基于T-S模糊模型的非线性时滞随机系统控制

摘 要

Takagi-Sugeno(T-S)模糊系统作为非线性系统建模的一类有效的方法，具有比较丰富的局部结构，便于用 Lyapunov 函数分析全局稳定性和设计多变量的系统控制器。当连续时间 T-S 模糊系统模型的参数受到随机因素的干扰时，就成为一个随机 T-S 模糊系统，本质上随机 T-S 模糊系统是一个非线性随机微分系统。如果一个系统的变化还受到之前系统状态的影响，则我们就需要在随机 T-S 模糊系统中考虑时滞的部分，从而也就成为了非线性时滞随机模糊系统，这是本文研究的对象。

首先，我们对非线性时滞随机模糊系统的镇定问题进行了研究。我们定义了在 Itô 意义下具有时滞的随机模糊系统的解析式，并证明了该时滞随机模糊系统解的存在唯一性。然后，根据非线性时滞随机系统的 Lyapunov 稳定性理论导出闭环系统均方指数稳定的条件。在此基础上，运用并行分布补偿(PDC)原理，为每个子系统设计一个局部的子补偿器，总控制器由子补偿器模糊“混合”而成，从而得到非线性时滞随机模糊系统镇定的充分条件。利用 Schur 公式等理论工具最终将其转化为线性矩阵不等式(LMI)的形式，这种形式很容易用 Matlab LMI 工具箱求解。最后我们通过一个数值仿真例子说明我们的方法可以解决现有方法难以解决的非线性时滞随机微分系统的镇定

问题。

其次，我们对具有不确定参数的时滞随机模糊系统的鲁棒镇定问题进行了研究。在这部分我们给出了时滞随机模糊系统对于所有在允许范围内的参数不确定性都具有鲁棒镇定的充分条件。进一步利用几个矩阵不等式将其转化为LMI的形式。基于系统鲁棒镇定的LMI条件，我们可以为该系统设计鲁棒状态反馈控制器。数值仿真例子说明了鲁棒状态反馈控制器的作用。

然后，我们对具有外界扰动的不确定时滞随机模糊系统的鲁棒 H_∞控制进行研究。由于该系统相比较之前的具有参数不确定性的时滞随机模糊系统而言已经不是闭环系统了，在保证系统镇定的同时要考虑干扰衰减问题。我们给出了非线性时滞随机模糊系统的鲁棒 H_∞状态反馈控制器的 LMI 设计方法。并通过数值仿真的例子说明了它的有效性。

最后，我们对本文所得出的结论进行了归纳总结，并提出了一些有待进一步研究的问题。本文稳定性条件基本上不依赖于时滞的长短，并且状态反馈控制器的设计是基于各子系统都适用的一个公共正定矩阵的存在性，所以结论比较保守。进一步需要考虑依赖时滞长短的条件和其它放宽条件来设计较不保守的控制器。

关键词：时滞，T-S 模糊系统，非线性随机系统，均方指数稳定，鲁棒稳定，干扰衰减

FUZZY MODEL-BASED CONTROL OF NONLINEAR STOCHASTIC SYSTEMS WITH TIME DELAY

ABSTRACT

As an efficient approach of modeling nonlinear systems, Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model which has polytopic local structure, is often utilized in the stability analysis and controller design. When the parameters of a T-S fuzzy system are perturbed with random noises, the system turns to be a stochastic fuzzy system. Essentially, it is a nonlinear stochastic differential system. If the state evolution of the stochastic fuzzy system depends on its previous states, then we need to introduce a time delay term in the system, and hence formulate the system as a stochastic fuzzy system with time delay, which are a class of nonlinear stochastic differential systems and the topic of this dissertation.

First of all, we work on the mean-square stabilization issue of stochastic fuzzy system with time delay. We define the analytical formulation of the system in Itô sense, and prove the existence and uniqueness of solution to the formulation. Then, the exponential mean square stability conditions of the closed-loop system with time delay are derived from Lyapunov approach of nonlinear stochastic differential systems with time delay. The fuzzy controller of the system is proposed by means of the parallel distributed compensation (PDC) technique, by which, the local state feedback compensators are configured for every local linear systems, and the overall fuzzy controller is composed of these

local compensators. Therefore, we obtain the sufficient conditions for stabilizing the stochastic fuzzy systems with time delay. Furthermore, by Schur's lemma we transform these sufficient conditions into the format of linear matrix inequality(LMI) which could be solved readily by Matlab LMI toolbox. An illustration example shows that the proposed method in the dissertation could stabilize nonlinear stochastic differential systems with time delay which are difficult to be stabilized by the methods in the literature.

Secondly, we do some research on the robust stabilization issue for uncertain stochastic fuzzy system with time delay. In this part, we obtain some sufficient conditions of robust stability of the stochastic fuzzy system with time delay for a set of permissible uncertainties. The sufficient conditions are reduced to LMIs by using several matrix inequalities. The robust state feedback controller can be designed based on the LMIs. A simulation example is given to show the application of the robust state feedback controller.

Thirdly, we consider robust H_∞ control problem of uncertain stochastic fuzzy systems with time-delay. Compared with the systems in the former parts, the system includes exogenous disturbances and is no longer a closed-loop one. Therefore, the main concern is how to guarantee disturbance attenuation while stabilizing the system. We propose an LMI design procedure for the robust H_∞ control problem. The numerical example demonstrates the effectiveness of the proposed method.

Finally, we summarize the conclusions of the study, and put forward some problems which worth to be investigated further. The results in the dissertation are somewhat conservative, since the stability conditions don't depend on the length of the time delay, and the design of state

feedback controller depends on the existence of a common positive matrix for all local systems. Less conservative methods, such as delay-dependent stability conditions, are expected in the future.

Aina Yang (Applid mathematics)
Supervised by Liangjian Hu

KEY WORDS: time delay, T-S fuzzy system, non-linear stochastic system, exponential mean square stability, robust stability, disturbance attenuation

东华大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：我恪守学术道德，崇尚严谨学风。所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已明确注明和引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品及成果的内容。论文为本人亲自撰写，我对所写的内容负责，并完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：杨丽娜

日期：2006 年 12 月 16 日

东华大学学位论文版权使用授权书

学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅或借阅。本人授权东华大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 □，在 ____ 年解密后适用本版权书。

本学位论文属于

不保密 ☑。

学位论文作者签名：杨爱娜　　　　指导教师签名：胡良剑

日期：2006年12月16日　　　　日期：2006年12月18日

第一章 引言

1.1 非线性时滞随机模糊系统的控制

近几年来，非线性随机系统的控制理论研究相当的活跃，同时，模糊控制受到了越来越多的关注，将模糊控制应用到非线性领域来解决一些现实的问题成为当今控制理论和应用领域的热点问题之一。虽然运用模糊控制在实践中已经有了一些成功的例子，可是模糊控制的理论的研究相对滞后，如系统稳定性、鲁棒性问题缺乏一般性结论，模糊控制理论研究的深层次挖掘的潜力是很大的[1-6]。

传统的非线性控制的方法主要有以下几种。一种很典型的方法是在系统的一个名义上的可操作点上设计一个线性状态反馈控制器，从而达到对非线性系统控制的效果，然而由于每个局部模型只有在一定的可操作范围内才有效，所以结果只能保证在局部范围内稳定。另一种方法称为模糊逻辑控制[7]，这种方法特别适合于那些信息不完全或是对于给定条件不能做出精确控制的模型，因而它在消费品市场和工业过程等方面具有良好的应用[8-10]。其它的方法[11]，如反馈线性化方法采用微分同胚和非线性反馈将原系统转化为线性系统。反馈线性化控制是一种常用的非线性控制方法，但它要求系统具有某种预测性质（如系统具有最小相位性、充分光滑、参数精确已知等），并且往往需要求解复杂的非线性偏微分方程。自适应控制是另一类常用的方法，但其参数更新算法的收敛性和实时性难以得到保证。

现在，我们可以运用一种更为简单而且直接的方法来解决对非线性系统的控制设计问题。首先一个非线性的模型可以被 Takagi-Sugeno 模糊模型(简称 T-S

模型)[12]表示出来。在这类模型中，在不同的状态空间区域中，局部动力系统可以由线性模型表示出来，而全局的模型就是通过对各个局部线性子模型的模糊的组合表示出来。这种控制是以并行分布补偿原理（简称 PDC）[13-15]为基础建立起来的。从而控制器的设计也就是在每一个局部线性模型基础上设计一个反馈控制器，全局控制器的建立就是各个局部控制器的一种模糊组合。1996 年， Wang H O 和 Tanaka K 提出了用这种方法来解决非线性模糊系统的稳定性及其控制器设计问题的线性矩阵不等式(LMI)方法 [13]。值得注意的是，这种控制器是一种全局非线性控制器。

在此，让我们先回顾 T-S 模型：

第 i 个对象规则:

IF $z_1(t)$ is M_{i1} , $z_2(t)$ is M_{i2} ,⋯, $z_p(t)$ is M_{ip} , THEN

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \tag{1.1.1}$$

$$y(t) = C_i x(t),\ i = 1, 2, \cdots, r$$

其中 M_{ij} 是模糊集， $x(t) \in R^n$ 是状态向量， $u(t) \in R^m$ 是输入向量， $y(t) \in R^q$ 是输出向量。A_i 为 n 阶方阵， B_i 为 $n \times m$ 阶矩阵， C_i 为 $q \times n$ 阶矩阵， r 是 IF-THEN 规则的个数，$z(t) = [z_1(t)\ \ z_2(t)\ \ \ldots\ \ z_p(t)]$ 是前提变量，假设前提变量不依赖于控制变量 $u(t)$。(1.1.1)可以解析地表示成

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{1.1.2}$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))} = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) C_i x(t) \tag{1.1.3}$$

其中 $h_i(z(t)) = \dfrac{\mu_i(z(t))}{\sum_{j=1}^{r} \mu_j(z(t))}$， $\mu_i(z(t)) = \prod_{k=1}^{p} M_{ik}(z_k(t))$， $M_{ik}(z_k(t))$ 是 $z_k(t)$ 在 M_{ik} 上的隶属度，显然 $\mu_i(z(t)) \geq 0$ ， $i = 1$, 2 ,⋯, r，且假设 $\sum_{j=1}^{r} \mu_j(z(t)) > 0$。从

而对于所有的t，$h_i(z(t))\geq 0$，$i=1$，2，$\cdots$，r，并且$\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))=1$。

然后，构造一个具有相同前提条件的状态反馈控制器：
第 i 个控制规则:
IF $z_1(t)$ is M_{i1}，$z_2(t)$ is M_{i2}，$\cdots$，$z_p(t)$ is M_{ip}，THEN

$$u(t)=-K_ix(t)\text{ , }i=1,2,\cdots,r$$

$u(t)$的解析式如下：

$$u(t)=\frac{\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))(-K_ix(t))}{\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))}=-\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))K_ix(t) \tag{1.1.4}$$

把(1.1.4)代入(1.1.2)式，得到具有状态反馈控制器的系统解析式：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\sum_{i,j=1}^{r}h_i(z)h_j(z)(A_i-B_iK_j)x(t)\\&=\sum_{i=1}^{r}h_i^2(z)(A_i-B_iK_i)x(t)\\&\quad+\sum_{i,j=1,i<j}^{r}h_i(z)h_j(z)(A_i+A_j-B_iK_j-B_jK_i)x(t)\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

由于在一些化学过程、生物工程、机械和金融等领域中，具有时滞的动力系统是十分常见的，所以对具有时滞的非线性系统的研究是具有重要意义的。其中，时滞既可以是定长的[16]，也可以是时变的[17]，还可以是随机的[18]。2000 年，Cao Y Y 和 Frank P M 发表的题为“通过模糊控制的方法来对非线性时滞系统进行的分析和综合”一文[19]中，首次提出了具有时滞的 T-S 模糊模型，并且利用 Lyapunov 稳定性定理推导出了具有时滞的 T-S 模糊模型的稳定性条件。另外，该文献基于并行分布补偿原则（简称 PDC）[13-15]建立了具有时滞的模糊模型的状态反馈控制器的 LMI 方法。

在所有条件不变的情况下，利用(1.1.1)式的定义，同样可以定义具有时滞的系统:
第 i 个对象规则:
IF $z_1(t)$ is M_{i1}，$z_2(t)$ is M_{i2}，$\cdots$，$z_p(t)$ is M_{ip}，THEN

$$\dot{x}(t)=A_i x(t)+A_{di}x(t-\tau(t))+B_i u(t) \tag{1.1.6}$$

$$y(t)=C_i x(t)+D_i x(t-\tau(t)),\ i=1,2,\cdots,r$$

$$x(t)=\varphi(t)\ ,\ t\in[-\mu,0]\ ,\ i=1,2,\cdots,r$$

其中，相对于(1.1.1)式中的其它的条件保持不变，另有 A_{di} 为 n 阶方阵，D_i 为 $q\times n$ 阶矩阵，$\tau(t)$ 是时变的，$0<\tau(t)\le\mu<\infty$，并且还满足 $\dot{\tau}(t)\le h<1$，$\varphi(t)$ 是初值连续函数，r 是 IF-THEN 规则的个数。

假设前提变量不依赖于输入变量 $u(t)$，(1.1.6) 的解析式写为如下形式：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\frac{\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))(A_i x(t)+A_{di}x(t-\tau(t))+B_i u(t))}{\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))}\\&=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))(A_i x(t)+A_{di}x(t-\tau(t))+B_i u(t))\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

$$\begin{aligned}y(t)&=\frac{\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))(C_i x(t)+D_i x(t-\tau(t)))}{\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))}\\&=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))(C_i x(t)+D_i x(t-\tau(t))\ )\end{aligned}$$

然后，构造结构如(1.1.4)的状态反馈控制器，代入(1.1.7)式，得到具有状态反馈控制器的闭环系统解析式：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=\sum_{i,j=1}^{r}h_i(z(t))h_j(z(t))[(A_i-B_iK_j)x(t)+A_{di}x(t-\tau)]\\&=\sum_{i=1}^{r}h_i^2(z(t))[H_{ii}x(t)+A_{di}x(t-\tau)]\\&\quad+\sum_{i,j=1,i<j}^{r}h_i(z(t))h_j(z(t))[(H_{ij}+H_{ji})x(t)+(A_{di}+A_{dj})x(t-\tau)]\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

其中 $H_{ij}=A_i-B_iF_j$，$i,j=1,\cdots,r$

由于随机系统在真实的世界中有多方的应用，包括在核领域、生物领域、社会经济领域、化学过程领域中等，因而随机系统的稳定性问题在过去的几十年中

一直受到广泛的关注，特别是那些参数带有随机的系统，包括双线性随机系统、状态依赖噪声系统等。参数带有随机的系统已被广泛应用于模拟非线性的过程，例如信号和图像的分析，或是通信系统的分析等。由此可见研究具有随机因素的系统是十分必要的，因而我们在上述系统中引入随机项。2004 年，胡良剑、邵世煌和吴让泉发表的题为"T-S 模糊随机系统的均方镇定"[20]一文中利用 Lyapunov 随机稳定性定理推导出了具有时滞的随机 T-S 模糊模型的均方镇定条件，同时，也给出了设计反馈控制器的线性矩阵不等式(LMI)方法。

在所有条件不变的情况下，利用(1.1.1)式的定义，同样可以定义具有随机扰动的模糊系统如下：

第 i 个对象规则:

IF $z_1(t)$ is M_{i1} , $z_2(t)$ is M_{i2} ,⋯, $z_p(t)$ is M_{ip} , THEN

$$dx(t) = [A_i x(t) + B_i u(t)]dt + E_i x(t)dw(t) \tag{1.1.9}$$

$$y(t) = C_i x(t)$$

其中，E_i 为 n 阶方阵，前提变量不依赖于 $w(t)$ ，$w(t)$ 是一维布朗运动。

同样，将局部的函数用模糊的方式组合，得

$$dx(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{[A_i x(t) + B_i u(t)]dt + E_i x(t)dw(t)\} \tag{1.1.10}$$

然后，构造结构如(1.1.4)的状态反馈控制器，代入(1.1.10)式，得到具有状态反馈控制器的闭环系统解析式：

$$dx(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{[(A_i x(t) - \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))B_i K_j)]dt + E_i x(t)dw(t)\} \tag{1.1.11}$$

众所周知，时滞和系统的不确定性都是造成系统不稳定的因素。从而让我们想到如果具有时滞的系统同时又受到一个随机的干扰的话，我们该如何判定它的稳定性以及如何设计它的控制器。虽然已经有一些文献给出了基于 T-S 模糊模型的随机系统的一些镇定的充分条件[20]，然而还未涉及到时滞的领域。在随机的假设前提下，我们可以了解在线性[21]和半线性[22]的系统中的鲁棒随机稳定性问题[20][23-28]。一些具有不确定性的系统控制器的设计可参看[23][24]。值得一提的是，胡

良剑、邵世煌、吴让泉发表的“T-S 模糊随机系统的均方镇定”[20]中提出了基于 T-S 模糊模型的非线性随机系统均方镇定地 LMI 设计方法，为这一方面研究的可能性提供了坚实的基础。Wang Z D, Ho D W C, Liu X H 的“具有时滞的不确定随机模糊系统的鲁棒稳定性问题”[16]以及 Huang H, Ho D W C, Lam J 的“具有时变的时滞随机神经网络的稳定性分析”[29]都为建立模型以及给出稳定性条件提供了启发性的帮助。

本文主要以 2000 年 Cao Y Y 和 Frank P M 的 “通过模糊控制的方法来对非线性时滞系统进行的分析和综合”[19]和 2004 年胡良剑、邵世煌和吴让泉的“T-S 模糊随机系统的均方镇定”[20]两篇文章作为基础，研究具有时滞的随机模糊系统的控制设计问题。在具有时滞的模糊系统的基础上考虑随机的因素从而形成本文所主要研究的具有时滞的非线性随机模糊系统模型。然后，推导出具有时滞的随机模糊系统的均方镇定、鲁棒随机稳定的条件，给出了状态反馈控制器的设计方法。

在所有条件不变的情况下，利用 (1.1.9) 式定义本文所要研究的系统，即具有时滞的非线性随机模糊系统如下：

第 i 个对象规则:

IF $z_1(t)$ is M_{i1} , $z_2(t)$ is M_{i2} ,$\cdots$, $z_p(t)$ is M_{ip} , THEN

$$dx(t)=[A_ix(t)+A_{di}x(t-\tau(t))+B_iu(t)]dt+[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]dw(t) \tag{1.1.12}$$

$$y(t)=C_ix(t)+D_ix(t-\tau(t))\ ,\ i=1,\cdots,r$$

$$x(t)=\varphi(t)\ ,\ t\in[-\mu,0]$$

其中 E_{di} 为 n 阶方阵。

同样，将局部的函数用模糊的方式组合，得

$$\begin{aligned}dx(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[&A_ix(t)+A_{di}x(t-\tau(t))+B_iu(t)]dt\\&+[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]dw(t)\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[C_ix(t)+D_ix(t-\tau(t))]$$

运用并行分布补偿（PDC）[13-15]原理，为每个子系统设计一个局部的子补偿器，同 (1.1.4)，补偿器使用与全局模糊系统相同的前提条件，总控制器由子补偿

器模糊“混合”而成。

这样，状态反馈控制器的闭环系统综合为

$$
\begin{aligned}
dx(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{[(A_i - \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))B_iK_j)x(t) + A_{di}x(t-\tau(t))]dt \\
+[E_ix(t) + E_{di}x(t-\tau(t))]dw(t)\}
\end{aligned}
\quad (1.1.14)
$$

1.2 本文所研究的问题

本文主要是基于 T-S 模糊模型，研究具有时滞同时也具有随机干扰的非线性模糊系统的稳定性问题。首先，给出该非线性时滞随机模糊系统的均方镇定条件，并得到其控制器的设计方法。然后，再在该基础上研究鲁棒均方稳定的条件。最后，讨论具有时滞的模糊随机系统的鲁棒 H_∞ 控制问题。对于每个问题，我们根据非线性时滞随机系统的 Lyapunov 稳定性理论导出闭环系统均方指数稳定的条件，然后将它们转化为线性矩阵不等式（LMI），由此得到一种具有时滞的非线性随机系统控制的有效办法，最后通过数值例子说明它们的应用。

在第二章中，我们对非线性时滞随机模糊系统的镇定问题进行了研究。定义了在Itô 意义下的连续型的具有时滞的随机模糊系统的解析式的基本形式，并且证明了模型解的存在唯一性。同时，根据非线性时滞随机系统的 Lyapunov 稳定性理论导出闭环系统均方指数稳定的条件，同时也说明了 Itô 积分在非线性时滞随机模糊系统模型定义中的重要性。然后，在此基础上，运用并行分布补偿（PDC）[13-15]原理，为每个子系统设计一个局部的子补偿器，补偿器使用与全局模糊系统相同的前提条件，总控制器由子补偿器模糊“混合”而成，从而得到非线性时滞随机模糊系统稳定性的控制条件。利用 Schur 引理等理论工具最终将其转化为 LMI 的形式，最后利用 Matlab 的 LMI 工具箱将其应用到数值仿真的例子上去。

第三章，我们对具有不确定参数的非线性时滞随机模糊系统的鲁棒性问题进行了研究。时滞和参数的不确定性都是造成系统不稳定的因素，因而给出稳定性条件是我们继续研究的前提条件。在本章中我们给出了参数同时带有随机不确定和有界不确定的时滞模糊系统的鲁棒均方指数镇定条件。基于已完成了系统鲁棒镇定条件的给出，进一步我们在该系统的基础上设计状态反馈控制器。利用几个矩阵不等式最终将其转化为 LMI 的形式，最后利用 Matlab 等有效的工具将其应

用到数值仿真的例子上去。

第四章，我们进一步对具有外界干扰的不确定时滞的随机模糊系统的鲁棒H_∞控制问题进行研究。由于该系统相比较第三章中的具有不确定性参数的时滞模糊系统而言已经不是闭环系统了，在保证稳定性的同时要考虑干扰衰减问题。在前一章中我们已给出了具有时滞的非线性随机模糊系统的鲁棒均方指数镇定的条件。在本章中，我们给出了非线性时滞随机模糊系统的鲁棒H_∞状态反馈控制器的LMI设计方法。并通过数值仿真的例子说明了它的有效性。

第五章，我们对本文所得出的结论进行了归纳总结，并提出了一些有待进一步研究的问题。本文稳定性条件基本上不依赖于时滞的长短，并且状态反馈控制器的设计是基于各子系统都适用的一个公共正定矩阵的存在性，所以结论比较保守。进一步需要考虑依赖时滞长短的条件和其它放宽条件来设计较不保守的控制器。

第二章 时滞随机模糊系统的均方镇定

2.1. 问题的定义

一个连续时间时滞随机模糊系统可以表示为下面的形式:

IF $z_1(t)$ is M_{i1} , $z_2(t)$ is M_{i2} ,$\cdots$, $z_p(t)$ is M_{ip} , THEN

$$dx(t)=[A_ix(t)+A_{di}x(t-\tau(t))+B_iu(t)]dt+[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]dw(t) \tag{2.1.1}$$

$x(t)=\varphi(t)$, $t\in[-\mu,0]$

$y(t)=C_ix(t)+D_ix(t-\tau(t))$, $i=1,\cdots,r$

其中 A_i,A_{di},E_i 和 E_{di} 为 n 阶方阵, B_i 为 $n\times m$ 阶矩阵, C_i 和 D_i 为 $q\times n$ 阶矩阵。$x(t)$ 为 n 维状态变量, $\tau(t)$ 为时变的时滞函数, 且有 $0<\tau(t)\le\mu<\infty$, $\dot{\tau}(t)\le h<1$ 。$\varphi(t)$ 是 $x(t)$ 的初始值函数, $\varphi\in C([-\mu,0];R^n)$ 且 $\|\varphi\|=\sup_{-\mu\le\theta<0}|\varphi(\theta)|$ 。$u(t)$ 为 m 维输入变量, $y(t)$ 为 q 维输出变量, $w(t)$ 为一维布朗运动, $z(t)$为p 维前提变量(通常是 $x(t)$ 的函数)。

(2.1.1) 的解析表达式为

$$\begin{aligned}dx(t)=&\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[A_ix(t)+A_{di}x(t-\tau(t))+B_iu(t)]dt\\&+[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]dw(t)\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

$x(t)=\varphi(t)$, $t\in[-\mu,0]$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[C_i x(t)+D_i x(t-\tau(t))]$$

其中 $h_i(z(t))=\frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{j=1}^{r}\mu_j(z(t))}$， $\mu_i(z(t))=\prod_{k=1}^{p}M_{ik}(z_k(t))$， $M_{ik}(z_k(t))$ 是 $z_k(t)$ 在模糊集 M_{ik} 中的隶属度函数。假设模糊规则库是完备的，那么对于任意的 t， $\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))>0$。从而对于所有的 t 和 i， $h_i(z(t))\ge 0$ 且 $\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))=1$。

运用并行分布补偿（PDC）[13]原理，为每个子系统设计一个局部的子补偿器，补偿器使用与全局模糊系统相同的前提条件，总控制器由子补偿器模糊“混合”而成。控制器的模糊规则为：

IF $z_1(t)$ is $M_{j1}, z_2(t)$ is $M_{j2},\cdots, z_p(t)$ is M_{jp}， THEN $u(t)=-K_j x(t), j=1,\cdots,r$

这里 K_j 为 $m\times n$ 阶矩阵。本质上 PDC 控制器是一个非线性的控制器，其解析表达式为

$$u(t)=-\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))K_j x(t) \tag{2.1.3}$$

这样，状态反馈控制的闭环系统为

$$\begin{aligned}dx(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\{&[(A_i-\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))B_iK_j)x(t)+A_{di}x(t-\tau(t))]dt\\&+[E_i x(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]dw(t)\}\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

由于 $z(t)$ 往往依赖于 $x(t)$，系统 (2.1.4) 本质上是一个非线性时滞随机系统。

接下来的问题就是如何设计 $K_j (j=1,\cdots,r)$ 使该闭环系统稳定。

2.2. 模型解的存在唯一性

用 R^n 表示 n 维实向量全体， $R^{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 实矩阵全体， $R_+=[0,\infty)$； A^T 表示矩阵 A 的转置；对于对称矩阵 A， $\lambda_{\max}(A)$ 表示 A 的最大特征值， $\lambda_{\min}(A)$ 表示 A 的最小特征值；对于实对称矩阵 P， Q， $P>0$ 表示 P 正定， $P>Q$ 表示 $P-Q>0$。 $\ge$， $<$， $\le$ 可类似定义； $|\cdot|$ 表示 R^n 上的 Euclid 范数， $\|\cdot\|$ 表示 $R^{n\times n}$ 上的算子范数

$$\|A\| = \sup|x| = 1\{|Ax|\} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

设(Ω, F, P)是具有自然滤波的$\{F_t\}_{t\geq 0}$的完备概率空间，$w(t)$为定义在此概率空间的一维布朗运动。考虑具有时滞的随机微分方程：

$$dx(t) = F(x(t), x(t-\tau(t)), t)dt + G(x(t), x(t-\tau(t)), t)dw(t) \qquad (2.2.1a)$$

$$x(t) = \varphi(t)\ , t \in [-\mu, 0]$$

其中$t \in [0, \infty]$,$F, G: R^n \times R^n \times [0, \infty] \to R^n$。

对于所有的$(\phi, t) \in C([-\mu, 0]; R^n) \times [0, \infty)$，定义：

$$f(\phi, t) = F(\phi(0), \phi(-\tau(t)), t)$$

$$g(\phi, t) = G(\phi(0), \phi(-\tau(t)), t)$$

因而$(2.2.1a)$也可以写成：

$$dx(t) = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dw(t),\ 0 \leq t < \infty \qquad (2.2.1b)$$

其中$x_t = \{x(t+\theta): -\mu \leq \theta \leq 0\}$是在$C([-\mu, 0]; R^n)$上均方可积的随机过程。

所以，系统

$$dx(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{[A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau(t))]dt + [E_i x(t) + E_{di} x(t-\tau(t))]dw(t)\} \quad (2.2.2)$$

是系统$(2.2.1b)$的一个特例。

引理 2.2.1[30]设$F(x, y, t)$和$G(x, y, t)$都是关于x局部 Lipschitz 连续的，即对于每一个整数$n \geq 1$，一定存在一个正的常数K_n，对于所有的$t \in [t_0, T]$，$y \in R^d, x$、$\overline{x} \in R^d$ 且$|x| \vee |\overline{x}| \leq n$，满足

$$|F(x, y, t) - F(\overline{x}, y, t)|^2 \vee |G(x, y, t) - G(\overline{x}, y, t)|^2 \leq K_n |x - \overline{x}|^2$$

并且满足线性增长条件$|F(x, y, t)|^2 \vee |G(x, y, t)|^2 \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2)$，则时滞随机的系统$(2.2.1a)$对于任意的初值，存在唯一解。

定理 2.2.1（解的存在唯一性）设模糊集M_{ik}，$i = 1, \cdots, r, k = 1, \cdots, p$的隶属度

函数是局部 Lipschtz 连续的，z 是 x 的局部 Lipschtz 连续函数，则对于任意的初始值，存在唯一的轨道连续过程 $x(t)$，满足时滞随机模糊系统(2.2.2)。

证明：令 $F(x(t),y(t),t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[A_ix(t)+A_{di}x(t-\tau(t))]$

$$G(x(t),y(t),t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]$$

其中，$y(t)$ 表示 $x(t-\tau(t))$

由于 z 是 x 的连续函数，M_{ik} 是 z 的连续函数，而 h_i 是 M_{ik} 的连续函数，从而 h_i 是 x 的连续函数。那么 $F(x(t),x(t-\tau(t)),t),G(x(t),x(t-\tau(t)),t)$ 是可测函数，对于任意 x、$y\in R^n,t\ge 0$

$$\begin{aligned}|F(x(t),y(t),t)|&=\left|\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[A_ix(t)+A_{di}x(t-\tau(t))]\right|\\&\le \max_i\|A_i\||x|+\max_i\|A_{di}\||x|\\&\le[\max_i\|A_i\|+\max_i\|A_{di}\|]|x|\\|G(x(t),y(t),t)|&=\left|\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]\right|\\&\le \max_i\|E_i\||x|+\max_i\|E_{di}\||x|\\&\le[\max_i\|E_i\|+\max_i\|E_{di}\|]|x|\end{aligned}$$

这样 F,G 满足线性增长条件。根据题意可以推出，h_i 是 x 的局部 Lipschitz 连续函数，记为 $\tilde{h}_i(x)$，当 $|x|^2+|y|^2\le M^2$，其公共 Lipschitz 常数为 L_M

$$\begin{aligned}|F(x(t),y(t),t)-F(\overline{x}(t),y(t),t)|&\le\left|\sum_{i=1}^{r}\tilde{h}_i(x(t))[A_ix(t)+A_{di}y(t)]-\sum_{i=1}^{r}\tilde{h}_i(\overline{x}(t))[A_i\overline{x}(t)+A_{di}y(t)]\right|\\&\le\left|\sum_{i=1}^{r}\tilde{h}_i(x(t))[A_ix(t)+A_{di}y(t)]-\sum_{i=1}^{r}\tilde{h}_i(\overline{x}(t))[A_ix(t)+A_{di}y(t)]\right.\\&\quad\left.+\sum_{i=1}^{r}\tilde{h}_i(\overline{x}(t))[A_ix(t)+A_{di}y(t)]-\sum_{i=1}^{r}\tilde{h}_i(\overline{x}(t))[A_i\overline{x}(t)+A_{di}y(t)]\right|\\&\le\left|\sum_{i=1}^{r}\tilde{h}_i(x(t))-\sum_{i=1}^{r}\tilde{h}_i(\overline{x}(t))\right|[\max_i\|A_i\|+\max_i\|A_{di}\|]|x|\\&\quad+\max_i\|A_i\||x-\overline{x}|\\&\le(ML_M+1)[\max_i\|A_i\|+\max_i\|A_{di}\|]|x-\overline{x}|\end{aligned}$$

从而F满足局部 Lipschitz 条件，同理G满足局部 Lipschitz 条件，根据引理 2.2.1，得证。

2.3. 均方镇定条件

定义 2.3.1[30]对于系统$(2.2.1a)$和任意的$\varphi \in C([-\mu,0];R^n)$，如果存在两个正的标量$\alpha,\beta$，使得$E\|x(t;\varphi)\|^2 \le \alpha e^{-\beta t}E\|\varphi\|^2$，那么称该系统的零解是(全局)均方指数稳定的。

引理 2.3.1[20] 对于$\forall x \in R^n$，$A,B,P \in R^{n\times n}$，$P=P^T \ge 0$，我们可以得到以下结论：

1) $2x^TAx = x^T(A+A^T)x$

2) $A^TB+B^TA \le A^TA+B^TB$

3) $A^TPB+B^TPA \le (A+B)^TP(A+B)/2$

引理 2.3.2[31](Shur 引理) 假定S,U和V是具有相应维数的常数矩阵，$S=S^T$，$U=U^T$，则$\begin{pmatrix} U & V^T \\ V & S \end{pmatrix} < 0 \Leftrightarrow S<0$，$U-V^TS^{-1}V<0$

接下来将给出时滞随机模糊系统均方镇定的充分条件。

定理 2.3.1 对于具有时滞的随机模糊系统(2.1.4)，如果存在矩阵$X>0$，$S>0$，Y_i，$i=1,\cdots,r$,，满足下面的 LMI，则当$K_i=Y_iX^{-1}$，该系统的零解是均方指数稳定的。

$$\Pi_{ij}=\begin{pmatrix} \Omega_{ij} & X(A_{di}+A_{dj})^T & X(E_i+E_j)^T \\ (A_{di}+A_{dj})X & -2(1-h)S & X(E_{di}+E_{dj})^T \\ (E_i+E_j)X & (E_{di}+E_{dj})X & -2X \end{pmatrix}<0 \qquad 1\le i\le j\le r \qquad (2.3.1)$$

其中$\Omega_{ij}=(A_i+A_j)X+X(A_i+A_j)^T-B_iY_j-B_jY_i-Y_j^TB_i^T-Y_i^TB_j^T+2S$

证明：令$P=X^{-1}$，$Q=X^{-1}SX^{-1}$

首先，在Π_{ij}式前后乘以对角阵$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$，我们得到

$$\begin{pmatrix} PG_{ij}+G_{ij}^{T}P+2Q & (A_{di}+A_{dj})^{T}P & (E_i+E_j)^{T} \\ P(A_{di}+A_{dj}) & -2(1-h)Q & (E_{di}+E_{dj})^{T} \\ (E_i+E_j) & (E_{di}+E_{dj}) & -2P^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

并且存在一个足够小的β，使得

$$\begin{pmatrix} PG_{ij}+G_{ij}^{T}P+2\beta P+2e^{\beta\mu}Q & (A_{di}+A_{dj})^{T}P & (E_i+E_j)^{T} \\ P(A_{di}+A_{dj}) & -2(1-h)Q & (E_{di}+E_{dj})^{T} \\ (E_i+E_j) & (E_{di}+E_{dj}) & -2P^{-1} \end{pmatrix}<0 \tag{2.3.3}$$

定义一个 Lyapunov 函数：

$$V(x(t),t)=e^{\beta t}x(t)^{T}Px(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}e^{\beta(s+\mu)}x(s)^{T}Qx(s)ds\,,$$

根据Itô随机积分公式，我们可以得到

$$\begin{aligned} dV(x(t),t)&=LV(x,t)dt \\ &\quad+e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\{x(t)^{T}P[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]+[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]^{T}Px(t)\}dw(t) \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} LV(x,t)&=2e^{\beta t}x(t)^{T}P\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))[(A_i-B_iK_j)x(t)+A_{di}x(t-\tau(t))] \\ &\quad+\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[E_ix(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]^{T}e^{\beta t}P\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))[E_jx(t)+E_{dj}x(t-\tau(t))] \\ &\quad+\beta e^{\beta t}x(t)^{T}Px(t)+e^{\beta(t+\mu)}x(t)^{T}Qx(t)-e^{\beta(t-\tau(t)+\mu)}(1-\dot{\tau}(t))x(t-\tau(t))^{T}Qx(t-\tau(t)) \end{aligned}$$

应用引理 2.3.1，可以得到

$$\begin{aligned} LV(x,t)&\le\frac{1}{2}e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))x(t)^{T}[(PG_{ij}+G_{ij}^{T}P+2\beta P)x(t)+2P(A_{di}+A_{dj})x(t-\tau(t))] \\ &\quad+\frac{1}{2}e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))\begin{pmatrix} x(t)^{T} & x(t-\tau(t))^{T} \end{pmatrix}(\tilde{E}_i+\tilde{E}_j)^{T}P(\tilde{E}_i+\tilde{E}_j)/2\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \\ &\quad+e^{\beta(t+\mu)}x(t)^{T}Qx(t)-(1-h)e^{\beta t}x(t-\tau(t))^{T}Qx(t-\tau(t)) \end{aligned}$$

其中$G_{ij}=A_i-B_iK_j+A_j-B_jK_i$，$\tilde{E}_i=\begin{pmatrix} E_i & E_{di} \end{pmatrix}$，$\tilde{E}_j=\begin{pmatrix} E_j & E_{dj} \end{pmatrix}$

所以，

$$dV(x(t),t) \le \frac{1}{2}e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))\begin{pmatrix}x(t)^T & x(t-\tau(t))^T\end{pmatrix}\Xi\begin{pmatrix}x(t)\\ x(t-\tau(t))\end{pmatrix}dt$$
$$+e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\{x(t)^T P[E_i x(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]+[E_i x(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]^T Px(t)\}dw(t)$$

其中 $\Xi=\begin{pmatrix}PG_{ij}+G_{ij}^T P+2\beta P+2e^{\beta\mu}Q & (A_{di}+A_{dj})^T P\\ P(A_{di}+A_{dj}) & -2(1-h)Q\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(\tilde{E}_i+\tilde{E}_j)^T P(\tilde{E}_i+\tilde{E}_j)$

运用引理 2.3.2，我们得到(2.3.3)式，等价于 $\Xi<0$，从而当(2.3.1)成立时

$EV(x(t),t)\le EV(x(0),0)$。

一方面，我可以得到

$$EV(x(0),0)=E[\varphi(0)^T P\varphi(0)+\int_{\tau(0)}^{0}e^{\beta(s+\mu)}\varphi(s)^T Q\varphi(s)ds]$$
$$\le E[\lambda_{\max}(P)|\varphi(0)|^2]+E[\int_{\tau(0)}^{0}e^{\beta(s+\mu)}\lambda_{\max}(Q)|\varphi(s)^T|ds]$$
$$\le[\lambda_{\max}(P)+\frac{e^{\beta\mu}-1}{\beta}\lambda_{\max}(Q)]E\|\varphi\|^2 \tag{2.3.4}$$

另一方面，根据 $V(x(t),t)$ 的定义，我们可以得到

$$EV(x(t),t)\ge E[e^{\beta t}x(t)^T Px(t)]$$
$$\ge\lambda_{\min}(P)e^{\beta t}E\|x(t)\|^2 \tag{2.3.5}$$

根据(2.3.4) 和(2.3.5)，我们很容易可以得到

$$E\|x(t;\varphi)\|^2\le\alpha e^{-\beta t}E\|\varphi\|^2$$

其中 $\alpha=\dfrac{\lambda_{\max}(P)+\dfrac{e^{\beta\mu}-1}{\beta}\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}$。

所以，具有时滞的随机模糊系统(2.1.4)是均方指数稳定的。

推论 2.3.1 对于具有定长时滞的随机模糊系统(2.1.4)，如果存在矩阵 $X>0$，$S>0$，$Y_i, i=1,\cdots,r$，满足下面的 LMI，则当 $K_i=Y_iX^{-1}$，该系统的零解是均方指数稳定的。

$$\begin{pmatrix}\Omega_{ij} & X(A_{di}+A_{dj})^T & X(E_i+E_j)^T\\ (A_{di}+A_{dj})X & -2S & X(E_{di}+E_{dj})^T\\ (E_i+E_j)X & (E_{di}+E_{dj})X & -2X\end{pmatrix}<0 \qquad 1\le i\le j\le r \tag{2.3.6}$$

其中，$\Omega_{ij}=(A_i+A_j)X+X(A_i+A_j)^T-B_iY_j-B_jY_i-Y_j^TB_i^T-Y_i^TB_j^T+2S$

证明：将原函数时滞的部分设为定长的，即$\tau(t)=l$，那么$\dot{\tau}(t)=0$，我们基于定理 2.3.1 的结论，可以知道$-2(1-h)S$中h已变为0，因而可以得到(2.3.6)式的结果，此推论得证。

注 2.3.1：若$A_{di}=E_{di}=0$时，即该系统没有时滞的情况发生时，定理 2.3.1 退化为胡良剑、邵世煌、吴让泉的“T-S 模糊随机系统的均方镇定”[20]中的结果，如下：

定理 2.3.2[20]：如果存在一个正定矩阵X和矩阵$Y_i,i=1,\cdots,r$满足

$$\begin{pmatrix}\Lambda_{ij}+\Lambda_{ji} & * \\ (E_i+E_j)X & -2X\end{pmatrix}<0 \quad 对1\le i<j\le r,h_ih_j\ne 0都成立,$$

其中$\Lambda_{ij}=A_iX+XA_i^T-B_iY_j-Y_j^TB_i^T$，

则当$K_i=Y_iX^{-1},i=1,\cdots,r$，T-S 模糊随机控制闭环系统

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(A_i-\sum_{j=1}^{r}h_jB_iK_j)x(t)dt+(\sum_{i=1}^{r}h_iE_i)x(t)dw(t)$$

的零解是全局均方指数稳定的。

注 2.3.2：若$E_i=E_{di}=0$时，即该系统的随机性消失时，推论 2.3.1 退化为 Cao Y Y 和 Frank P M 的“通过模糊控制的方法来对非线性时滞系统进行的分析和综合”[19]中的结果，如下：

定理 2.3.3[19]：如果存在一个正定矩阵X、S和矩阵$Y_i,i=1,\cdots,r$满足

$$\begin{pmatrix}\Omega_{ij} & X(A_{di}+A_{dj})^T \\ (A_{di}+A_{dj})X & -2(1-h)S\end{pmatrix}<0 \qquad 对1\le i<j\le r,h_ih_j\ne 0都成立,$$

其中$\Omega_{ij}=(A_i+A_j)X+X(A_i+A_j)^T-B_iY_j-B_jY_i-Y_j^TB_i^T-Y_i^TB_j^T+2S$

则当$K_i=Y_iX^{-1},i=1,\cdots,r$，T-S 时滞模糊控制闭环系统

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z)\sum_{j=1}^{r}h_j(z)[(A_i-B_iK_j)x(t)+A_{di}x(t-l)]dt$$

的零解是全局均方指数稳定的。

2.4. 仿真例子

在这一节，我们给出了一个数值例子来说明方法的使用。

例 2.4.1 定义模糊数“负”“正”函数（如图 2-1）

$$M_{负}=\begin{cases}1 & x_2\le -1\\ \dfrac{1-x_2}{2} & -1<x_2<1\\ 0 & x_2\ge 1\end{cases}\qquad M_{正}=\begin{cases}0 & x_2\le -1\\ \dfrac{1+x_2}{2} & -1<x_2<1\\ 1 & x_2\ge 1\end{cases}$$

设 $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0.5\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$B_1=B_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$，$C_1=(1\quad 0)$，$C_2=(-1\quad 1)$

$D_1=(-1\quad 1)$，$D_2=(1\quad 0)$，$E_1=E_2=\begin{pmatrix}0.1 & 0\\ 0 & -0.1\end{pmatrix}$，$A_{d1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -5\end{pmatrix}$，$A_{d2}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，

$E_{d1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$E_{d2}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$l=0.1$。

具有时滞的随机模糊系统的控制器的计算如下：

规则 1：IF $x_2(t)$ 负，THEN

$$dx(t)=[A_1x(t)+A_{d1}x(t-l)+B_1u(t)]dt+[E_1x(t)+E_{d1}x(t-l)]dw(t)$$

$$y(t)=C_1x(t)+D_1x(t-l)$$

规则 2：IF $x_2(t)$ 正，THEN

$$dx(t)=[A_2x(t)+A_{d2}x(t-l)+B_2u(t)]dt+[E_2x(t)+E_{d2}x(t-l)]dw(t)$$

$$y(t)=C_2x(t)+D_2x(t-l)$$

使用 Matlab 的 LMI 工具箱，根据推论 2.3.1 计算得控制器增益：

$K_1=(-30.4278\quad 210.0407)$，$K_2=(-8.5313\quad 55.3956)$。

根据 2004 年胡良剑、邵世煌和吴让泉的“T-S 模糊随机系统的均方镇定”[20]中的定理 5（即定理 2.3.2）计算得控制器增益：

$K_1=(0.7171\quad 4.5056)$，$K_2=(0.5903\quad 1.9974)$。

图 2-2 描绘了取初值函数 $\varphi(t):=(-10,\ 2)^T, t\in[-l,0]$ 时闭环系统输出 y 的一条轨道，其中随机种子为 2。(a)为原系统的响应，是不稳定的；(b)是由文献[20]

设计的均方稳定控制器（不考虑时滞项的控制器）对具有时滞的系统进行控制的效果图；(c)是由推论 2.3.1 设计的均方稳定的控制效果图。很显然，通过对图 2-2(b)与图 2-2(c)比较，可以看出，不考虑时滞项的控制器对具有时滞的系统是控制不住的，而考虑时滞项的控制器对具有时滞的系统具有良好的控制，从而表明了考虑时滞的控制器设计的价值。这里仿真的时间步长取 0.2×10^{-2}。

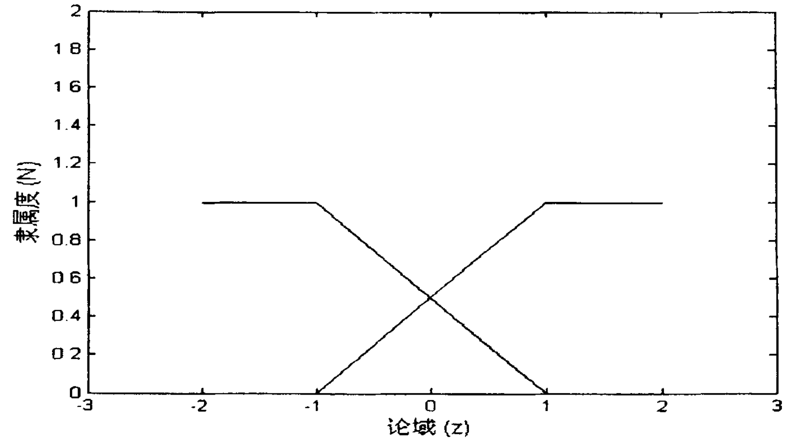
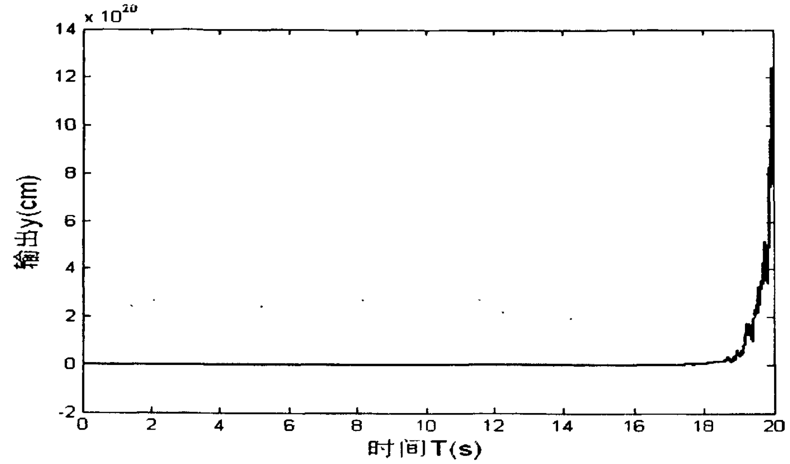
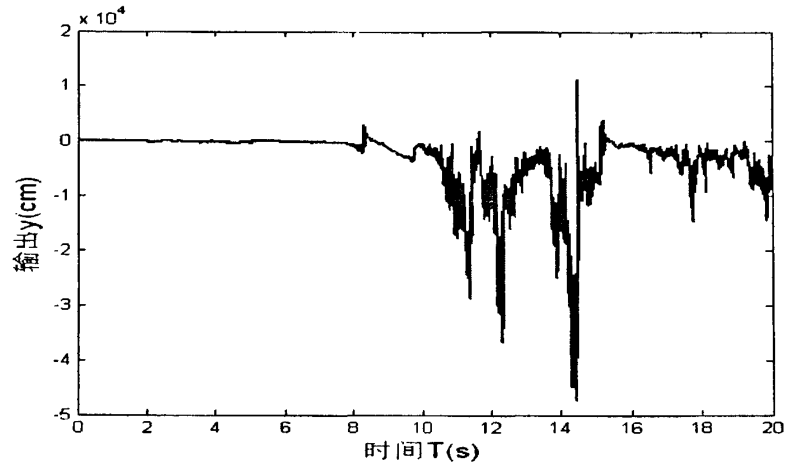


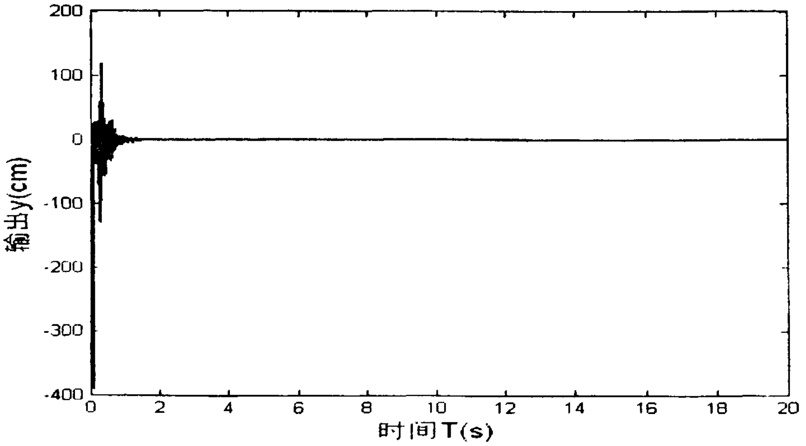
图 2-1 前提变量模糊数



(a)



(b)



(c)

图 2-2 仿真系统响应曲线

第三章 不确定时滞随机模糊系统的鲁棒均方镇定

3.1. 问题的定义

由于随机 T-S 模糊模型是通过模糊建模得到的，与实际系统通常必定有模型误差。本章我们考虑当系统模型参数有摄动时，系统的鲁棒镇定问题。系统模型参数包括规则数，隶属度函数，子系统的模型参数等。当子系统的模型参数具有有界扰动时，怎样保证系统的稳定性呢？这是本章主要考虑的问题。

在第二章中，已定义了时滞随机 T-S 模糊系统(2.1.1)，如下：

IF $z_1(t)$ is M_{i1} , $z_2(t)$ is M_{i2} ,⋯, $z_p(t)$ is M_{ip} , THEN

$$dx(t)=[A_i x(t)+A_{di}x(t-\tau(t))+B_i u(t)]dt+[E_i x(t)+E_{di}x(t-\tau(t))]dw(t) \qquad (2.1.1)$$

假设矩阵$[A_i, A_{di}, B_i, B_v, E_i, E_{di}]$存在允许的有界扰动$[\Delta A_i(t), \Delta A_{di}(t), \Delta B_i(t),$ $\Delta E_i(t), \Delta E_{di}]$，即满足[16][32]

$$[\Delta A_i(t), \Delta A_{di}(t), \Delta B_i(t), \Delta E_i(t), \Delta E_{di}(t)] = MF(t)[N_{ai}, N_{adi}, N_{bi}, N_{ei}, N_{edi}]$$

其中M，N_{ai}，N_{adi}，N_{bi}，N_{ei}，N_{edi}是实数矩阵，$F(t)$是未知的时变矩阵，且满足对于任意的t，$F(t)^T F(t) \le I$。

扰动模型可以定义为下面的形式：

IF $z_1(t)$ is M_{i1} , $z_2(t)$ is M_{i2} ,⋯, $z_p(t)$ is M_{ip} , THEN

$$dx(t)=[\bar{A}_i x(t)+\bar{A}_{di}x(t-\tau(t))+\bar{B}_i u(t)]dt+[\bar{E}_i x(t)+\bar{E}_{di}x(t-\tau(t))]dw(t) \qquad (3.1.1)$$

$x(t)=\varphi(t)$, $t\in[-\mu,0]$

$y(t)=C_i x(t)+D_i x(t-\tau(t))$ ， $i=1,\cdots,r$

其中 $\bar{A}_i=A_i+\Delta A_i(t)$ ， $\bar{A}_{di}=A_{di}+\Delta A_{di}(t)$ ， $\bar{B}_i=B_i+\Delta B_i(t)$ ， $\bar{E}_i=E_i+\Delta E_i(t)$ ， $\bar{E}_{di}=E_{di}+\Delta E_{di}(t)$ ，A_i,A_{di},E_i 和 E_{di} 为 n 阶方阵，$\Delta A_i(t)$，$\Delta A_{di}(t)$，$\Delta B_i(t)$，$\Delta E_i(t)$，$\Delta E_{di}(t)$ 是参数为 t 的扰动函数矩阵并满足上述定义。B_i 为 $n\times m$ 阶矩阵，C_i 和 D_i 为 $q\times n$ 阶矩阵。 $x(t)$ 为 n 维状态变量， $\tau(t)$ 为时变的时滞函数，且有 $0<\tau(t)\le\mu<\infty$ ， $\dot{\tau}(t)\le h<1$ 。$\varphi(t)$ 是 $x(t)$ 的初始值函数， $\varphi\in C([-\mu,0];R^n)$ 且 $\|\varphi\|=\sup_{-\mu\le\theta<0}|\varphi(\theta)|$。$u(t)$ 为 m 维输入变量，$y(t)$ 为 q 维输出变量，$w(t)$ 为一维布朗运动， $z(t)$为p 维前提变量（通常是 $x(t)$ 的函数)，它不依赖于 $u(t), w(t)$。

(3.1.1) 的解析表达式为

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[\bar{A}_i x(t)+\bar{A}_{di}x(t-\tau(t))+\bar{B}_i u(t)]dt+[\bar{E}_i x(t)+\bar{E}_{di}x(t-\tau(t))]dw(t) \quad (3.1.2)$$

$$x(t)=\varphi(t)\,,\ t\in[-\mu,0]$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[C_i x(t)+D_i x(t-\tau(t))]$$

其中 $h_i(z(t))=\dfrac{\mu_i(z(t))}{\sum_{j=1}^{r}\mu_j(z(t))}$， $\mu_i(z(t))=\prod_{k=1}^{p}M_{ik}(z_k(t))$， $M_{ik}(z_k(t))$ 是 $z_k(t)$ 在模糊集 M_{ik} 中的隶属度函数。假设模糊规则库是完备的，那么对于任意的 t， $\sum_{i=1}^{r}\mu_i(z(t))>0$ 。从而对于所有的 t 和 i， $h_i(z(t))\ge 0$ 且 $\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))=1$ 。

运用并行分布补偿（PDC）[13]原理，设计模糊“混合”的状态反馈控制器，控制器的模糊规则如下：

IF $z_1(t)$ is $M_{j1}, z_2(t)$ is $M_{j2},\cdots, z_p(t)$ is M_{jp}， THEN $u(t)=-K_j x(t), j=1,\cdots,r$

这里 K_j 为 $m\times n$ 阶矩阵。本质上 PDC 控制器是一个非线性的控制器，其解析表达式为

$$u(t) = -\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))K_j x(t) \tag{3.1.3}$$

这样，状态反馈控制系统综合为

$$\begin{aligned} dx(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{[(\overline{A}_i - \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\overline{B}_i K_j)x(t) + \overline{A}_{di}x(t-\tau(t))]dt \\ &\quad + [\overline{E}_i x(t) + \overline{E}_{di}x(t-\tau(t))]dw(t)\} \\ &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\{[\overline{A}_{CKij}x(t) + \overline{A}_{di}x(t-\tau(t))]dt \\ &\quad + [\overline{E}_i x(t) + \overline{E}_{di}x(t-\tau(t))]dw(t)\} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

其中，令 $\overline{A}_{CKij} = (A_i - B_i K_j) + (\Delta A_i(t) - \Delta B_i(t)K_j)$，$A_{CKij} = A_i - B_i K_j$，$\Delta A_{CKij} = \Delta A_i(t) - \Delta B_i(t)K_j$，因此 $\overline{A}_{CKij} = A_{CKij} + \Delta A_{CKij} = A_{CKij} + MF(t)N_{CKij}$，其中 $N_{CKij} = N_{ai} - N_{bi}K_j$

由于 $z(t)$ 往往依赖于 $x(t)$，系统(3.1.4)本质上是一个具有参数不确定的非线性时滞随机系统。

接下来的问题就是如何设计 $K_j(j=1,\cdots,r)$ 使该闭环系统鲁棒镇定，即对于所有允许的有界扰动都是均方指数稳定。

3.2. 鲁棒镇定条件

定义 3.2.2[33] 如果系统(3.1.4)对所有扰动 $\Delta A_i(t), \Delta A_{di}(t), \Delta B_i(t), \Delta E_i(t), \Delta E_{di}(t)$ 都均方指数稳定，则称系统(3.1.4)为鲁棒均方指数稳定。

接下来将给出时滞随机模糊系统鲁棒均方镇定的充分条件。为此，我们需要下列两个矩阵引理。

引理 3.2.1[27] 假定 M, N 和 F 是具有相对维数的矩阵，且 $F(t)^T F(t) < I$，那么对于 $\forall \varepsilon > 0$，$MFN + N^T F^T M^T \le \varepsilon MM^T + \varepsilon^{-1} N^T N$

引理 3.2.2[27] A, B, C, F 和 S 是具有相对维数的矩阵，且 $S > 0$，$F(t)^T F(t) < I$，那么对于 $\forall \varepsilon > 0$，若 $S - \varepsilon BB^T > 0$，则 $(A+BFC)^T S^{-1}(A+BFC) \le A^T(S - \varepsilon BB^T)A$

$+\varepsilon^{-1}C^T C$ 成立。

定理 3.2.1 对于具有不确定参数的随机模糊时滞系统(3.1.4),如果存在矩阵 $X>0$，$S>0$，Y_i，$i=1,\cdots,r,$ 正数 $\varepsilon_{ij},1\le i\le j\le r$，正数 $\sigma_{ij},1\le i,j\le r$，满足下面的 LMI，则当 $K_i=Y_i X^{-1}$，该系统的零解是鲁棒均方指数稳定的。

$$\begin{pmatrix} \Omega_{ij} & * & * & * & * \\ (A_{di}+A_{dj})X & -2(1-h)S & * & * & * \\ (N_{ai}+N_{aj})X-N_{bi}Y_j-N_{bj}Y_i & (N_{adi}+N_{adj})X & -\varepsilon_{ij}I & * & * \\ (N_{ei}+N_{ej})X & (N_{edi}+N_{edj})X & 0 & -2\sigma_{ij}I & * \\ (E_i+E_j)X & (E_{di}+E_{dj})X & 0 & 0 & -2(X-\sigma_{ij}MM^T) \end{pmatrix}<0$$

$$1\le i\le j\le r \tag{3.2.1}$$

其中 $\Omega_{ij}=(A_i+A_j)X+X(A_i+A_j)^T-B_iY_j-B_jY_i-Y_j^TB_i^T-Y_i^TB_j^T+\varepsilon_{ij}MM^T+2S$。这里 * 号表示对称位置矩阵的转置，例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * \\ a_{21} & a_{22} & * \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}^T & a_{31}^T \\ a_{21} & a_{22} & a_{32}^T \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

证明：令 $P=X^{-1}$，$Q=X^{-1}SX^{-1}$

首先，在 Π_{ij} 式前后乘以对角阵 $\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$，我们得到

$$\begin{pmatrix} \bar{\Omega}_{ij} & * & * & * & * \\ P(A_{di}+A_{dj}) & -2(1-h)Q & * & * & * \\ (N_{ai}+N_{aj})-N_{bi}K_j-N_{bj}K_i & (N_{adi}+N_{adj}) & -\varepsilon_{ij}I & * & * \\ (N_{ei}+N_{ej}) & (N_{edi}+N_{edj}) & 0 & -2\sigma_{ij}I & * \\ (E_i+E_j) & (E_{di}+E_{dj}) & 0 & 0 & -2(P^{-1}-\sigma_{ij}MM^T) \end{pmatrix}<0 \tag{3.2.2}$$

其中，$\bar{\Omega}_{ij}=PG_{ij}+G_{ij}^TP+\varepsilon_{ij}PMM^TP+2Q$

并且存在一个足够小的 β，使得

$$\begin{pmatrix} \bar{\Omega}'_{ij} & * & * & * & * \\ P(A_{di}+A_{dj}) & -2(1-h)Q & * & * & * \\ (N_{ai}+N_{aj})-N_{bi}K_j-N_{bj}K_i & (N_{adi}+N_{adj}) & -\varepsilon_{ij}I & * & * \\ (N_{ei}+N_{ej}) & (N_{edi}+N_{edj}) & 0 & -2\sigma_{ij}I & * \\ (E_i+E_j) & (E_{di}+E_{dj}) & 0 & 0 & -2(P^{-1}-\sigma_{ij}MM^T) \end{pmatrix}<0 \quad (3.2.3)$$

其中，$\bar{\Omega}'_{ij}=PG_{ij}+G_{ij}{}^TP+\varepsilon_{ij}PMM^TP+2e^{\beta\mu}Q+2\beta P$

定义一个 Lyapunov 函数：

$$V(x(t),t)=e^{\beta t}x(t)^TPx(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}e^{\beta(s+\mu)}x(s)^TQx(s)ds,$$

根据 Itô 随机积分公式，我们可以得到

$$dV(x(t),t)=LV(x,t)dt$$
$$+e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\{x(t)^TP[\bar{E}_ix(t)+\bar{E}_{di}x(t-\tau(t))]+[\bar{E}_ix(t)+\bar{E}_{di}x(t-\tau(t))]^TPx(t)\}dw(t)$$

这里

$$LV(x,t)=2e^{\beta t}x(t)^TP\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))[\bar{A}_{CKij}x(t)+\bar{A}_{di}x(t-\tau(t))]$$
$$+\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[\bar{E}_ix(t)+\bar{E}_{di}x(t-\tau(t))]^Te^{\beta t}P\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))[\bar{E}_jx(t)+\bar{E}_{dj}x(t-\tau(t))]$$
$$+\beta e^{\beta t}x(t)^TPx(t)+e^{\beta(t+\mu)}x(t)^TQx(t)-e^{\beta(t-\tau(t)+\mu)}(1-\dot{\tau}(t))x(t-\tau(t))^TQx(t-\tau(t))$$

应用引理 2.3.1，可以得到

$$LV(x,t)\le\frac{1}{2}e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))x(t)^T[(P\bar{G}_{ij}+\bar{G}_{ij}{}^TP+2\beta P)x(t)+2P(\bar{A}_{di}+\bar{A}_{dj})x(t-\tau(t))]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))\begin{pmatrix}x(t)^T & x(t-\tau(t))^T\end{pmatrix}[\tilde{E}_i+\tilde{E}_j+MF(t)(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})]^TP$$
$$[\tilde{E}_i+\tilde{E}_j+MF(t)(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})]/2\begin{pmatrix}x(t)\\ x(t-\tau(t))\end{pmatrix}$$
$$+e^{\beta(t+\mu)}x(t)^TQx(t)-(1-h)e^{\beta t}x(t-\tau(t))^TQx(t-\tau(t))$$

其中 $\bar{G}_{ij}=\bar{A}_{CKij}+\bar{A}_{CKji}$，$\tilde{E}_i=\begin{pmatrix}E_i & E_{di}\end{pmatrix}$，$\tilde{E}_j=\begin{pmatrix}E_j & E_{dj}\end{pmatrix}$，$\tilde{N}_{ei}=\begin{pmatrix}N_{ei} & N_{edi}\end{pmatrix}$，

$\tilde{N}_{ej}=\begin{pmatrix}N_{ej} & N_{edj}\end{pmatrix}$。

应用引理 3.2.1，对于 $\forall\varepsilon_{ij}>0 \quad 1\le i,j\le r$

$$x(t)^T\{[P(\Delta A_{CKij}+\Delta A_{CKji})+(\Delta A_{CKij}+\Delta A_{CKji})^TP]x(t)+2P(\Delta A_{di}+\Delta A_{dj})x(t-\tau(t))\}$$
$$=x(t)^T\{[PMF(t)(N_{CKij}+N_{CKji})+(N_{CKij}+N_{CKji})^TF(t)^TM^TP]x(t)+PMF(t)2(N_{adi}+N_{adj})x(t-\tau(t)$$

$$= 2x(t)^T PMF(t)[(N_{CKij} + N_{CKji})x(t) + (N_{adi} + N_{adj})x(t-\tau(t))]$$

$$\le \varepsilon_{ij} x(t)^T PMM^T Px(t) + \varepsilon_{ij}^{-1}\begin{pmatrix} x(t)^T & x(t-\tau(t))^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji})^T \\ (N_{adi}+N_{adj})^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji}) & (N_{adi}+N_{adj}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{pmatrix}$$

其中 $N_{CKij} = N_{ai} - N_{bi}K_j$， $N_{CKji} = N_{aj} - N_{bj}K_i$

应用引理 3.2.2，对于 $\forall \sigma_{ij} > 0 \quad 1 \le i, j \le r$

$$[\tilde{E}_i + \tilde{E}_j + MF(t)(\tilde{N}_{ei} + \tilde{N}_{ej})]^T P\,[\tilde{E}_i + \tilde{E}_j + MF(t)(\tilde{N}_{ei} + \tilde{N}_{ej})]/2$$

$$\le \frac{1}{2}\{(\tilde{E}_i + \tilde{E}_j)^T (P^{-1} - \sigma_{ij} MM^T)^{-1}(\tilde{E}_i + \tilde{E}_j) + \sigma_{ij}^{-1}(\tilde{N}_{ei} + \tilde{N}_{ej})^T(\tilde{N}_{ei} + \tilde{N}_{ej})\}$$

所以，

$$LV(x,t) = \frac{1}{2}e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\begin{pmatrix} x(t)^T & x(t-\tau(t))^T \end{pmatrix}\Xi\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{pmatrix}$$

其中，

$$\Xi = \begin{pmatrix} PG_{ij} + G_{ij}^T P + \varepsilon_{ij} PMM^T P + 2e^{\beta\mu}Q + 2\beta P & (A_{di} + A_{dj})^T P \\ P(A_{di} + A_{dj}) & -2(1-h)Q \end{pmatrix}$$

$$+\varepsilon_{ij}^{-1}\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji})^T \\ (N_{adi}+N_{adj})^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji}) & (N_{adi}+N_{adj}) \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\{(\tilde{E}_i + \tilde{E}_j)^T (P^{-1} - \sigma_{ij} MM^T)^{-1}(\tilde{E}_i + \tilde{E}_j) + \sigma_{ij}^{-1}(\tilde{N}_{ei} + \tilde{N}_{ej})^T(\tilde{N}_{ei} + \tilde{N}_{ej})\}$$

应用引理 2.3.2 我们得到(3.2.3)式与 $\Xi < 0$ 等价，类似于定理 2.3.1 的证明可知闭环系统的零解是鲁棒均方指数稳定。所以，具有时滞的随机模糊系统(3.1.4)的零解是鲁棒均方指数稳定的。

推论 3.2.1: 具有不确定参数的随机模糊时滞系统(3.1.4)，若时滞函数不是时变而是定长的，如果存在矩阵 $X > 0$， $S > 0$， Y_i， $i = 1,\cdots,r$，正数 ε_{ij}，$1 \le i \le j \le r$，正数 σ_{ij}，$1 \le i \le j \le r$，满足下面的 LMI，则当 $K_i = Y_i X^{-1}$，该系统的零解是鲁棒均方指数稳定的。

$$\begin{pmatrix} \Omega_{ij} & * & * & * & * \\ (A_{di}+A_{dj})X & -2S & * & * & * \\ (N_{ai}+N_{aj})X-N_{bi}Y_j-N_{bj}Y_i & (N_{adi}+N_{adj})X & -\varepsilon_{ij}I & * & * \\ (N_{ei}+N_{ej})X & (N_{edi}+N_{edj})X & 0 & -2\sigma_{ij}I & * \\ (E_i+E_j)X & (E_{di}+E_{dj})X & 0 & 0 & -2(X-\sigma_{ij}MM^T) \end{pmatrix}<0$$

$$1\le i\le j\le r \tag{3.2.4}$$

其中 $\Omega_{ij}=(A_i+A_j)X+X(A_i+A_j)^T-B_iY_j-B_jY_i-Y_j^TB_i^T-Y_i^TB_j^T+\varepsilon_{ij}MM^T+2S$

证明：将原函数时滞的部分设为定长的，即 $\tau(t)=l$，那么 $\dot{\tau}(t)=0$，我们基于定理 3.2.1 的证明，可以知道 $-(1-h)S$ 中 h 已变为 0，因而可以得到 (3.2.4) 式的结果，此推论得证。

注 3.2.1：如果 $\Delta A_{di}=\Delta E_i=0, \bar{E}_{di}=0$ 时，即只有在 $x(t)$ 前具有不确定参数，其他各项都不具有不确定参数且随机项不具有时滞的情况下，定理 3.2.1 退化为 Wang Z D ,Ho D W C, Liu X H 的"具有时滞的不确定随机模糊系统的鲁棒稳定性问题"[16]中的结果，如下：

定理 3.2.2[16]：如果存在一个正定矩阵 X 和正数 $\varepsilon>0$，满足

$$\begin{pmatrix} \Lambda_i & * & * & * \\ A_{di}X & -S & * & * \\ N_{ai}X & 0 & -\varepsilon I & * \\ E_iX & 0 & 0 & -X \end{pmatrix}<0 \quad \text{对任意的} i \text{都成立，}$$

则 T-S 时滞模糊随机控制闭环系统

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z)\{[(A_i-\Delta A_i)x(t)+A_{di}x(t-\tau)]dt+E_idw(t)\}$$

的零解是全局均方指数稳定的。其中 $\Lambda_i=XA_i+A_i^TX+\varepsilon MM+S$。

3.3. 仿真例子

在这一部分，我们给出了一个数值例子来说明方法的使用。

例 3.3.1 定义模糊数"负""正"（如图 3-1）

$$M_{负}=\begin{cases}1 & x_2\le -1\\ \dfrac{1-x_2}{2} & -1<x_2<1\\ 0 & x_2\ge 1\end{cases}\qquad M_{正}=\begin{cases}0 & x_2\le -1\\ \dfrac{1+x_2}{2} & -1<x_2<1\\ 1 & x_2\ge 1\end{cases}$$

设 $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0.5\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$B_1=B_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$，$C_1=(1\quad 0)$，$C_2=(-1\quad 1)$，

$D_1=(-1\quad 1)$，$D_2=(1\quad 0)$，$E_1=E_2=\begin{pmatrix}0.1 & 0\\ 0 & -0.1\end{pmatrix}$，$A_{d1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$，$A_{d2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，

$N_{a1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.5 & 2\end{pmatrix}$，$N_{a2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$N_{ad1}=N_{ad2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$N_{b1}=N_{b2}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，$E_{d1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，

$E_{d2}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$N_{e1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$N_{e2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$N_{ed1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$N_{ed2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，

$M=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ -0.3 & 0.3\end{pmatrix}$，$l=0.1$，函数 $F(t)=\begin{pmatrix}0.5\sin t & 0\\ 0 & 0.4\cos t\end{pmatrix}$。

规则 1：IF $x_2(t)$ 负，THEN

$$\begin{aligned}dx(t)=&[(A_1+MF(t)N_{a1})x(t)+(A_{d1}+MF(t)N_{ad1})x(t-l)+B_1u(t)]dt\\ &+[(E_1+MF(t)N_{e1})x(t)+(E_{d1}+MF(t)N_{ed1})x(t-l)]dw(t)\end{aligned}$$

$$y(t)=C_1x(t)+D_1x(t-l)$$

规则 2：IF $x_2(t)$ 正，THEN

$$\begin{aligned}dx(t)=&[(A_2+MF(t)N_{a2})x(t)+(A_{d2}+MF(t)N_{ad2})x(t-l)+B_2u(t)]dt\\ &+[(E_2+MF(t)N_{e2})x(t)+(E_{d2}+MF(t)N_{ed2})x(t-l)]dw(t)\end{aligned}$$

$$y(t)=C_2x(t)+D_2x(t-l)$$

使用 Matlab 的 LMI 工具箱，根据推论 3.2.1 计算得控制器增益：

$K_1=(-2.5608\quad 28.6514)$，$K_2=(-0.3827\quad 12.2544)$。

图 3-2 描绘了取初值函数 $\varphi(t):=(0,2)^T, t\in[-l,0]$ 时闭环系统输出 y 的一条轨道。(a)为原系统的响应，是不稳定的；(b)是由推论 3.2.1 设计的鲁棒均方稳定控制器作用下的效果。这里仿真的时间步长取 0.2×10^{-2}。

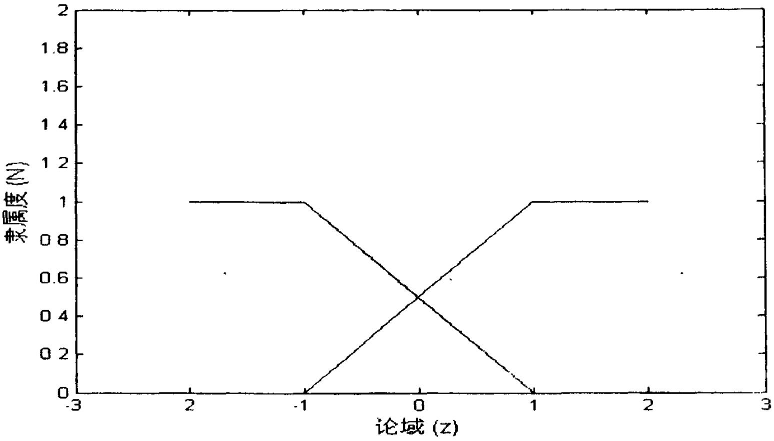
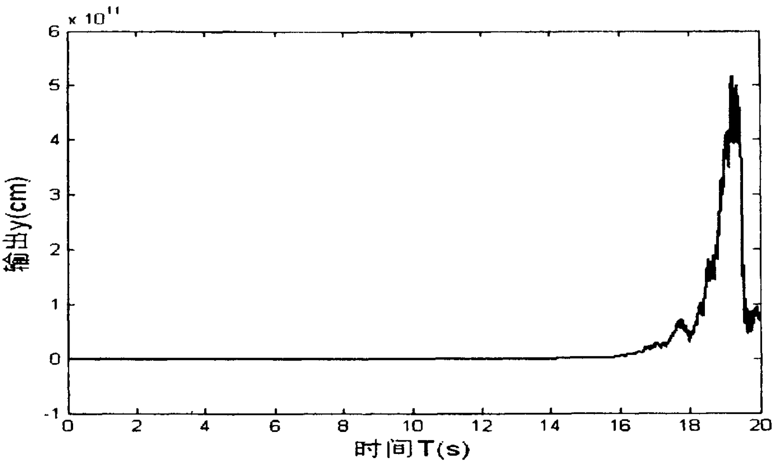
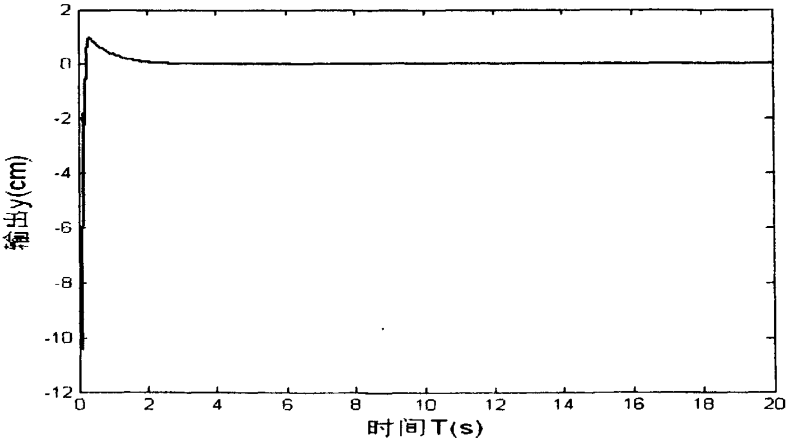


图 3-1 前提变量模糊数



(a)



(b)

图 3-2 仿真系统响应曲线

第四章 不确定时滞随机模糊系统的鲁棒 H_∞ 控制

4.1. 问题的定义

实际对象绝大多数都是非线性的，而控制工程中通常使用的系统模型都是线性的。线性模型与非线性对象之间的差异可以描述为线性系统的一个能量有界的不确定扰动，这一不确定项也可包含某些时变参数和其他扰动因素。基于这类思想的控制最有代表性的是线性 H_∞ 控制。但是如果线性模型与实际对象的建模误差很大，控制性能就无法满足实际需要。

模糊系统作为一种非线性系统模型，由于采用局部线性表示，实现了非线性反馈控制。由于模糊系统模型与实际对象有一定的差异，所以研究模糊 H_∞ 控制问题十分有必要的。本章我们进一步考虑时滞随机 T-S 模糊系统鲁棒 H_∞ 控制问题。

我们来考虑连续时间的具有参数和外界扰动两种不确定性的随机模糊控制系统，如下：

IF $z_1(t)$ is M_{i1} , $z_2(t)$ is M_{i2} ,⋯, $z_p(t)$ is M_{ip} ， THEN

$$\begin{aligned} dx(t) &= [\bar{A}_i x(t) + \bar{A}_{di} x(t-\tau(t)) + \bar{B}_i u(t) + B_v v(t)]dt \\ &\quad + [\bar{E}_i x(t) + \bar{E}_{di} x(t-\tau(t)) + E_v v(t)]dw(t) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

$$x(t) = \varphi(t) \ , \ t \in [-\mu, 0]$$

$$y(t) = C_i x(t) + D_i x(t-\tau(t)) \ , \quad i = 1, \cdots, r$$

其中 $\bar{A}_i = A_i + \Delta A_i(t)$ ， $\bar{A}_{di} = A_{di} + \Delta A_{di}(t)$ ， $\bar{B}_i = B_i + \Delta B_i(t)$ ， $\bar{E}_i = E_i + \Delta E_i(t)$ ， $\bar{E}_{di} = E_{di} + \Delta E_{di}(t)$ ，其中 A_i, A_{di}, E_i 和 E_{di} 为 n 阶方阵， $\Delta A_i(t)$ ， $\Delta A_{di}(t)$ ， $\Delta B_i(t)$ ，

$\Delta E_i(t)$，$\Delta E_{di}(t)$ 是参数为 t 的函数矩阵，表示允许的不确定性

$$[\Delta A_i(t),\Delta A_{di}(t),\Delta B_i(t),\Delta E_i(t),\Delta E_{di}(t)]=MF(t)[N_{ai},N_{adi},N_{bi},N_{ei},N_{edi}]$$

M，N_{ai}，N_{adi}，N_{bi}，N_{ei}，N_{edi} 是实数矩阵，$F(t)$ 是未知的时变矩阵，且满足对于任意的 t，$F(t)^T F(t)\le I$。$x(t)$ 为 n 维状态变量，$v(t)$ 是 s 维干扰输入变量，$\tau(t)$ 为时变的时滞函数，且有 $0<\tau(t)\le\mu<\infty$，$\dot{\tau}(t)\le h<1$。$\varphi(t)$ 是 $x(t)$ 的初始值函数，$\varphi\in C([-\mu,0];R^n)$ 且 $\|\varphi\|=\sup_{-\mu\le\theta<0}|\varphi(\theta)|$。$u(t)$ 为 m 维输入变量，$y(t)$ 为 q 维输出变量，$w(t)$ 为一维布朗运动，$z(t)$为p 维前提变量（通常是 $x(t)$ 的函数）。

与第三章相比，系统增加了外界不确定扰动项 $v(t)$,假设 $v(t)$ 的 L_2 范数有限，

$$\|v\|_2=\left(\int_0^\infty v(t)^T v(t)dt\right)^{1/2}<\infty$$

(4.1.1) 的解析表达式为

$$\begin{aligned}dx(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[\overline{A}_i x(t)+\overline{A}_{di}x(t-\tau(t))+\overline{B}_i u(t)+B_v v(t)]dt\\ +[\overline{E}_i x(t)+\overline{E}_{di}x(t-\tau(t))+E_v v(t)]dw(t)\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$$x(t)=\varphi(t)\,,\ t\in[-\mu,0]$$

$$y(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[C_i x(t)+D_i x(t-\tau(t))]$$

特别地，当 B_v,E_v 为零矩阵时，系统退化为第三章中 (3.1.2) 的形式

运用并行分布补偿（PDC）[13]原理，设计模糊“混合”的状态反馈控制器，控制器的模糊规则如下：

IF $z_1(t)$ is $M_{j1}, z_2(t)$ is $M_{j2},\cdots, z_p(t)$ is M_{jp}，THEN $u(t)=-K_j x(t),\ j=1,\cdots,r$

这里 K_j 为 $m\times n$ 阶矩阵。本质上 PDC 控制器是一个非线性的控制器，其解析表达式为

$$u(t)=-\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))K_j x(t) \tag{4.1.3}$$

这样，状态反馈控制系统综合如下

$$
\begin{aligned}
dx(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\{[(\overline{A}_i - \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\overline{B}_i K_j)x(t) + \overline{A}_{di}x(t-\tau(t)) + B_v v(t)]dt \\
&\quad + [\overline{E}_i x(t) + \overline{E}_{di}x(t-\tau(t)) + E_v v(t)]dw(t)\} \\
&= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\{[\overline{A}_{CKij}x(t) + \overline{A}_{di}x(t-\tau(t)) + B_v v(t)]dt \\
&\quad + [\overline{E}_i x(t) + \overline{E}_{di}x(t-\tau(t)) + E_v v(t)]dw(t)\}
\end{aligned} \tag{4.1.4}
$$

其中，令 $\overline{A}_{CKij} = (A_i - B_i K_j) + (\Delta A_i(t) - \Delta B_i(t)K_j)$，$A_{CKij} = (A_i - B_i K_j)$，$\Delta A_{CKij} = (\Delta A_i(t) - \Delta B_i(t)K_j)$，因此 $\overline{A}_{CKij} = A_{CKij} + \Delta A_{CKij} = A_{CKij} + MF(t)N_{CKij}$，其中 $N_{CKij} = N_{ai} - N_{bi}K_j$

由于 $z(t)$ 往往依赖于 $x(t)$，系统 (4.1.4) 本质上是一个非线性不确定时滞随机系统。

问题是要设计 PDC 控制器 $(K_1,\cdots,K_r)$，使得对满足条件的参数不确定扰动 $[\Delta A_i(t),\Delta A_{di}(t),\Delta B_i(t),\Delta E_i(t),\Delta E_{di}(t)]$ 与外界不确定扰动项 $v(t)$ 的双重作用下对稳定性的影响是具有衰减性的。

4.2. 鲁棒 H∞控制条件

定义 4.2.1[27]:在系统 (4.1.2) 中， $u(t)=0$,存在一个标量 $\gamma>0$，在初始条件为零的情况下，若非零向量 $v(t)\in L_2[0,\infty)$，对于所有的允许的不确定性函数矩阵 $\Delta A_i(t)$，$\Delta A_{di}(t)$，$\Delta B_i(t)$，$\Delta E_i(t)$，$\Delta E_{di}(t)$，$\|y(t)\|_{E_2} = (E\{\int_0^\infty |y(t)|^2 dt\})^{\frac{1}{2}}$ 满足 $\|y(t)\|_{E_2} < \gamma\|v(t)\|_2$,则称系统 (4.1.2) 是具有 γ 衰减的鲁棒均方指数稳定。(这里 $\|\cdot\|_2$ 表示 L_2 范数)

定理 4.2.1: 考虑具有不确定参数和外界干扰的时滞随机模糊系统 (4.1.4)，对于任意给定的 $\gamma>0$，如果存在正数 $\varepsilon_{ij},1\le i\le j\le r$，正数 $\sigma_{ij},1\le i,j\le r$，矩阵 $S>0,X>0$ 且存在矩阵组 Y_j，满足以下 LMI，则当状态反馈控制器取

$u(t)=-\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))K_jx(t)$， $K_j=Y_jX^{-1}$，该系统零解是具有 γ 衰减的鲁棒均方指数稳定的。

$$\Pi_{ij}=\begin{pmatrix} \Omega_{ij} & * & * & * & * & * & * \\ (A_{di}+A_{dj})X & -2(1-h)S & * & * & * & * & * \\ 2B_v^T & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ (N_{ai}+N_{aj})X-N_{bi}Y_j-N_{bj}Y_i & (N_{adi}+N_{adj})X & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * & * & * \\ (E_i+E_j)X & (E_{di}+E_{dj})X & E_v & 0 & -2(X-\sigma_{ij}MM^T) & * & * \\ (N_{ei}+N_{ej})X & (N_{edi}+N_{edj})X & 0 & 0 & 0 & -2\sigma_{ij}I & * \\ (C_i+C_j)X & (D_i+D_j)X & 0 & 0 & 0 & 0 & -2I \end{pmatrix}$$

$$<0 \qquad 1\le i\le j\le r \tag{4.2.1}$$

其中，$\Omega_{ij}=(A_i+A_j)X+X(A_i+A_j)^T-B_iY_j-B_jY_i-Y_j^TB_i^T-Y_i^TB_j^T+\varepsilon_{ij}MM^T+2S$

证明：令 $P=X^{-1}$ ，$Q=X^{-1}SX^{-1}$。

首先，在 Π_{ij} 式前后乘以对角阵 $\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}$，我们得到

$$\begin{pmatrix} \bar{\Omega}_{ij} & * & * & * & * & * & * \\ P(A_{di}+A_{dj}) & -2(1-h)Q & * & * & * & * & * \\ 2B_v^TP & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ N_{ai}+N_{aj}-N_{bi}K_j-N_{bj}K_i & N_{adi}+N_{adj} & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * & * & * \\ E_i+E_j & E_{di}+E_{dj} & E_v & 0 & -2(P^{-1}-\sigma_{ij}MM^T) & * & * \\ N_{ei}+N_{ej} & N_{edi}+N_{edj} & 0 & 0 & 0 & -2\sigma_{ij}I & * \\ C_i+C_j & D_i+D_j & 0 & 0 & 0 & 0 & -2I \end{pmatrix}<0 \tag{4.2.2}$$

其中，$\bar{\Omega}_{ij}=PG_{ij}+G_{ij}^TP+\varepsilon_{ij}PMM^TP+2Q$

并且存在一个足够小的 β，使得

$$\begin{pmatrix} \bar{\Omega}'_{ij} & * & * & * & * & * & * \\ P(A_{di}+A_{dj}) & -2(1-h)Q & * & * & * & * & * \\ 2B_v^TP & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ N_{ai}+N_{aj}-N_{bi}K_j-N_{bj}K_i & N_{adi}+N_{adj} & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * & * & * \\ E_i+E_j & E_{di}+E_{dj} & E_v & 0 & -2(P^{-1}-\sigma_{ij}MM^T) & * & * \\ N_{ei}+N_{ej} & N_{edi}+N_{edj} & 0 & 0 & 0 & -2\sigma_{ij}I & * \\ C_i+C_j & D_i+D_j & 0 & 0 & 0 & 0 & -2I \end{pmatrix}<0$$

(4.2.3)

其中，$\bar{\Omega}'_{ij} = PG_{ij} + G_{ij}^T P + \varepsilon_{ij} PMM^T P + 2e^{\beta\mu} Q + 2\beta P$

第三章定理 3.2.1 已给出了具有不确定参数的时滞随机模糊系统的鲁棒均方指数稳定的条件。

接下来我们所要证明的事是对于所有的非零向量 $v(t) \in L_2[0,\infty)$，当初始状态为零时，系统满足 $\|y(t)\|_{E_2} < \gamma \|v(t)\|_2$

与第三章定理 3.2.1 中关于具有不确定参数的时滞随机模糊系统的鲁棒稳定性的证明相同的，首先设定一个 Lyapunov 函数：

$$V(x(t),t) = e^{\beta t} x(t)^T P x(t) + \int_{t-\tau(t)}^{t} e^{\beta(s+\mu)} x(s)^T Q x(s) ds,$$

跟据 Itô 随机积分公式，我们可以得到

$$E[\int_0^t LV(x(s),s)] = E[V(x(t),t)] > 0,$$

因而

$$E\{\int_0^t [y(s)^T y(s) - \gamma^2 v(s)^T v(s)] ds\} \le E\{\int_0^t [y(s)^T y(s) - \gamma^2 v(s)^T v(s) + LV(x(s),s)] ds\}$$

这里

$$\begin{aligned}
LV(x,t) = {} & 2e^{\beta t} x(t)^T P \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t)) [\bar{A}_{CKij} x(t) + \bar{A}_{di} x(t-\tau(t)) B_v v(t)] \\
& + \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) [\bar{E}_i x(t) + \bar{E}_{di} x(t-\tau(t)) + E_v v(t)]^T e^{\beta t} \\
& \cdot P \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t)) [\bar{E}_j x(t) + \bar{E}_{dj} x(t-\tau(t)) + E_v v(t)] \\
& + \beta e^{\beta t} x(t)^T P x(t) + e^{\beta(t+\mu)} x(t)^T Q x(t) - e^{\beta(t-\tau(t)+\mu)} (1-\dot{\tau}(t)) x(t-\tau(t))^T Q x(t-\tau(t))
\end{aligned}$$

其中，$P, Q > 0$

应用引理 2.3.1，可以得到

$$\begin{aligned}
LV(x,t) \le {} & \frac{1}{2} e^{\beta t} \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t)) x(t)^T [(P\bar{G}_{ij} + \bar{G}_{ij}^T P + 2\beta P) x(t) + 2P(\bar{A}_{di} + \bar{A}_{dj}) x(t-\tau(t)) + 4P \\
& + \frac{1}{2} e^{\beta t} \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t)) \sum_{j=1}^{r} h_j(z(t)) \begin{pmatrix} x(t)^T & x(t-\tau(t)) & v(t) \end{pmatrix} [\tilde{E}_i' + \tilde{E}_j' + MF(t)(\tilde{N}_{ei}' + \tilde{N}_{ej}')]^T P
\end{aligned}$$

$$[\tilde{E}_i+\tilde{E}_j+MF(t)(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})]/2\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \\ v(t) \end{pmatrix}$$
$$+e^{\beta(t+\mu)}x(t)^T Qx(t)-(1-h)e^{\beta t}x(t-\tau(t))^T Qx(t-\tau(t))$$

其中

$$\bar{G}_{ij}=\bar{A}_{CKij}+\bar{A}_{CKji}, \bar{A}_{CKij}=A_{CKij}+\Delta A_{CKij}=A_{CKij}+MF(t)N_{CKij}$$

$$\bar{A}_{CKji}=A_{CKji}+\Delta A_{CKji}=A_{CKji}+MF(t)N_{CKji}, \quad \tilde{E}_i=\begin{pmatrix} E_i & E_{di} & \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix},$$

$$\tilde{E}_j=\begin{pmatrix} E_j & E_{dj} & \frac{1}{2}E_v \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}_{ei}=\begin{pmatrix} N_{ei} & N_{edi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}_{ej}=\begin{pmatrix} N_{ej} & N_{edj} & 0 \end{pmatrix}$$

应用引理 3.2.1，对于 $\forall\varepsilon_{ij}>0 \quad 1\le i,j\le r$

$$x(t)^T\{[P(\Delta A_{CKij}+\Delta A_{CKji})+(\Delta A_{CKij}+\Delta A_{CKji})^T P]x(t)+2P(\Delta A_{di}+\Delta A_{dj})x(t-\tau(t))\}$$
$$=x(t)^T\{[PMF(t)(N_{CKij}+N_{CKji})+(N_{CKij}+N_{CKji})^T F(t)^T M^T P]x(t)+PMF(t)2(N_{adi}+N_{adj})x(t-\tau(t))$$
$$=2x(t)^T PMF(t)[(N_{CKij}+N_{CKji})x(t)+(N_{adi}+N_{adj})x(t-\tau(t))]$$
$$\le\varepsilon_{ij}x(t)^T PMM^T Px(t)+\varepsilon_{ij}^{-1}\begin{pmatrix} x(t)^T & x(t-\tau(t))^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji})^T \\ (N_{adi}+N_{adj})^T \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji}) & (N_{adi}+N_{adj}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{pmatrix}$$
$$=\varepsilon_{ij}x(t)^T PMM^T Px(t)+\varepsilon_{ij}^{-1}\begin{pmatrix} x(t)^T & x(t-\tau(t))^T & v(t)^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji})^T \\ (N_{adi}+N_{adj})^T \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji}) & (N_{adi}+N_{adj}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

其中 $N_{CKij}=N_{ai}-N_{bi}K_j$， $N_{CKji}=N_{aj}-N_{bj}K_i$

应用引理 3.2.2，对于 $\forall\sigma_{ij}>0 \quad 1\le i,j\le r$

$$[\tilde{E}_i+\tilde{E}_j+MF(t)(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})]^T P\,[\tilde{E}_i+\tilde{E}_j+MF(t)(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})]/2$$
$$\le\frac{1}{2}\{(\tilde{E}_i+\tilde{E}_j)^T(P^{-1}-\sigma_{ij}MM^T)^{-1}(\tilde{E}_i+\tilde{E}_j)+\sigma_{ij}^{-1}(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})^T(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})\}$$

对于 $y(t)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(t))[C_i x(t)+D_i x(t-\tau(t))]$ ， $i=1,\cdots,r$ 。我们可以得到以下的式子

$$
\begin{aligned}
y(t)^T y(t) &= \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[C_i x(t) + D_i x(t-\tau(t))] \sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))[C_i x(t) + D_i x(t-\tau(t))]^T \\
&\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\begin{pmatrix} x(t)^T & x(t-\tau(t)^T \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (C_i+C_j)^T(C_i+C_j) & (C_i+C_j)^T(D_i+D_j) \\ (D_i+D_j)^T(C_i+C_j) & (D_i+D_j)^T(D_i+D_j) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\begin{pmatrix} x(t)^T & x(t-\tau(t)^T \end{pmatrix} \\
&\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (C_i+C_j)^T \\ (D_i+D_j)^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (C_i+C_j) & (D_i+D_j) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \\
&\le \frac{1}{2}e^{\beta t}\sum_{i=1}^{r} h_i(z(t))\sum_{j=1}^{r} h_j(z(t))\begin{pmatrix} x(t)^T & x(t-\tau(t)^T & v(t)^T \end{pmatrix} \\
&\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (C_i+C_j)^T \\ (D_i+D_j)^T \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (C_i+C_j) & (D_i+D_j) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t) \\ v(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

因此，我们可以得到

$$
\begin{aligned}
& y(s)^T y(s) - \gamma^2 v(s)^T v(s) + LV(x(s),s) \\
&= \frac{1}{2}e^{\beta s}\sum_{i=1}^{r} h_i(z(s))\sum_{j=1}^{r} h_j(z(s))\begin{pmatrix} x(s)^T & x(s-\tau(s)^T & v(s)^T \end{pmatrix}\Gamma(s)\begin{pmatrix} x(s) \\ x(s-\tau(s) \\ v(s) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) = {} & \begin{pmatrix} \bar{\Omega}' & * & * \\ P(A_{di}+A_{dj}) & -2(1-h)Q & * \\ 2B_v{}^T P & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} + \varepsilon_{ij}^{-1}\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji})^T \\ (N_{adi}+N_{adj})^T \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (N_{CKij}+N_{CKji}) & (N_{adi}+N_{adj}) & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{2}\{(\tilde{E}_i+\tilde{E}_j)^T(P^{-1}-\sigma_{ij}MM^T)^{-1}(\tilde{E}_i+\tilde{E}_j) + \sigma_{ij}^{-1}(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})^T(\tilde{N}_{ei}+\tilde{N}_{ej})\} \\
& + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (C_i+C_j)^T \\ (D_i+D_j)^T \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (C_i+C_j) & (D_i+D_j) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

应用引理 2.3.2，我们可以得到(4.2.3)与$\Gamma(s)<0$是等价的，类似于定理 2.3.1 的证明，可知系统(4.1.4)零解是具有γ衰减的鲁棒均方指数稳定的

推论 4.2.1： 具有不确定参数和外界干扰的时滞随机模糊系统 (4.1.4)，若时滞函数不是时变的而是定长的，对于任意给定的$\gamma>0$，存在正数$\varepsilon_{ij}, 1\le i\le j\le r$，

正数 $\sigma_{ij},1\le i,j\le r$，矩阵 $S>0,X>0$ 且存在矩阵组 Y_j，满足以下 LMI，则当状态反馈控制器取 $u(t)=-\sum_{j=1}^{r}h_j(z(t))K_jx(t)$，$K_j=Y_jX^{-1}$，称该系统零解是具有 γ 衰减的鲁棒均方指数稳定的。

$$\Pi_{ij}=\begin{pmatrix}\Omega_{ij} & * & * & * & * & * & * \\ (A_{di}+A_{dj})X & -2S & * & * & * & * & * \\ 2B_v^T & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ (N_{ai}+N_{aj})X-N_{bi}Y_j-N_{bj}Y_i & (N_{adi}+N_{adj})X & 0 & -\varepsilon_{ij}I & * & * & * \\ (E_i+E_j)X & (E_{di}+E_{dj})X & E_v & 0 & -2(X-\sigma_{ij}MM^T) & * & * \\ (N_{ei}+N_{ej})X & (N_{edi}+N_{edj})X & 0 & 0 & 0 & -2\sigma_{ij}I & * \\ (C_i+C_j)X & (D_i+D_j)X & 0 & 0 & 0 & 0 & -2I\end{pmatrix}$$

$$<0 \qquad 1\le i\le j\le r \tag{4.2.4}$$

其中，$\Omega_{ij}=(A_i+A_j)X+X(A_i+A_j)^T-B_iY_j-B_jY_i-Y_j^TB_i^T-Y_i^TB_j^T+\varepsilon_{ij}MM^T+2S$

证明：将原函数时滞的部分设为定长的，即 $\tau(t)=l$，那么 $\dot\tau(t)=0$，我们基于定理 4.2.1 的证明，可以知道 $-(1-h)S$ 中 h 已变为 0，因而可以得到 (4.2.4) 式的结果，此推论得证。

4.3. 仿真例子

在这一部分，我们给出了一个数值例子来说明方法的使用。

例 4.3.1 定义模糊数“负”“正”（如图 4-1）

$$M_{负}=\begin{cases}1 & x_2\le -1\\ \dfrac{1-x_2}{2} & -1<x_2<1\\ 0 & x_2\ge 1\end{cases}\qquad M_{正}=\begin{cases}0 & x_2\le -1\\ \dfrac{1+x_2}{2} & -1<x_2<1\\ 1 & x_2\ge 1\end{cases}$$

设 $A_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0.5\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},B_1=B_2=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix},C_1=(1\quad 0),C_2=(1\quad 0)$，

$D_1=D_2=(0\quad 0)$，$E_1=E_2=\begin{pmatrix}0 & 0.3\\ -0.3 & 0\end{pmatrix}$，M=$\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ -0.3 & 0.3\end{pmatrix}$，

$N_{a1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},N_{a2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},N_{ad1}=\begin{pmatrix}0.02 & 0.01\\ 0.01 & 0.01\end{pmatrix},N_{ad2}=\begin{pmatrix}0.01 & 0.02\\ 0.02 & 0\end{pmatrix}$，

$$N_{b1}=N_{b2}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},N_{e1}=N_{e2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},N_{ed1}=N_{ed2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},B_v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},E_v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$A_{d1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&-5\end{pmatrix},A_{d2}=\begin{pmatrix}-1&2\\0&2\end{pmatrix},E_{d1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},E_{d2}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},l=0.1,$$

函数 $F(t)=\begin{pmatrix}0.5\sin t&0\\0&0.4\cos t\end{pmatrix}$。

假定扰动输入函数（如图 4-2）

$$v(t)=\begin{cases}1, & 2k\le t\le 2k+1\\ \text{-}1, & 2k+1<t<2k+2\end{cases}\qquad k=0,1,\cdots$$

规则 1：IF $x_2(t)$ 负，THEN

$$\begin{aligned}dx(t)=&[A_1x(t)+A_{d1}x(t-l)+B_1u(t)+B_vv(t)]dt\\&+[E_1x(t)+E_{d1}x(t-l)+E_vv(t)]dw(t)\end{aligned}$$

$$y(t)=C_1x(t)+D_1x(t-l)$$

规则 2：IF $x_2(t)$ 正，THEN

$$\begin{aligned}dx(t)=&[A_1x(t)+A_{d1}x(t-l)+B_1u(t)+B_vv(t)]dt\\&+[E_1x(t)+E_{d1}x(t-l)+E_vv(t)]dw(t)\end{aligned}$$

$$y(t)=C_2x(t)+D_2x(t-l)$$

使用 Matlab 的 LMI 工具箱，根据推论 4.2.1 计算得控制器增益：

$K_1=(\text{-}13.0000\quad 1073.4000)$，$K_2=(54.6154\quad 688.1183)$。

图 4-3 描绘了取初值函数 $\varphi(t):=(0,\ 0)^T$, $t\in[-l,0]$ 时闭环系统输出 y 的一条轨道。(a) 为原系统的响应，是不稳定的；(b) 是由推论 1 设计的均方稳定控制效果。这里仿真的时间步长取 0.2×10^{-2}。

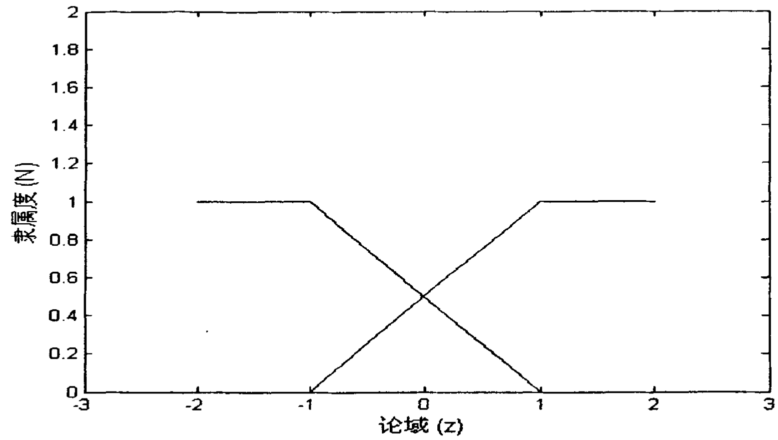


图 4-1 前提变量模糊数

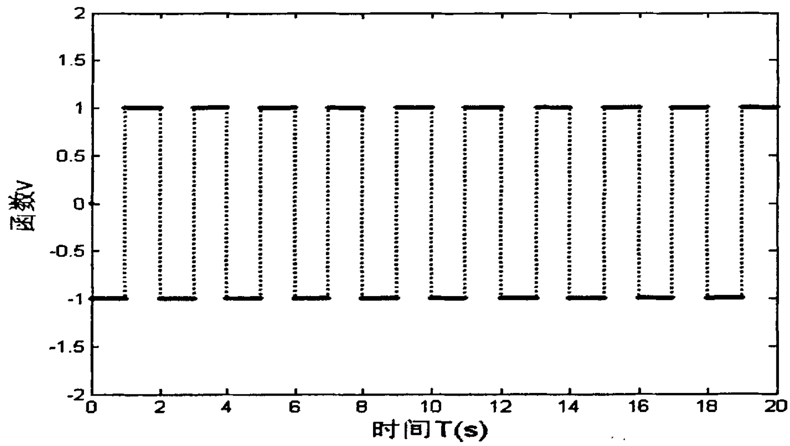


图 4-2 函数 v(t)的分布图

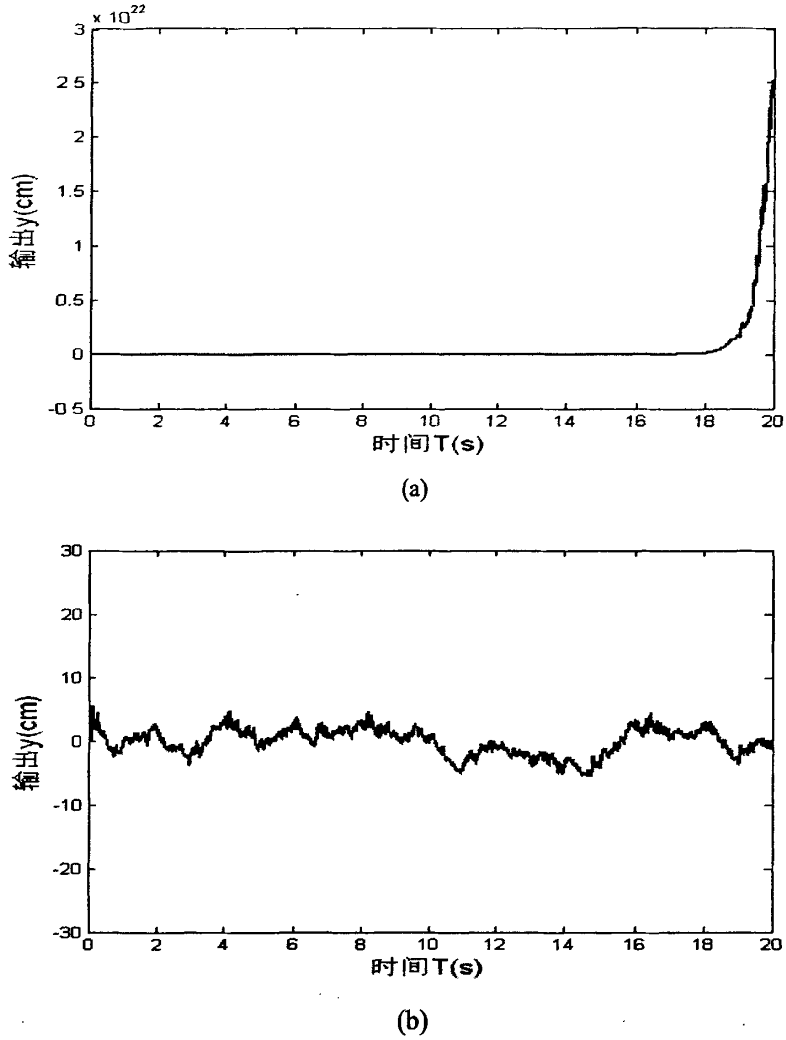


图 4-3 仿真系统响应曲线

第五章 结论与展望

众所周知，时滞和随机是造成系统不稳定的二大因素。从而让我们想到如果具有时滞的系统同时又受到一个随机参数的干扰的话，我们该如何判定它的稳定性以及如何设计它的控制器。虽然已经有一些文献给出了基于 T-S 模糊模型的随机系统的一些镇定的充分条件，然而还未涉及到时滞的领域，而本文所要探讨的问题就是关于时滞非线性随机模糊系统的稳定性条件和状态反馈控制器的设计。

本文主要是把 T-S 模糊系统作为基础来进行系统镇定的充分条件的研究与控制器的设计。T-S 模糊系统作为非线性系统建模的一类有效的方法，它具有比较丰富的局部结构，便于用 Lyapunov 函数分析全局稳定性和设计多变量的系统控制器。当 T-S 模糊系统模型的参数受到随机因素的干扰时，就成为一个随机 T-S 模糊系统。值得注意的是，本质上随机 T-S 模糊系统是一个非线性随机微分方程。如果一个系统还受到之前系统状态的影响，则我们就在随机 T-S 模糊系统上再考虑时滞的部分，从而也就成为了具有时滞的非线性随机模糊系统。这是本文主要研究的问题。

在第二章中，定义了在 Itô 意义下连续时间的时滞随机模糊系统解析式的基本形式，并证明了该时滞随机模糊系统的解的存在唯一性。同时，根据非线性时滞随机模糊系统的 Lyapunov 稳定性理论导出闭环系统均方指数稳定的条件。然后，在此基础上，运用并行分布补偿（PDC）原理，为每个子系统设计一个局部的子补偿器，补偿器使用与全局模糊系统相同的前提条件，总控制器由子补偿器模糊“混合”而成，从而得到不确定参数时滞随机模糊系统稳定性的控制条件。利用 Schur 公式等理论工具最终将其转化为 LMI 的形式，最后数值仿真例子说明

了其有效性。仿真例子说明考虑时滞的控制器对于那些受到之前状态影响的系统具有更好的控制力。不考虑时滞的控制器则往往难以控制那些受到之前状态影响的系统。

第三章，我们对具有不确定参数的时滞随机模糊系统的鲁棒均方镇定条件进行了研究。在这一章，我们给出了具有时滞同时参数带随机因素的模糊系统的鲁棒镇定的充分性条件。基于系统鲁棒镇定的条件，我们进一步在该系统的基础上设计状态反馈鲁棒控制器，利用 Schur 公式等理论工具最终将其转化为 LMI 的形式，数值仿真例子说明了状态反馈控制器的作用。

第四章，我们对具有外界扰动的不确定时滞模糊系统的鲁棒 H_∞控制进行研究。由于该系统相比较之前的具有时滞同时参数带随机因素的模糊系统而言已经不是闭环系统了，在保证系统稳定性的同时要考虑干扰衰减问题。我们给出了非线性时滞随机模糊系统的鲁棒 H_∞状态反馈控制器的 LMI 设计方法。并通过数值仿真的例子说明了它的有效性。

本文主要是研究具有时滞的随机模糊系统，并且得到了一些有效的结论，但是仍然有许多值得改进的地方。本文稳定性条件基本上不依赖于时滞的长短，然而在现实生活中，时滞的长短对于一个系统的影响还是有差别的，并且状态反馈控制器的设计是基于各个子系统都适用的一个公共正定矩阵的存在性，所以本文的结论过于保守，需要进一步考虑依赖时滞长短的条件和其它放宽条件来设计较为不保守的控制器。另外，还可以考虑将这些结论向非线性随机泛函微分系统进行推广。

参考文献

[1]Tanaka K, Sugeno M, Sability analysis of fuzzy systems using Lyapunov's direct method, in Proc. NAFIPS'90, 1990, pp 133-136

[2]Tanaka K, Sugeno M, Stability analysis and design of fuzzy control systems, IEEE Trans，Fuzzy Sets, Syst., 1992, vol. 45, no. 2, pp. 135-156

[3]Langari R , Tomizuka M, Stability analysis of fuzzy linguistic control systems, in Proc.29th, IEEE Conf. Decision and control, Honolulu:HI, 1990, pp. 35-42

[4]Wang L X, Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis, Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall, 1994.

[5]Chen G, Ying H, Stability Analysis of non-linear fuzzy PI control systems, in Proc. 3rd IFIS, Kobe, Japan, 1993, pp. 128-133

[6]Farinwata S S, Vachtsevanos G, Stability analysis of the fuzzy logic controller designed by the phase portrait assignment algorithm, in Proc.2th, IEEE Int Conf. Fuzzy Syst., San Franciso, 1993, pp. 1377-1382

[7]Zadeh L，Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Trans，Syst., Man, Cybern., Jan, 1973, vol. SMC-3, pp. 28-44

[8]Gegov A E, Frank P M, Hierarchical fuzzy control of multivariable systems, Fuzzy Sets Syst., 1995,vol. 72, no. 3, pp. 299-310.

[9]Lee C, Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller, IEEE Trans，Syst., Man, Cybern., Feb , 1973, vol. 20, pp. 404-435

[10]Palm R, Driankov D, Hellendoorn H, Model Based Fuzzy Control, Berlin, Germany: Springer-Verlag， 1997

[11]Slotine J J E, Li W, Applid Nonlinear Control, Englewood Clifffs, New Jersey:Prentice-Hall, 1991.

[12]Takagi T, Sugeno M, Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, IEEE Trans on Systems Man and Cybernetics, 1985, 15(2),pp. 116-132

[13]Wang H O, Tanaka K, Griffin M F, An Approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues, IEEE Trans，Fuzzy Sets,Syst., Feb, 1996, vol.4, no 1, pp.14-23

[14]Tanaka T, Sugeno M, Stability analysis and design of fuzzy control systems, IEEE Trans，Fuzzy Sets, Syst., 1992, vol. 45, no. 2, pp. 135-156,.

[15]Tanaka K, Ikeda T, Wang H O, Fuzzy Regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs, IEEE Trans on Fuzzy Systems,1998, vol.6 no.2, pp. 250-265

[16]Wang Z D, Ho D W C, Liu X H, A note on the robust stability of uncertain stochastic fuzzy systems with time-delays, IEEE Trans.，Syst., Man, Cybern., Part A, Syst. & Huma., July, 2004, vol. 34, no. 4, pp.570-576

[17]Cao Y Y, Frank P M, Robust H_∞ disturbance attenuation for a class of uncertain discrete-time fuzzy systems, IEEE Trans.，Fuzzy, Syst., Aug 2000, vol. 8, pp. 406-415

[18]Lee H J, Park J B, Chen G, Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties, IEEE Trans，Fuzzy ,Syst., Apr, 2001, vol. 9, pp.369-378

[19]Cao Y Y, Frank P M, Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach, IEEE Trans.，Fuzzy Syst., Apr, 2000, vol. 8, no. 2, pp.200-211

[20]胡良剑，邵世煌，吴让泉， T-S 模糊随机系统的均方镇定,信息与控制，2004，卷 33 第 5 期: 545-559

[21]Hausmann U G, Asymptotic stability of the linear Itô equation in infinite dimensions, J. Math. Anal. Appl., 1978, vol. 65, pp, 219-235

[22]Ichikawa A, Stability of semilinear stochastic evolution equations, Math.. Anal. Appl., 1982, vol. 90, pp. 12-44

[23]Ge J H, Frank P M, Lin C F, Robust H_∞ state feedback control for linear systems

with state delay and parameter uncertainty, Automatica, 1998, vol. 32, pp. 1504-1538

[24]Xue X, Qiu K, Robust H_∞-compensator design for time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainties, IEEE Trans, Automat ,Contr., July 2000, vol. 45, pp. 1363-1369

[25]Xie L, Souza C E D, Robust H_∞ control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix. Syst. Control Lett., 1990, vol. 14, pp. 389-396

[26]Xu S, Yang C, Zhou S, Robust H_∞ control for uncertain discreate-time systems with circular pole constraints, Syst. Control Lett., 2000, vol. 39, pp. 13-18

[27]Xu S Y, Chen T W, Robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state delay, IEEE Trans, Automat ,Contr., Dec 2002, vol. 47, no. 12, pp.2089-2094

[28]Hu L J, Zhao W G, Shao S H, Robust stochastic stabilization and robust H_∞ control for uncertain stochastic fyzzy systems, IEEE Fuzzy, 2005, Reno, Usa, pp.254-259

[29]Huang H, Ho D W C, Lam J, Stochastic stability analysis of fuzzy Hopfield neural networks with time-varying delays, IEEE Trans on Circuits and Systems, 2005, vol.52, no.5: 251-255

[30]MAO X, Stochastic Differential Equations and their Application, Chichester: Springer-Horwood Publishing, 1997. 169-173

[31]Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, etc, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Philadelphia: PA: Studies in applied Mathematics, SIAM, 1994

[32]Malek-Zavarei M and Jamshidi M, Time-Delay Systems: Analysis, Optimation and Application, Amsterdam, The Netherlands: North-Holand, 1987

[33]胡良剑，模糊随机系统分析与 T-S 随机模糊系统控制，东华大学博士学位论文，2003

攻读硕士期间发表的论文

[1] 杨爱娜，胡良剑，非线性时滞随机模糊系统的均方镇定，纺织高校基础科学学报（已录用）

致谢

本硕士论文是在导师胡良剑教授的悉心指导下完成的。这一年多来，从论文的选题、资料的查阅和整理，到最后的论文的撰写和修改等方方面面都得到了胡老师的指导和帮助。特别是在去年 9 月至今年 6 月，胡老师在英国进修期间，仍以 E-mail、视频等方式督促和指导我的学习，丝毫未有放松。胡老师不仅在学术上给我很多启发与指导，他严谨的治学态度、平易近人的工作作风也给我留下了极为深刻的映像。胡老师作为一名教师的诲人不倦的精神深深地感动了我。值此论文完成之际，谨向我敬爱的导师胡良剑教授致以衷心的感谢！