omega_c\omega_c/\omega_1}=1$，经计算得 $\omega_1=2/25$

所以校正后的系统传递函数为：

$$G(s)G_c(s)=\frac{5(5s+1)}{s(25s/2+1)(0.25s+1)(s/\omega_3+1)}$$

这时
$$\begin{aligned}\varphi(\omega_c)&=-90^0+\arctan 5\omega_c-\arctan(25\omega_c/2)-\arctan 0.25\omega_c-\arctan(\omega_c/\omega_3)\\&=-90^0+84.3^0-87.7^0-26.6^0-\arctan(\omega_c/\omega_3)=-135^0\end{aligned}$$

经计算得 $\omega_3=7.46$

$$\gamma(\omega_c)=\varphi(\omega_c)+180^0=45^0$$

所以校正后的系统传递函数为：

$$G(s)G_c(s)=\frac{5(5s+1)}{s(25s/2+1)(0.25s+1)(s/7.46+1)}$$

校正装置的传递函数为

$$G_c(s)=\frac{G(s)G_c(s)}{G(s)}=\frac{(5s+1)(s+1)}{(25s/2+1)(s/7.46+1)}$$ 为滞后-超前校正装置。

6-8 图 6—43 为三种推荐稳定系统的串联校正网络特性，它们均由最小相位环节组成。若控制系统为单位反馈系统，其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{400}{s^2(0.01s+1)}$$

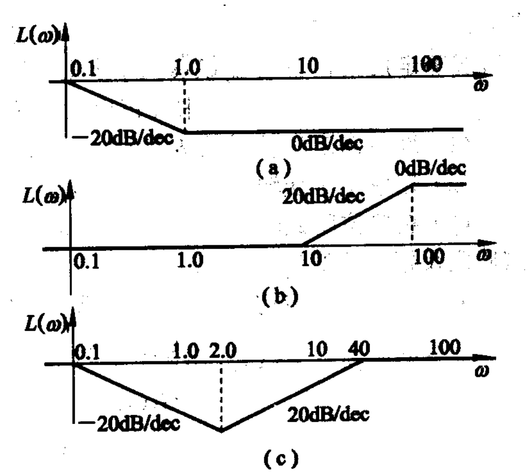


图 6-43 推荐的校正网络特性

试问：

(1)这些校正网络特性中，哪一种可使已校正系统的稳定程度最好?

(2)为了将 12Hz 的正弦噪声削弱 10 倍左右，你确定采用哪种校正网络特性?

解：三种校正网络传递函数分别为：

(a) $G_c(s)=\dfrac{s+1}{s/0.1+1}$

(b) $G_c(s)=\dfrac{s/10+1}{s/100+1}$

(c) $G_c(s)=\dfrac{(s/2+1)^2}{(s/0.1+1)(s/40+1)}$

校正后的传递函数为：

(a) $G(s)G_c(s)=\dfrac{400(s+1)}{s^2(s/0.1+1)(0.01s+1)}$

(b) $G(s)G_c(s)=\dfrac{400(s/10+1)}{s^2(0.01s+1)^2}$

（c） $G(s)G_c(s)=\dfrac{400(s/2+1)^2}{s^2(s/0.1+1)(s/40+1)(0.01s+1)}$

6-9　设单位反馈系统的开环传递函数

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

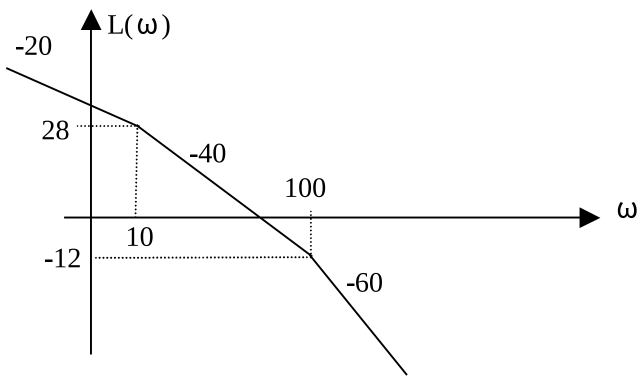
试设计串联校正装置，使系统期望特性满足下列指标：

(1)静态速度误差系数 $K_v \ge 250s^{-1}$ ；

(2)截止频率 $\omega_c \ge 30rad/s$ ；

(3)相角裕度 $\gamma(\omega_c) \ge 45^0$ ；

解：由题目给定的条件（1），取 $K=250$
系统校正前的对数幅频渐近特性如下：



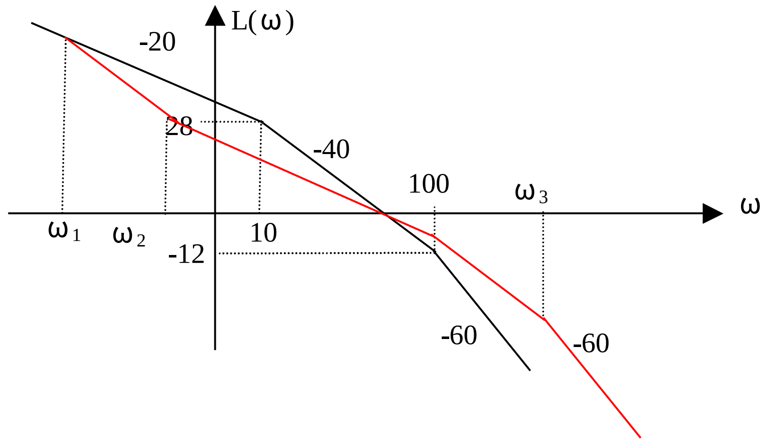
截止频率为： $\omega_c=50$

$$\varphi(\omega_c)=-90^0-\arctan\omega_c/10-\arctan\omega_c/100=-90^0-78.7^0-26.6^0=-195.3^0$$

$$\gamma(\omega_c)=\varphi(\omega_c)+180^0=-15.3^0$$

系统不稳定，需要加串联校正装置。

设校正后系统的截止频率为： $\omega_c=50$，校正后系统希望的对数幅频渐进曲线如下：



校正后的系统传递函数为：

$$G(s)G_c(s)=\frac{250(s/\omega_2+1)}{s(s/\omega_1+1)(s/100+1)(s/\omega_3+1)}$$

选取$\omega_2=5$

则$A(\omega_c)=\dfrac{250*\omega_c*5}{\omega_c\omega_c/\omega_1}=1$，经计算得$\omega_1=1/25$

所以校正后的系统传递函数为：

$$G(s)G_c(s)=\frac{250(s/5+1)}{s(25s+1)(s/100+1)(s/\omega_3+1)}$$

这时
$$\begin{aligned}\varphi(\omega_c)&=-90^0+\arctan\omega_c/5-\arctan 25\omega_c-\arctan 0.01\omega_c-\arctan\omega_c/\omega_3\\&=-90^0+84.3^0-89.9^0-26.6^0-\arctan\omega_c/\omega_3=-135^0\end{aligned}$$

经计算得到$\omega_3=217$

校正装置传递函数为：

$$G_c(s)=\frac{G(s)G_c(s)}{G(s)}=\frac{(s/5+1)(s/10+1)}{(25s+1)(s/217+1)}$$

6—10　设可控硅—电动机调速系统中的电流环如图 6-44 所示。图中，调节对象传递函数

$$G_1(s)=\frac{82.5}{s(0.0033s+1)},\qquad G_2(s)=\frac{200}{(0.2s+1)}$$

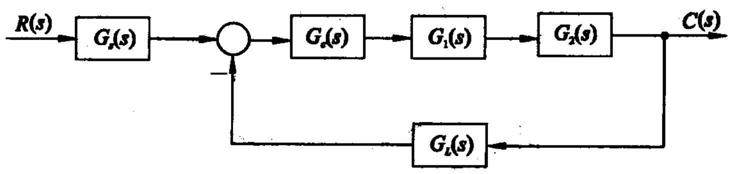


图 6-44　电流环结构图

给定滤波器传递函数

$$G_s(s)=\frac{1}{T_2 s+1}$$

比例—积分控制器传递函数

$$G_c(s)=\frac{K_c(\tau s+1)}{\tau s}$$

反馈环节传递函数

$$G_L(s)=\frac{0.0024}{(0.0018s+1)}$$

试按三阶最佳工程设计法确定参数 K_c， τ 和 T_2。

解：系统传递函数 $G_c(s)G_1(s)G_2(s)=\dfrac{K_c(\tau s+1)}{\tau s}\dfrac{82.5}{s(0.0033s+1)}\dfrac{200}{0.2s+1}$

6-11　设系统结构图如图 6-34 所示。图中

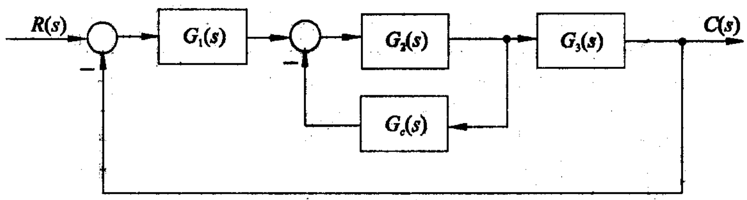


图 6-34　反馈校正控制系统

$$G_1(s)=K_1=200$$

$$G_2(s)=\frac{10}{(0.01s+1)(0.1s+1)}$$

$$G_3(s)=\frac{0.1}{s}$$

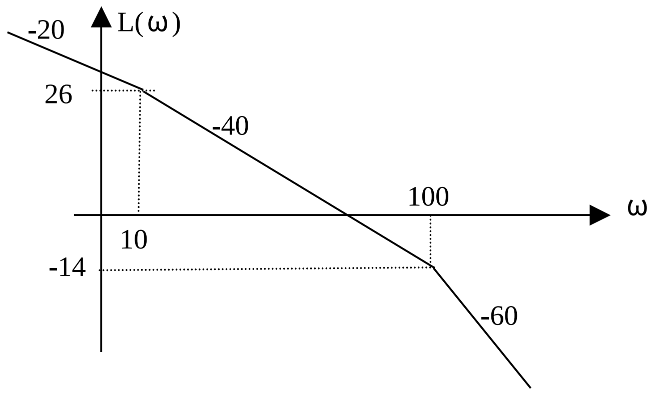
若要求校正后系统在单位斜坡输入作用下的稳态误差 $e_{ss}=1/200rad$， 相角裕度 $\gamma(\omega_c)\ge 45^0$，试确定反馈校正装置 $G_c(s)$ 的形式与参数。

解：待校正系统的开环传递函数为

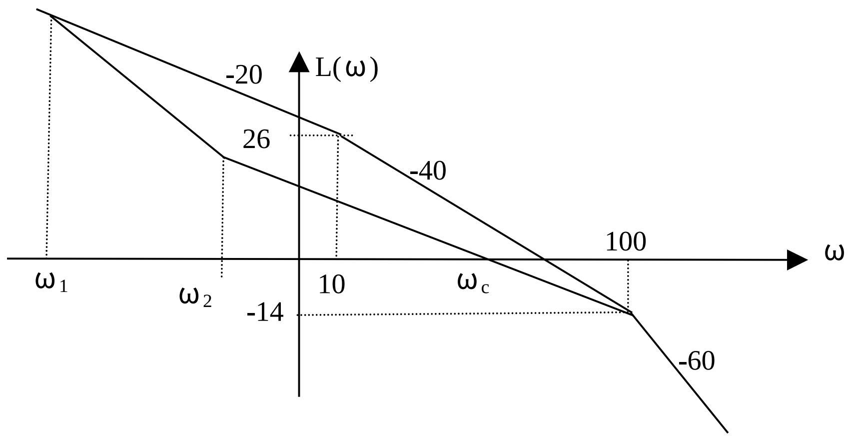
$$G(s)=G_1(s)G_3(s)G_2(s)=\frac{200\times 0.1}{s}\frac{10}{(0.01s+1)(0.1s+1)}$$

$$=\frac{200}{s(0.01s+1)(0.1s+1)}$$

对数幅频特性如图：



希望的对数幅频特性如图：



希望的（校正后）传递函数为：

$$G_0(s)=\frac{200(s/\omega_2+1)}{s(s/\omega_1+1)(s/100+1)^2}$$

由此得到 $\omega_c=20$　　选 $\omega_2=2$

$$\left|G_0(j\omega_c)\right|=\frac{200\times 20/5}{20\times 20/\omega_1}=1 \qquad \omega_1=0.5$$

所以 $G_0(s)=\dfrac{200(s/2+1)}{s(s/0.5+1)(s/100+1)^2}$

$$\varphi(\omega)=-90^0+\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\frac{\omega}{0.5}-2\arctan\frac{\omega}{100}$$

$$\varphi(\omega_c) = -90^0 + 84.3^0 - 88.6^0 - 22.6^0 = -112.6^0$$

$$\gamma(\omega_c) = 180^0 + \varphi(\omega_c) = 180^0 - 112.6^0 = 67.4^0$$

满足系统要求

所以校正装置传递函数为

$$G_c(s) = \frac{G_0(s)}{G(s)} = \frac{(s/2+1)(s/10+1)}{(s/0.5+1)(s/100+1)}$$ 为滞后-超前校正装置。

7—1 试根据定义

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e(nT)e^{-nsT}$$

确定下列函数的 $E^*(s)$ 和闭合形式的 $E(z)$：

(1) $e(t)=\sin\omega t$

(2) $E(s)=\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

解：(1)　$e(t)=\sin\omega t$

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\omega nT)e^{-nsT}$$

$$E(z)=\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$$

(2)　$E(s)=\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$

$$e(t)=\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$$

$$E^*(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-anT}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bnT}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-cnT}}{(a-c)(b-c)}\right]e^{-nsT}$$

$$E(z)=\frac{z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})}+\frac{z}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})}+\frac{z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$$

7—2　试求下列函数的 z 变换：

(1)　$e(t)=a^n$

(2)　$e(t)=t^2e^{-3t}$

(3)　$e(t)=\dfrac{1}{3!}t^3$

(4)　$E(s)=\dfrac{s+1}{s^2}$

(5)　$E(s)=\dfrac{1-e^{-s}}{s^2(s+1)}$

解：(1)　$e(t)=a^n$

$$E(z)=\frac{a^n z}{z-1}$$

（2） $e(t)=t^2 e^{-3t}$

$$E(z)=\frac{T^2 z e^{-3T}}{(z-e^{-3T})^2}+\frac{2T^2 z e^{-6T}}{(z-e^{-3T})^3}$$

（3） $e(t)=\frac{1}{3!}t^3$

$$E(z)=\frac{T^3(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$$

（4） $E(s)=\frac{s+1}{s^2}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}$

$$E(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

（5） $E(s)=\frac{1-e^{-s}}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2(s+1)}-\frac{e^{-s}}{s^2(s+1)}$

$$=\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]-\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right]e^{-s}$$

$$E(z)=F(z)-F(z)z^{-m}$$

$$F(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T}}\quad m=1/T$$

7-3　试用部分分式法、幂级数法和反演积分法，求下列函数的 z 反变换：

（1） $E(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}$

（2） $E(z)=\frac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$

解：（1） $E(z)=\frac{10z}{(z-1)(z-2)}=\frac{10z}{(z-2)}-\frac{10z}{(z-1)}$

$$e(nT)=10\times(2^n-1)$$

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}10(2^n-1)\delta(t-nT)$$

(2) $E(z)=\dfrac{-3+z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=\dfrac{z-3z^{2}}{z^{2}-2z+1}$

$$=-3-5z^{-1}-7z^{-2}-9z^{-3}-11z^{-4}-13z^{-5}-\cdots$$

$$e^{*}(t)=-\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)\delta(t-nT)$$

7-4　试求下列函数的脉冲序列 $e^{*}(t)$：

(1)　$E(z)=\dfrac{z}{(z+1)(3z^{2}+1)}$

(2)　$E(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+0.5)^{2}}$

解：(1)　$E(z)=\dfrac{z}{(z+1)(3z^{2}+1)}$

7-5　试确定下列函数的终值：

(1)　$E(z)=\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$

(2)　$E(z)=\dfrac{z^{2}}{(z-0.8)(z-0.1)}$

解：(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}e(nT)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)E(z)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{Tz}{(z-1)^{2}}=\infty$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}e(nT)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)E(z)=\lim\limits_{z\to1}(z-1)\dfrac{z^{2}}{(z-0.8)(z-0.1)}=0$

7-6　已知 $E(z)=Z[e(t)]$，试证明下列关系式成立：

(1)　$Z[a^{n}e(t)]=E\left[\dfrac{z}{a}\right]$

(2)　$Z[te(t)]=-Tz\dfrac{dE(z)}{dz}$，T 为采样周期。

7-7　已知差分方程为

$$c(k)-4c(k+1)+c(k+2)=0$$

初始条件：$c(0)=0,c(1)=1$。试用迭代法求输出序列 $c(k),k=1,2,3,4$。

解： 因为$c(k)-4c(k+1)+c(k+2)=0$

$k=0$ 时$c(0)-4c(1)+c(2)=0$所以$c(2)=4c(1)-c(0)=4-0=4$

$k=1$ 时$c(1)-4c(2)+c(3)=0$所以$c(3)=4c(2)-c(1)=16-1=15$

$k=2$时$c(2)-4c(3)+c(4)=0$所以$c(4)=4c(3)-c(2)=60-4=56$

7-8 试用 z 变换法求解下列差分方程：

(1) $\begin{aligned}&c^*(t+2T)-6c^*(t+T)+8c^*(t)=r^*(t),\\&r(t)=1(t),c^*(t)=0(t\le 0)\end{aligned}$

(2) $\begin{aligned}&c^*(t+2T)+2c^*(t+T)+c^*(t)=r^*(t),\\&c(0)=c(T)=0,r(nT)=n,(n=0,1,2,\cdots)\end{aligned}$

(3) $\begin{aligned}&c(k+3)+6c(k+2)+11c(k+1)+6c(k)=0\\&c(0)=c(1)=1,c(2)=0\end{aligned}$

(4) $\begin{aligned}&c(k+2)+5c(k+1)+6c(k)=\cos k\frac{2}{\pi}\\&c(0)=c(1)=0\end{aligned}$

解：(1) 将$\begin{aligned}&c^*(t+2T)-6c^*(t+T)+8c^*(t)=r^*(t),\\&r(t)=1(t),c^*(t)=0(t\le 0)\end{aligned}$变为如下形式

$c(k+2)-6c(k+1)+8c(k)=r(k)$

令$k=-1$则

$c(1)-6c(0)+8c(-1)=r(-1)$ 即$c(1)=6c(0)=0$

对差分方程的每一项进行变换，根据实数位移定理：

$Z[c(k+2)]=z^2C(z)-z^2c(0)-zc(1)=z^2C(z)$

$Z[c(k+1)]=zC(z)-zc(0)=zC(z)$

所以：$Z[c(k+2)-6c(k+1)+8c(k)]=Z[r(k)]$

即：$z^2C(z)-6zC(z)+8C(z)=\dfrac{z}{z-1}$

$$C(z)=\frac{z}{z-1}\frac{1}{z^2-6z+8}=\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-4)}=\frac{1}{3}\frac{z}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{z}{z-2}+\frac{1}{6}\frac{z}{z-4}$$

$$c^*(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}2^n+\frac{1}{6}4^n\right]\delta(t-nT)$$

7-9　设开环离散系统如图 7—55 所示，试求开环脉冲传递函数 $G(z)$。

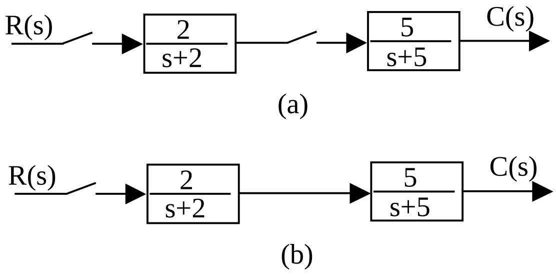


图 7-55　开环离散系统

解：$Z\left[\dfrac{2}{s+2}\right]=\dfrac{2z}{z-e^{-2T}}$　　$Z\left[\dfrac{5}{s+5}\right]=\dfrac{5z}{z-e^{-5T}}$

(a)　$G(z)=\dfrac{2z}{z-e^{-2T}}\dfrac{5z}{z-e^{-5T}}$

(b)　$Z\left[\dfrac{2}{s+2}\dfrac{5}{s+5}\right]=Z\left[\dfrac{10}{3}\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{10}{3}\dfrac{1}{s+5}\right]=\dfrac{10}{3}\dfrac{z}{z-e^{-2T}}-\dfrac{10}{3}\dfrac{z}{z-e^{-5T}}$

$$G(z)=\frac{10}{3}\frac{z(e^{-2T}-e^{-5T})}{(z-e^{-2T})(z-e^{-5T})}$$

7—10　试求图 7—56 闭环离散系统的脉冲传递函数 $\Phi(z)$ 或输出 z 变换 $G(z)$。

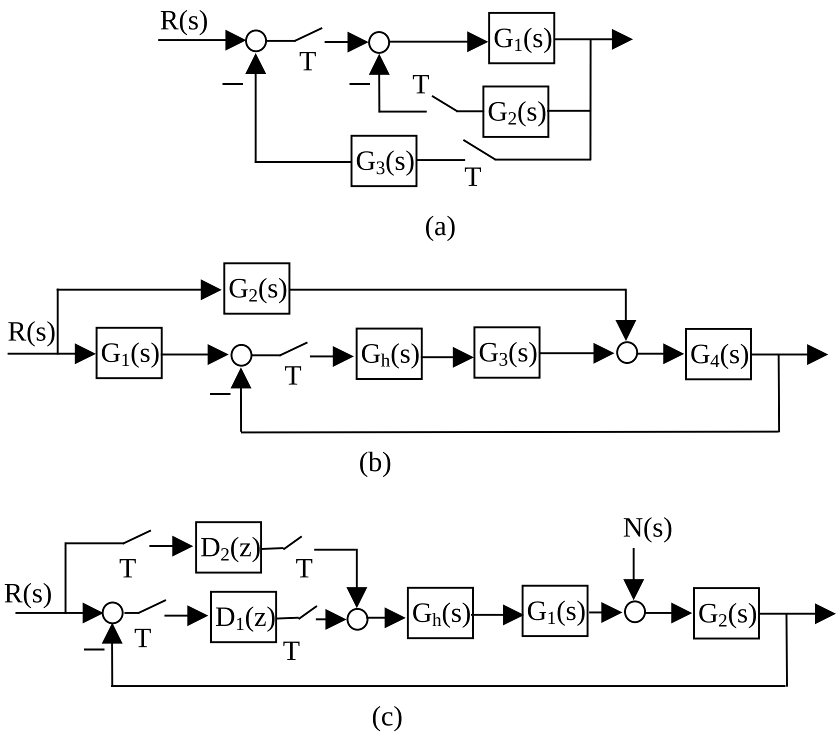


图 7-56　闭环离散系统

解：(a) $G_{12}(z)=\dfrac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}$

$$G(z)=\frac{G_{12}(z)}{1+G_{12}(z)G_3(z)}=\frac{\dfrac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}}{1+\dfrac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)}G_3(z)}=\frac{G_1(z)}{1+G_1G_2(z)+G_1(z)G_3(z)}$$

7—11　已知脉冲传递函数

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{0.53+0.1z^{-1}}{1-0.37z^{-1}}$$

其中$R(z)=z/(z-1)$，试求$c(nT)$。

解：
$$C(z)=\frac{0.53+0.1z^{-1}}{1-0.37z^{-1}}R(z)=\frac{0.53+0.1z^{-1}}{1-0.37z^{-1}}\frac{z}{z-1}=\frac{0.53z+0.1}{z^2-1.37z+0.37}$$
$$=\frac{z}{z-1}-\frac{0.47z}{z-0.37}$$

$$c(nT)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-0.47\times0.37^n\right)\delta(t-nT)$$

7—15 试判断下列系统的稳定性：

（1）　已知闭环离散系统的特征方程为

$D(z)=(z+1)(z+0.5)(z+2)=0$

(2)已知闭环离散系统的特征方程为

$D(z)=z^4+0.2z^3+z^2+0.36z+0.8=0$

(注，要求用朱利判据)

(3)已知误差采样的单位反馈离散系统，采样周期$T=1s$，开环传递函数

$G(s)=\dfrac{22.57}{s^2(s+1)}$

解：(1) $D(z)=(z+1)(z+0.5)(z+2)=0$

由特征方程得到：$z_1=-1 \quad z_2=-0.5 \quad z_3=-2$

所以系统不稳定。

(2) $D(z)=z^4+0.2z^3+z^2+0.36z+0.8=0$

列朱利阵列如下：

0.8	0.36	1	0.2	1
1	0.2	1	0.36	0.8

(3)

7—16　设离散系统如图 7-58 所示，采样周期$T=1s$，$G_h(s)$为零阶保持器，

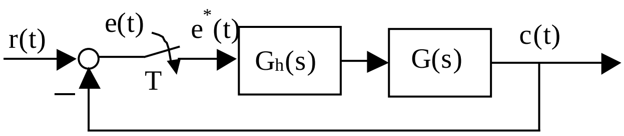


图 7-58 离散系统

$$G(s)=\frac{K}{s(0.2s+1)}$$

要求：

(1)当$K=5$时，分别在 z 域和ω域中分析系统的稳定性；

(2)确定使系统稳定的 K 值范围。

解：系统开环脉冲传递函数

(1) $G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\dfrac{K}{s^2(0.2s+1)}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\dfrac{5K}{s^2(s+5)}\right]$

$$=(1-z^{-1})\left[\frac{5Tz}{(z-1)^2}-\frac{5(1-e^{-5T})z}{5(z-1)(z-e^{-5T})}\right]=\frac{5T}{(z-1)}-\frac{(1-e^{-5T})}{(z-e^{-5T})}=\frac{z(4+e^{-5T})+1-6e^{-5T}}{(z-1)(z-e^{-5T})}$$

$$=\frac{4.0067z+0.96}{z^2-1.0067z+0.0067}$$

系统特征方程：

$$z^2-1.0067z+0.0067+4.0067z+0.96=z^2+3z+0.9667=0$$

解方程得到 $z_1=-2.6328$　　$z_2=-0.3672$　　所以系统不稳定。

(2) $G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\dfrac{K}{s^2(0.2s+1)}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\dfrac{5K}{s^2(s+5)}\right]$

$$=(1-z^{-1})\left[\frac{KTz}{(z-1)^2}-\frac{K(1-e^{-5T})z}{5(z-1)(z-e^{-5T})}\right]=\frac{KT}{(z-1)}-\frac{K(1-e^{-5T})}{5(z-e^{-5T})}$$

$$=\frac{5Kz-0.0335K-0.9933Kz+0.9933K}{5z^2-5.0335z+0.0035}=\frac{3.0067Kz+0.9598K}{5z^2-5.0335z+0.0035}$$

系统特征方程：

$$5z^2-5.0335z+0.0035+3.0067Kz+0.9598K=0$$

$$5z^2+(3.0067K-5.0335)z+0.0035+0.9598K=0$$