摘 要

期权定价是金融数学领域内一个既具有理论意义又有实际应用价值的重要问题。关于欧式期权的研究，在利率为常数或者是时间的确定性函数时，国内外学者已经做了大量地研究工作，得到了许多结果。如在 1973 年 Black-Scholes 给出了 B-S 模型，并由此得到了著名的 Black-Scholes 公式。然而，当利率是随机变量时，目前的研究成果并不多见。但是，这种情形在实际中又是存在的现象，因为在较长的时间内利率是可变的，因此必须考虑到利率的不确定性对衍生资产定价的影响。

CIR 模型和 Hull-White 模型是两个常见的利率模型，本文主要内容有两方面，首先是运用对冲原理和伊藤定理等经过一系列计算分析了 CIR 模型下基于广义指数 O-U 模型的欧式期权定价。其次是研究了 Hull-White 利率模型与指数 O-U 过程模型下具有不确定执行价格的期权定价。

本文的主要成果及创新如下：

1. 提出新的股价模型假设，即选择能反映股票预期收益率波动变化的指数 O-U 过程来刻画期权的标的股票价格的变化规律，建立了股票价格服从一般指数 O-U 过程的期权定价模型。

2. 在利率服从 CIR 模型的假设条件下，将其与期权定价方法结合起来运用相关知识推倒出欧式期权的相关偏微分方程。并推出它是 Black-Scholes 偏微分方程的推广。

3. 运用鞅方法研究 Hull-White 利率模型与指数 O-U 过程模型下具有不确定执行价格的期权定价公式。

关键词： 欧式期权；Ito 公式；指数 O-U 模型；鞅方法

ABSTRACT

Option pricing is an important problem with a theoretical value and practical application in the area of financial mathematics. The domestic and foreign scholars have done a great deal of research on the European option when the interest rate is constant or time is a deterministic function and many results have been gotten. For example, Black-Scholes presented the B-S model in 1973, which is the differential equations of the European option pricing with constant interest rate, and thus the well-known Black-Scholes formula was obtained. However, when interest rates are random variables, there are not many research results at present. This situation is an existing phenomenon in practice because interest rates are variable in a long period. Therefore, the impact of interest rates uncertainty on derivative asset pricing must be taken into account.

CIR model and the Hull-White model are two common interest rate models. This paper mainly contains two aspects. At first European option pricing based on generalized exponential O-U model under CIR model is analyzed and calculated by using hedging principle and Ito theorem. Secondly, the option pricing with change exercise price under Hull-White interest rate model and exponential O-U process model is studied.

The main results and innovations in this paper are as follows:

1. This dissertation proposes a new hypothesis of stock-price model, namely, choosing an exponential O-U process which can reflect the fluctuation of expected return rate of the stock price to describe the underlying the stock-price changes. And then option pricing model in which the stock price subjects to general exponential O-U process is established.

2. In the condition that interest rate subjects to CIR model assumptions, the partial differential equations of the European option are deduced by using relevant

knowledge combined with option pricing methods .The conclusion that it is the promotion of Black-Scholes partial differential equation is drawn.

3. The option pricing formula with change exercise price under Hull-White interest rate model and exponential O-U process model is studied by using Martingale method.

Key words: European options; Ito formula; Exponential O-U process; Martingale method

哈尔滨工程大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明：本论文的所有工作，是在导师的指导下，由作者本人独立完成的。有关观点、方法、数据和文献的引用已在文中指出，并与参考文献相对应。除文中已注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经公开发表的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者（签字）：薛艳菊

日期： 2009 年 6 月 18 日

哈尔滨工程大学
学位论文授权使用声明

本人完全了解学校保护知识产权的有关规定，即研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于哈尔滨工程大学。哈尔滨工程大学有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件。本人允许哈尔滨工程大学将论文的部分或全部内容编入有关数据库进行检索，可采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文，可以公布论文的全部内容。同时本人保证毕业后结合学位论文研究课题再撰写的论文一律注明作者第一署名单位为哈尔滨工程大学。涉密学位论文待解密后适用本声明。

本论文（□在授予学位后即可 □在授予学位 12 个月后 □解密后）由哈尔滨工程大学送交有关部门进行保存、汇编等。

作者（签字）：薛艳菊　　　导师（签字）：孙广毅

日期： 2009 年 6 月 18 日　　　2009 年 6 月 18 日

第1章 绪论

1.1 衍生工具

在金融市场中，“衍生产品”（也叫衍生工具）这一术语通常用来描述这样一种金融工具或证券，这一工具（证券）的未来回报依赖于一个潜在的证券、商品、利率或指数的价值，而这一潜在的证券、商品、利率或指数就称为标的（基础）证券或标的资产。

根据标的物的性质，衍生产品可以分为商品衍生产品和金融衍生产品。商品衍生产品就是以商品作为标的资产的衍生产品；金融衍生产品就是以金融产品作为标的资产的衍生产品，是市场中主要的衍生产品。

一般来说，在金融市场中，一些证券通常被看成基础工具，如股票和债券等，而常见的衍生产品则包括远期、期货、期权等。

下面，我们对这三种基本衍生工具进行简单的介绍[1]

（1）远期合约

远期合约是最简单的衍生工具。它是指双方约定在未来某一个确定的时刻，按确定的价格购买或出售一定数量的某种资产的协议。通常是在两个金融机构之间或金融机构与其公司客户之间签署该合约。其中同意购买原生资产的一方称为多头(long position)，同意售出原生资产的一方称为空头 (short position)。合约中标明的确定价格和确定时间称为交割价格 (dehvery price)和交割日(maturity)。远期合约一般都在场外交易(over-the-counter，简写为 OTC)。

（2）期货合约

与远期合约相同也是一张在未来的确定时间，按确定价格购(销)一定数量和质量的原生资产的协议，但它是由远期合约逐步标准化而形成的。它们之间的区别在于：

A．远期合约没有固定交易场所，通常在金融机构的柜台或通过电话等通讯工具交易，而期货交易则是在专门的期货交易场所进行的。

B．期货合约具有标准化的合约条款，期货合约的合约规模、交割日、交割地点等都是标准化的。

C．在期货交易中，交易双方并不直接接触，期货交易所充当期货交易的中介，既是买方的卖方，又是卖方的买方，并保证最后的交割。

(3) 期权及其分类

1）期权

期权是持有人在确定时间，按照确定价格向出售方购(销)一定数量和质量的原生资产的协议，但他不承担必须购入(销售)的义务。期权持有人具有按协议条款在确定时间行使这个协议的权利，但不负有必须行使这个协议的义务。在期权合约中，确定价格称为实施价格(exercise price)或敲定价格(strike price)，确定日期称为到期日(expiry date)，按期权合约规定购入或销售原生资产称为实施(exercise)。期权又称选择权[2]，是指其持有者能在规定的期限内按交易双方商定的价格(执行价格)购买或出售一定数量的某种特定商品的权利。期权交易就是对这种选择期权的买卖。

如上所述，期权是一种纯粹的权利，不负有相应的义务，这种权利的市场价值便是期权价格。从持有方来看，它是得到这种权利要付出的代价，因此，也称为期权费。而从规避风险的角度看，持有一个多头期权无疑是投入了一个财产保值和增值保险，因此，期权价格又称为期权保险费。它也是期权持有方在期权交易中的最大可能损失额。在期权交易中，获得选择权的一方通常称为期权购买人，因为他们为获得这种选择权必须向该期权的提供方支付一定的货币。而向交易对方提供这种选择权的一方，通常被称之为期权出售人，因为他们以收取一定货币为前提而提供这种权利的。因此，期权出售人也被称为期权创始人或出具人。

2）期权的分类

Ⅰ．期权按合约中购入和售出原生资产来划分[3]：

看涨期权(call option)是一张在确定时间，按确定价格购入一定数量和质量的原生资产的合约。

看跌期权(put option)是一张在确定时间，按确定价格出售一定数量和质量的原生资产的合约。

II. 按期权购买方执行期权的时限划分：

欧式期权(European options)：只能在合约规定的到期日实施。

美式期权(American options)：能在合约规定的到期日以前(包括到期日)任何一个工作日实施。

III. 按照期权标的物性质不同，期权可以分为两大类，即商品期权和金融期权。

IV. 按期权产品结构不同，可以分为常规期权和奇异期权。如欧式和美式期权都是常规期权，而奇异期权则包括以下几类：

1. 障碍期权（berrier options），该期权的损益结果依赖于标的资产的价格在一段特定时间内是否达到某个特定的水平，这个临界值就叫做“障碍水平”。具体来看它又包括两种类型：

敲出障碍期权：当标的资产的价格达到一个特定的障碍水平时，该期权作废（即被“敲出”）；如果规定时间内资产价格并未触及障碍水平，则仍然是一个常规期权。

敲入障碍期权：正好与敲出期权相反，只有资产价格在规定时间内达到障碍水平，该期权才得以存在（即“敲入”），其损害结果与相应的常规期权相同；反之，该期权作废。

2. 亚式期权（Asian options），其到期损益结果依赖于标的资产在一段特定时间内的平均价格。

3. 回溯期权（lookback options），是收益依赖于标的资产在某个确定的时间段中达到的最大或最小价格的期权。

4. 打包期权（packages），即由常规的欧式期权、远期合约、现金和标的资产等合成的证券组合。

1.2 期权定价理论的研究背景

衍生证券随着金融衍生证券市场的蓬勃发展，衍生证券给现代金融学提出了极其复杂的数学问题，包括金融变量的数学描述、各种金融变量之间的关系分析、市场风险的计算与控制等等。衍生证券是金融学研究的重要对象，它实质上是一种未定权益。改革开放几十年以来，中国同国际金融界的联系越来越密切，如何防范金融风险已引起有关方面的高度重视。随着中国加入世界贸易组织及香港的回归，对金融衍生证券的理论与方法的研究已是实践的迫切需要，同时也是现代金融理论发展的需要。九十年代东南亚国家的金融危机及香港股市的大幅波动，无不与金融衍生证券的交易有关。

1.3 期权定价理论的发展

衍生证券研究已有相当长的历史，它的雏形早在古希腊时期就已出现，但真正标准化的场内衍生证券交易则出现在 20 世纪 70 年代。

期权作为衍生证券的一种有着重要的作用。期权是 20 世纪国际金融市场创新实践的一个成功典范，同时它也给财务金融学理论的发展注入了勃勃生机。期权交易的出现和最初使用可以追述到 17 世纪荷兰郁金香球茎的交易狂热时期。但是由于当时这种期权交易是没有任何保障机制的，所以当郁金香球茎价格暴跌，卖权的买方想要卖权的卖方交割郁金香时，卖权的卖方拒绝交割。郁金香交易发生了崩盘事件，这几乎导致荷兰经济崩溃。直到 20 世纪 70 年代后，期权交易才得以规范，期权市场才得到了极为迅猛的发展。

1900 年，当时名叫 Bachelier 的学者在其博士论文 The Theory of Specalation 中首次给出了欧式买权的定价公式。可惜的是，他在建立模型时犯了 3 个原则性错误。第一，假设标的股票价格服从正态分布，这使得股价出现负值的概率大于 0，从而与现实不符。第二，认为在离到期日足够远的时候，买权的价值可能大于标的股票的价值，这是不可能的。第三，假设股票的期望报酬(即股价变化的平均值)为 0，这也违背了股票市场的实际情况。

尽管如此 Bachelier 的研究结果，特别是他所提出的有效性市场的概念，为后人的研究指明的方向。

在 Bacheller 研究的基础上，多年以来人们都在探索寻找评估期权价格的有效方法[4-7]，1964 年，Sprenkle 提出了“股票价格服从对数正态分布”的基本假设，并肯定了股价发生随机漂移的可能性。同时，Boness 将货币时间价值的概念引入期权定价过程，但他没有考虑期权和标的股票之间风险水平的差异。1965 年，著名经济学家萨缪尔森把上述成果统一在一个模型中。1969 年，他又与其研究生 Merton 合作，提出了把期权价格作为标的股票价格的函数的思想。1973 年，美国芝加哥大学 Black 教授和 Scholes 教授[8]在美国《政治经济学杂志》上发表了一篇名为《期权定价与公司负债》的论文，同年，Merton (时任美国哈佛大学教授) 则在另一刊物《贝尔经济与管理科学杂志》上发表了另一篇关于期权定价的论文一《期权的理性定价理论》。这两篇论文奠定了期权定价理论的理论基础，提出了著名的“Black-Scholes 公式”。

虽然Black和Scholes提出的Black-Scholes公式在金融历史上有重大的意义，但是此公式是在一系列的假设的基础上提出的，后来的学者对公式所基于的完备市场进行修正，主要研究成果有：Thorpe (1973) 检验了卖空限制的条件；Merton (1973) 推广了考虑股利和随机利率的模型[9]；Cox and Ross (1976) 和Merton (1976) 考虑了股票价格公式展开中不具有连续本路径时的期权定价问题[10-11]；Ingersoll和Scholes考虑了资本收益和股利的不同税率效果[12-13]；Rubinstein (1976) 和Brennan (1979) 引入了具有代表性的投资者效用函数，得到了关于离散时间交易的Black-Scholes方程的解[14-15]；Leland (1985) 时考虑了有交易成本的期权定价模型[16]；1990年Jeanblanc Picque和Pointer[17]讨论了股票价格过程由布朗运动和泊松过程共同驱动的欧式期权定价公式；1991年Schweizer[18]考虑的是市场不完全条件下，股价是半鞅的期权套期保值问题；1994年Christopeit和Musiela[19]对一类特殊半鞅模型，讨论了未定权益定价的等价鞅测度存在的充分必要条件；1997年Eberlein和Jacod[20]给出了当股价是一不连续过程时期权定价的区间范围；1998年Mogens Bladt和Tina Hviid

Rydberg[21]首次提出期权定价的保险精算方法，这一方法不仅对无套利完备市场有效，而且对有套利，非均衡的市场模型也有效；阎海峰，刘三阳[22-24]对保险精算方法作了进一步的研究；2002年林建忠和叶中行[25]讨论了证券市场多股票价格模型，利用Pardoux和Peng[26]倒向随机微分方程理论，给出了跳跃-扩散型多股票过程欧式未定权益定价的基本公式，并在常系数条件下获得了一种线性组合式欧式期权定价公式。

近 20 年来，经济学家们利用现实的数据，寻求更贴近实际市场的期权定价模型，取得了许多优秀成果，极大地丰富和发展了期权定价理论。90 年代以来特别是近几年，很多经济学家对不完善市场，基础资产的价格存在异常变动的跳跃或者基础资产报酬率的方差不为常数等情况下的期权定价问题，以及美式期权定价问题进行了广泛研究，取得了许多重要研究成果。

不完善市场主要是指对贷款及卖空股票进行限制，或者存在交易成本，或者市场本身不完备等。不完善市场假设显然要比完善市场假设更接近真实的金融市场，但这时的期权定价问题就复杂多了。在不完善市场情况下，通常难以得到 Black-Scholes 模型那种期权的公平价格，已有的定价方法也将失去其作用。关于不完善市场的期权定价问题，目前经济学家采用的主要方法有方差最优套期保值、均值方差套期保值、超期保值套期保值、有限风险套期保值等方法。在这方面作出过重要贡献的经济学家主要有 Barron and Jensen(1990)，Follmer and Schweizer(1989，1991，1993)，Karatzas and Kou(1996)，El Karoui and Quenez(1995)等[27-31]。

1.4 期权定价理论的意义

期权是 20 世纪国际金融市场创新的一个典范，它的诞生对现代金融学理论与实践带来了巨大的冲击和影响。期权定价理论作为现代金融学的重要研究内容，在理论和实践上都具有非常重要的意义。

(1) 期权定价理论加速了现代金融学的诞生

上个世纪初，金融学就已经作为一门独立的学科而存在，但在开始的 50

年中，它几乎是一门纯描述性质的学科，侧重于定性分析。一般认为 1952 年 Markowitz 的开创性工作标志着金融学从一门描述性的学科向分析性学科转变的开端，它的工作奠定了现代有价证券组合理论的基础。

1973 年，Black 和 Scholes 发表《期权及公司债务定价》的论文，第一次完整地提出了期权定价模型，即著名的 Black-Scholes 模型(简称 B-S 模型)，并且得到了期权价格公式。同年 Merton 发表了“Theory of rational option Pricing”的论文，推广了 B-S 模型。这些里程碑式的重要成果在理论和实践中都有特别重要的意义。B-S 模型提出以后，分析型金融学得到了飞速发展，成为一门新型的学科，日益成为数学工作者和金融工作者等研究的热门领域。一个新的领域“金融工程”也正在迅速发展。

(2) 期权定价理论促进了金融市场的繁荣

金融学研究的主要对象之一是衍生工具，它的价格依赖于其“原生资产”的价格。B-S 模型提出后，为了满足金融市场和更多的不同投资者的需求，学者们运用期权定价理论和分析方法，创造设计了许多具有不同特征的期权，例如：回望期权、亚式期权、障碍期权、彩虹期权、重置期权等新型期权，这些期权的出现繁荣了金融市场。期权定价理论的产生与发展推动了金融衍生产品的设计与开发，这些新的衍生工具扩展了风险共担的机会，促进了市场的完备性，降低了交易成本，促进了市场的流动性，提高了风险管理的有效性，彻底地变革了全球的金融市场。

1.5 本文的主要内容和结构安排

在绪论的最后一部分，介绍一下本文的主要内容和论文的结构安排：

CIR 模型和 Hull-White 模型是两个常见的利率模型，本文主要是在这两个利率模型下求解期权定价问题，首先是运用对冲原理和伊藤定理等经过一系列计算分析了 CIR 模型下基于广义指数 0-U 模型的欧式期权定价。其次是研究了 Hull-White 利率模型与指数 O-U 过程模型下具有不确定执行价格的期权定价。

本文的结构安排如下：

第一章作为绪论部分，介绍了金融衍生产品及其相关概念，并重点介绍了期权定价理论，回顾了期权及其定价理论的发展过程，阐述了期权定价理论的意义。最后对本文的结构作了介绍。

第二章主要介绍了一些预备知识，包括鞅的定义、Brown 运动、伊藤随机积分伊藤公式。

第三章在第二章预备知识的基础上，介绍了 Black-Scholes 期权定价，介绍了 Black-Scholes 期权定价模型的几种推导方法。

第四章本章在 CIR 利率模型基础上利用$\Delta-$对冲方法建立了欧式期权定价方程。

第五章主要介绍了具有不确定执行价格的期权定价，并在此基础上进一步研究 Hull-White 利率模型与指数 O-U 过程模型下具有不确定执行价格的期权定价。

第2章 预备知识

本章主要介绍一下在期权定价过程中所用到的相关数学知识，包括条件期望的定义及定理、鞅的定义、Brown运动、伊藤随机积分、伊藤公式、Girsanov定理等。

2.1条件期望的定义及定理

2.1.1 条件期望的定义

定义2.1.1 设(Ω,F,P)为一完备的概率空间，G为F的一子σ-代数。设X为数学期望存在的随机变量，一个G可测随机变量Y如果满足：

$$\forall A\in G,\quad \int_A XdP=\int_A YdP$$

则称Y为X关于G的条件期望，当$X=I_A(\omega)$，$A\in F$，则称$E(X\mid G)$为A关于G的条件概率，并记为$P(A\mid G)$。

2.1.2 条件期望的性质及定理

条件期望具有下面的性质[32-33]：

(1) $E(\alpha X+\beta Y\mid G)=\alpha E(X\mid G)+\beta E(Y\mid G),\ \alpha,\beta\in R$

(2) $E\left[E(X\mid G)\right]=E(X)$；

(3)若X为G可测，则$E(X\mid G)=X$；

(4)若X与σ-代数G独立，则$E(X\mid G)=E(X)$；

(5)若G_1是σ-代数G的子σ-代数，则$E(E(X\mid G)\mid G_1)=E(X\mid G_1)$；

定理2.1.1（条件期望的单调收敛定理） 若$X_n\uparrow X,a.s.$，则在$\{E(X_1\mid G)>-\infty\}$上，

$$E(X\mid G)=\lim_{n\to\infty}E(X_n\mid G)$$

定理2.1.2（条件期望的Fatou引理） 若$X_n<Y,a.s.$，则在$\{E(Y\mid G)<\infty\}$

上，

$$E\left(\limsup X_n \mid G\right) \geq \limsup E\left(X_n \mid G\right)$$

定理2.1.3（条件期望的控制收敛定理） 若$|X_n|<Y,a.s.$，Y可积，且$X_n \overset{a.s.或P}{\rightarrow} X$，则

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X| \mid G\right) = 0$$

下面介绍在金融数学中经常用到的两个定理：

定理2.1.4（Bayes法则） 设Q是与P等价的概率测度，G为F的子σ-代数，X是Q可积随机变量，则

$$E_Q\left(X \mid G\right) = \frac{E\left(X\dfrac{dQ}{dP} \mid G\right)}{E\left(\dfrac{dQ}{dP} \mid G\right)} \qquad Q-a.s.$$

其中$E_Q\left(X \mid G\right)$，表示关于概率测度Q的条件期望。

定理2.1.5 设G为F的子σ-代数，$g(x,y)$为二元Borel可测函数，使得$E|g(x,y)|<+\infty$，而X是G可积随机变量，那么对于任意的随机变量Y，有

$$E\left[g(x,y) \mid G\right] = E\left[g(x,Y) \mid G\right]\Big|_{x=X}$$

如果Y与G独立，则

$$E\left[g(x,y) \mid G\right] = E\left[g(x,Y)\right]\Big|_{x=X}$$

2.2 鞅的定义及定理

2.2.1 鞅的定义

定义 2.2.1[34] 设F为σ-域，称$\{F_t\}_{t\geq 0}$是一个σ-域流，如果

1）对所有的t，F_t是一个F的子σ-域，且

2）对于$s<t$，$F_s \subseteq F_t$

定义 2.2.2 如果$\{Y_t\}$是一个随机过程，使得对所有的$t\geq 0$，$Y_t \in F_t$即Y_t为F_t可测的，那么称$\{Y_t\}_{t\geq 0}$关于σ-域流$\{F_t\}_{t\geq 0}$是适应的。

定义 2.2.3 $\{F_t\}_{t\ge0}$是概率空间(Ω,F,P)上的一个σ-代数流，一个具有有限均值的可积随机变量的适应簇$(X_t)_{t\ge0}$，即对于任意的t，$E(|X_t|)<+\infty$，我们称$(X_t)_{t\ge0}$是一个鞅(上鞅、下鞅)，如果对于所有的$s\le t$都有：

$$E\left[X_t|F_t\right]=X_s(\le X_s,\ge X_s)$$

由鞅的定义知，如果$(X_t)_{t\ge0}$是鞅，则对于$\forall t$，一定有$E(X_t)=E(X_0)$。鞅的概念断定，给定所有可采纳的信息集F_s，对于(X_t)最好的近似是X_s。用金融市场的话来说，这意味着对将来价格预测的最好途径就是使用现在的价格。而且，使用当前信息等价于使用所有的历史信息，因为只有最新的信息才是最有用的。

定义 2.2.4 设随机序列$V=(V_n,n\in N)$，若$V_0=F_0$，且当$n\ge0$时，$V_{n+1}\in F_n$，则称V是可料的。

定义 2.2.5 若$X=(X_n,n\in N)$，$V=(V_n,n\in N)\}$为r.v序列，又

$$Z_n=X_0V_0+\sum_{i=1}^{n}V_i(X_i-X_{i-1}),\quad n\in N$$

$$Z=(Z_n,n\in N)$$

则

$$Z=V\bullet X$$

$$EX_m=EX_n=X_0$$

定义 2.2.6 称Q为市场的一个等价鞅测度，如果Q是(Ω,F_k)上与P等价的概率测度(即，对每个生成元$A_k^j\in F_k$，都有$Q(A_k^j)>0$)，并且股票的贴现价格过程$S^*(\cdot)$是一个$Q-$鞅。

定义中Q是所考虑多时段市场的一个等价鞅测度[38]。进一步看一下等价鞅测度Q的金融学意义。由于$S^*(\cdot)$是一个$Q-$鞅，故对任何时刻$t=i$，有

$$E_Q\left[S^*(i)|F_0\right]=S^*(0)$$

上式表明，假如事件是按照概率Q发生的，那么当前时刻$t=0$所能预期的任何一个将来时刻$t=i$的股票贴现价格和当前的贴现价格是完全一致的。事实上，还有更强的结论：在任何一个时刻$t=i$所能预期的任何一个时刻i以

后的时刻l的股票贴现价格与时刻i的股票贴现价格是完全一致的，也就是说，如果事件是按照概率Q发生的，那么在贴现的意义下，股票市场是“绝对公平”的，即没有期望意义下的“赔”和“赚”，因此，人们也称这样的Q是“风险中性”的。值得注意的是，尽管Q和P是等价的，但是一般而言，它们是不相等的。从而，股票市场一般来说不是风险中性的。

2.2.2 鞅的性质及定理

鞅具有下面的性质[37-39]

性质 1 若$X=(X_n)$，$Y=(Y_n)$为F鞅(下鞅)，α,β为任意常数(非负常数)，则$\alpha X+\beta Y=(\alpha X_n+\beta Y_n)$也是$F$鞅(下鞅)。

性质 2 (1) 设$X=(X_n)$为鞅，f为下凸函数，如果每个$f(X_n)$可积，则$f(X)=(f(X_n))$为下鞅。

(2) 设$X=(X_n)$为下鞅，f为非降下凸函数，如果每个$f(X_n)$可积，则$f(X)=(f(X_n))$为下鞅。

性质 3 若$X=(X_n,n\in N)$为鞅(下鞅)，$Y_n=X_n-X_{n-1},n\geq 1,Y_0=X_0$，则$Y=(Y_n,n\in N)$为鞅差(下鞅差)序列。反之$Y=(Y_n,n\in N)$为鞅差(下鞅差)序列，$X_n=\sum_{i=0}^{n}Y_i$，则$X=(X_n,n\in N)$为鞅(下鞅)。

性质 4 若X为鞅(下鞅)，V为可料的(非负可料)，$Z=V\cdot X$可积，则Z也是鞅(下鞅)。

性质 5 (有界停时定理) 若$X=(X_n,n\in N)$为鞅(下鞅)，S,T为有界停时，且$S\leq T$，则$E(X_T|F_S)=X_S$ $(\geq X_S)$ a.s。

定理 2.1.1 设$(M_n)_{0\leq n\leq N}$是一个鞅，$(H_n)_{0\leq n\leq N}$是一个关于$(F_n)_{0\leq n\leq N}$的可料序列，记$\Delta M_n=M_n-M_{n-1}$，那么对于$n\geq 1$，有下面定义的序列$(X_n)_{0\leq n\leq N}$是一个关于$(F_n)_{0\leq n\leq N}$的鞅

$$X_0=H_0M_0$$
$$X_n=H_0M_0+H_1\Delta M_1+\cdots+H_n\Delta M_n$$

定理 2.2.2 一个适应的随机变量序列(M_n)是一个鞅，当且仅当对于任一可料序列(H_n)，有

$$E\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta M_n\right)=0$$

定理 2.2.3[40]（**鞅表示定理**） 假设M_t为一个Q-鞅过程，它的波动率满足附加条件：总是（以概率 1）不为零. 如果N_t为另一个Q-鞅过程，那么存在一个F-可料过程ϕ，使得$\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$以概率 1 成立，并且$N_t$可以表示为

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s$$

进而，ϕ（在本质上）是唯一的。

2.3 Brown运动的定义及定理

2.3.1 Brown 运动的定义

定义 2.3.1 设(Ω,F,P)是一概率空间, T是一个实的参数集, 定义在Ω和T上的二元函数$X(\omega,t)$, 如果对于任意固定的$t \in T$, $X(\omega,t)$是(Ω,F,P)上的随机变量, 则称$\{X(\omega,t),\omega \in \Omega, t \in T\}$为该概率空间上的随机过程, 简记为$\{X(t),t \in T\}$。

从数学的观点来说[41]，随机过程$\{X(t,\omega),t \in T\}$是定义在$T \times \Omega$上的二元函数。当t固定的时，$X(t,\omega)$是(Ω,F,P)的随机变量；当ω固定时，$X(t,\omega)$是定义在T上的普通函数，成为随机过程X_T的一个样本函数[42]或轨道（或现实）。

通常把随机过程解释为一个物理系统。当t，ω都固定，$X(t,\omega)$为一个实数，表示系统在t时刻所处的状态。$X(t,\omega)$的所有可能状态所构成的集合（即$X(t,\omega)$的值域）称为状态空间或相空间，记为I。

随机过程可根据参数集T和状态空间I的情况进行分类。参数集T和状态空间I都可分为离散集和连续集两种情况，因此随机过程可分成四类：

(1) T 和 I 都离散的随机过程

(2) T 离散，I 连续的随机过程

(3) T 连续，I 离散的随机过程

(4) T 和 I 都连续的随机过程

定义 2.3.2 随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 称为参数为 σ^2 的 Brown 运动，如果

(1) $X(0)=0$

(2) 对于任意 $t_1<t_2<\cdots<t_n$,增量 $X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ 相互独立

(3) 对于任意 s,t，增量 $X(t)-X(s)\sim N\left(0,\sigma^2|s-t|\right),\sigma^2>0$

(4) 当 $t\geq 0$ 时，$X(t)$ 是连续的

当 $\sigma^2=1$ 时，称为标准 Brown 运动[43]，除非特别说明，我们总假定 $\sigma^2=1$，即 Brown 运动为标准 Brown 运动。

定义 2.3.3 如果 $\{B(t),t\geq 0\}$ 是一个标准 Brown 运动，那么我们称

$$X_t=\mu t+B_t$$

是漂移系数为 μ 的 Brown 运动。

定义 2.3.4 一个实值的连续随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 是一个 F_t - Brown 运动，如果它满足下列条件：

(1) 对任何的 $t\geq 0$，X_t 是 F_t - 可测的

(2) 如果 $s\leq t$，则 X_t-X_s 独立于 σ - 代数 F_s

(3) 如果 $s\leq t$，那么 X_t-X_s 和 $X_{t-s}-X_0$ 有同样的分布

2.3.2 Brown 运动的定理

定理 2.3.1 如果 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一个标准 Brown 运动，那么它具有如下性质

(1) $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{B_t}{t}=0$

(2) 对任一正常数 a，则 $(B_t-B_a)_{t\geq a}$ 也是标准 Brown 运动

(3) 对任一正常数 c，$\dfrac{B(ct)}{\sqrt{c}}$ 也是标准 Brown 运动

定理 2.3.2 如果$(B_t)_{t\ge0}$是一个标准 Brown 运动，那么有如下的结论

(1) Brown 运动是鞅

(2) Brown 运动是正态过程

(3) $\left\{e^{\lambda B(t)-\frac{1}{2}\lambda^2 t},t\ge0\right\}$是鞅

(4) $\left\{B^2(t)-t,t\ge0\right\}$是鞅

定理 2.3.3 设(Ω,F,P,F_t)为一滤过空间，n维过程$(B_t)_{t\ge0}$为(Ω,F,P,F_t)上的适应过程，如果对任意的$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)^T\in R^n,t>s\ge0$，恒有

$$E\left[e^{i\lambda^T(B_t-B_s)}\middle|F_t\right]=^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)}\text{，a.s}$$

则$B=(B_t)_{t\ge0}$为n维 Brown 运动。

2.4 $It\hat{o}$随机积分、$It\hat{o}$公式、Girsanov定理

设标准布朗运动$\{B(t),t\ge0\}$是定义在概率空间(Ω,F,P)的随机过程，设$(F_t,t\ge0)$是一族单调递增的F的子σ域，即$F_{t_1}\subset F_{t_2}\subset F(\forall t_1<t_2)\ \forall F_t$，是$F$的子$\sigma$域，且对$0\le s\le t$，$B(t)$关于$F_t$可测$E(B(t)|F_s)=B(s)$，$E(B(t)-B(s)|F_s)=0$。

定义 2.4.1 设$\{B(t),t\ge0\}$为标准布朗运动，$g(t,\omega)\in M_T^2$，任取$\forall 0\le t_1<t_2<\cdots t_n\le t\ [0,t]\subset[0,T]$，记$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$。若

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}g(t_{k-1})\left(B(t_k)-B(t_{k-1})\right)\overset{m.s.}{=}I_g(t)$$

均方极限存在，则称

$$I_g(t)=\int_0^t g(s,\omega)dB(s,\omega)$$

为$\{g(t,\omega),t\ge0\}$关于$\{B(t),t\ge0\}$在$[0,t]$的$It\hat{o}$积分。

定义 2.4.2 设$X(t)$是一个适应过程，使得$\int_0^T X^2(t)dt<\infty\quad a.s.$，那么$It\hat{o}$

积分 $\int_0^T X(t)dW_t$ 有意义，且满足以下性质

(1) 如果 $X(t),Y(t)$ 是适应过程，α,β 是某些常数，则有

$$\int_0^T (\alpha X(t)+\beta Y(t))dW_t=\alpha\int_0^T X(t)dW_t+\beta\int_0^T Y(t)dW_t$$

(2) 一个区间示性函数 $I_{[a,b]}$ 的积分为 $\int_0^T I_{[a,b]}(t)dW_t=W(b)-W(a)$

(3) 若 $E\left(X^2(t)\right)<\infty$，$E\int_0^T X(t)dW_t=0$

(4) $E\left(\int_0^T X(t)dW_t\right)^2=\int_0^T E\left(X^2(t)\right)dW_t$

定理 2.4.1 设 $X(t)$ 是一个可料过程，使得 $\int_0^T X^2(t)dt<\infty$，那么 $Y(t)=\int_0^t X(s)dW_s$，$0\le t\le T$ 是一个连续的均值为零的平方可积鞅；且二次变差 $[Y,Y](t)=\int_0^T X^2(s)ds$。

定义 2.4.3 设随机过程 $\{X(t),t\ge 0\}$ 满足如下的 $It\hat{o}$ 积分，对 $\forall 0\le t_0<t<T$ 有

$$X(t)-X(s)=\int_0^t a(s,X(s))ds+\int_0^t b(s,X(s))dB(s) \tag{2-1}$$

或等价地写作 $It\hat{o}$ 微分形式

$$dX(t)=a(t,X(t))dt+b(t,X(t))dB(t) \tag{2-2}$$

其中 $a(t,x)dt,\ b(t,x)$ 是二元函数，且对 $\forall x\in R$，$|a(t)|^{1/2}$，$b(t)\in M_T^2$ 则称 X 为 $It\hat{o}$ 随机过程(简称 $It\hat{o}$ 过程)，称(2-1)为 $It\hat{o}$ 随机积分方程，(2-2)式为 $It\hat{o}$ 随机微分方程，其中 $\int_0^t a(s,X(s))ds$ 是一般的均方积分，$\int_0^t b(s,X(s))dB(s)$ 是 $It\hat{o}$ 积分。

定理 2.4.2（$It\hat{o}$ 公式） 设 $\{X(t),t\ge 0\}$ 满足上定义等式(2-1)，$y=f(t,x)$

是二元函数，且具有连续偏导数 $\partial f/\partial t$，$\partial f/\partial x$，$\partial^2 f/\partial x^2$，令 $Y(t)\triangleq f(t,X(t))$，则过程 $Y=\{Y_t,t\ge 0\}$ 也是随机过程，且 $\forall 0\le t_0<t$ 满足如下的 $It\hat{o}$ 积分方程

$$Y(t)-Y(t_0)=\int_0^t\left[\frac{\partial f}{\partial t}+a\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right](s,X(s))ds+\int_0^t b\frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s))dB(s)$$

或等价的 $It\hat{o}$ 微分形式

$$dY(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+a\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(t,X(t))dt+b\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))dB(t)$$

定理 2.4.3（Brown 运动的 $It\hat{o}$ 公式） 如果 f 是二次连续可微函数，则对任何 t，有

$$f(B(t))=f(0)+\int_0^t f'(B(s))dB(s)+\frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds \tag{2-3}$$

证明 易见式(2-3)中的积分都是适定的. 取 $[0,t]$ 的分割 $\{t_i^n\}$，有

$$f(B(t))=f(0)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(B(t_{i+1}^n))-f(B(t_i^n))\right)$$

对 $f(B(t_{i+1}^n))-f(B(t_i^n))$ 应用 Taylor 公式得

$$f(B(t_{i+1}^n))-f(B(t_i^n))=f'(B(t_i^n))\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right)+\frac{1}{2}f''(\theta_i^n)\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right)^2$$

其中 $\theta_i^n\in\left(B(t_{i+1}^n),B(t_i^n)\right)$。于是

$$f(B(t))=f(0)+\sum_{i=1}^{n-1}f'(B(t_i^n))\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}f''(\theta_i^n)\left(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\right)^2 \tag{2-4}$$

令 $\delta_n\to 0$ 取极限，则式(2-3)中的第一个和收敛于 $It\hat{o}$ 积分 $\int_0^t f'(B(s))dB(s)$，第二个和收敛于 $\int_0^t f''(B(s))ds$。

定理 2.4.4（$It\hat{o}$ 表示定理） 对每一个 $\xi\in L^2(F_T,P)$，都存在唯一的一个

满足条件$E\int_0^T f^2dt<\infty$的适应$f(t,\omega)$，使得

$$\xi=E(\xi)+\int_0^T f(t,\omega)dB_t(\omega)$$

定理 2.4.5（$It\hat{o}$定理） 设$(X_t)_{0\le t\le T}$是一个$It\hat{o}$过程

$$X_t=X_0+\int_0^t K_s ds+\int_0^t H_s dB_s$$

$f(\cdot)$是一个具有二次连续导函数的实函数，

$$F(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X,X\rangle_s$$

$$=f(X_0)+\int_0^t f'(X_s)K_s ds+\int_0^t f'(X_s)H_s dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)H_s^2 ds$$

这里

$$dX_t=K_t dt+H_t dB_t$$

$$\langle X,X\rangle_t=\langle x\rangle_t=\left\langle\int_0^t H_s dB_s\right\rangle_t=\int_0^t H_s^2 ds$$

定理 2.4.6 设X_t和Y_t是两个如下的$It\hat{o}$过程

$$X_t=X_0+\int_0^t K_s ds+\int_0^t H_s dB_s$$

$$Y_t=Y_0+\int_0^t K_s' ds+\int_0^t H_s' dB_s$$

那么我们有

$$X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_s dY_s+\int_0^t Y_s dX_s+\langle X,Y\rangle_t$$

这里

$$\langle X,Y\rangle_t=\int_0^t H_s H_s' ds$$

证明 取$Z_t=X_t+Y_t$，$f(x)=x^2$，那么根据$It\hat{o}$定理，有

$$
\begin{aligned}
f(Z) &= (X_t + Y_t)^2 \\
&= (X_0 + Y_0)^2 + 2\int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \langle X + Y \rangle_t \\
&= X_0^2 + Y_0^2 + 2X_0Y_0 + 2\int_0^t X_s dX_s + 2\int_0^t Y_s dX_s + 2\int_0^t X_s dY_s + \\
&\quad 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s^2 ds + \int_0^t H_s^{'2} ds + 2\int_0^t H_s H_s^{'} ds
\end{aligned}
$$

$$
X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s + \int_0^t H_s^2 ds
$$

$$
Y_t^2 = Y_0^2 + 2\int_0^t Y_s dY_s + \int_0^t H_s^{'2} ds
$$

于是

$$
\begin{aligned}
X_t Y_t &= \frac{1}{2}\left[(X_t + Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2\right] \\
&= X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H_s^{'} ds \\
&= X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t
\end{aligned}
$$

定理 2.4.7(Girsanov 定理) 让$(\theta_t)_{0\le t\le T}$表示一个满足$\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty$的适应过程，且使得如下所定义的过程$(L_t)_{0\le t\le T}$

$$
L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right) \tag{2-5}
$$

是一个鞅。那么在绝对连续于P其密度为L_T的测度Q下，过程$(W_t)_{0\le t\le T}$

$$
W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds
$$

是一个标准 Brown 运动。

由于标准 Brown 运动是一个鞅，所以从上述定理知道(B_t)是一个$P-$鞅，而(W_t)是一个$Q-$鞅。

定理 2.4.8 如果

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\right)\right) < \infty$$

则式(2-5)所定义的过程(L_t)是一个鞅。

2.5 本章小结

本章主要介绍了期权定价相关的数学知识，包括鞅的定义，Brown 运动、伊藤随机积分、伊藤公式、Girsanov 定理等重要的概念及定理。为课题的研究提供了必需的基础知识。

第3章 经典的Black-Scholes期权定价模型

1973 年，美国芝加哥大学 Black 教授和 Scholes 教授在美国 《政治经济学杂志》(Journal of political Economy)上发表了一篇名为《期权定价与公司负债》(the pricing of options and corporate liabilities)的论文，同年，Merton (时任美国哈佛大学教授)则在另一刊物《贝尔经济与管理科学杂志》上发表了另一篇关于期权定价的论文《期权的理性定价理论》。这两篇论文奠定了期权定价理论的理论基础，提出了著名的“Black-Scholes 公式”。

Black 和 Scholes 获得成功的关键在于，他们认识到一个期权的损益特征可以由标的股票和无风险债券的适当组合来确定复制，即任意一个期权都可以通过人工合成的办法来实现。在该模型中，Black、Scholes 和 Merton 引入了动态套期保值组合的概念，期权的支付可以通过基础资产的动态组合策略复制。在基础资产的价格过程为对数正态分布的情况下，得到欧式期权公式的解析解。因此，复制期权所需要的成本即为对应期权的价值。Black-Scholes(简称 B-S)定价模型克服了以前各种模型存在的问题，从而为包括期权定价在内的金融衍生工具定价问题的研究开创了一个新的时代。

Black-Scholes 的期权定价模型是金融学中广泛应用的模型之一，该模型的提出是金融理论界和实践界的一场革命，尽管该模型的一些假设与现实不相符，但是期权市场的价格与该公式的计算结果还是比较吻合的。Black-Scholes 模型已成为现代金融经济理论和理财理论的一块基石，它的理论和实践意义在于：在理论上它带来了经济学和理财学研究方法的革命，在实践上它对规范证券市场，特别是期权交易起了重大的作用，并为金融工程奠定了基础。这个公式以特殊方式促进了经济增长、世界贸易和资本流动，同时也开辟了一个由华尔街“火箭科学家”控制的时代，传统的老金融交易商让位于学过物理和数学的“战略家”，他们不是依靠感觉做事，而是借助高效能的计算机的计算和数学赚钱。正是这个公式发明以来所产生的巨大开拓

性贡献，Scholes 教授和 Merton 教授被瑞典皇家科学院授予 1997 年诺贝尔经济学奖，Black 教授虽然因为在 1995 年 8 月 30 日逝世而未能享此殊荣，但其英名也将永载经济学史册。

3.1 Black-Scholes期权定价

3.1.1 Black-Scholes 微分方程

微分方程推倒的思路[46]

在期权交易中，期权价格的决定和变动是一个非常重要的问题，学术界已经做了长期深入的研究。自 1973 年以来，许多学者和专家纷纷提出各自的期权定价模型，以说明期权价格的变动。Black-Scholes 期权定价模型(简称 B-S 模型)是最典型的期权模型，它是期权定价理论的核心和基础。下面介绍 B-S 模型的基本假设及结论。

(一) Black 和 Scholes 在推导 B-S 模型时，做了以下 7 条基本假设:

(1) 标的资产为股票，其价格 $S(t)$ 满足 $dS(t)=\mu S(t)dt+\sigma S(t)dB$ 其中 μ,σ 为常数。

(2) 无风险利率:为一已知常数，且不随时间变化。

(3) 期权为欧式期权。

(4) 标的股票没有红利支付。

(5) 对于期权市场和股票市场来说，不存在交易费用或税收。

(6) 允许卖空，卖空所得资金可由投资者自由使用。

(7) 投资者可以自由借入或贷出资金，借入利率与贷出利率相等，均为无风险利率。而且，所有证券交易可以无限制细分，即投资者可以购买任意数量的标的股票。

设 $V(S,t)$ 表示某股票期权的价格，$S(t)$ 是股票在 t 时刻的价格。假设 $V(S,t)$ 关于变量 S 和 t 的平滑的函数。构造 Black-Scholes 微分方程的思路包括四部

第 1 步：将函数$V(S,t)$关于S和t进行泰勒级数展开；

第 2 步：在$V(S,t)$的展开的泰勒级数中，代替方程中$dS(t)$；

第 3 步：进行代数变换，包括简化布朗项和忽略高阶项；

第 4 步：令$V(S,t)$与复制的资产组合相等。

将$V(S,t)$泰勒展开级数如下

$$\begin{aligned} dV = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2 + \\ \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}dSdt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(dt)^2 + \text{高阶项} \end{aligned} \tag{3-1}$$

接下来我们要将公式$dS = \mu S dt + \sigma S dB$代替上面方程中的$dS$，并且只保留$dt$的一阶项，则有

$$\begin{aligned} dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mu S dt + \sigma S dB)^2 \\ + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(\mu S dt + \sigma S dB)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}dt^2 \end{aligned} \tag{3-2}$$

我们保留上式右边的前四项，忽略掉最后一项。下面对保留的一些项进行仔细分析。

$$dSdt = (\mu S dt + \sigma S dB)dt = \mu S (dt)^2 + \sigma S dB dt \tag{3-3}$$

前面已经知道 $dB \approx Z\sqrt{dt}$，因此$dBdt \approx Z(dt)^{3/2}$。又由于$(dt)^2$和$(dt)^{3/2}$都不是dt的一阶项，因此我们可以忽略$dSdt$项。这样我们只需关注下面的$(dS)^2$项

$$(dS)^2 = \mu^2 S^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma S^2 dB dt + \sigma^2 S^2 (dB)^2 \tag{3-4}$$

由前面的推理知我们可以忽略掉(3-4)右端的前两项。另一方面，$(Z\sqrt{dt})^2 = Z^2 dt$，正好是关于dt的一阶项，我们必须予以保留

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}dB \end{aligned} \tag{3-5}$$

为了对公式（3-5）更进一步化简，我们将Z^2用他的期望值 1 代替，这

样将得到

$$dV=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right)dt+\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dB \tag{3-6}$$

令

$$\phi(t)=\text{股票的股数}$$

$$\Psi(t)=\text{债券的数量}$$

并且令方程

$$V(S_t,t)=\phi S_t+\Psi P_t \tag{3-7}$$

在$0\le t\le T$时总是成立，则该方程满足资产组合的净头寸就是持有的股票和债券的市值的要求，这里P_t是单位债券的价值。可以推出资产组合净资产的变化服从如下方程

$$dV=\phi dS_t+\Psi dP_t \tag{3-8}$$

由于

$$dS=\mu Sdt+\sigma SdB$$

且

$$dP=rPdt$$

代入式（3-7）有

$$dV=(\mu\phi S+r\Psi P)dt+\sigma\phi SdB \tag{3-9}$$

将方程（3-6）和（3-9）右边取等可以得到

$$(\mu\phi S+r\Psi P)dt+\sigma\phi SdB=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right)dt+\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dB$$

令

$$\phi(t)=\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)$$

这样就只剩下：

$$r\Psi Pdt=\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right)dt \tag{3-10}$$

由式（3-8）可知

$$\Psi P = V - S\frac{\partial V}{\partial S}$$

代入式（3-10）得到

$$r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$$

这样就得到了期权价格的偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{3-11}$$

这就是著名的关于股票期权价格的 Black-Scholes 偏微分方程。注意该方程中不含 μ，只含 σ，在终端 $V(S_t,t) = Max(S_t - X, 0)$ 条件下可得到 Black-Scholes 期权定价公式。许多衍生证券的价格可用上面的 Black-Scholes 方程计算，只是边界条件不同。

3.1.2 Black-Scholes 公式

设股票在 $[0,T]\left(t \in [0,T]\right)$ 内没有股票送配，其价格的微分方程是

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t \\ &= S_t r dt + S_t \sigma dW_t \end{aligned}$$

其中 B_t 是 $P-$标准 Brown 运动，W_t 是 $Q-$标准 Brown 运动。基于股票之间的欧式期权的到期日为 T，敲定价格是 K，则该期权

$$h = f(S_T)$$

于是该期权在 t 时刻的价格为

$$\begin{aligned} V_t &= E^Q\left(e^{-r(T-t)} f(S_T) \middle| F_t\right) \\ &= E^Q\left(e^{-r(T-t)} f\left(S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right)\right) \middle| F_t\right) \end{aligned}$$

注意到 S_t 的 $F-$测度，在 Q 测度下 $W_T - W_t$ 独立于 F_t，因此有

$$V_t = F(t, S_t)$$

这里

$$F(t,x)=E^{Q}\left(e^{-r(T-t)}f\left(x\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^{2}}{2}\right)(T-t)+\sigma\left(W_{T}-W_{t}\right)\right)\right)\right)$$

由于在测度Q下，$W_T-W_t=Y$是一个均值为0，方差为$T-t$的正态随机变量，故有

$$F(t,x)=E^{Q}\left(e^{-r(T-t)}f\left(x\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^{2}}{2}\right)(T-t)+\sigma\left(W_{T}-W_{t}\right)\right)\right)\right)$$

$$=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^{2}}{2}\right)(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}\right)\right)\frac{e^{-\frac{y^{2}}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy$$

这样我们就可以导出欧式期权价格的显示，而无论是认购期权还是沽出期权。

我们以认购期权为例，此时有

$$f(x)=(x-K)^{+}$$

令

$$\tau=T-t$$

于是有

$$F(t,T)=E^{Q}\left(e^{-r\tau}\left(x\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)\tau+\sigma y\sqrt{\tau}\right)-K\right)^{+}\right)$$

$$=E^{Q}\left(x\exp\left(\sigma y\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^{2}\tau\right)-Ke^{-r\tau}\right)^{+}$$

令

$$x\exp\left(\sigma y\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^{2}\tau\right)-Ke^{-r\tau}\geq 0$$

就是

$$\exp\left(\ln\frac{x}{K}+\sigma y\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^{2}\tau\right)\geq e^{-r\tau}$$

得到

$$\ln\frac{x}{K}+\sigma y\sqrt{\tau}+\left(r-\frac{\sigma^{2}}{2}\right)\tau\geq 0$$

$$\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}+y\geq 0$$

令

$$d_2=\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

和

$$d_1=d_2+\sigma\sqrt{\tau}=\frac{\ln\frac{x}{K}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

得到

$$\begin{aligned}F(t,x)&=E^Q\left(\left(x\exp\left(\sigma y\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau\right)-Ke^{-r\tau}\right)I_{\{d_2+y\geq 0\}}\right)\\&=\int_{-d_2}^{+\infty}\left(x\exp\left(\sigma y\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau\right)-Ke^{-r\tau}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy\\&=x\Phi(d_1)-Ke^{-r\tau}\Phi(d_2)\end{aligned}\tag{3-12}$$

这里$\Phi(\cdot)$是累积标准正态分布函数，即

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

对于沽出期权，此时

$$f(x)=(K-x)^+$$

得到它的价格为

$$F(t,x)=Ke^{-r\tau}\Phi(-d_2)-x\Phi(-d_1)\tag{3-13}$$

如果令认购期权的价格为C，沽出期权的价格为P，那么注意到

$$\Phi(-d_1)=1-\Phi(d_1)$$

$$\Phi(-d_2)=1-\Phi(d_2)$$

可得这两种欧式期权价格之间的关系，即所谓的平价关系：

$$C+Ke^{-r\tau}=P+x$$

式(3-12)或(3-13)就是人们常说的 Black-Scholes 公式。

3.1.3 离散时间的 Cox-Ross-Rubinstein 模型

Black-Scholes 期权定价公式的推出是现代金融理论的重大突破，但由于该模型过于严格的假设条件，制约了其实用性，使其在理论及应用上均存在缺陷。Sharp(1978)构造了一个简单的二项式模型，假定经过每一个时期，股价都会上升或者下降某个固定比例，由于在每一期仅有两种可能的运动，通过对股票与无风险债券的交易，期权能够很容易得到复制。Cox(1979)等人利用这种二项式方法来计算期权价格。Cox-Ross-Rubinstein 模型[47-48]的结果与 Black-Scholes 模型完全一致。当时间间隔越来越小的时候 Cox-Ross-Rubinstein 买方期权的价值会收敛于 Black-Scholes 公式的定价价值。

考虑一个离散时间的单期定价模型。假设时间只有一期，即$T=1$，当前时刻为$t=0$。一份欧式买权的基础资产在$t=0$时刻的市场价格为S_0，其$t=1$时刻的价格只有两种可能值：以π的概率上涨至uS或者以$1-\pi$的概率下跌至dS $(u>d>0)$，假设无套利机会出现时，无风险收益率R居于d和u之间$(d<R<u)$。记以基础资产价格当前价格S_0、履约价为X的欧式买权的当前价格为C。利用风险资产无套利定价原则，可以定义风险中性概率：$\bar{\pi}_u=Rq_u$、其中q_s是状态s的状态价格，满足$0<\bar{\pi}_u,\bar{\pi}_d<1,\bar{\pi}_u+\bar{\pi}_d=1$。期权的当前价格等于以计算的期望收益按无风险利率贴现，即

$$C=\frac{1}{R}\left(\bar{\pi}_u C_u+\bar{\pi}_d C_d\right)$$

可以构造一个风险对冲组合，使其最终产生无风险收益，即卖出一份买权，购入m股基础资产。在时刻$T=1$，该资产组合的收益在股票上涨和下跌的情况下分别是$m(uS_0)-C_u$和$m(dS_0)-C_d$。解出组合中基础资产的头寸

$$m^*=\frac{C_u-C_d}{(u-d)S_0}$$

该资产组合的收益率必然和无风险资产的收益率R一致

$$R=\frac{dC_u-uC_d}{u-d}/\left(m^*S_0-C\right)$$

则可解出期权当前价格C，即

$$C=\frac{1}{R}\left[\frac{R-d}{u-d}C_u+\frac{u-R}{u-d}C_d\right]$$

如果期权的寿命是T期(T为一个整数)，可以从最后一期开始，逐步地反推出它的当前价格。欧式买权价格为：

$$C=S_0\left[\sum_{n=n^*}^{N}\frac{T!}{n!(T-n)!}\bar{\pi}\left(1-\bar{\pi}\right)\frac{u^n d^{T-n}}{(1+r)^T}\right]$$

$$-\frac{X}{(1+r)^T}\left[\sum_{n=n^*}^{N}\frac{T!}{n!(T-n)!}\bar{\pi}\left(1-\bar{\pi}\right)\right]$$

第二项的方括号是基础资产上涨期数不小于n^*的风险中立概率，也是基础资产下跌期数不超过$T-n^*$的风险中性概率。当每一单位时间交易区间数目无穷大，则$T\to\infty$时，可以证明 Black-Scholes 公式是上式的极限。二项式定价方法在期权定价的模拟运算中非常有用。

3.1.4 均衡定价方法

假设：

1. 市场上存在一个代表性消费者，其效用函数可表示为：

$$V\left(C_0,C_1\right)=V_0\left(C_0\right)+V_1\left(C_1\right)$$

2. 代表性消费者更具体的效用函数可表示为幂函数形式：

$$V(x)=\frac{x^a}{a}(a>0)$$

3. 代表性消费者的总消费与证券的价格的联合分布是二元正态分布。基于上述假定，对于代表性消费者，任一期末状态为ω下支付收益$S(\omega)$的证券的期初价格，按照均衡定价方法得：

$$S_0=\frac{E^P\left[V_1'\left(C_1\right)S\right]}{V_0'\left(C_0\right)} \tag{3-14}$$

其中P测度是真实测度。在期末确定地支付 1 的证券，其价格为：

$$e^{-r}=\frac{1}{1+i_f}=\frac{E^p\left[V_1^{'}(C_1)\right]}{V_0^{'}(C_0)} \tag{3-15}$$

将式（3-14），（3-15）整理得：

$$S^0=\frac{1}{1+i_f}=\frac{E^p\left[V_1^{'}(C_1)S\right]}{E^p\left(V_0^{'}(C_0)\right)}$$

考虑一衍生证券，它所依存的标的证券的期末价格为S(随机变量)，设该衍生证券的期末支付的$f(S)$，那么它的初期价格应为：

$$V(S_0,0)=\frac{1}{1+i_f}\frac{E^p\left[V_1^{'}(C_1)f(S)\right]}{E^p\left(V_1^{'}(C_1)\right)}$$

定义Q测度

$$q(\omega)=\frac{p(\omega)V_1^{'}(C_1)}{E^p\left(V_1^{'}(C_1)\right)}\geq 0$$

那么

$$\sum_{\infty}q(\omega)=\frac{\sum_{\infty}\left[p(\omega)V_1^{'}(C_1)\right]}{E^p\left(V_1^{'}(C_1)\right)}=1$$

则Q是一个概率测度，进一步得：

$$\begin{aligned}V(S_0,0)&=\frac{1}{1+i_f}\frac{E^p\left[V_1^{'}(C_1)f(S)\right]}{E^p\left(V_1^{'}(C_1)\right)}\\&=e^{-r}\sum_{\infty}\frac{p(\omega)V_1^{'}(C_1)f(S)}{E^p\left(V_1^{'}(C_1)\right)}\\&=e^{-r}\sum_{\infty}q(\omega)f(S)\\&=e^{-r}E^Q\left[f(S)\right]\end{aligned}$$

根据上式，得期末支付为$f(S)=f\left(S_0e^x\right)$的衍生证券，其期初始价格

$$V(S_0,0)=e^{-r}E^Q\left[f\left(S_0e^x\right)\right]$$

定义函数：

$$x^+=\begin{cases}x, & \text{如果}x\geq 0\\0, & \text{如果}x<0\end{cases}$$

如果标的证券的期末价格为S，那么这个买入期权的期末支付为：

$$f(S)=[S-K]^{+}$$

由于在Q测度下X是一个正态变量，得欧式买人期权的定价公式：

$$\left[\left(Se^{x}-K\right)^{+}\right]=e^{-r}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{n\frac{K}{S_0}}^{+\infty}\left(Se^{x}-K\right)\exp\left[-\frac{\left(x-r+\frac{1}{2}\sigma^{2}\right)}{2\sigma^{2}}\right]dx$$

$$=S_0N\left[\frac{\ln\frac{S_0}{K}+r+\frac{1}{2}\sigma^{2}}{\sigma}\right]-Ke^{-r}N\left[\frac{\ln\frac{S_0}{K}+r-\frac{1}{2}\sigma^{2}}{\sigma}\right]$$

其中，$N(\cdot)$是累积标准正态分布函数，可以检验，该公式即是 Black-Scholes 公式。

3.2 本章小结

本章主要在第三章预备知识的基础上，介绍了 Black-Scholes 期权定价，介绍了 Black-Scholes 微分方程，Black-Scholes 公式及其推导方法。

第4章 CIR模型下的欧式期权定价

自 1973 年以来，许多学者研究的期权定价都是基于期望收益率为常数或股价为 Black-Scholes 模型的假设条件下进行的，这意味着随着时间的变化，股票的预期收益率将会有朝同一方向变化的趋势，然而在实际金融市场中股票的预期收益率不可能随时间朝一个方向（上升或下降）变化，股票的预期收益率往往是波动变化的，可能是依赖时间和股票价格的函数，并且影响投资者的投资行为和期权价格。实践证明，Ornstein-Uhlenback 过程就是一类保证股价非负且具有回复水平的过程[51-52]，它保证了股价在短期内不会发生巨大波动，有利于投资者进行投资决策。本章假定股价遵循指数 O-U 过程，研究了 CIR 模型下基于 O-U 模型的欧式期权定价。

4.1 市场模型

模型假设 1：假设股票价格过程满足如下随机微分方程

$$\begin{cases} dS(t)=\left(\mu(t)-\alpha\ln S(t)\right)S(t)dt+\sigma_s(t)S(t)dB_2(t) \\ S(0)=S \end{cases} \tag{4-1}$$

其中：$\{B_2(t):\ t\geq 0\}$是定义在完备概率空间(Ω,F,P)上的标准 Brown 运动，$\mu(t),\sigma_s(t)$为t的确定性函数，并且$\alpha>0$，常数α的作用在于当股票价格上升到一定高度后，它使$S(t)$有下降的趋势，与 Black-Scholes 模型相比较，模型(4-1)相当于考虑预期收益率依赖于股票价格的 Black-Scholes 模型。显然当$\alpha\to 0_+$时模型(4-1)即为 Black-Scholes 模型。把方程(4-1)确定的模型称为股票价格遵循广义指数 0-U 过程模型[53]。

模型假设 2：时刻T到期的零息债券$P(t)$具有仿射期限结构[54]

$$\begin{cases} dP(t,T)=P(t,T)\left[r(t)dt-\sigma_p(t)dB_1(t)\right] \\ P(T,T)=1 \end{cases} \tag{4-2}$$

模型假设 3：短期利率过程$r(t)$满足下列微分方程

$$dr(t)=\big(a(t)-b(t)r(t)\big)dt+\sigma_r(t)\sqrt{r(t)}dB_1(t) \qquad (4\text{-}3)$$

即为 CIR 利率模型。

4.2 欧式期权定价方程

定理 4.2.1 假设标的物价格$S(t)$服从式(4-1)，时刻T到期的零息债券$P(t)$满足式(4-2)，利率过程$r(t)$满足式(4-3)，则欧式期权定价满足的偏微分方程如下

$$\begin{aligned}&V_t+\big(a(t)-b(t)r(t)\big)V_r+\frac{1}{2}\sigma_s^2S(t)^2V_{ss}+\frac{1}{2}\sigma_r^2r(t)V_{rr}\\&+\rho\sigma_r\sigma_s\sqrt{r(t)}S(t)V_{rs}+r(t)S(t)V_s=r(t)V(t)\end{aligned}$$

简记为

$$V_t+(a-br)V_r+\frac{1}{2}\sigma_s^2S^2V_{ss}+\frac{1}{2}\sigma_r^2rV_{rr}+\rho\sigma_r\sigma_s\sqrt{r}SV_{rs}+rSV_s=rV$$

其中，$a(t)$、$b(t)$、$\mu(t)$、$\sigma_r(t)$、$\sigma_P(t)$和$\sigma_s(t)$都是关于t的函数，$B_1(t)$和$B_2(t)$是标准的布朗运动，且$B_1(t)$和$B_2(t)$的相关系数设为ρ。

因为文中 2 个随机波动项的存在，所以在用$\Delta-$对冲思想时，对常见的证券组合$\Pi=V-\Delta S$（V表示欧式未定权益价格）是不能满足要求的，因为它仅能消除$B_2(t)$而不能消除$B_1(t)$的存在，考虑到$B_1(t)$是$r(t)$的波动项，而债券恰恰直接与$r(t)$相关，所以可视债券的波动项和利率的波动项是一致的。这时考虑证券组合$\Pi=V-\Delta_1S+\Delta_2P$，就可以同时消除 2 个风险波动因素，将整个系统转化为无风险形式，从而获得关于V的欧式期权定价公式，具体实现过程介绍之前先引入 3 个引理。

引理 4.2.1 标准 Brown 运动的二次变差

$$[B,B](t)=\lim_{\delta_n\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\Big[B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n)\Big]^2=t$$

其中$\{t_i^n\}_{i=0}^n$遍取$[0,t]$的分割，$\delta_n=\max\limits_{0\le i\le n}\left(t_{i+1}^n-t_i^n\right)\to 0$

引理 4.2.2 设$B_1(t)$、$B_2(t)$为空间(Ω,F,P)上的标准一维布朗运动，$B_1(t)$和$B_2(t)$的相关系数为ρ，则$dB_1(t)dB_2(t)=\rho dt$

证明 令

$$B(t)=\sigma_1 B_1(t)+\sigma_2 B_2(t)$$

则不难得到$B(t)$是均值为0，方差为$\sigma^*=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\rho}$的布朗运动，所以$\dfrac{B(t)}{\sigma^*}$为标准布朗运动，即

$$\left(d\frac{B(t)}{\sigma^*}\right)^2=\frac{\left(\sigma_1 dB_1(t)+\sigma_2 dB_2(t)\right)^2}{\sigma^{*2}}$$

$$=\frac{\sigma_1^2 dt+\sigma_2^2 dt+2\sigma_1\sigma_2 dB_1(t)dB_2(t)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\rho}$$

由引理 4.2.1 知当$B(t)$为标准布朗运动时，有

$$dB\bullet dB=dt$$

即

$$\frac{\sigma_1^2 dt+\sigma_2^2 dt+2\sigma_1\sigma_2 dB_1(t)dB_2(t)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2\rho}=dt$$

得

$$dB_1(t)dB_2(t)=\rho dt$$

引理 4.2.3(多维 Itô 公式)[55] 令$X(t)=\left(X_1(t),\cdots,X_n(t)\right)$，其实$X_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$为 Itô 过程$dX_i(t)=u_i\left(X(t),t\right)dt+\sigma_i\left(X(t),t\right)dB_i(t)$，$B_i(t)$与$B_j(t)\ (i\neq j)$的相关系数$\rho$。当$f\left(t,X(t)\right)$满足对$X$二次连续可微，对$t$一次连续可微，那么

$$df\left(t,X(t)\right)=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_i}dX_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}\left(dX_i dX_j\right)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_i}u_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}+\sum_{i\neq j}\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}\right)dt$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\frac{\partial f}{\partial X_i}dB_i$$

其中$d\left[X_i,X_j\right](t)$计算按下面规则

$$dt\cdot dt=dt\cdot dB_i=dB_i\cdot dt=0,\quad dB_j\cdot dB_i=\rho_{ij}dt$$

定理证明

现对$V\left(S(t),r(t),t\right)$应用$It\hat{o}$二维定理，结合上面设定的模型可得

$$\begin{aligned}dV&=V_t dt+V_s dS+V_r dr+\frac{1}{2}V_{ss}dS^2+\frac{1}{2}V_{rr}dr^2+V_{sr}\left(dSdr\right)\\&=\Big(V_t+S(\mu-\alpha\ln S)V_s+(a-br)V_r+\frac{1}{2}\sigma_s^2S^2V_{ss}+\\&\quad\frac{1}{2}\sigma_r^2rV_{rr}+\rho\sigma_r\sigma_s\sqrt{r}SV_{rs}\Big)dt+\sigma_sSV_sdB_2+\sigma_r\sqrt{r}V_rdB_1\end{aligned}\tag{4-4}$$

利用$\Delta-$对冲方法，即形成投资组合

$$\Pi=V-\Delta_1S+\Delta_2P$$

得

$$d\Pi=dV-\Delta_1dS+\Delta_2dP$$

将式（4-1)、(4-2)、(4-4）代入得

$$\begin{aligned}d\Pi&=\Big(V_t+S(\mu-\alpha\ln S)V_s+(a-br)V_r+\frac{1}{2}\sigma_s^2S^2V_{ss}+\\&\quad\frac{1}{2}\sigma_r^2rV_{rr}+\rho\sigma_r\sigma_s\sqrt{r}SV_{rs}\Big)dt+\sigma_sSV_sdB_2+\\&\quad\sigma_r\sqrt{r}V_rdB_1-\Delta_1\left[(\mu-\alpha\ln S)Sdt+\sigma_sSdB_2\right]+\\&\quad\Delta_2\left[P\left(rdt-\sigma_pdB_1\right)\right]\\&=\Big(V_t+S(\mu-\alpha\ln S)V_s+(a-br)V_r+\frac{1}{2}\sigma_s^2S^2V_{ss}+\\&\quad\frac{1}{2}\sigma_r^2rV_{rr}+\rho\sigma_r\sigma_s\sqrt{r}SV_{rs}-\Delta_1(\mu-\alpha\ln S)S+\Delta_2Pr\Big)dt\\&\quad+\left(\sigma_sSV_s-\Delta_1\sigma_sS\right)dB_2+\left(\sigma_r\sqrt{r}V_r-\Delta_2P\sigma_p\right)dB_1\end{aligned}\tag{4-5}$$

这时选择恰当的股票头寸Δ_1和债券头寸Δ_2，就可以消除式(4-5)中的随机项dB_1和dB_2，转化系统为无风险状态，即让

$$\left(\sigma_r\sqrt{r}V_r-\Delta_2P\sigma_p\right)dB_1=0$$

和

$$\left(\sigma_sSV_s-\Delta_1\sigma_sS\right)dB_2=0$$

得

$$\Delta_1 = V_s$$

$$\Delta_2 = \frac{\sigma_r \sqrt{r} V_r}{P \sigma_p}$$

将Δ_1，Δ_2的值代入式(4-5)中，得

$$\begin{aligned} d\Pi &= \Big(V_t + S(\mu - \alpha \ln S) V_s + (a - br) V_r + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 V_{ss} + \\ &\quad \frac{1}{2}\sigma_r^2 r V_{rr} + \rho \sigma_r \sigma_s \sqrt{r} S V_{rs} - \Delta_1 (\mu - \alpha \ln S) S + \Delta_2 P r \Big) dt \\ &= \Big(V_t + (a - br) V_r + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 V_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r V_{rr} + \\ &\quad \rho \sigma_r \sigma_s \sqrt{r} S V_{rs} + \frac{\sigma_r \sqrt{r} V_r}{\sigma_p} r \Big) dt \end{aligned} \tag{4-6}$$

令$dt \to 0$，可将$r(t)$看成无风险利率，则有

$$\begin{aligned} d\Pi &= r \Pi dt \\ &= r(V - \Delta_1 S + \Delta_2 P) dt \end{aligned} \tag{4-7}$$

由式(4-6)、(4-7)可得

$$\begin{aligned} r(V - \Delta_1 S + \Delta_2 P) dt = \Big(& V_t + (a - br) V_r + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 V_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r V_{rr} \\ & + \rho \sigma_r \sigma_s \sqrt{r} S V_{rs} + \frac{\sigma_r \sqrt{r} V_r}{\sigma_p} r \Big) dt \end{aligned} \tag{4-8}$$

将Δ_1，Δ_2的值代入，整理得

$$V_t + (a - br) V_r + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 V_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r V_{rr} + \rho \sigma_r \sigma_s \sqrt{r} S V_{rs} + r S V_s = r V \tag{4-9}$$

这就是CIR模型下基于O-U指数模型的欧式期权定价方程。

推论 4.2.1 假设时刻T到期的零息债券$P(t)$满足式(4-2)，利率过程$r(t)$满足式(4-3)，标的物价格$S(t)$服从下列微分方程

$$dS(t) = \mu(t) S(t) dt + \sigma_s(t) S(t) dB_2(t) \tag{4-10}$$

则欧式期权定价满足的偏微分方程如下

$$V_t + (a - br) V_r + \frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 V_{ss} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r V_{rr} + \rho \sigma_r \sigma_s \sqrt{r} S V_{rs} + r S V_s = r V$$

注 1. 在公式(4-9)中若将r视为不变利率，即$a = 0$，$b = 0$，$\sigma_r = 0$可得

$V_t+\frac{1}{2}\sigma_s^2 S^2 V_{ss}+rSV_s=rV$。这恰恰就是经常碰到的 Black-Scholes 偏微分方程。可见本文的偏微分方程在一定程度上是对 Black-Scholes 偏微分方程的一种推广。

2. 比较定理 4.2.1 和推论 4.2.1 发现 CIR 利率模型下，不论股票价格满足式(4-1)还是满足式(4-10)，其欧式期权定价满足的偏微分方程相同。这说明期权定价与投资者对股票的预期收益率无关。

4.3 本章小结

本章在 CIR 利率模型基础上利用Δ-对冲方法建立了欧式期权定价方程。推出此方程是对 Black-Scholes 偏微分方程的一种推广。并总结出期权定价与投资者对股票的预期收益率无关。

第5章 Hull-White模型下具有不确定执行价格的欧式期权定价

对期权定价问题人们做了很多研究，提出了各种期权定价模型，但这些模型均建立在确定执行价格基础上，并不适用于具有不确定执行价格的期权定价问题。然而随着金融市场的不断发展，具有浮动执行价格的新型期权会占据市场。文献[56]首先研究了股价服从简单过程的具有不确定执行价格的期权定价，又利率的不确定性是符合实际情况的(第四章介绍过)，所以本文将进一步研究Hull-White利率模型与指数O-U过程模型下具有不确定执行价格的期权定价。

5.1 市场模型

模型假设1：假设股票价格$S(t)$满足随机微分方程

$$\begin{cases} dS(t)=\left(\mu(t)-\alpha\ln S(t)\right)S(t)dt+\sigma_s(t)S(t)dW(t) \\ S(0)=S \end{cases} \tag{5-1}$$

其中$\{W(t),0\le t\le T\}$是定义在概率空间$\left(\Omega,F,(F_t)_{t\ge0},P\right)$上的标准 Brown 运动。$\mu(t),\sigma_s(t)$为$t$的确定性函数，分别表示股票的期望回报率和股票的波动率，并且$\alpha>0$。

引理5.1.1[57]　假设股票价格过程满足指数O-U过程模型（5-1），令

$$\theta(t)=\frac{r(t)-\mu(t)+\alpha\ln S(t)}{\sigma(t)}$$

若$E^P\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t\theta^2(s)ds\right\}\right]<\infty$，则存在唯一与概率测度$P$等价的概率测度$Q$，使得在概率测度$Q$下折现过程$S^*(t)=S(t)\exp\left\{-\int_0^t r(s)ds\right\}$是一鞅过程。若令$W^Q(t)=W(t)-\int_0^t\theta(s)ds$，则由Girsanov定理可知在概率测度$Q$下$W^Q(t)$

是一个 Brown 运动，且股票的价格过程$S(t)$满足

$$S(T)=S(t)\exp\left\{\int_0^T\left(r(s)-\frac{1}{2}\sigma_s^2(s)\right)ds+\int_0^T\sigma_s(s)dW^Q(s)\right\} \tag{5-2}$$

模型假设 2：假设$K(t)$为时刻t的执行价格，尽管期权在t时刻以执行价格$K(t)$可执行，但$K(t)$在t时刻未知。假定在风险中性概率测度Q下，$K(t)$满足随机微分方程

$$dK(t)=K(t)\left[\alpha(t)dt+\beta(t)dW^Q(t)\right],K(0)=K \tag{5-3}$$

模型假设 3：假设短期利率过程$r(t)$满足下列微分方程

$$dr(t)=(a(t)-b(t)r(t))dt+\sigma_r(t)dB^Q(t) \tag{5-4}$$

即为 Hull-White 利率模型。其中$a(t)$、$b(t)$及$\sigma_r(t)$是关于t的确定性函数，$B^Q(t)$为Q下一标准布朗运动且在Q下B与W相互独立。$a(t)$决定了利率的长期平均水平，$b(t)$是调整短期和长期利率关系的平均回复率。

指数 O-U 过程模型是完备且无套利的市场模型[58]，在这样的模型中，所有的未定权益都可以由基本证券通过自融资策略来进行精确复制，从而可以利用无套利原理得到一个唯一的价格，即所谓的期权费。

对于一般的欧式未定权益ξ（ξ与标的资产价格有关），由无套利定价理论知，其在t时刻的公平价格$V(t)$为：

$$V(t)=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}\xi\mid F_t\right\}$$

5.2 指数O-U过程模型下具有不确定执行价格的期权定价

定理 5.2.1[59] 对于欧式看涨期权$V(t)=(S(T)-K(T))^+$，在$[0,T]$内股票无红利支付，则有t时刻的无套利价格为：

$$c(S(t),K(t),t)=S(t)N(d_1)-K(t)\exp\left\{-\int_t^T((r(s)-\alpha(s)))ds\right\}N(d_2)$$

$$d_1=\frac{\ln S(t)-\ln K(t)+\int_t^T\left[r(s)-\alpha(s)+\frac{1}{2}(\sigma(s)-\beta(s))^2\right]ds}{\sqrt{\int_t^T(\sigma(s)-\beta(s))^2ds}}$$

$$d_2=\frac{\ln S(t)-\ln K(t)+\int_t^T\left[r(s)-\alpha(s)-\frac{1}{2}(\sigma(s)-\beta(s))^2\right]ds}{\sqrt{\int_t^T(\sigma(s)-\beta(s))^2ds}}$$

$$d_2=d_1-\sqrt{\int_t^T(\sigma(s)-\beta(s))^2ds}$$

其中，$N(\bullet)$是标准正态分布的累积概率。

证明 由套利定价理论知，在风险中性世界中，期权的价格是其终期支付的数学期望的贴现值，令$A=\{S(T)|S(T)>K(T)\}$，所以

$$\begin{aligned}
c(S(t),K(t),t)&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}V(T)|F_t\right\}\\
&=\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}E^Q\left\{(S(T)-K(T))^+|F_t\right\}\\
&=\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}E^Q\left\{(S(T)-K(T))I_A|F_t\right\}\\
&=\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}E^Q\left\{S(T)I_A|F_t\right\}-\\
&\quad\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}E^Q\left\{K(T)I_A|F_t\right\}\\
&=S(t)E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T\frac{1}{2}\sigma^2(s)ds+\int_t^T\sigma(s)dW^Q\right\}I_A|F_t\right\}-\\
&\quad K(t)\exp\left\{-\int_t^T(r(s)-\alpha(s))ds\right\}\bullet\\
&\quad E^Q\left\{\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T\beta^2(s)ds+\int_t^T\beta(s)dW^Q\right\}I_A|F_t\right\}
\end{aligned}$$

$$=V_1-V_2$$

令

$$\xi_1=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T\sigma^2(s)ds+\int_t^T\sigma(s)dW^Q\right\}$$

因为 $E^P\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t\theta^2(s)ds\right\}\right]<\infty$，满足指数鞅成立的 Novikov 条件，则在风险中性 Q 测度下，ξ_1 是鞅。由 Girsanov 定理可知存在 Q 的等价测度 R_1，两者的 Brown 运动转换关系为 $W^{R_1}(t)=W^Q(t)-\int_0^t\sigma(s)ds$

且

$$S(T)=S(t)\exp\left\{\int_t^T(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s))ds+\int_t^T\sigma(s)dW^{R_1}(s)\right\}$$

$$K(T)=K(t)\exp\left\{\int_t^T\left(\alpha(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s)+\sigma(s)\beta(s)\right)ds+\int_t^T\beta(s)dW^{R_1}\right\}$$

所以

$$\begin{aligned}V_1&=S(t)E^{R_1}\{\xi_1 I_A\mid F_t\}\\&=S(t)E^{R_1}\{I_A\mid F_t\}\\&=S(t)R_1\{I_A\mid F_t\}\\&=S(t)R_1\{S(T)>K(T)\}\\&=S(t)R_1\{\ln S(T)>\ln K(T)\}\end{aligned}$$

由于

$$\ln S(T)=\ln S(t)+\int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds+\int_t^T\sigma(s)dW^{R_1}$$

$$\ln K(T)=\ln K(t)+\int_t^T\left(\alpha(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s)+\sigma(s)\beta(s)\right)ds+\int_t^T\beta(s)dW^{R_1}$$

得到

$$\int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s)\right)ds-\int_t^T\left(\alpha(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s)+\sigma(s)\beta(s)\right)ds$$

$$>\ln K(t)-\ln S(t)+\int_t^T(\beta(s)-\sigma(s))dW^{R_1}$$

于是

$$-\frac{\int_t^T(\sigma(s)-\beta(s))dW^{R_1}}{\sqrt{\int_t^T(\sigma(s)-\beta(s))^2ds}}>\frac{\ln S(t)-\ln K(t)+\int_t^T\left[r(s)-\alpha(s)+\frac{1}{2}(\sigma(s)-\beta(s))^2\right]ds}{\sqrt{\int_t^T(\sigma(s)-\beta(s))^2ds}}$$

令不等式左边项为η，服从标准正态分布$N(0,1)$，令不等式右边项为d_1，因此有

$$V_1=S(t)R_1\{\ln S(T)>\ln K(T)\}=S(t)R_1\{-\eta<d_1\}=S(t)N(d_1)$$

同理，令

$$\xi_2=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_t^T\beta^2(s)ds+\int_t^T\beta(s)dW^Q(t)\right\}$$

存在R_2，使得$W^{R_2}(t)=W^Q(t)-\int_t^T\beta(s)ds$，且

$$S(T)=S(t)\exp\left\{\int_t^T(r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s)+\sigma(s)\beta(s))ds+\int_t^T\sigma(s)dW^{R_2}\right\}$$

$$K(T)=K(t)\exp\left\{\int_t^T(\alpha(s)+\frac{1}{2}\beta^2(s))ds+\int_t^T\beta(s)dW^{R_2}\right\}$$

所以

$$V_2=K(t)\exp\left\{-\int_t^T(r(s)-\alpha(s))ds\right\}E^Q\{\xi_2I_A\mid F_t\}$$

$$=K(t)\exp\left\{-\int_t^T(r(s)-\alpha(s))ds\right\}R_2\{I_A\mid F_t\}$$

$$=K(t)\exp\left\{-\int_t^T\left(r(s)-\alpha(s)\right)ds\right\}N(d_2)$$

定理 5.2.2 欧式看跌期权$V(T)=\left(K(T)-S(T)\right)^+$，在$[0,T]$内无红利支付，则有$t$时刻的无套利价格为：

$$p\left(S(t),K(t),t\right)=K(t)\exp\left\{\int_t^T\left(\alpha(s)-r(s)\right)ds\right\}N(-d_2)-S(t)N(-d_1)$$

5.3 Hull-White模型下具有不确定执行价格的欧式期权定价

引理 5.3.1[60] 设$W_1\sim N(0,1)$，$W_2\sim N(0,1)$，$Cou(W_1,W_2)=\rho$，则对任意的实数a,b,c,d,k有下式成立

$$E\left\{e^{cW_1+dW_2}I_{\{aW_1+bW_2\geq k\}}\right\}=e^{\frac{1}{2}\left(c^2+d^2+2\rho cd\right)}N\left(\frac{ac+bd+\rho\left(ad+bc\right)-k}{\sqrt{a^2+b^2+2\rho ab}}\right)$$

定理 5.3.1 在股票价格模型(5-1)，执行价格(5-3)及利率模型(5-4)下，期权到期日为T的欧式看涨期权在t $(0\leq t\leq T)$时的价格为

$$c\left(S(t),K(t),t\right)=S(t)N(d_1)-K(t)\bullet$$
$$\exp\left[-\left(G(t,T,r_t)+\frac{1}{2}\left(\sigma_Z^2-\sigma_Y^2-\sigma_X^2\right)-\int_t^T\alpha(s)ds\right)\right]N(d_2)$$

其中，$N(\bullet)$是标准正态分布的累积概率。

$$d_1=\frac{\ln\frac{S(t)}{K(t)}+G(t,T,r_t)+\int_t^T\alpha(s)ds-\frac{1}{2}\sigma_Y^2-\frac{1}{2}\sigma_Z^2+\sigma_Y\sigma_{Y-Z}}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_{Y-Z}^2}}$$

$$d_2=\frac{\ln\frac{S(t)}{K(t)}+G(t,T,r_t)+\int_t^T\alpha(s)ds-\frac{1}{2}\sigma_Y^2-\frac{1}{2}\sigma_Z^2+\sigma_Z\sigma_{Y-Z}+\frac{1}{2}\sigma_X^2}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_{Y-Z}^2}}$$

$$n(s)=\int_0^s b(u)du,\qquad m(t,T)=\int_t^T e^{n(u)-n(s)}ds$$

$$G(t,T,r_t)=r(t)m(t,T)+\int_t^T a(u)m(u,T)du$$

$$X=\int_t^T \sigma_r(u)m(u,T)dB^Q(u),\quad Y=\int_t^T \sigma_s(s)dW^Q(s),\quad Z=\int_t^T \beta(s)dW^Q(s)$$

证明 对完全的金融市场，市场存在唯一的与 P 等价的鞅测度 Q，在等价鞅测度 Q 下，期权的价格是其终期支付的数学期望的贴现值，所以

$$\begin{aligned}
c(S(t),K(t),t)&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}V(T)\mid F_t\right\}\\
&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}(S(T)-K(T))^+\mid F_t\right\}\\
&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}(S(T)-K(T))I_{\{S(T)>K(T)\}}\mid F_t\right\}\\
&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}S(T)I_{\{S(T)>K(T)\}}\mid F_t\right\}-\\
&\quad E^Q\left\{K(T)\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}I_{\{S(T)>K(T)\}}\mid F_t\right\}\\
&=V_1-V_2
\end{aligned}$$

由 Ito 公式及（5-4）得

$$d\left(e^{n(s)}r(s)\right)=e^{n(s)}\left(a(s)ds+\sigma_r(s)dB_Q(s)\right)$$

两边关于积分得 $0\le t\le s$

$$d\left(e^{n(s)}r(s)\right)=r(t)e^{n(t)-n(s)}+\int_t^s e^{n(u)-n(s)}a(u)du+\int_t^s e^{n(u)-n(s)}\sigma_r(u)dW^Q(u)$$

故

$$\begin{aligned}
\int_t^T r(s)ds&=r(t)\int_t^T e^{n(t)-n(s)}ds+\int_t^T\int_t^s e^{n(u)-n(s)}a(u)duds+\\
&\quad \int_t^T\int_t^s e^{n(u)-n(s)}\sigma_r(u)dB^Q(u)ds
\end{aligned}$$

$$=r(t)\int_t^T e^{n(t)-n(s)}ds+\int_t^T a(u)\left(\int_t^s e^{n(u)-n(s)}ds\right)du+$$

$$\int_t^T \sigma_r(u)\left(\int_t^s e^{n(u)-n(s)}ds\right)dB^Q(u)$$

$$=r(t)m(t,T)+\int_t^T a(u)m(u,T)du+\int_t^T \sigma_r(u)m(u,T)dB^Q(u)$$

$$=G(t,T,r_t)+\int_t^T \sigma_r(u)m(u,T)dB^Q(u)$$

由定义易知 X,Y,Z 为与 F_t 独立的三个正态随机变量，且 $E^Q[X]=0$，$E^Q[Y]=0,E^Q[Z]=0$，及

$$\sigma_X^2=\int_t^T \sigma_r^2(u)m^2(u,T)du\text{，}\quad \sigma_Y^2=\int_t^T \sigma_s^2(s)ds\text{，}\quad \sigma_Z^2=\int_t^T \beta^2(s)ds$$

计算 V_1

$$V_1=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}S(T)I_{\{S(T)>K(T)\}}\mid F_t\right\}$$

$$=S(t)E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds+\int_t^T \sigma(s)dW^Q(s)\right\}I_{\{S(T)>K(T)\}}\mid F_t\right\}$$

$$=S(t)\exp\left(-\int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds\right)E^Q\left\{\exp\left\{\int_t^T \sigma(s)dW^Q(s)\right\}I_{\{S(T)>K(T)\}}\mid F_t\right\}$$

$$=S(t)\exp\left(-\int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2(s)ds\right)E^Q\left\{e^Y I_{\left\{X+(Y-Z)>\ln\frac{K(t)}{S(t)}-G(t,T,r_t)+\frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2(s)ds-\int_t^T\left(\alpha(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s)\right)ds\right\}}\right\}$$

$$=S(t)N(d_1)$$

计算 V_2

$$V_2=E^Q\left\{K(T)\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}I_{\{S(T)>K(T)\}}\mid F_t\right\}$$

$$=K(t)\exp\left[-\left(G(t,T,r_t)+\int_t^T\left(\frac{1}{2}\beta^2(s)-\alpha(s)\right)ds\right)\right]\cdot$$

$$E^Q\left\{\exp\left(\int_t^T\beta(s)dW^Q(s)-\int_t^T(\sigma_r(u)m(u,T))dB^Q(u)\right)I_{\{S(T)>K(T)\}}\mid F_t\right\}$$

$$=K(t)\exp\left[-\left(G(t,T,r_t)+\int_t^T\left(\frac{1}{2}\beta^2(s)-\alpha(s)\right)ds\right)\right]\cdot$$

$$E^Q\left\{e^{Z-X}I_{\left\{(Y-Z)+X>\ln\frac{K(t)}{S(t)}-G(t,T,r_t)+\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_s^2(s)ds-\int_t^T\left(\alpha(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s)\right)ds\right\}}\right\}$$

$$=K(t)\exp\left[-\left(G(t,T,r_t)+\frac{1}{2}\left(\sigma_Z^2-\sigma_Y^2-\sigma_X^2\right)-\int_t^T\alpha(s)ds\right)\right]N(d_2)$$

定理 5.3.2 在股票价格模型(5-1)，执行价格(5-2)及利率模型(5-3)下，期权到期日为T的欧式看跌期权在t $(0\le t\le T)$时的价格为

$$p(S(t),K(t),t)=K(t)\exp\left[-\left(G(t,T,r_t)+\frac{1}{2}\left(\sigma_Z^2-\sigma_Y^2-\sigma_X^2\right)-\int_t^T\alpha(s)ds\right)\right]\cdot$$
$$N(-d_2)-S(t)N(-d_1)$$

证明 对完全的金融市场，市场存在唯一的与P等价的鞅测度Q，在等价鞅测度Q下，期权的价格是其终期支付的数学期望的贴现值，所以

$$\begin{aligned}p(S(t),K(t),t)&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^Tr(s)ds\right\}V(T)\mid F_t\right\}\\&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^Tr(s)ds\right\}(K(T)-S(T))^+\mid F_t\right\}\\&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^Tr(s)ds\right\}(K(T)-S(T))I_{\{K(T)>S(T)\}}\mid F_t\right\}\\&=E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^Tr(s)ds\right\}K(T)I_{\{K(T)>S(T)\}}\mid F_t\right\}-\\&\quad E^Q\left\{S(T)\exp\left\{-\int_t^Tr(s)ds\right\}I_{\{K(T)>S(T)\}}\mid F_t\right\}\\&=D_1-D_2\end{aligned}$$

计算D_1

$$D_1 = E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}K(T)I_{\{K(T)>S(T)\}} \mid F_t\right\}$$

$$= K(t)\exp\left[-\left(G(t,T,r_t)+\int_t^T\left(\frac{1}{2}\beta^2(s)-\alpha(s)\right)ds\right)\right]\cdot$$

$$E^Q\left\{\exp\left(\int_t^T\beta(s)dW^Q(s)-\int_t^T\sigma_r(u)m(u,T)dB^Q(u)\right)I_{\{K(T)>S(T)\}} \mid F_t\right\}$$

$$= K(t)\exp\left[-\left(G(t,T,r_t)+\int_t^T\left(\frac{1}{2}\beta^2(s)-\alpha(s)\right)ds\right)\right]\cdot$$

$$E^Q\left\{e^{Z-X}I_{\left\{(Y-Z)+X<\ln\frac{K(t)}{S(t)}-G(t,T,r_t)+\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_s^2(s)ds-\int_t^T\left(\alpha(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s)\right)ds\right\}} \mid F_t\right\}$$

$$= K(t)\exp\left[-\left(G(t,T,r_t)+\frac{1}{2}\left(\sigma_Z^2-\sigma_Y^2-\sigma_X^2\right)-\int_t^T\alpha(s)ds\right)\right]N(-d_2)$$

计算 D_2

$$D_2 = E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}S(T)I_{\{K(T)>S(T)\}} \mid F_t\right\}$$

$$= S(t)E^Q\left\{\exp\left\{-\int_t^T\frac{1}{2}\sigma_s^2(s)ds+\int_t^T\sigma_s(s)dW^Q(s)\right\}I_{\{K(T)>S(T)\}} \mid F_t\right\}$$

$$= S(t)\exp\left(-\int_t^T\frac{1}{2}\sigma_s^2(s)ds\right)E^Q\left\{\exp\left\{\int_t^T\sigma_s(s)dW^Q(s)\right\}I_{\{K(T)>S(T)\}} \mid F_t\right\}$$

$$= S(t)\exp\left(-\int_t^T\frac{1}{2}\sigma_s^2(s)ds\right)\cdot$$

$$E^Q\left\{e^Y I_{\left\{X+(Y-Z)<\ln\frac{K(t)}{S(t)}-G(t,T,r_t)+\frac{1}{2}\int_t^T\sigma_s^2(s)ds-\int_t^T\left(\alpha(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s)\right)ds\right\}}\right\}$$

$$= S(t)N(-d_1)$$

5.4 本章小结

本章主要介绍了具有不确定执行价格的期权定价，并在此基础上进一步研究 Hull-White 利率模型与指数 O-U 过程模型下具有不确定执行价格的期权定价。

结 论

金融衍生产品的定价问题是当今金融研究的热点，也是难点。本文首先陈述了期权定价的发展历程以及在这当中所做的突出贡献。介绍了在期权定价中所应用到的数学基础知识，特别介绍了在本文中重点使用的 Ito 公式和 Girsanov 定理。回顾了 Black-Scholes 偏微分方程，及 Black-Scholes 公式。然后提出新的标的资产价格行为模型假设，即选择能反映股票预期收益率波动变化的指数 O-U 过程来刻画期权的标的股票价格的变化规律。

又由于有些衍生资产的时间跨度比较长，这时利率本身的常数要求就不足以满足实际背景的要求，从而必须考虑到利率的不确定性对衍生资产价格的影响。本文主要用Δ-对冲方法分析了 CIR 利率模型下基于指数 O-U 过程模型的欧式期权定价。用鞅方法研究了 Hull-White 利率模型与指数 O-U 过程模型下具有不确定执行价格的期权定价。

在随机利率模型基础上建立的欧式期权定价公式对于中长期权定价反映得更加准确。

参考文献

[1] 郑振龙.衍生产品.武汉:武汉大学出版社，2005：1-3 页

[2] 张元萍.金融衍生工具教程.北京：首都经济贸易大学出版社，2003：127-134 页

[3] J.赫尔著.张陶伟译.期权、期货和其他衍生产品.北京:华夏出版社，2000:33-35 页

[4] Chi-fu Hunag and Robert H.Lizenberger.Foundations for financial economics.Elsevier Science Publishing Co.inc, 1988:59-82P

[5] Karatzas I.Lectures on the Mathematics of Finance.CRM Monograph Series.Vol.8.American Mathematical Society,Providence,Phode Island,USA.1997

[6] Karatzas I.and S.E.Shreve.Methods of Mathematical Finance. Sprngr.Berlin-Heidelberg.New York.1997

[7] Lamberton.D.and Lapeyre B.Introduction to Stohcastic Calculus Applied to Finance,London.Chapman & Hall. 1996:1-159P

[8] Black,F.,M.Scholes.The pricing of options and corporate liabilities.Journal of Political Economy.Vol.81,No.1973:3, 637-659P

[9] Merton R.C.Theory of Rational Option Prieing.Bell Journal of Economies and Management Seienee.Vol. 1973:4,141-183P

[10] CoxJ.C.,Ross S.A.The valuation of options for alternative stoehasstic Proeesses.Journal of Finaneial Eeonomies 1976:145-166P

[11] MertonR.C.Option Prieing when underlying stock returns are diseontinuous.Journal of Finaneial Eeonomics 1976:125-144P

[12] Ingersoll Jr. JE. A Theoretical model and empicical Investigation of the Dual PurPose Funds:An APPlieation of Contingent-Claims Analysis. Journa of Finaneial Eeonomies. 1976(3):82-123P

[13] SeholesM. taxes and the prieing of option. Journal of Finance, 1976(31):319-332P

[14] Rubinstein M. The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. Bell Jounal of Eeonomies, 1976(7):407-425P

[15] BrennanM. J. The prieing of contingent claims in diserete time models. Journal of Finance 1979(34):53-68P

[16] Leland H. Option Pricing and Replieation With Transaetions Costs. Journal of Finance, 1985(40):1283-1301P

[17] Jeanblanc P M, Pontier M. Optimal portfolio for a small investor in a market model with discontinuous prices. Applied Mathematics and Optimization. Vol. 22, 1990:287-310P

[18] Schweizer M. Option hedging for semimartingales. Stochastic Processes and their Applications. Vol. 37, 1991:339-363P

[19] Christopeit N, Musiela M. On the existence and characterization of arbitrage-free measures in contingent claim valuation. Stochastic Analysis and Applications. Vol. 12, No. 1, 1994:41-63P

[20] Eberlein E, Jacod J. On the range of options prices. Finance & Stochastics. Vol. 2, 1997:131-140P

[21] Bladt M, Rydberg H T. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions. Insurance: Mathematics and Economics. Vol. 22, No. 1, 1998:65-73P

[22] 闫海峰, 刘三阳. 广义 Black-Scholes 模型期权定价新方法--保险精算方法. 应用数学与力学. 2003, 24(7):730-738 页

[23] 闫海峰,刘三阳.股票价格遵循 Ornstein-Uhlenback 过程的期权定价.系统工程学报.2003,18(6):547-551 页

[24] 闫海峰,刘三阳.带有Poisson跳的股票价格模型的期权定价.工程数学学报.2003,20(2):35-39 页

[25] 林建忠,叶中行.一类跳跃扩散型股价过程组欧式未定权益定价.应用概率统计.2002,18:167-172 页

[26] Karatzas I. and Kou S.G. On the pricing of contingent claims with Constrained protfolios. Ann. Appl. Probability, 1996(6):321-369P

[27] Karoui N. and M.C. Quenez. Dynamic programming and Pricing of contigent claims in an incomplete market. SIMA Journal of Control and Optim, 1995(33):29-66P

[28] Ahn C.M. Option pricing when jump risk is systematic, Math. Finance, 1992(2):299-308P

[29] Amin K. Jump-diffusion option valuation in discrete time. Jounal of Finanee, 1993(48):1833-1863P

[30] Bates D. The Crash of 87:Was it expected The evidence from options market. Journal of Finance, 1996(46):1009-1044P

[31] Robert C. Merton Theor of Rational Option Pricing, [J]. The Bell Joumal of Economics and Management Seience, 1973(4)1:141-183 页

[32] Fima C Klebaner. Introduction to stochastic calculus with applications. London: Imperial college press, 2004:253-281P

[33] 胡必锦，朱自清.鞅分析及其应用.武汉:华中科技大学出版社，2001: 13-30 页

[34] 金治明.随机分析基础及其应用.北京:国防工业出版社,2003: 112-141 页

[35] 贝多广.证券经济理论.上海:上海人民出版社,1995

[36] 刘嘉.应用随机过程.北京:科学出版社,2000:33-35 页

[37] 王军,王娟.随机过程及其在金融领域中的应用.北京:清华大学出版社,2007:195-203 页

[38] 史及民.离散鞅及其应用.北京:科学出版社,1999:65-130 页

[39] 林元烈.应用随机过程.北京:清华大学出版社，2002:25-39 页

[40] Martin Baxter,Andrew Rennie 著.叶中行等译.金融数学--衍生产品定价引论.北京:人民邮电出版社,2006:36-56 页

[41] 张卓奎，陈慧婵.随机过程.西安:西安电子科技出版社，2003:38-41 页

[42] 王玉孝.概率论与随机过程.北京:北京邮电大学出版社,2003:112 页

[43] 张波,张景肖.应用随机过程.北京:清华大学出版社，2004:113- 114 页

[44] 龚光鲁.随机微分方程引论.北京:北京大学出版社,1997:56 页

[45] 程希骏.金融资产定价理论.合肥:中国科学技术大学出版社 2006: 107-113 页,173-181 页

[46] Joseph Stampfli 著.蔡明超译.金融数学.北京:机械工业出版社,2008: 2-10 页,99-102 页

[47] Jaksa Cvitanic,Fernando Zapatero 著.吕彦儒,刘富冰译.金融市场中的经济学与数学导论.上海:上海财经大学出版社,2007:192-194 页

[48] Cox,J.C.,Ross,S.A. and Rubinstein,M.1979,Potion pricing:a simplified approach.Journal of Financial Economics1997(3): 229-263P

[49] BlackF,Scholes M The pricing of options and corporate liablities. Journal of Political Economy,1973,81:33-55

[50] 方兴. 金融工程学.北京：首都经济贸易大学出版社,2004:283-350 页

[51] 林建华,王福昌.股价波动的指数 O-U 过程模型.经济数学 2000,(17) 4:29-32 页

[52] 刘朝才,李应求.指数 O-U 过程及其在投资项目价值研究中的应用.长沙电力学院学报(自然科学版),2006(21)4:65-68 页

[53] 闫海峰,刘三阳.股票价格遵循 Ornstein-Uhlenback 过程的期权定价.系统工程学报.2003,18(6):547-551 页
[54] 傅曼丽，董荣杰，屠梅曾．动态利率模型估计方法的一个实证检验.华中科技大学学报(自然科学版),2005,33(4):97-100
[55] Baz J,Chacko G.Financial deirbatives:pircig,applications,and mathematics.北京:北京大学出版社,2005:222-223 页
[56] 薛红.具有不确定执行价格的期权定价.西安工程科技学院学报.2004,18(1):87-90 页
[57] 孙建全,韩伯棠,孙树垒.基于指数 O-U 过程的权证定价.中国管理科学.2006,14:255-258 页
[58] 闫海峰,刘三阳,李文强.股票价格遵循指数O-U过程的最大值期权定价.工程数学学报.2004,21(3):397-402 页
[59] 郑晓阳，刘兆鹏.基于 O-U 过程的具有不确定执行价格的期权定价.哈尔滨工程大学学报.2008,29(11):1232-1235 页
[60] 陈松男.金融工程学.上海:复旦大学出版社，2002，130-133 页

攻读硕士学位期间发表的论文和取得的科研成果

随机利率下具有不确定执行价格的期权定价. 哈尔滨工程大学学报(已投稿)

致 谢

本论文是在导师孙广毅，郑晓阳教授的指导下完成的。导师渊博的学识、敏锐的洞察力、富于创造性的思想、严谨治学的作风和忘我的工作精神让我受益匪浅。我要感谢我的导师在两年的硕士学习过程中，您传授给我知识，教我如何进行科学研究和写作。特别对我的毕业论文创作倾注了大量的心血。

感谢所有的任课老师们，你们所授的课程拓宽了我的知识面，开阔了我的视野，在我的论文创作中起到了很大的作用。

感谢我的朋友，你们在我的学习和生活中都给了我极大的帮助。在我受挫折的时候帮助我，在我有成绩的时候为我开心。有了你们的帮助和陪伴，使我艰苦的求学道路不再孤单。谢谢你们！

感谢我的家人，你们是我风雨求学道路上不变的支持和依靠。感谢父母不但养育了我，而且教育了我。谢谢你们一直以来对我的支持和鼓励，才使我有今天的成绩。

在漫长的求学道路上，很多老师、亲人、同学和朋友一直关心和支持着我，才使我顺利完成学业，借此机会，向所有给过我帮助和快乐的人致以最诚挚的谢意，并对于我在学习期间的一些不完美表现向我的家人、朋友、老师和同学表示深深的歉意。