

## 第四章 系统的时间响应分析

## 内容提要

## 一、时间响应的组成

任一稳定系统的时间响应都是由瞬态响应和稳态响应两部分组成。

系统的时间响应可从两方面分类，按振动性质可分为自由响应与强迫响应，按振动来源可分为零输入响应与零状态响应。控制工程所要研究的响应往往是零状态响应。

## 二、时域性能指标

1. 延迟时间  $t_d$

2. 上升时间  $t_r$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = \frac{\pi - \beta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

3. 峰值时间  $t_p$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

4. 调节时间  $t_s$

$$\begin{cases} t_s = 4T & (\Delta = 0.02) \\ t_s = 3T & (\Delta = 0.05) \end{cases}$$

二阶系统

$$\begin{cases} t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} & (\Delta = 0.02) \\ t_s = \frac{3}{\xi \omega_n} & (\Delta = 0.05) \end{cases}$$

5. 最大超调量  $M_p$

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

6. 稳态误差  $e_{ss}$

## 三、稳定性

1. 稳定性的概念

线性系统稳定的充分必要条件为：系统特征方程的全部根都具有负实部。又由于系统特征方程的根就是系统的极点，所以系统稳定的充分必要条件就是系统的全部极点都在  $s$  平面的左半平面。

2. 劳斯稳定判据

劳斯判据指出系统稳定的充分必要条件是：劳斯表中第一列元素全部大于零。若出现小于零的元素，系统不稳定，且第一列元素符号改变的次数等于系统特征方程具有正实部特征根的个数。

四、稳态偏差

1. 参考输入作用下系统的稳态偏差

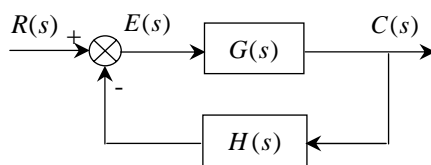


图 4-1 参考输入作用下系统方框图

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

2. 干扰作用下系统的稳态误差

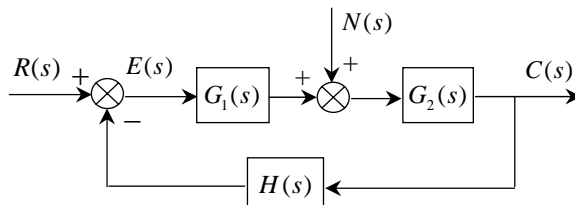


图 4-2 干扰作用下的反馈系统方框图

$$e_{ss_N} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

4-1 什么是时间响应？时间响应由哪两部分组成？各部分的定义是什么？

答：系统在外加作用(输入)激励下，其输出量随时间变化的函数关系称之为系统的时间响应，通过对时间响应的分析可揭示系统本身的动态特性。

任一系统的时间响应都是由瞬态响应和稳态响应两部分组成。

瞬态响应：系统受到外加作用激励后，从初始状态到最终状态的响应过程称为瞬态响应。

稳态响应：时间趋于无穷大时，系统的输出状态称为稳态响应。

瞬态响应反映了系统动态性能，而稳态响应偏离系统希望值的程度可用来衡量系统的精确程度。

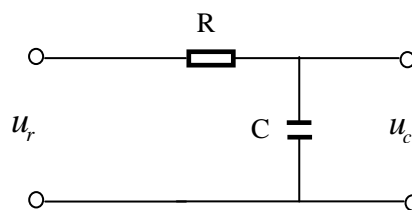
4-2 系统稳定性的定义是什么？

答：一个控制系统在实际应用中，当受到扰动作用时，就要偏离原来的平衡状态，产生初始偏差。所谓控制系统的稳定性，就是指当扰动消失之后，系统从初始偏差恢复到原平衡状态的能力。

4-3 一个系统稳定的充分和必要条件是什么？

答：系统特征方程的全部根都具有实部。或者说，闭环传递函数的全部极点均在  $s$  平面的左半部。

4-4 如题图 4-4 所示的电网络，试求其单位阶跃响应、单位脉冲响应和单位斜坡响应，并画出相应的响应曲线。



题图 4-4

解：如图 RC 电网络的传递函数为：

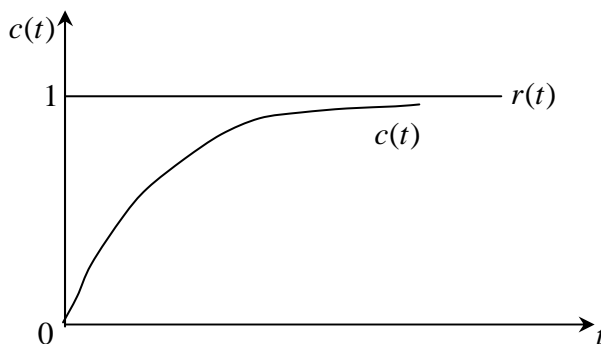
$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$T = RC$$

(1) 单位阶跃响应：

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

单位阶跃响应曲线如题图 4-4(a)所示。

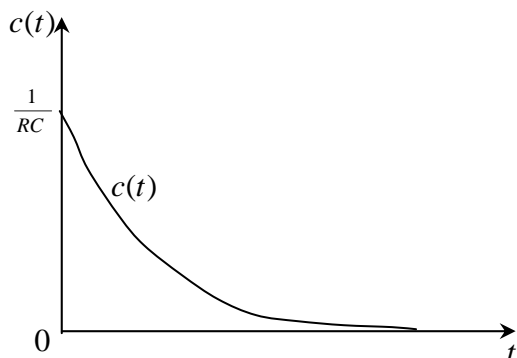


题图 4-4(a) 系统的单位阶跃响应曲线

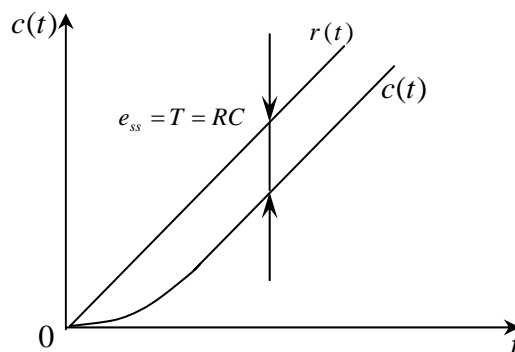
(2) 单位脉冲响应：

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

单位脉冲响应曲线如题图 4-4(b)所示。



题图 4-4(b) 系统的单位脉冲阶跃响应曲线



题图 4-4(c) 系统的单位斜坡阶跃响应曲线

(3) 单位斜坡响应:

$$C(t) = t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = t - RC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

单位斜坡响应曲线如题图 4-4(c)所示。

4-5 设温度计能在 1 分钟内指示出响应值的 98%，并且假设温度计为一阶系统，求时间常数。如果将此温度计放在澡盆内，澡盆的温度依  $10^{\circ}\text{C}/\text{min}$  的速度线性变化，求温度计示值的误差是多大？

解：该系统为一阶系统，即

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

根据题意可知

$$4T = 1 \text{ min}$$

即  $T = 15(s)$

所以，系统的数学模型为

$$G(s) = \frac{1}{15s + 1}$$

又由于

$$R(s) = \frac{1}{6s^2}$$

所以  $C(s) = G(s)R(s) = \frac{1}{6s^2(15s + 1)}$

$$c(t) = \frac{1}{6}(t - 15 + 15e^{-\frac{1}{15}t})$$

$$e(t) = r(t) - c(t) = \frac{1}{6}t - \frac{1}{6}t + 2.5(1 - e^{-\frac{1}{15}t}) = 2.5(1 - e^{-\frac{1}{15}t})$$

当  $t \rightarrow \infty$  时

$$e_{ss} = 2.5^\circ\text{C}$$

4-6 已知控制系统的微分方程为  $2.5y'(t) + y(t) = 20x(t)$ ，试用拉氏变换法求该系统的单位脉冲响应和单位阶跃响应，并讨论二者的关系。

解：在零初始条件下，给上述微分方程的等号两端取拉斯变换，得

$$2.5sY(s) + Y(s) = 20X(s)$$

系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{20}{2.5s + 1} = \frac{8}{s + 0.4}$$

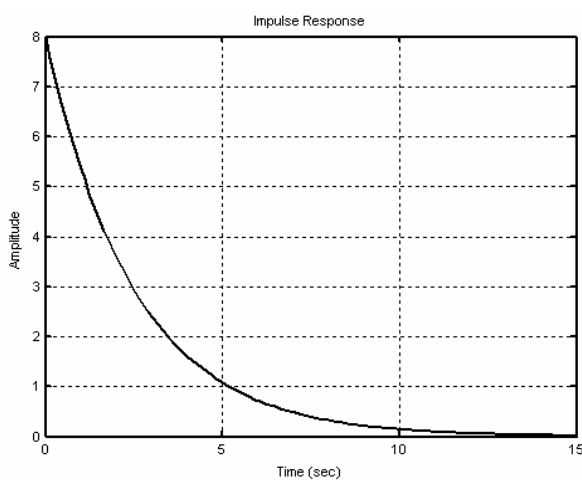
系统的单位脉冲响应为

$$y_1(t) = 8e^{-0.4t}$$

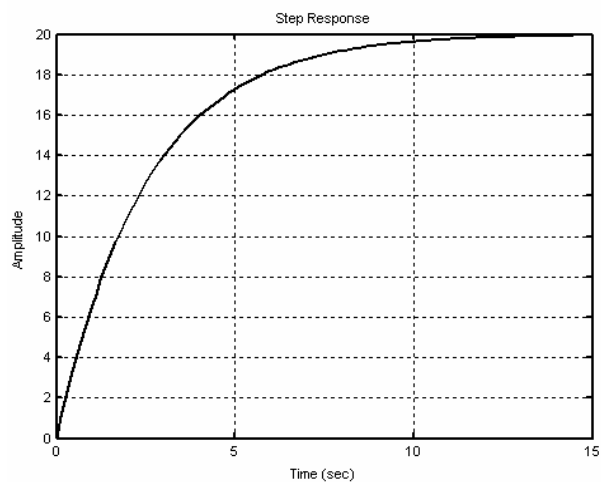
系统的单位阶跃响应为

$$y_2(t) = 20 - 20e^{-0.4t}$$

系统的单位脉冲响应和单位阶跃响应曲线分别如题图 4-6(a)和 4-6(b)所示。



题图 4-6(a) 系统的单位脉冲响应曲线



题图 4-6(b) 系统的单位阶跃响应曲线

根据以上分析可知，单位脉冲函数  $\delta(t)$  为单位阶跃函数的导数，则单位脉冲响应为单位阶跃响应的导数。

MATLAB 参考程序 graph406.m

G=tf(8,[1,0.4]);

figure(1);impulse(G);grid;

figure(2);step(G);grid;

4-7 设单位反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

试求系统的上升时间、峰值时间、最大超调量和调整时间。

解：系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

因为  $\omega_n^2 = 1$

所以  $\omega_n = 1$

又因为  $2\xi\omega_n = 1$

所以  $\xi = 0.5$

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1} \xi}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1} \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{3.14 - \cos^{-1} 0.5}{\sqrt{1 - 0.5^2}} = 2.42(s)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{3.14}{\sqrt{1 - 0.5^2}} = 3.63(s)$$

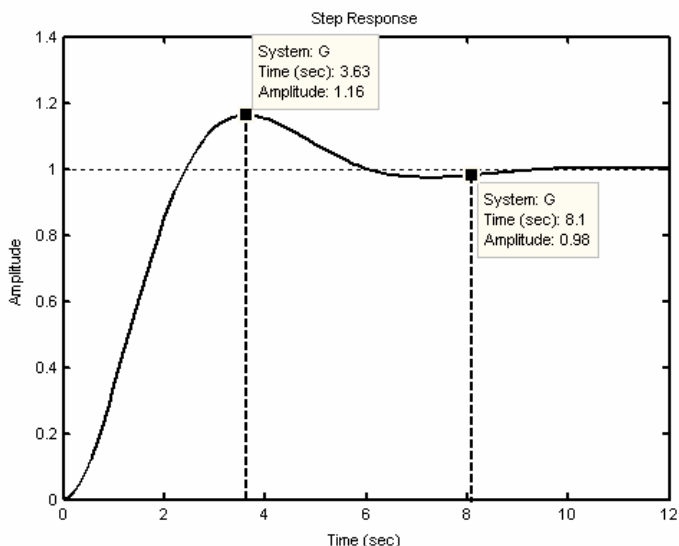
$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{0.5 \times 3.14}{\sqrt{1-0.5^2}}} = 16.3\%$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{0.5} = 6(s) \quad \Delta = 0.02$$

或者

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.5} = 8(s) \quad \Delta = 0.05$$

系统的单位阶跃响应曲线如题图



题图 4-7 系统的单位阶跃响应曲线

4-7 所示。

MATLAB 参考程序 graph407.m

G=tf(1,[1,1,1]);

figure;step(G);

grid;hold off

4-8 设有一闭环系统的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

为了使系统对阶跃输入的响应有约 5% 的超调量和 2 秒的调整时间，试求  $\xi$  和  $\omega_n$ 。

解：由  $M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 5\%$

解得  $\xi = 0.69$

若  $\Delta = 0.02$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 2$$

$$\text{则 } \omega_n = \frac{2}{\xi} = \frac{2}{0.69} = 2.9(\text{rad/s})$$

若  $\Delta = 0.05$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = 2$$

$$\text{则 } \omega_n = \frac{3}{2\xi} = \frac{3}{2 \times 0.69} = 2.17(\text{rad/s})$$

系统的单位阶跃响应曲线如题图 4-8 所示。

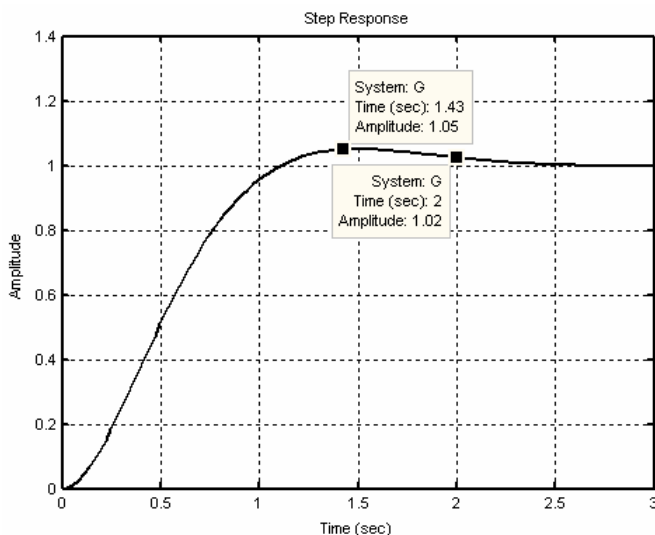
MATLAB 参考程序 graph408.m

G=tf(8.41,[1,4,8.41]);

figure;step(G);grid;hold off

4-9 已知系统的单位阶跃响应为  $c(t) = 1 + 0.2e^{-60t} - 1.2e^{-10t}$ ，试求：

(1) 该系统的闭环传递函数。



题图 4-8 系统的单位阶跃响应曲线

(2) 系统的阻尼比  $\xi$  和无阻尼固有频率  $\omega_n$ 。

解：(1) 单位阶跃响应的拉氏变换为  $C(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.2}{s+60} - \frac{1.2}{s+10}$

系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = 1 + \frac{0.2s}{s+60} - \frac{1.2s}{s+10} = \frac{600}{s^2 + 70s + 600}$$

(2) 由系统的闭环传递函数得

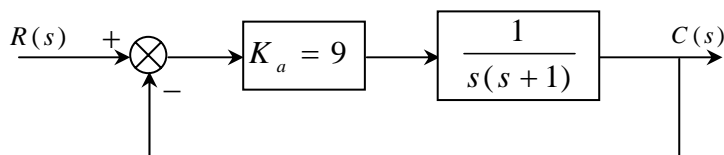
$$\omega_n^2 = 600 \quad \text{解得} \quad \omega_n = 10\sqrt{6} = 24.495$$

$$2\xi\omega_n = 70 \quad \text{解得} \quad \xi = \frac{70}{2\omega_n} = 1.43$$

4-10 题图 4-10 为某数控机床系统的位置随动系统的方框图，试求：

(1) 阻尼比  $\xi$  及无阻尼比固有频率  $\omega_n$ 。

(2) 求该系统的  $M_p$ ， $t_p$  和  $t_s$ 。



题图 4-10

解：(1) 系统的闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + s + 9}$

由系统的闭环传递函数得

$$\omega_n^2 = 9 \Rightarrow \omega_n = 3$$

$$2\xi\omega_n = 1 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2\omega_n} = \frac{1}{6} = 0.17$$

$$(2) M_p = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} = e^{-\frac{0.17}{\sqrt{1-0.17^2}}\pi} = 58.8\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{1-0.17^2}} = 1.062(s)$$

$$\Delta = 0.02 \text{ 时 } t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.17 \times 3} = 7.84(s)$$



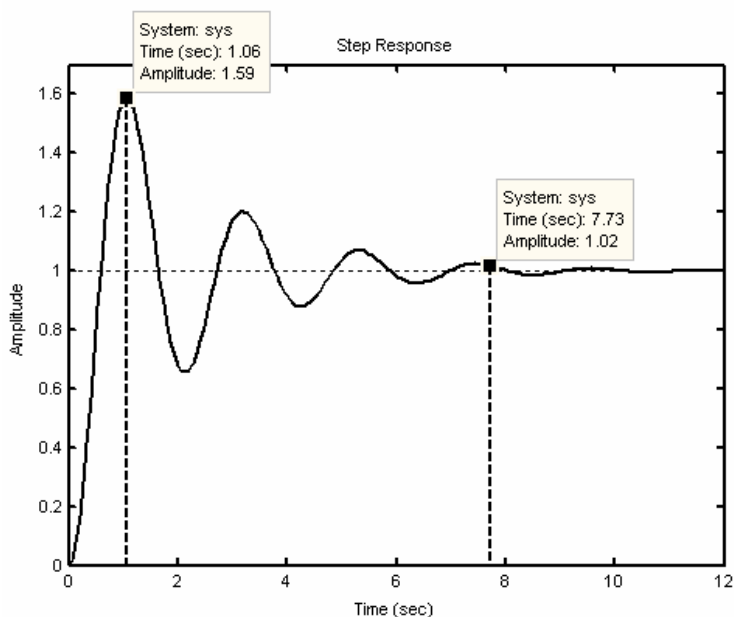
$$\Delta = 0.05 \text{ 时 } t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{0.17 \times 3} = 5.88(s)$$

系统的单位阶跃响应曲线如题图 4-10(a)所示。

MATLAB 参考程序 graph410.m

```
n1=[9];d1=[1 1 0];n2=[1];d2=[1];[n,d]=feedback(n1,d1,n2,d2);
```

```
figure;step(n,d);v=[0,12,0,1.7];axis(v)
```



题图 4-10(a) 系统的单位阶跃响应曲线

4-11 已知单位反馈系统的开环传递函数  $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$ ，求：(1)  $K = 20, T = 0.2$ ；(2)

$K = 16, T = 0.1$ ；(3)  $K = 2.5, T = 1$  等三种情况时的单位阶跃响应。并分析开环增益  $K$  与

时间常数  $T$  对系统性能的影响。

解：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{Ts+1+K} = \frac{K/(1+K)}{\frac{T}{1+K}s+1}$$

时间常数

$$T^* = \frac{T}{1+K}$$

$$c(t) = \frac{K}{1+K} \left(1 - e^{-\frac{t}{T(1+K)}}\right)$$

(1)  $K = 20, T = 0.2$

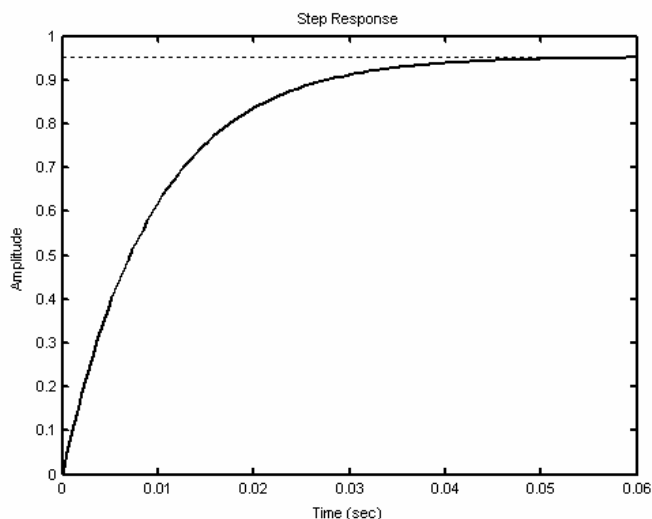
$$C(t) = 0.95 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.01}}\right)$$

(2)  $K = 16, T = 0.1$

$$c(t) = 0.94 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.06}}\right)$$

(3)  $K = 2.5, T = 1$

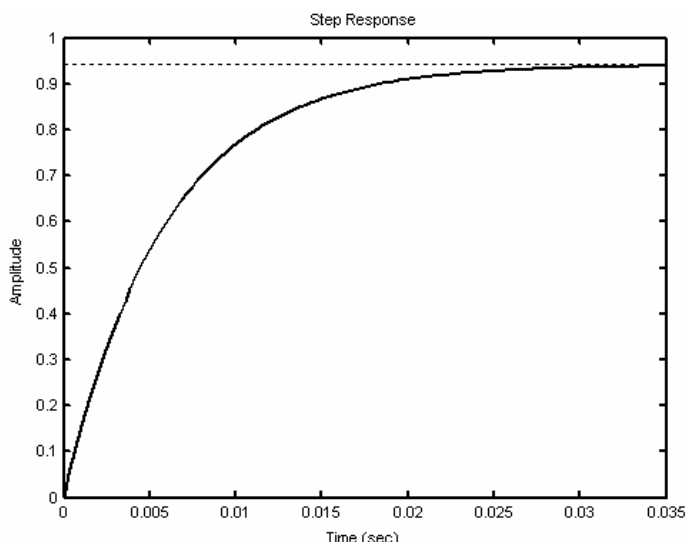
$$c(t) = 0.71 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.29}}\right)$$



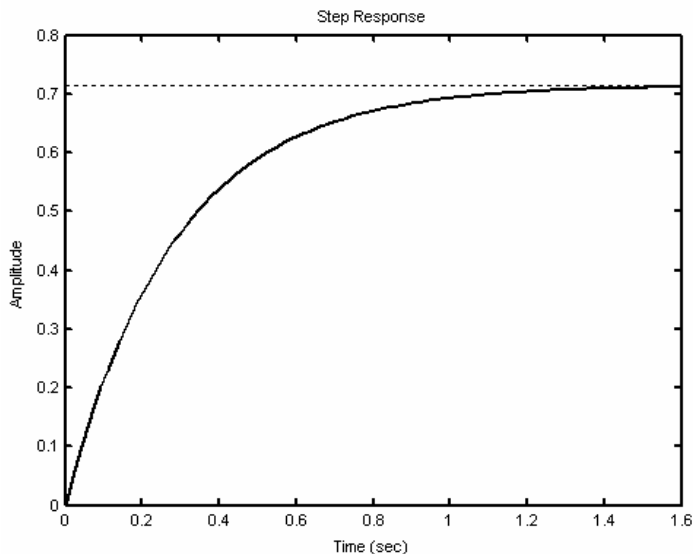
题图 4-11(a)  $K = 20, T = 0.2$  时系统的单位阶跃响应曲线

系统的单位阶跃响应曲线如题图 4-11(a)、4-11(b)和 4-11(c)所示。

可见,  $K$  增大, 使闭环增益增大, 输出稳态值增大, 更接近期望值 1, 误差减小;  $K$  增大, 使闭环时间常数减小, 响应加快。  $T$  增大, 闭环时间常数增大, 响应变慢。



题图 4-11(b)  $K = 16, T = 0.1$  时系统的单位阶跃响应曲线



题图 4-11(c)  $K = 2.5, T = 1$  时系统的单位阶跃响应曲线

MATLAB 参考程序 graph411.m

```
n1=[20];d1=[0.2,1];nh=[1];dh=[1];[n11,d11]=feedback(n1,d1,nh,dh);
```

```
figure(1);step(n11,d11);
```

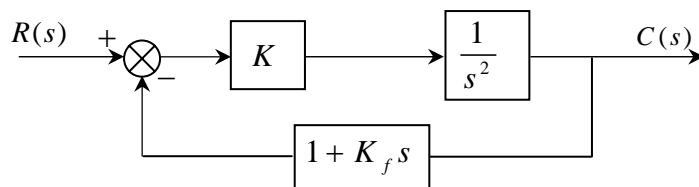
```
n2=[16];d2=[0.1,1];[n21,d21]=feedback(n2,d2,nh,dh);
```

```
figure(2);step(n21,d21);
```

```
n3=[2.5];d3=[1,1];[n31,d31]=feedback(n3,d3,nh,dh);
```

figure(3);step(n31,d31);

4-12 要使题图 4-12 所示系统的单位阶跃响应的最大超调量等于 25%，峰值时间  $t_p$  为 2 秒，试确定  $K$  和  $K_f$  的值。



题图 4-12

解：系统的闭环传递函数为

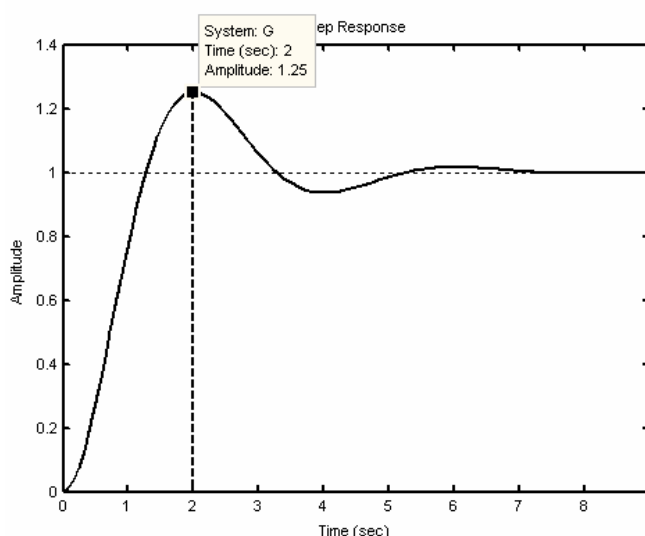
$$\Phi(s) = \frac{K}{s^2 + KK_f s + K}$$

因为  $M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 25\%$

解得  $\xi = 0.4$

又因为  $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 2$

解得  $\omega_n = 1.71$



题图 4-12(a) 系统的单位阶跃响应曲线

和二阶系统的标准式比较，有

$$K = \omega_n^2 = 1.71^2 = 2.92$$

$$KK_f = 2\xi\omega_n = 2 \times 0.4 \times 1.71 = 1.368$$

解得  $K_f = 0.47, K = 2.92$

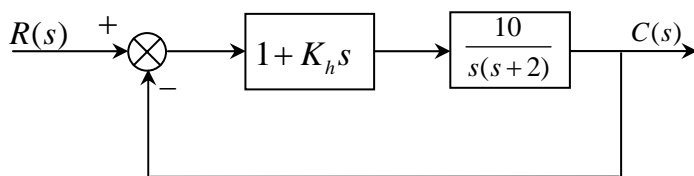
系统的单位阶跃响应曲线如题图 4-12(a)所示。

MATLAB 参考程序 graph412.m

n=2.92;d=[1,2.92\*0.47,2.92];

G=tf(n,d);figure;step(G);

4-13 对题图 4-13 所示系统，试求：(1)  $K_h$  为多少时， $\xi = 0.5$ ；(2) 单位阶跃响应的超调量和调整时间；(3) 比较加入  $(1 + K_h s)$  与不加入  $(1 + K_h s)$  时系统的性能。



题图 4-13

解：系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{10(1 + K_h s)}{s^2 + (2 + 10K_h)s + 10}$$

(1) 因为  $\omega_n^2 = 10$

所以  $\omega_n = 3.16$

又因为  $2 + 10K_h = 2\xi\omega_n$  且  $\xi = 0.5$

所以  $K_h = 0.116$

$$(2) M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = e^{-\frac{0.5 \times 3.14}{\sqrt{1-0.5^2}}} \times 100\% = 16.3\%$$

当  $\Delta = 0.02$  时

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{0.5 \times 3.16} = 2.53$$

当  $\Delta = 0.05$  时

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{0.5 \times 3.16} = 1.9$$

对应的单位阶跃响应曲线如题图 4-13(a)所示。

(3) 不加  $(1 + K_h s)$  时

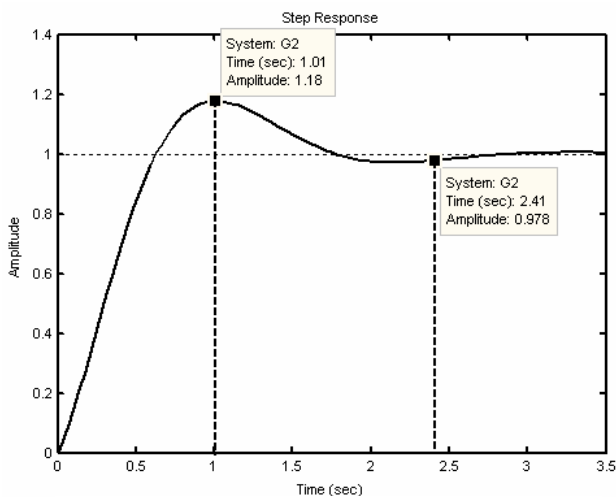
$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

$$\omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \quad \xi = \frac{2}{2\omega_n} = \frac{1}{3.16} = 0.316$$

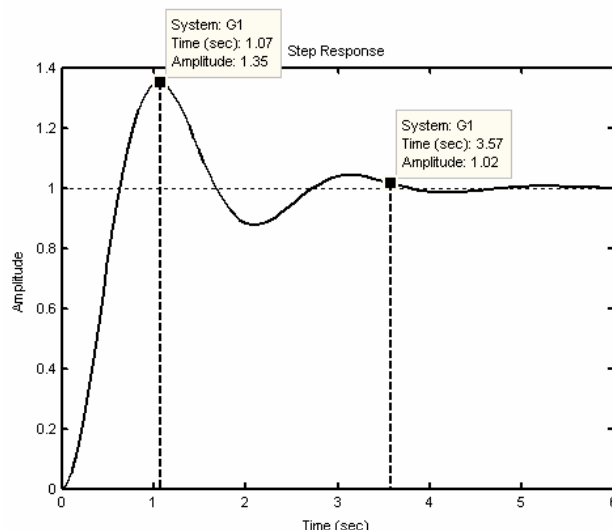
对应的单位阶跃响应曲线如题图 4-13(b)所示。

通过以上分析可知，有  $(1 + K_h s)$  时， $\omega_n$  不变  $\xi$  增加， $t_s$  减小，相应的快速性提高， $M_p$

下降，动态过程相对平稳。



题图 4-13(a) 系统的单位阶跃响应曲线



题图 4-13(b) 系统的单位阶跃响应曲线

MATLAB 参考程序 graph413.m

```
G1=tf([10],[1,2,10]);figure(1);step(G1);
```

```
G2=tf([1.16,10],[1,3.16,10]);figure(2);step(G2);
```

4-14 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

试确定系统稳定时开环放大系数（开环增益） $K$  值的范围。

解：根据系统的开环传递函数可得系统的特征方程为

$$D(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

列出劳斯表如下：

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K$
$s^1$	$\frac{6-K}{3}$	
$s^0$	$K$	

若系统稳定，则：

(1)  $\frac{6-K}{3} > 0$ , 即  $K < 6$ ;

(2)  $K > 0$ ;

所以系统稳定时  $K$  值的范围为： $0 < K < 6$ 。仿真结果如题图 4-14(a)和 4-14(b)所示。

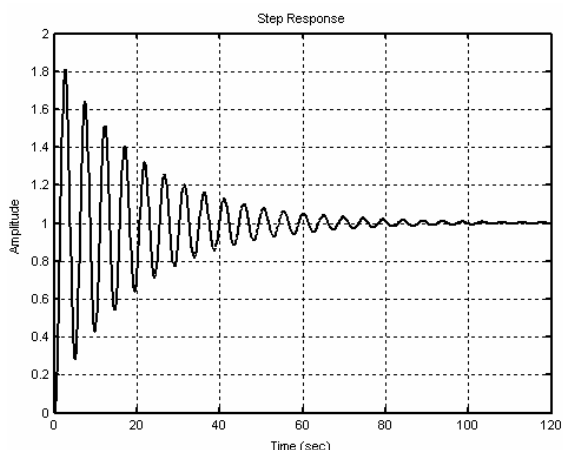
MATLAB 参考程序 graph414.m

```
G1=tf(5,[1,3,2,5]);
```

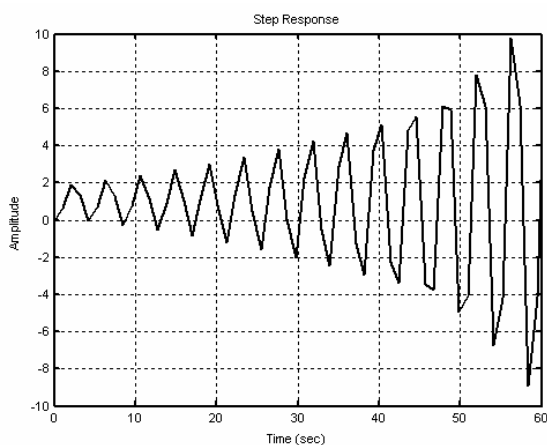
```
figure(1);step(G1);grid;
```

```
G2=tf(7,[1,3,2,7]);
```

```
figure(2);step(G2);grid;
```



题图 4-14(a) K=5 时系统的单位阶跃响应曲线



题图 4-14(b) K=7 时系统的单位阶跃响应曲线

4-15 系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+5)}$$

求斜坡函数输入时, 系统的稳态误差  $e_{ss} = 0.01$  的  $K$  值。

解:

$$G(s) = \frac{K/5}{s(s+1)(\frac{1}{5}s+1)}$$

所以, 开环增益为  $K^* = \frac{K}{5}$

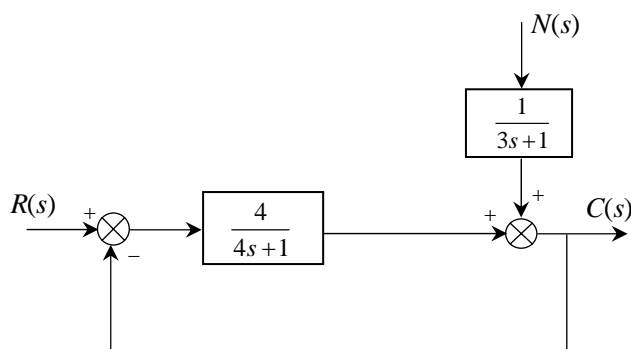
型次  $\nu = 1$

输入  $r(t) = t$

$$\varepsilon_{ss} = e_{ss} = \frac{1}{K^*} = \frac{5}{K} = 0.01$$

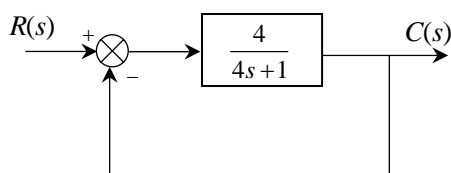
则  $K = 500$

4-16 如题图 4-16 所示系统，已知  $R(s) = N(s) = \frac{1}{s}$ ，试求输入  $R(s)$  和扰动  $N(s)$  作用下的稳态误差。



题图 4-16

解：（1）只考虑  $R(s) = \frac{1}{s}$  作用于系统时， $N(s) = 0$ ，系统的结构图如题图 4-16（a）所示。



题图 4-16 (a)  $N(s) = 0$  时系统的结构图

由题图 4-16(a)可知，系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{4}{4s+1}$$

因为系统为 0 型系统，且  $R(s) = \frac{1}{s}$

所以，系统的稳态偏差为

$$\varepsilon_{ssR} = \frac{1}{1+K} = \frac{1}{1+4} = 0.2$$

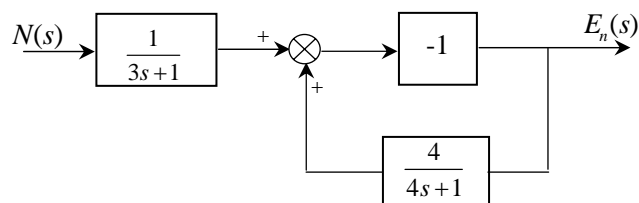
又因为  $H(s) = 1$

所以，有

$$e_{ssR} = \varepsilon_{ssR} = 0.2$$

$R(s)$  作用下的稳态误差响应曲线如题图 4-16(b)所示。

（2）只考虑  $N(s) = \frac{1}{s}$  作用于系统时， $R(s) = 0$ ，以偏差  $E_n(s) = 0$  为输出时系统的结构图如题图 4-16（c）所示。



题图 4-16 (c)  $R(s) = 0$  时系统的结构图

由题图 4-16(c)可知

$$E_N(s) = \Phi_{NE}(s)N(s) = -\frac{4s+1}{4s+5} \cdot \frac{1}{3s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

所以 
$$\varepsilon_{ssN} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{-(4s+1)}{(4s+5)(3s+1)} \cdot \frac{1}{s} = -0.2$$

又因为

$$H(s) = 1$$

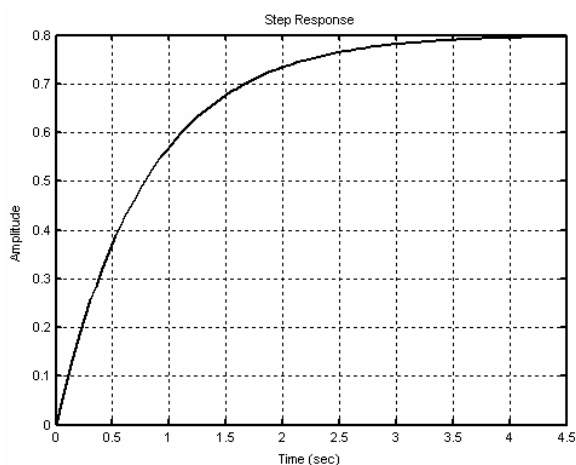
所以，有

$$e_{ssN} = \varepsilon_{ssN} = -0.2$$

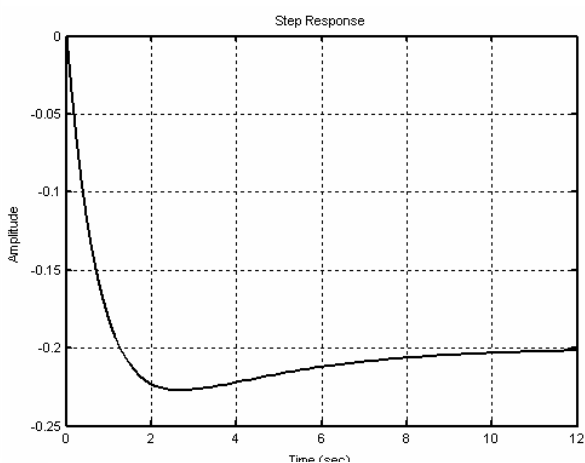
$N(s)$  作用下的稳态误差响应曲线如题图 4-16(d)所示。

(3) 当  $R(s) = N(s) = \frac{1}{s}$  同时作用于系统时

$$e_{ss} = e_{ssR} + e_{ssN} = 0.2 - 0.2 = 0$$



题图 4-16(b)  $R(s)$  作用下的稳态误差响应曲线



题图 4-16(d)  $N(s)$  作用下的稳态误差响应曲线



MATLAB 参考程序 graph416.m

```
n=[4];d=[4,1];nh=[1];dh=[1];
[num,den]=feedback(n,d,nh,dh);
figure(1); step(num,den); grid;
n1=[-4,-1];d1=conv([4,5],[3,1]);
G2=tf(n1,d1);
figure(2);step(G2); grid;
```

4-17 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{100}{s(0.1s+1)}$$

试求当输入信号  $r(t) = 2 + 4t + 5t^2$  时，系统的稳态误差。

解：(1) 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{100}{0.1s^2 + s + 100}$$

该系统为二阶系统，且特征方程的各项系数都大于 0，所以系统就稳定。

(2) 系统在输入信号作用下的误差传递函数为

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{s(0.1s+1)}{0.1s^2 + s + 100}$$

(3) 输入信号  $r(t) = 2 + 4t + 5t^2$  的拉氏变换为  $R(s) = \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{10}{s^3}$

(4) 利用终值定理可求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(0.1s+1)}{0.1s^2 + s + 100} \left( \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{10}{s^3} \right) \rightarrow \infty$$

又解：由于 I 型系统在阶跃输入信号作用下的稳态误差为 0，在斜坡输入信号作用下的稳态误差为  $\frac{v}{K}$ ，在加速度输入信号作用下的稳态误差为  $\infty$ ，该系统为 I 型系统，所以其在给定输入信号作用下的稳态误差为  $\infty$ 。

4-18 已知单位反馈控制系统的开环传递函数如下，试分别求出当输入信号为  $u(t)$ ， $t$  和  $t^2$  时，系统的稳态误差。

$$(1) G(s) = \frac{10}{(0.1s+1)(0.5s+1)}$$

解：系统的闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{10}{0.05s^2 + 0.6s + 11}$

该系统为二阶系统，且各项系数均大于 0，所以系统稳定。

该系统为 0 型系统，所以系统在给定输入信号作用下的稳态误差分别为：

当输入信号为  $u(t)$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = \frac{1}{11}$

当输入信号为  $t$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = \infty$

当输入信号为  $t^2$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = \infty$

$$(2) G(s) = \frac{7(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

解：系统的闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{7(s+1)}{s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 15s + 7}$

系统的特征方程为  $D(s) = s^4 + 6s^3 + 10s^2 + 15s + 7 = 0$

特征方程的各项关系数均大于 0，列写劳斯表如下

$s^4$	1	10	7
$s^3$	6	15	
$s^2$	7.5	7	
$s^1$	9.4		
$s^0$	7		

劳斯表中第一列系数均大于 0，所以系统稳定。

该系统为 I 型系统，所以系统在给定输入信号作用下的稳态误差分别为：

当输入信号为  $u(t)$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = 0$

当输入信号为  $t$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = \frac{8}{7}$

当输入信号为  $t^2$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = \infty$

$$(3) G(s) = \frac{8(0.5s+1)}{s^2(0.1s+1)}$$

解：系统的闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{8(0.5s+1)}{0.1s^3 + s^2 + 4s + 8}$

系统的特征方程为  $D(s) = 0.1s^3 + s^2 + 4s + 8 = 0$

特征方程的各项关系数均大于 0，列写劳斯表如下

$s^3$	0.1	4
$s^2$	1	8
$s^1$	3.2	
$s^0$	8	

劳斯表中第一列系数均大于 0，所以系统稳定。

该系统为 II 型系统，所以系统在给定输入信号作用下的稳态误差分别为：

当输入信号为  $u(t)$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = 0$

当输入信号为  $t$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = 0$

当输入信号为  $t^2$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = \frac{1}{8}$

$$(4) G(s) = \frac{10}{s(s+4)(5s+1)}$$

解：系统的闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{10}{5s^3 + 21s^2 + 4s + 10}$

系统的特征方程为  $D(s) = 5s^3 + 21s^2 + 4s + 10 = 0$

特征方程的各项关系数均大于 0，列写劳斯表如下

$s^3$	5	4
$s^2$	21	10
$s^1$	1.62	
$s^0$	10	

劳斯表中第一列系数均大于 0，所以系统稳定。

该系统为 I 型系统，所以系统在给定输入信号作用下的稳态误差分别为：

当输入信号为  $u(t)$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = 0$

当输入信号为  $t$  时，其稳态误差为  $e_{ss} = 0.4$

当输入信号为  $t^2$  时, 其稳态误差为  $e_{ss} = \infty$

$$(5) G(s) = \frac{10(10s+1)}{s^2(s+4)(5s+1)}$$

解: 系统的闭环传递函数为  $\Phi(s) = \frac{10(10s+1)}{5s^4 + 21s^3 + 4s^2 + 100s + 10}$

系统的特征方程为  $D(s) = 5s^4 + 21s^3 + 4s^2 + 100s + 10 = 0$

特征方程的各项系数均大于 0, 列写劳斯表如下

$s^4$	5	4	10
$s^3$	21	100	
$s^2$	-19.8	10	
$s^1$	89.4		
$s^0$	10		

劳斯表中第一列系数不全大于 0, 所以系统不稳定, 则  $e_{ss}$  不存在。

4-19 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2}$$

求系统的单位脉冲响应和单位阶跃响应。

解: 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2}$$

(1) 单位脉冲响应的拉氏变换

$$C(s) = \Phi(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2}$$

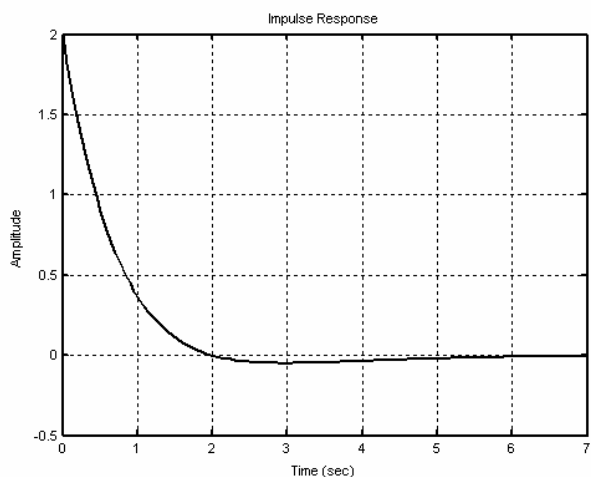
则单位脉冲响应为  $c(t) = 2e^{-t} - te^{-t}$

(2) 单位阶跃响应的拉氏变换

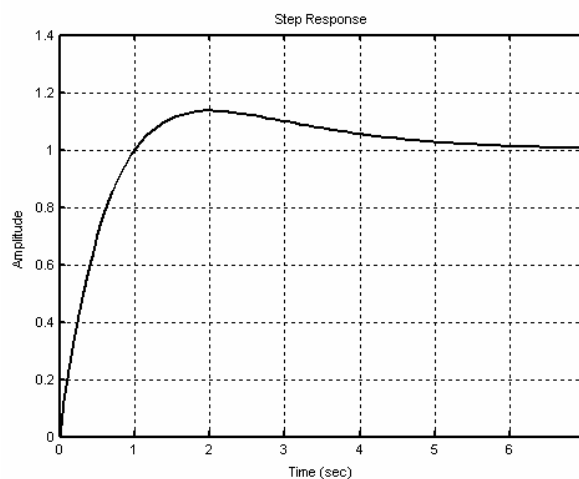
$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s}$$

则单位阶跃响应为  $c(t) = te^{-t} - e^{-t} + 1$

MATLAB 仿真曲线如题图 4-19(a)和 4-19(b)所示。



题图 4-19(a) 系统的单位脉冲响应曲线



题图 4-19(b) 系统的单位阶跃响应曲线

MATLAB 参考程序 graph419.m

```
G=tf([2,1],[1,2,1]);
figure(1);impulse(G);
figure(2);step(G);
```

4-20 已知系统的单位阶跃响应为  $c(t) = 1 + e^{-0.1t} + 2e^{-0.52t} \sin(2t + 30^\circ)$ ，试确定系统的极点。

解：由于单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 + e^{-0.1t} + 2e^{-0.52t} \sin(2t + 30^\circ) \\ &= 1 + e^{-0.1t} + 2e^{-0.52t} (\sin 2t \cos 30^\circ + \cos 2t \sin 30^\circ) \\ &= 1 + e^{-0.1t} + \sqrt{3}e^{-0.52t} \sin 2t + e^{-0.52t} \cos 2t \end{aligned}$$

则

$$C(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+0.1} + \frac{2\sqrt{3}}{(s+0.52)^2 + 4} + \frac{s+0.52}{(s+0.52)^2 + 4}$$

可得系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = 1 + \frac{s}{s+0.1} + \frac{2\sqrt{3}s}{(s+0.52)^2 + 4} + \frac{s(s+0.52)}{(s+0.52)^2 + 4}$$

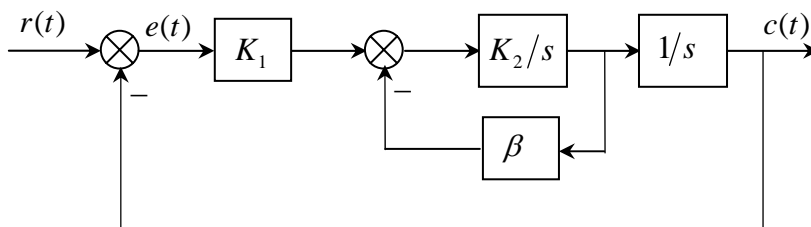
即系统的特征方程为

$$D(s) = (s+0.1)[(s+0.52)^2 + 4] = 0$$

故系统的极点为

$$s_1 = -0.1, \quad s_{2,3} = -0.52 \pm j2$$

4-21 设控制系统如题图 4-21 所示, 其中  $K_1, K_2$  为正常数;  $\beta$  为非负常数。试分析: (1)  $\beta$  值对系统稳定性的影响; (2)  $\beta$  值对系统阶跃响应动态性能的影响; (3)  $\beta$  值对系统斜坡响应稳态误差的影响。



题图 4-21 控制系统

解: 根据题图 4-21 可得系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1 K_2}{s(s + K_2 \beta)}$$

(1)  $\beta$  值对系统稳定性的影响

通过系统开环传递函数, 可得系统的特征方程为

$$D(s) = s^2 + K_2 \beta s + K_1 K_2 = 0$$

由劳斯判据可知, 若要求系统是稳定的, 各项系数必须存在且大于零。因此, 当  $\beta > 0$  时, 系统稳定。

(2)  $\beta$  值对系统阶跃响应动态性能的影响

系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_1 K_2}{s(s + K_2 \beta)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

则  $\omega_n = \sqrt{K_1 K_2}$  ,  $\xi = 0.5\sqrt{K_2/K_1}\beta$

因此,  $\beta$  值通过影响阻尼比来影响系统的动态性能。 $\beta$  值越小, 阻尼比越小, 超调量越大, 上升时间越短。

### (3) $\beta$ 值对系统斜坡响应稳态误差的影响

根据系统的开环传递函数可知, 该系统为 I 型系统, 且静态速度误差系数为  $K_v = K_1/\beta$ , 则该系统对斜坡响应的稳态误差为

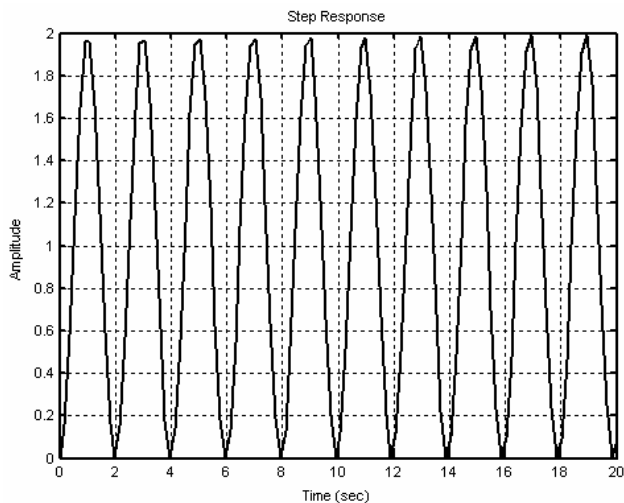
$$e_{ss} = 1/K_v = \beta/K_1$$

因此,  $\beta$  值越大, 系统在斜坡输入作用下的稳态误差将越大。

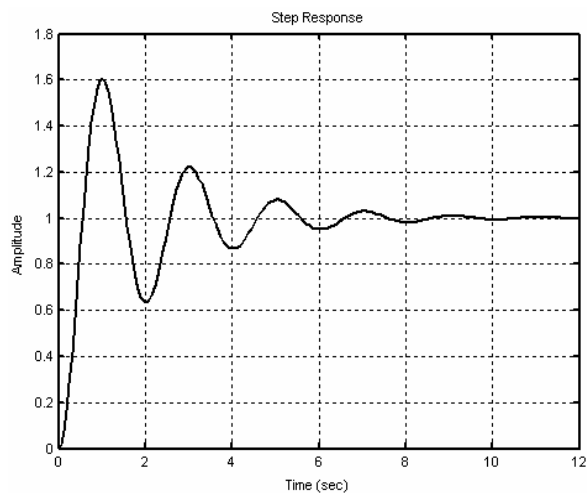
MATLAB 仿真结果如题图 4-21(a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f)所示。

MATLAB 参考程序 graph421.m

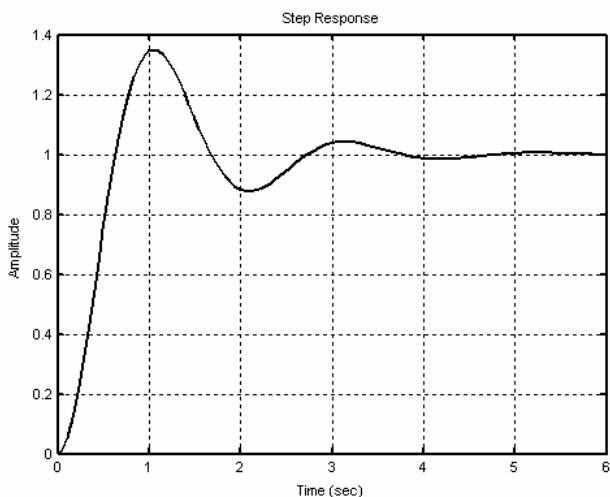
```
k1=10;    k2=1;
beta=[0 1 2 10];
for i=1:length(beta),
    num=[k1*k2];
    den=[1 k2*beta(i) k1*k2];
    figure, step(num,den); grid on
end
beta=[2 10];
t=0:0.025:10;    u=t;
for i=1:length(beta),
    num=[k1*k2];
    den=[1 k2*beta(i) k1*k2];
    figure, lsim(num,den,u,t); grid on
end
```



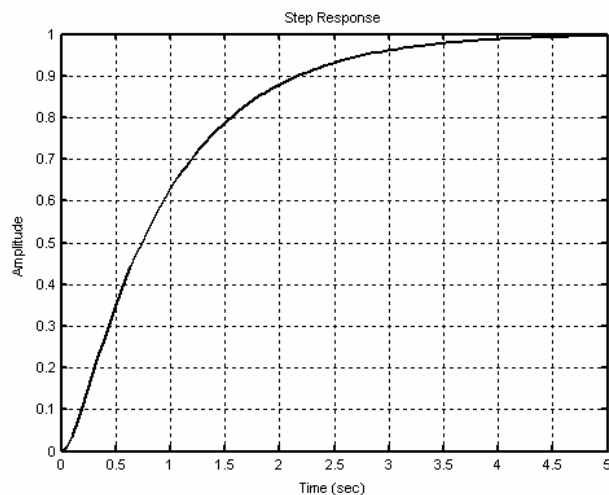
题图 4-21(a)  $\beta = 0$  系统的单位阶跃响应曲线



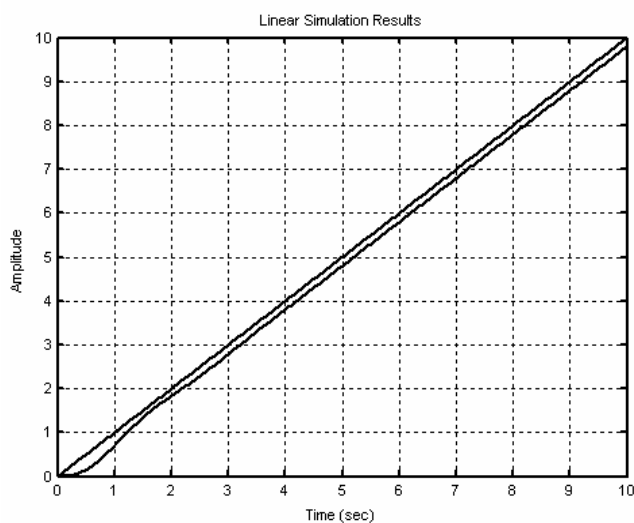
题图 4-21(b)  $\beta = 1$  系统的单位阶跃响应曲线



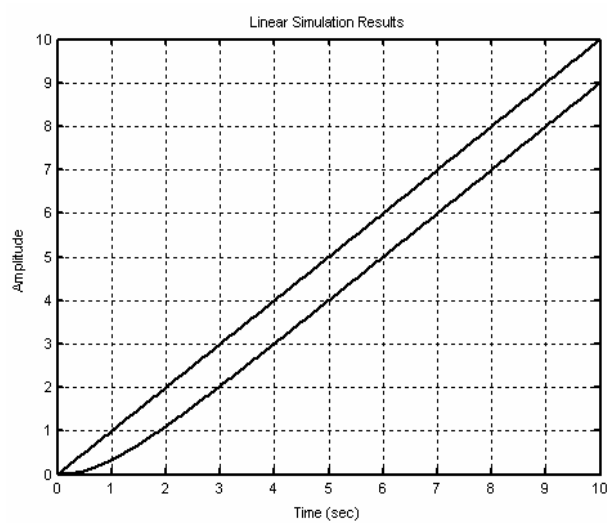
题图 4-21(c)  $\beta = 2$  系统的单位阶跃响应曲线



题图 4-21(d)  $\beta = 10$  系统的单位阶跃响应曲线



题图 4-21(e)  $\beta = 2$  系统的单位斜坡响应曲线



题图 4-21(f)  $\beta = 10$  系统的单位斜坡响应曲线



## 第五章 根轨迹设计方法

## 内容提要

## 一、根轨迹的概念

当开环某一参数由零到无穷大变化时，闭环系统特征方程的根（闭环极点）在  $s$  平面上变化的轨迹称为根轨迹。

## 二、绘制根轨迹的基本条件

$$\text{根轨迹方程} \quad \frac{K^* \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -1 \quad (n \geq m)$$

$$\text{相角条件} \quad \angle G(s)H(s) = \pm(2k+1)\pi$$

或

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = \pm(2k+1)\pi$$

$$\text{幅值条件} \quad |G(s)H(s)| = 1$$

即

$$\frac{K^* \prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = 1$$

## 三、绘制根轨迹的基本规则

规则一 根轨迹的分支数、连续性、对称性

分支数：根轨迹的分支数即根轨迹的条数。既然根轨迹是描述闭环系统特征方程的根（即闭环极点）在  $s$  平面上的分布，那么，根轨迹的分支数就应等于系统特征方程的阶数。即

$\max(m, n)$ 。

连续性：根轨迹是连续的曲线。

对称性：根轨迹对称于  $s$  平面的实轴。

规则二 根轨迹的始点和终点

根轨迹起于开环极点，终于开环零点。

规则三 实轴上的根轨迹

实轴上的某一区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必在根轨迹上。即：实轴上的根轨迹，其右边开环零点和极点的个数之和为奇数。

规则四 根轨迹的渐近线

渐近线与实轴的夹角

$$\varphi_\alpha = \pm \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, (k=0,1,\dots,n-m-1)$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

规则五 根轨迹的分离点

分离点  $d$  的坐标满足

$$\frac{dK^*}{ds} = 0$$

或

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d-z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d-p_j}$$

一般情况下

- (1) 在实轴上，两个相邻极点间的根轨迹必有一分离点；
- (2) 在实轴上，两个相邻零点间的根轨迹必有一会合点；
- (3) 在实轴上，两个相邻的零极点间若存在根轨迹，则该段根轨迹上一般无会合点；
- (4) 实轴上，分离点的分离角恒为  $\pm 90^\circ$ 。

规则六 根轨迹的起始角与终止角（出射角或入射角）

$$\text{起始角: } \theta_{p_l} = \pm 180^\circ + \sum_{i=1}^m \angle(p_l - z_i) - \sum_{j=1}^{l-1} \angle(p_l - p_j) - \sum_{j=l+1}^n \angle(p_l - p_j)$$

$$\text{终止角: } \theta_{z_l} = \pm 180^\circ + \sum_{j=1}^n \angle(z_l - p_j) - \sum_{i=1}^{l-1} \angle(z_l - z_i) - \sum_{i=l+1}^m \angle(z_l - z_i)$$

规则七 根轨迹与虚轴的交点及临界增益值

方法 1 用劳斯判据求解  $\omega_n$

方法 2 用  $s = j\omega$  直接代入特征方程，整理后令其实部、虚部分别为零，解得  $\omega_n$  和  $K^*$ 。 $\omega_n$

值即是根轨迹与虚轴交点的坐标， $K^*$  则为系统处于临界稳定时的根轨迹增益。

#### 四、广义根轨迹

(1) 参数根轨迹。它是以系统中任一参数，如开环零点、开环极点、时间常数、反馈比例系数等，作为可变参量绘制的根轨迹。

(2) 正反馈回路和零度根轨迹。有的闭环控制系统其内环是一个正反馈回路，正反馈回路的根轨迹被称为零度根轨迹，它的绘制方法有别于负反馈回路的根轨迹。

绘制零度根轨迹时，只需把常规根轨迹的画法规则中，与相角条件有关的 3 条加以修改即可。

##### 规则三 实轴上的根轨迹

实轴上的某一区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为偶数，则该区域必在根轨迹上。即：实轴上的根轨迹，其右边开环零点和极点的个数之和为偶数。

##### 规则四 根轨迹的渐近线

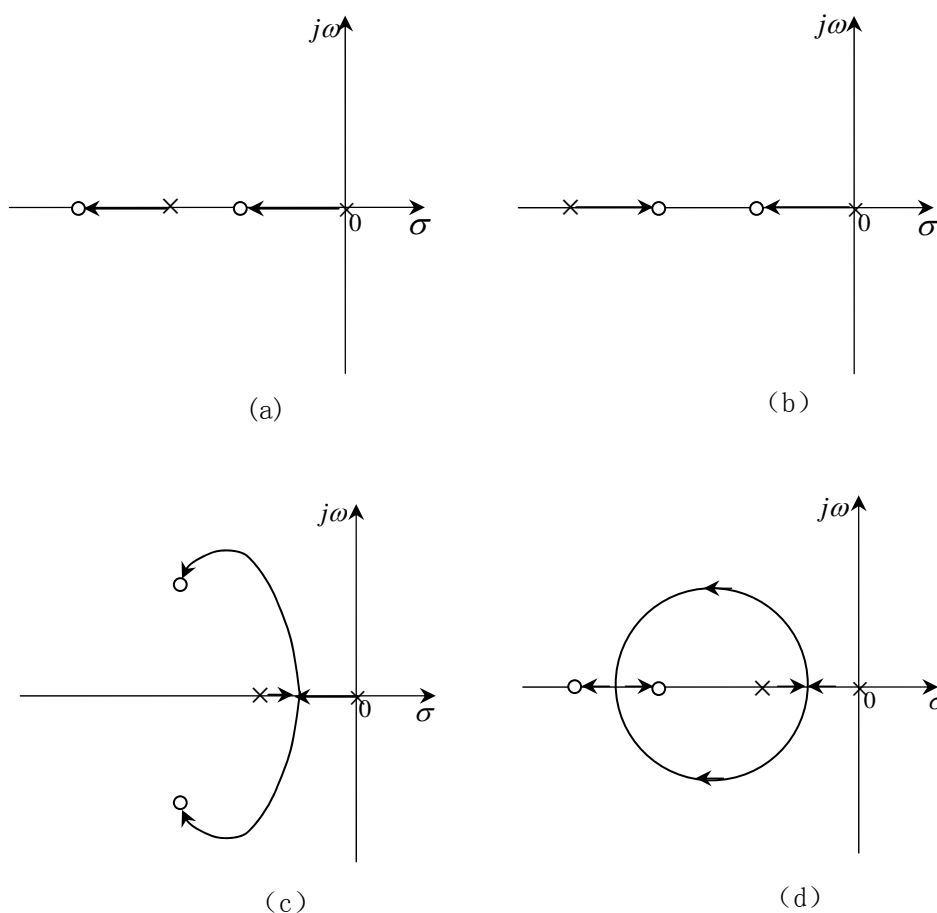
渐近线与实轴的夹角 
$$\varphi_\alpha = \pm \frac{2k\pi}{n-m}, (k = 0, 1, \dots, n-m-1)$$

##### 规则六 根轨迹的起始角与终止角（出射角或入射角）

起始角：
$$\theta_{p_l} = \sum_{i=1}^m \angle(p_l - z_i) - \sum_{j=1}^{l-1} \angle(p_l - p_j) - \sum_{j=l+1}^n \angle(p_l - p_j)$$

终止角：
$$\theta_{z_l} = \sum_{j=1}^n \angle(z_l - p_j) - \sum_{i=1}^{l-1} \angle(z_l - z_i) - \sum_{i=l+1}^m \angle(z_l - z_i)$$

5-1 已知开环零、极点分布如题图 5-1 所示，试概略绘制相应的闭环根轨迹。



题图 5-1

5-2 绘制具有下列开环传递函数的负反馈系统的根轨迹图。

$$(1) G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s+5)}$$

解：系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+4)(s+5)}$$

① 起点：  $p_1 = 0, p_2 = -4, p_3 = -5$  终点：无穷远点

② 实轴上的根轨迹：  $[-4, 0]$  和  $(-\infty, -5]$

③ 根轨迹的渐近线：  $\sigma_a = \frac{-0-4-5}{3} = -3, \varphi_a = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$

④ 分离点：  $\frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} + \frac{1}{d+5} = 0$   
 $d = -1.47$

⑤ 与虚轴的交点：

用  $s = j\omega$  直接代入特征方程求解, 这时闭环极点  $s = j\omega$ ,

由  $1 + G(s)H(s) = 0$

有  $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$

又由

$$\operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

解临界增益值  $K^*$  和与虚轴的交点  $\omega$

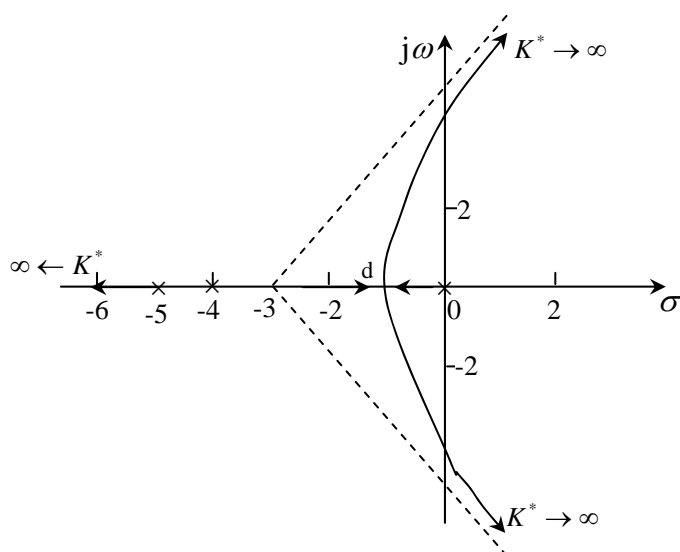
$$K^* - 9\omega^2 = 0$$

$$j20\omega - j\omega^3 = 0$$

联立解上述方程式, 得

$$\omega = \pm\sqrt{20}, K_c^* = 180$$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-2(a) 所示。



题图 5-2(a)

(2)  $G(s)H(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$

解: 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K^*(s+5)}{s(s+2)(s+3)}$$

① 起点:  $p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -3$  终点:  $z_1 = -5$ , 两个无穷远点

② 实轴上的根轨迹:  $[-2, 0]$  和  $[-3, -5]$

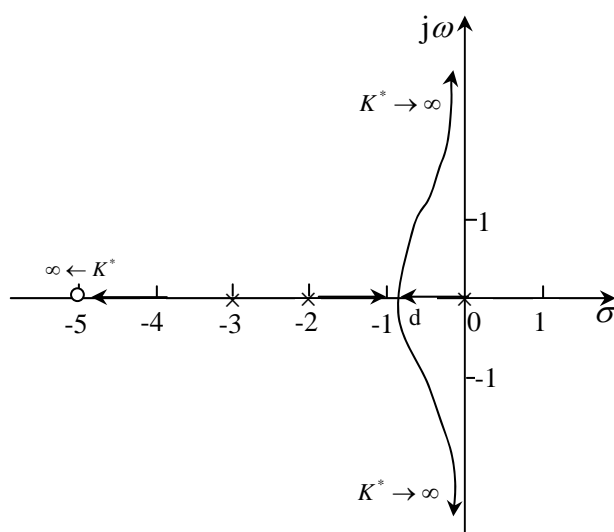
③ 根轨迹的渐近线:  $\sigma_a = \frac{-2-3+5}{2} = 0, \varphi_a = \pm \frac{\pi}{2}$

④ 根轨迹的分离点: 根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+5}$$

通过试凑可得  $d_1 = -0.89$ 。

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-2(b) 所示。



题图 5-2(b)

$$(3) G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

解: 系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s^2 + 4s + 8)}$$

① 起点:  $p_1 = 0, p_2 = -2 + j2, p_3 = -2 - j2$  终点: 无穷远点

② 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, 0]$

③ 根轨迹的渐近线:  $\sigma_a = \frac{0-2+j2-2-j2}{3} = -\frac{4}{3}, \varphi_a = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$

④ 与虚轴的交点:

用  $s = j\omega$  直接代入特征方程求解，这时闭环极点  $s = j\omega$ ，

由  $1 + G(s)H(s) = 0$

有  $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$

又由

$$\operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

解临界增益值  $K^*$  和与虚轴的交点  $\omega$

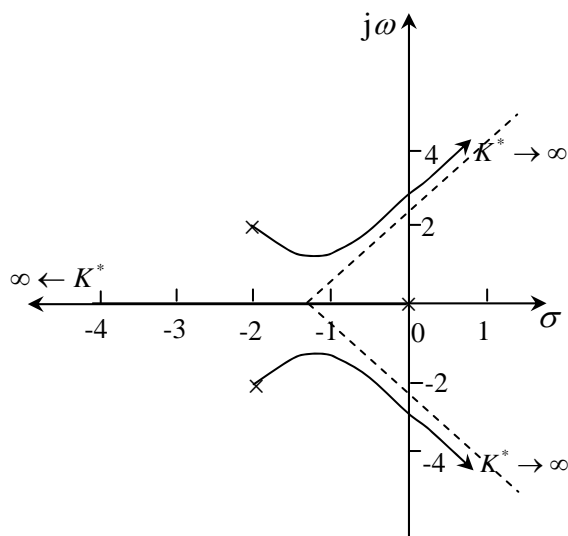
$$K^* - 4\omega^2 = 0$$

$$j8\omega - j\omega^3 = 0$$

联立解上述方程式，得

$$\omega = \pm 2\sqrt{2}, \quad K_c^* = 32$$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-2(c) 所示。



题图 5-2(c)

$$(4) \quad G(s)H(s) = \frac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$$

解：系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(s+20)}{s(s+10+j10)(s+10-j10)}$$

① 起点：  $p_1 = -10 - j10, p_2 = -10 + j10, p_3 = 0$  终点：  $z_1 = -20$ ，两个无穷远点

② 实轴上的根轨迹：  $[-20, 0]$

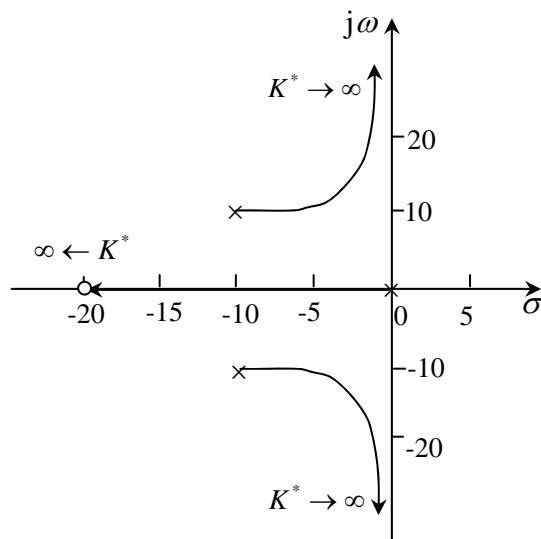
③ 渐近线:  $\sigma_a = 0, \varphi_a = \pm \frac{\pi}{2}$

④ 根轨迹起始角

$$\theta_{p1} = 180^\circ + \varphi_{z1p1} - \theta_{p2p1} - \theta_{p3p1} = 180^\circ + 45^\circ - 90^\circ - 135^\circ = 0^\circ$$

$$\theta_{p2} = 180^\circ + \varphi_{z1p2} - \theta_{p1p2} - \theta_{p3p2} = 180^\circ - 45^\circ + 90^\circ - 225^\circ = 0^\circ$$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-2(d) 所示



题图 5-2(d)

5-3 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts+1)(s^2+2s+2)}$$

试绘制当  $K=4$  时, 以  $T$  为参变量的根轨迹。

解: 当  $K=4$  时, 系统的特征方程式为

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{4}{s(Ts+1)(s^2+2s+2)} = 0$$

$$\text{则} \quad s(Ts+1)(s^2+2s+2) + 4 = 0$$

将上式展开, 用不含  $T$  的项去除各项, 得

$$1 + \frac{T(s^4 + 2s^3 + 2s^2)}{s^3 + 2s^2 + 2s + 4} = 0$$

令  $G'(s)H'(s) = \frac{T(s^4 + 2s^3 + 2s^2)}{s^3 + 2s^2 + 2s + 4}$  为系统的等效开环传递函数。

根据等效传递函数, 可得



起点:  $p_1 = -2, p_2 = j\sqrt{2}, p_3 = -j\sqrt{2}$  终点:  $z_1 = z_2 = 0, z_3 = -1 + j, z_4 = -1 - j$

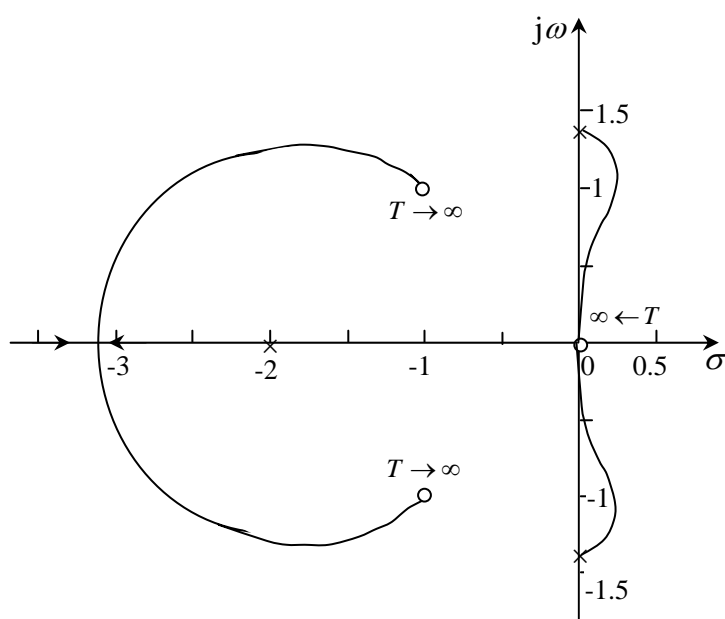
实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -2]$

实轴上的分离点:

$$\frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+j\sqrt{2}} - \frac{1}{d-j\sqrt{2}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d-(-1+j)} + \frac{1}{d-(-1-j)}$$

通过试凑解得  $d = -3.15$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-3 所示。



题图 5-3

5-4 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{s(s+1)^2}$$

- (1) 绘制系统的根轨迹图;
- (2) 确定实轴上的分离点及对应的  $K^*$  值;
- (3) 确定使系统稳定的  $K^*$  值范围。

解: ① 起点:  $p_1 = 0, p_2 = p_3 = -1$  终点: 无穷远点

② 实轴上的根轨迹:  $[-1, 0]$  和  $(-\infty, -1]$

③ 根轨迹的渐近线:  $\sigma_a = \frac{-1-1}{3} = -\frac{2}{3}$ ,  $\varphi_a = \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $\pi$

④ 实轴上的分离点: 根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+1} = 0$$

得  $d = -0.33$ ,  $K_d^* = 0.148$

⑤ 与虚轴的交点:

第一种解法: 用劳斯判据计算

系统闭环特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

即  $s^3 + 2s^2 + s + K^* = 0$

由上式列劳斯表

$s^3$	1	1
$s^2$	2	$K^*$
$s^1$	$\frac{K^* - 2}{2}$	
$s^0$	$K^*$	

由劳斯表可知, 当  $K^* > 2$  时, 表中第一列所有元素均大于零, 系统稳定, 当  $K^* < 2$  时, 系统不稳定。即  $K^* = 2$  是系统稳定的临界值, 并且当  $K^* = 2$  时, 系统特征方程的两个根为

$$s_{1,2} = \pm j, \text{ 即 } \omega_c = \pm 1。$$

第二种解法: 用  $s = j\omega$  直接代入特征方程求解, 这时闭环极点  $s = j\omega$ ,

由  $1 + G(s)H(s) = 0$

有  $1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$

又由

$$\operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

解临界增益值  $K^*$  和与虚轴的交点  $\omega$

$$K^* - 2\omega^2 = 0$$

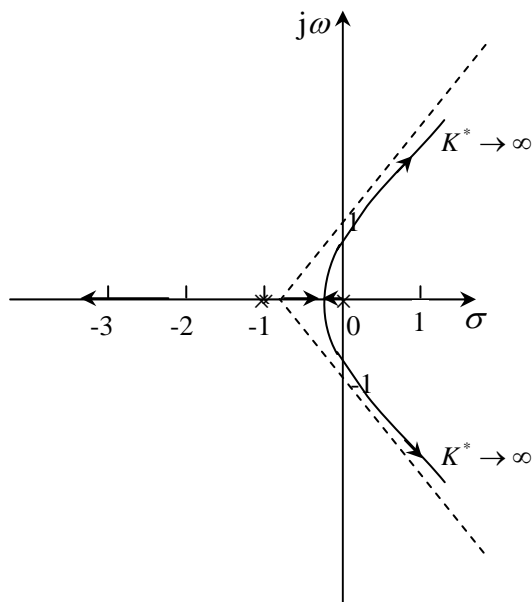
$$j\omega - j\omega^3 = 0$$

联立解上述方程式, 得

$$\omega_c = \pm 1, K_c^* = 2$$

使系统稳定的  $K^*$  值范围:  $0 < K^* < 2$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-4 所示。



题图 5-4

5-5 设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

试绘制系统在负反馈与正反馈两种情况下的根轨迹图, 并分析系统的稳定性。

解: (1) 负反馈

① 起点:  $p_1 = p_2 = 0, p_3 = -2, p_4 = -4$  终点:  $z = -1$ , 三个无穷远点

② 实轴上根轨迹:  $(-\infty, -4]$  和  $[-2, -1]$

③ 渐近线:  $\sigma_a = \frac{-2-4+1}{4-1} = -\frac{5}{3}, \varphi_a = \frac{(2K+1)\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3}, \pi$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-5 (a) 所示。

(2) 正反馈

① 起点:  $p_1 = p_2 = 0, p_3 = -2, p_4 = -4$  终点:  $z = -1$ , 三个无穷远点

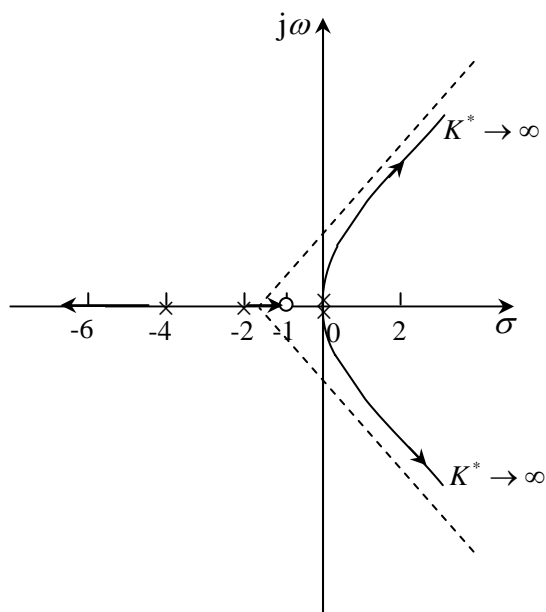
② 实轴上根轨迹:  $[-4, -2], [-1, 0]$  和  $[0, +\infty)$

③ 渐近线:  $\sigma_a = \frac{-2-4+1}{4-1} = -\frac{5}{3}$ ,  $\varphi_a = \frac{2K\pi}{3} = 0, \pm \frac{2\pi}{3}$

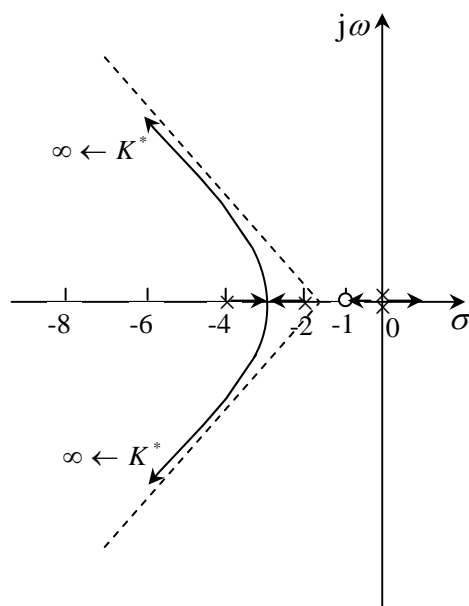
④ 实轴上的分离点:  $\frac{2}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+4} = \frac{1}{d+1}$

通过试凑解得  $d = -3.08$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-5 (b) 所示。



题图 5-5 (a) 负反馈系统的根轨迹



题图 5-5(b) 正反馈系统的根轨迹

5-6 设控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+7)}$$

(1) 绘制系统的根轨迹图;

(2) 确定系统稳定时  $K$  的最大值;

解: ① 起点:  $p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -7$       终点: 无穷远点

② 实轴上根轨迹:  $[-2, 0]$  和  $(-\infty, -7]$

③ 渐近线:  $\sigma_a = -3$ ,  $\varphi_a = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$

④ 分离点: 根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+7} = 0$$

得  $d = -0.918$        $K_d^* = 6.04$

⑤ 与虚轴的交点:

第一种解法: 用劳斯判据计算

系统闭环特征方程为

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\text{即} \quad s^3 + 9s^2 + 14s + K = 0$$

由上式列劳斯表

$s^3$	1	14
$s^2$	9	$K$
$s^1$	$\frac{K-126}{9}$	
$s^0$	$K$	

由劳斯表可知, 当  $K > 126$  时, 表中第一列所有元素均大于零, 系统稳定, 当  $K < 126$  时, 系统不稳定。即  $K = 126$  是系统稳定的临界值, 并且当  $K = 126$  时, 系统特征方程的两个根为  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{14}$ , 即  $\omega_c = \pm\sqrt{14}$ 。

第二种解法: 用  $s = j\omega$  直接代入特征方程求解, 这时闭环极点  $s = j\omega$ ,

$$\text{由} \quad 1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\text{有} \quad 1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

又由

$$\text{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$\text{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

解临界增益值  $K^*$  和与虚轴的交点  $\omega$

$$K - 9\omega^2 = 0$$

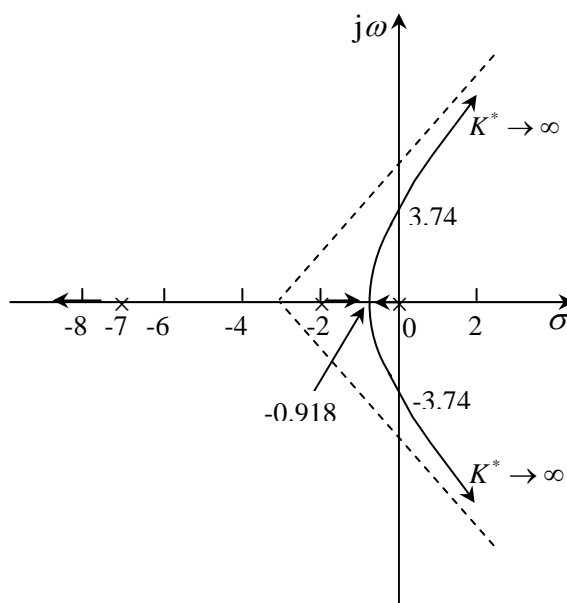
$$j14\omega - j\omega^3 = 0$$

联立解上述方程式, 得

$$\omega_c = \pm\sqrt{14} \quad K_c = 126$$

根据以上几点可绘制出系统的

概略根轨迹如题图 5-6 所示。



题图 5-6 系统的根轨迹

5-7 设负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*}{(s+2)(s+3)}$$

试绘制系统根轨迹的大致图形。若系统：

- (1) 增加一个  $z = -5$  的零点；
- (2) 增加一个  $z = -2.5$  的零点；
- (3) 增加一个  $z = -0.5$  的零点。

试绘制增加零点后系统的根轨迹，并分析增加开环零点后根轨迹的变化规律和对系统性能的影响。

解：(1) 绘制系统的根轨迹

① 起点：  $p_1 = -2, p_2 = -3$       终点： 无穷远点

② 实轴上根轨迹：  $[-3, -2]$

③ 分离点： 根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = 0$$

得  $d = -2.5$        $K_d^* = 0.25$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-7(a) 所示。由图可知，系统都稳定。

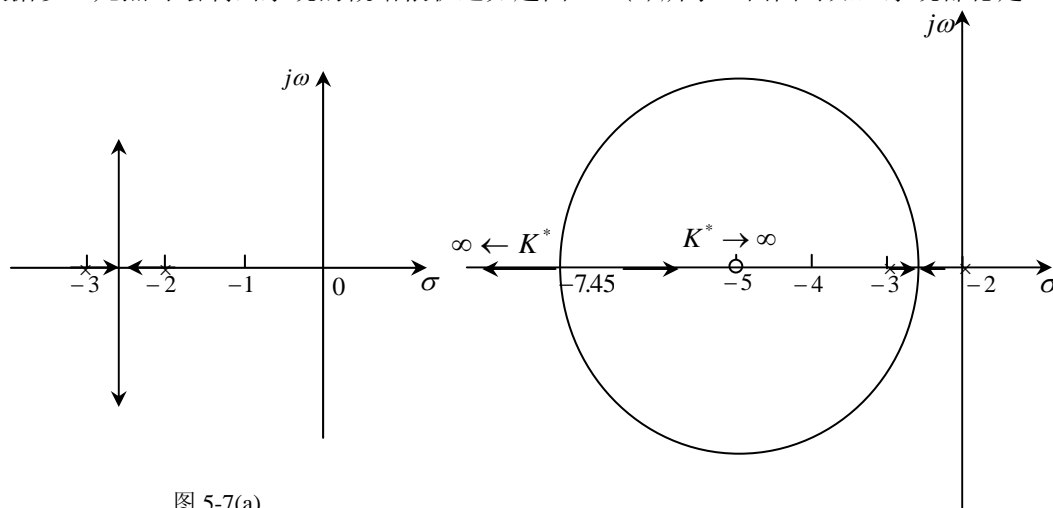


图 5-7(a)

图 5-7(b)

(2) 增加一个  $z = -5$  的零点

① 起点：  $p_1 = -2, p_2 = -3$       终点：  $z = -5$

② 实轴上根轨迹：  $(-\infty, -5]$  和  $[-3, -2]$

③ 分离点： 根轨迹的分离点坐标满足

$$\frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3} = \frac{1}{d+5}$$

得  $d_1 = -7.45 \quad K_{d1}^* = 9.9$

$$d_2 = -2.55 \quad K_{d2}^* = 0.1$$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-7(b)所示。由图可知，系统都稳定。

(3) 增加一个  $z = -2.5$  的零点

① 起点:  $p_1 = -2, p_2 = -3$       终点:  $z = -2.5$

② 实轴上根轨迹:  $(-\infty, -3]$  和  $[-2.5, -2]$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-7(c)所示。由图可知，系统都稳定。

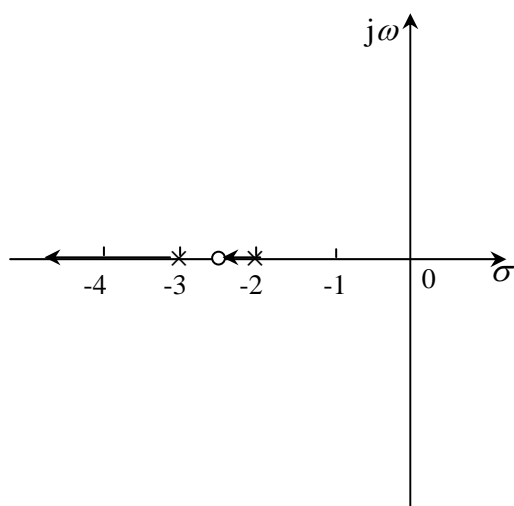


图 5-7(c)

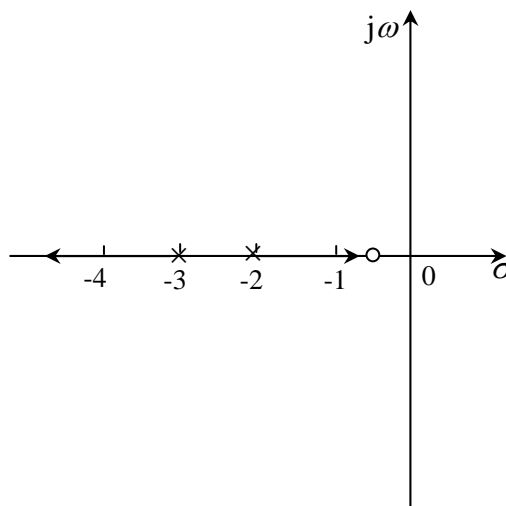


图 5-7(d)

(4) 增加一个  $z = -0.5$  的零点

① 起点:  $p_1 = -2, p_2 = -3$       终点:  $z = -0.5$

② 实轴上根轨迹:  $(-\infty, -3]$  和  $[-2, -0.5]$

根据以上几点可绘制出系统的概略根轨迹如题图 5-7(d)所示。由图可知，系统都稳定。

5-8 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K^*(4s^2 + 3s + 1)}{s(3s^2 + 5s + 1)}$$

试用 MATLAB 绘制系统的根轨迹，确定当系统的阻尼比  $\xi = 0.7$  时系统的闭环极点，并分析系统的性能。

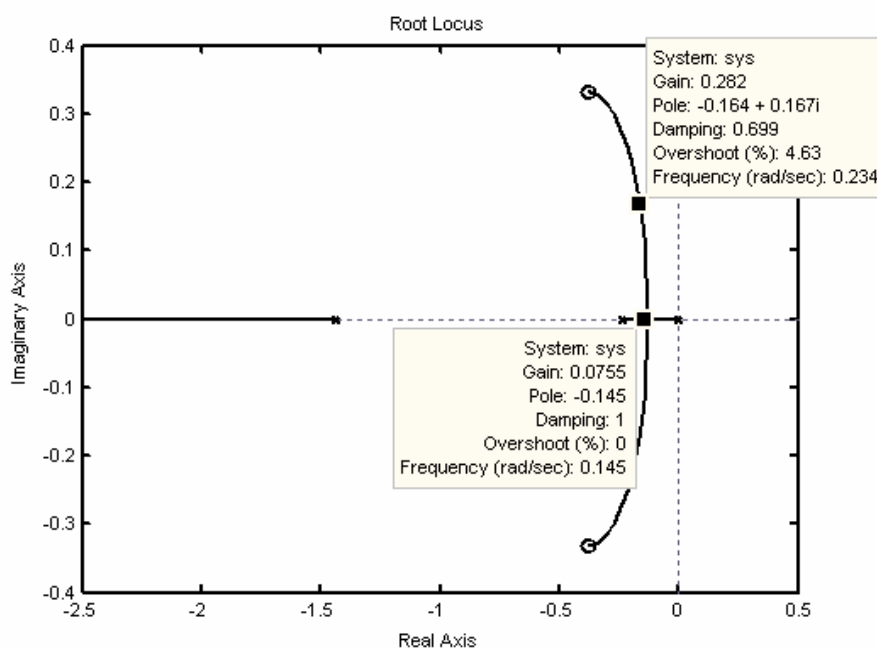
解：① 起点：  $p_1 = -1.44, p_2 = -0.232, p_3 = 0$

终点：  $z_1 = -0.375 + j0.33, z_2 = -0.375 - j0.33$

② 实轴上根轨迹：  $(-\infty, -1.44]$  和  $[-0.232, 0]$

③ 分离点：  $d = -0.145 \quad K_d^* = 0.0755$

MATLAB 仿真曲线如题图 5-8 所示。



题图 5-8 系统的根轨迹

由题图 5-8 可知，阻尼比  $\xi = 0.7$  时系统的闭环极点为

$$s_{1,2} = -0.164 \pm j0.167$$

由题图 5-8 可知，只要  $K > 0$ ，系统都稳定。

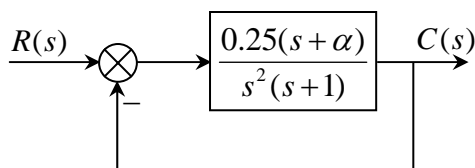
MATLAB 参考程序 grap58.m

```
n=[4 3 1];d=[3 5 1 0];
```

```
rlocus(n,d)
```

5-9 系统结构如题图 5-9 所示，试绘制以  $\alpha$  为可变参数的根轨迹，并由根轨迹图回答下列问题：

- (1) 确定系统临界稳定的  $\alpha$  值及使系统稳定的  $\alpha$  值的范围；
- (2) 确定系统阶跃响应无超调时  $\alpha$  值



题图 5-9 控制系统结构图



的取值范围；（3）确定系统阶跃响应有超调时  $\alpha$  值的取值范围；（4）系统出现等幅振荡时的振荡频率。

解：

（1）系统的特征方程为

$$D(s) = s^3 + s^2 + 0.25s + 0.25\alpha = 0$$

等效开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{0.25\alpha}{s(s^2 + s + 0.25)} = \frac{0.25\alpha}{s(s+0.5)^2} = \frac{K'}{s(s+0.5)^2}$$

即，等效开环传递函数的根轨迹增益为  $K' = 0.25\alpha$

① 起点：  $p_1 = 0, p_{2,3} = -0.5$  终点：无穷远处

② 实轴上的根轨迹：  $(-\infty, -0.5]$  和  $[-0.5, 0]$

③ 渐近线  $\sigma_a = \frac{-0.5-0.5}{3} = -\frac{1}{3}$

$$\varphi_a = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$$

④ 分离点：  $\frac{1}{d} + \frac{2}{d+0.5} = 0$

解得  $d = -\frac{1}{6}$   $K'_d = 0.0185$  即  $\alpha_d = 0.074$

⑤ 与虚轴的交点

令  $s = j\omega$ ，代入特征方程

$$\text{由} \quad 1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\text{有} \quad 1 + G(j\omega)H(j\omega) = 0$$

又由

$$\operatorname{Re}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[1 + G(j\omega)H(j\omega)] = 0$$

解临界增益值  $K'$  和与虚轴的交点  $\omega$

$$K' - \omega^2 = 0$$

$$j0.25\omega - j\omega^3 = 0$$

联立解上述方程式，得

$$\omega_c = \pm 0.5 \quad K'_c = 0.25 \quad \text{即} \quad \alpha_c = 1$$

仿真曲线如题图 5-9(a) 和 5-9(b) 所示。

系统临界稳定的  $\alpha$  值为 1, 使系统稳定的  $\alpha$  值的范围:  $0 < \alpha < 1$ 。

(2) 系统阶跃响应无超调时  $\alpha$  值的取值范围:  $0 < \alpha < 0.074$

(3) 系统阶跃响应有超调时  $\alpha$  值的取值范围:  $0.074 < \alpha < 1$

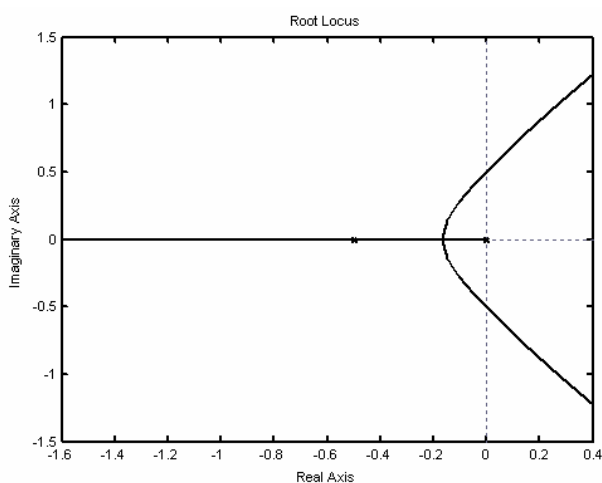
(4) 系统出现等幅振荡时的振荡频率:  $\omega_c = 0.5 \text{ rad/s}$

MATLAB 参考程序 grap59.m

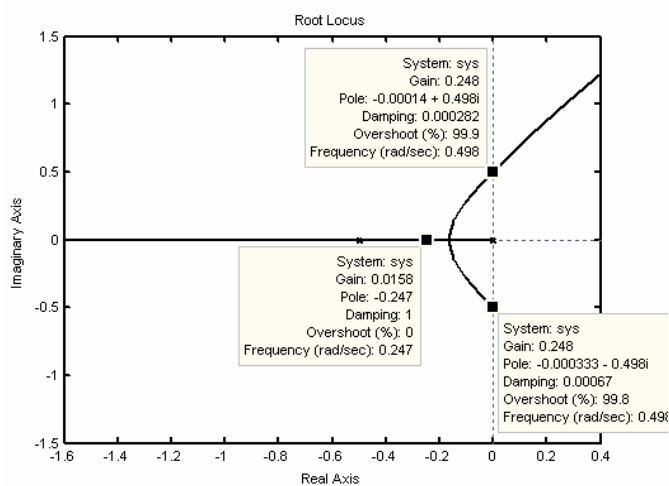
```
K=1;z=[];p=[0,-0.5,-0.5];
```

```
[n,d]=zp2tf(z,p,K);
```

```
rlocus(n,d)
```



题图 5-9(a)  $\frac{K'}{s(s+0.5)^2}$  的根轨迹图



题图 5-9(b)  $\frac{K'}{s(s+0.5)^2}$  根轨迹的分离点和临界点信息

5-10 已知多项式  $A(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + K(s+3)$ , 其中  $K$  为实数。若要求  $A(s) = 0$  的根都为复数, 试确定  $K$  的变化范围。

解: 根据题意, 可得等效开环传递函数为

$$G'(s) = \frac{K(s+3)}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s} = \frac{K(s+3)}{s(s+1)^3}$$

① 起点:  $p_1 = 0, p_{2,3,4} = -1$  终点:  $z_1 = -3$  和 三个无穷远点

② 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -3]$  和  $[-1, 0]$

③ 渐近线  $\sigma_a = \frac{-3+3}{3} = 0$

$$\varphi_a = \pm \frac{\pi}{3}, \pi$$

④ 分离点:  $\frac{1}{d} + \frac{3}{d+1} = \frac{1}{d+3}$

解得  $d_1 = -0.268$      $d_2 = -3.732$      $K_{d1} = 0.0385$      $K_{d2} = 103.96$

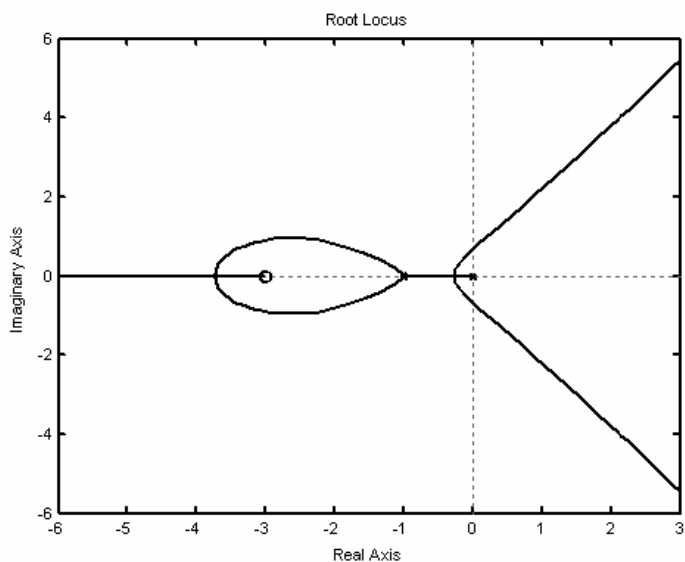
因此，若要求  $A(s) = 0$  的根都为复数，则  $K$  的变化范围为  $0.0385 < K < 103.96$ 。

仿真曲线如题图 5-10(a) 和 5-10(b) 所示。

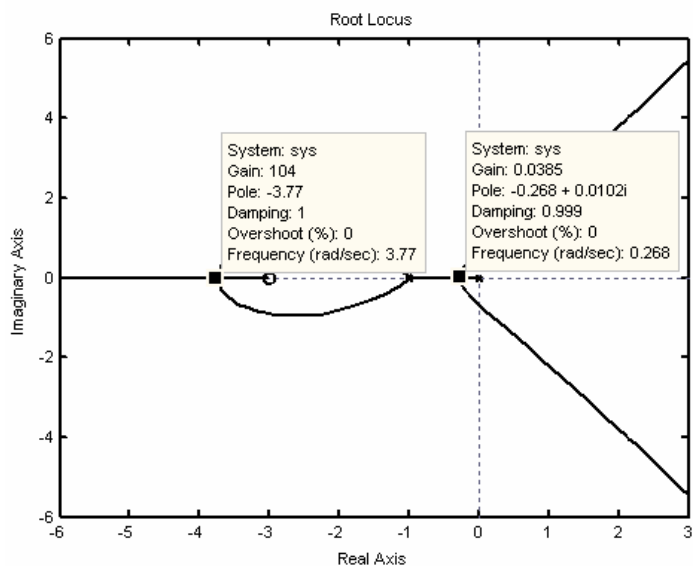
MATLAB 参考程序 grap510.m

```
n=[1 3];d=conv([1,0],conv([1,1],conv([1,1],[1,1])));
```

```
rlocus(n,d)
```



题图 5-10(a) 系统的根轨迹图



题图 5-10(b) 根轨迹的分离点信息

## 第六章 频率特性分析

## 内容提要

## 一、基本概念

1. 频率响应：线性定常系统对正弦输入（或者谐波输入）的稳态响应。
2. 频率特性  $G(j\omega)$ ：将  $G(s)$  中的  $s$  用  $j\omega$  取代后的结果，是  $\omega$  的复变函数。
3. 称幅频特性  $A(\omega)$ ：频率特性的幅值是正弦稳态输出与输入的幅值比，是角频率  $\omega$  的函数。
4. 相频特性  $\varphi(\omega)$ ：稳态输出信号与输入信号的相位差，是角频率  $\omega$  的函数。
5. 实频特性  $U(\omega)$ ：频率特性的实部。
6. 虚频特性  $V(\omega)$ ：频率特性的虚部。

## 二、频率特性的极坐标图

最小相位系统，其开环频率特性为：

$$G(j\omega) = \frac{K(j\tau_1\omega + 1)(j\tau_2\omega + 1)\Lambda(j\tau_m\omega + 1)}{(j\omega)^{\nu}(jT_1\omega + 1)(jT_2\omega + 1)\Lambda(jT_{n-\nu}\omega + 1)} \quad (n > m)$$

系统的开环频率特性曲线具有以下规律：

1. 起始段 ( $\omega=0$ )

(1) 对于 0 型系统 ( $\nu=0$ )，由于  $|G(j\omega)| = K, \angle G(j\omega) = 0^\circ$ ，则极坐标图的起点是位于实轴上的有限值。

(2) 对于 I 型系统 ( $\nu=1$ )，由于  $|G(j\omega)| \rightarrow \infty, \angle G(j\omega) = -90^\circ$ ，在低频时，极坐标图是一条渐近线，它趋近于一条平行于负虚轴的直线。

(3) 对于 II 型系统 ( $\nu=2$ )，由于  $|G(j\omega)| \rightarrow \infty, \angle G(j\omega) = -180^\circ$ ，在低频时，极坐标图是一条渐近线，它趋近于一条平行于负实轴的直线。

2. 终止段 ( $\omega \rightarrow \infty$ )

对于 0 型系统、I 型系统、II 型系统， $|G(j\omega)| = 0, \angle G(j\omega) = -(n-m) \times 90^\circ$ 。因此对于任何  $n > m$  的系统， $\omega \rightarrow \infty$  时的极坐标图的幅值必趋于零，而相角趋于  $-(n-m) \times 90^\circ$ 。

## 三、频率特性的对数坐标图

绘制系统对数坐标图的一般步骤如下：

1. 由传递函数  $G(s)$  求出频率特性  $G(j\omega)$ ，并将  $G(j\omega)$  转化为若干个标准形式的典型环节频率特性相乘的形式；
2. 确定各环节的转角频率；
3. 分别画出各典型环节的对数幅频特性的渐近线；
4. 将各个环节的对数幅频特性曲线的渐近线进行叠加（不包括系统总的增益  $K$ ）；
5. 将叠加后的曲线垂直移动到  $20\lg K$ ，得到系统的对数幅频特性；
6. 修正误差，画出比较精确的对数幅频特性；
7. 画出各串联典型环节相频特性，将它们相加后得到系统开环相频特性。

#### 四、稳定判据与稳定裕度

##### 1. 奈奎斯特稳定判据

当  $\omega$  由  $-\infty$  到  $+\infty$  时，若  $GH$  平面上的开环频率特性  $G(j\omega)H(j\omega)$  的奈奎斯特图逆时针方向包围  $(-1, j0)$  点  $P$  圈，则闭环系统稳定。 $P$  为  $G(j\omega)H(j\omega)$  在  $S$  平面的右半平面的极点数。

##### 2. 伯德稳定判据

在伯德图上，当  $\omega$  由  $0 \sim +\infty$  时，在开环对数幅频特性为正值的频率范围内，开环对数相频特性对  $-180^\circ$  线正穿越与负穿越次数之差为  $\frac{P}{2}$ ，闭环系统稳定；否则不稳定。其中  $P$  为系统开环传递函数在  $s$  平面的右半平面的极点数。而从  $-180^\circ$  线开始的正或负穿越，以半次正或负穿越计算；若  $G(s)H(s)$  含有  $\nu$  个积分环节时，则应由  $\omega = 0$  处给对数相频曲线突加  $\nu$  个  $90^\circ$ ，以虚线表示，计算正、负穿越时，补上的虚线看成对数相频曲线的一部分。

##### 3. 系统的相对稳定性

###### (1) 相位裕度 $\gamma$

在幅值穿越频率  $\omega_c$  上，使系统达到临界稳定状态所需附加的相角滞后量，叫相位裕度，以  $\gamma$  表示。即  $\varphi(\omega_c) - \gamma = -180^\circ$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$$

###### (2) 幅值裕度 $K_g$

在相位穿越频率  $\omega_g$  上，使  $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = 1$  所应增大的开环增益倍数，叫幅值裕度，

以  $K_g$  表示。即  $K_g |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = 1$

幅值裕度的分贝值可用下式计算

$$K_g(dB) = 20 \lg K_g = -20 \lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)|$$

(3) 若  $\gamma > 0$ ，且  $K_g(dB) > 0$ ，则系统稳定。为了使系统具有足够的稳定裕度和获得良好的动态性能，一般要求相角裕度  $\gamma = 30^\circ \sim 70^\circ$ ，幅值裕度  $K_g = 2 \sim 2.5$  或  $K_g(dB) = 6 \sim 8$ 。

6-1 什么是系统的频率特性?

答: 当不断改变输入的正弦波频率(由0变化到无穷大)时, 该幅值比和相位差随频率的变化情况称为系统的频率特性。

6-2 已知系统的单位阶跃响应为  $c(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t}$ ,  $t \geq 0$ ; 试求系统幅频特性和相频特性。

解:

$$c(t) = 1 - 1.8e^{-4t} + 0.8e^{-9t}$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9}$$

$$C(s) = \Phi(s)R(s) \Rightarrow \Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s} - \frac{1.8}{s+4} + \frac{0.8}{s+9}}{\frac{1}{s}} = \frac{36}{(s+4)(s+9)}$$

$$A(\omega) = \frac{36}{\sqrt{\omega^2 + 16}\sqrt{\omega^2 + 81}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{4} - \arctg \frac{\omega}{9}$$

6-3 由质量、弹簧、阻尼组成的机械系统如题图 6-3 所示。已知:  $m = 1\text{kg}$ ,  $k$  为弹簧刚度,  $c$  为阻尼系数。若外力  $f(t) = 2\sin 2t(N)$ , 由试验得到

系统稳态响应为  $x_{\text{oss}} = \sin(2t - \frac{\pi}{2})$ , 试确定  $k$  和  $c$ 。

解: 建立系统的数学模型:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega c}$$

由  $f(t) = 2\sin 2t$  可知  $A_r = 2$

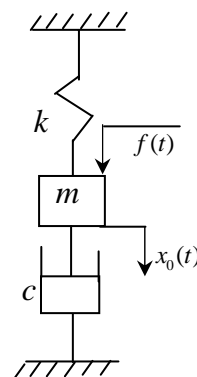
且  $X_{\text{oss}} = \sin(2t - \frac{\pi}{2})$

所以  $A_c = 1 = |G(j\omega)|A_r \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{2}$

根据  $x_{\text{oss}} = \sin(2t - \frac{\pi}{2})$  可知  $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$

因为  $m = 1\text{kg} \quad \omega = 2$

所以有  $\frac{1}{\sqrt{(k-4)^2 + 4c^2}} = \frac{1}{2}$



题图 6-3

$$\arctan \frac{2c}{k-4} = \frac{\pi}{2}$$

解得  $k = 4N/m$ ,  $c = 1Ns/m$

6-4 试求下列系统的幅频、相频、实频和虚频特性  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$ ,  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$ 。

$$(1) G(s) = \frac{5}{30s+1}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{5}{j30\omega+1} = \frac{5(1-j30\omega)}{1+900\omega^2}$$

所以，有

$$A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{900\omega^2+1}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg 30\omega$$

$$U(\omega) = \frac{5}{1+900\omega^2} \quad V(\omega) = -\frac{150\omega}{1+900\omega^2}$$

$$(2) G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j0.1\omega+1)} = -\frac{j+0.1\omega}{\omega(1+0.01\omega^2)}$$

所以，有

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{0.01\omega^2+1}} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg 0.1\omega$$

$$U(\omega) = \frac{-0.1}{1+0.01\omega^2} \quad V(\omega) = \frac{-1}{\omega(1+0.01\omega^2)}$$

6-5 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为  $G(s) = \frac{10}{s+1}$ ，当系统作用以下输入信号，试求

系统的稳态输出和稳态误差。

$$(1) r(t) = \sin(t + 30^\circ)$$

解：根据已知，可求得系统的闭环传递函数和误差传递函数

$$\Phi(s) = \frac{10}{s+11} \quad \Phi_e(s) = \frac{s+1}{s+11}$$

相应的频率特性为



$$\Phi(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 11} \quad \Phi_e(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 11}$$

$$A(\omega) = \frac{10}{\sqrt{\omega^2 + 121}}, \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{11}$$

$$A_e(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 121}}, \varphi_e(\omega) = \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{11}$$

$$(1) A(1) = \frac{10}{\sqrt{122}} = 0.9$$

$$\varphi(1) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{11} = -5.19^\circ$$

$$c_{ss1}(t) = 0.9 \sin(t + 30^\circ - 5.19^\circ) = 0.9 \sin(t + 24.81^\circ)$$

$$A_e(1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{122}} = 0.128$$

$$\varphi_e(1) = \arctan 1 - \arctan \frac{1}{11} = 39.8^\circ$$

$$e_{ss1}(t) = 0.128 \sin(t + 30^\circ + 39.8^\circ) = 0.128 \sin(t + 69.8^\circ)$$

MATLAB 验证。当  $r(t) = \sin(t + 30^\circ)$  时，系统的稳态输出响应和稳态误差响应曲线如题图

6-5(a) 和 6-5(b) 所示。

$$(2) r(t) = 2 \cos(2t - 45^\circ)$$

$$\text{解: } A(2) = \frac{10}{\sqrt{125}} = 0.89$$

$$\varphi(2) = -\operatorname{arctg} \frac{2}{11} = -10.3^\circ$$

$$c_{ss2}(t) = 2 \times 0.89 \cos(2t - 45^\circ - 10.3^\circ) = 1.78 \cos(2t - 55.3^\circ)$$

$$A_e(2) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{125}} = 0.2$$

$$\varphi_e(2) = \arctan 2 - \arctan \frac{2}{11} = 53.13^\circ$$

$$e_{ss2}(t) = 2 \times 0.2 \cos(2t - 45^\circ + 53.13^\circ) = 0.4 \cos(2t + 8.13^\circ)$$

MATLAB 验证。当  $r(t) = 2\cos(2t - 45^\circ)$  时, 系统的稳态输出响应稳态误差响应如题图 6-5(c) 和 6-5(d) 所示。

$$(3) \quad r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$$

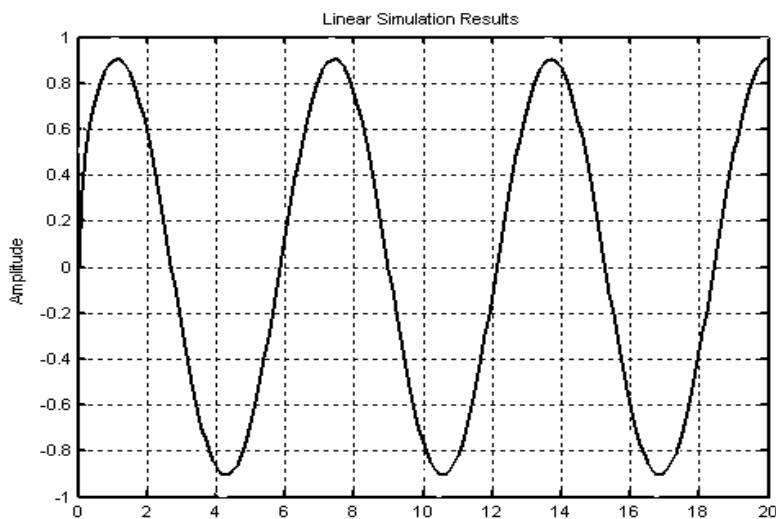
解: 因为  $r_3(t) = r_1(t) - r_2(t)$

所以, 有

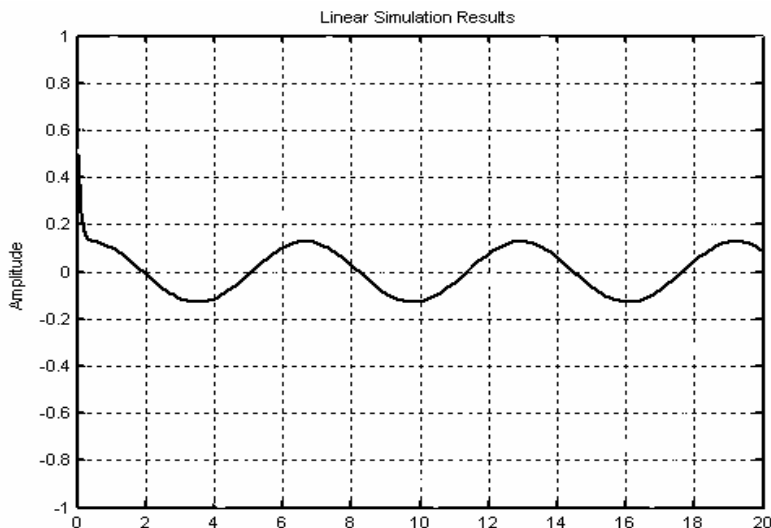
$$c_{ss3}(t) = c_{ss1}(t) - c_{ss2}(t) = 0.9\sin(t + 24.81^\circ) - 1.78\cos(2t - 55.3^\circ)$$

$$e_{ss3}(t) = e_{ss1}(t) - e_{ss2}(t) = 0.128\sin(t + 69.8^\circ) - 0.4\cos(2t + 8.13^\circ)$$

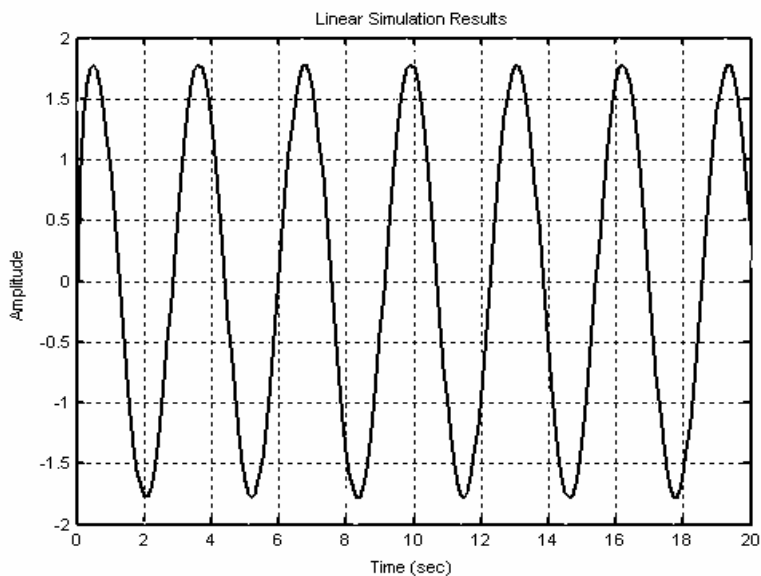
MATLAB 验证。当  $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$  时, 系统的稳态输出响应稳态误差响应如题图 6-5(e) 和 6-5(f) 所示。



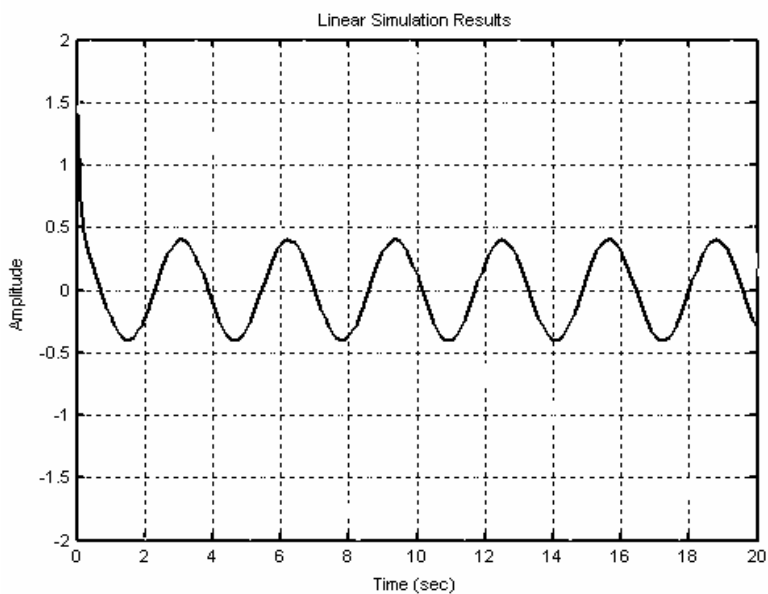
题图 6-5(a)  $r(t) = \sin(t + 30^\circ)$  时系统的稳态输出响应



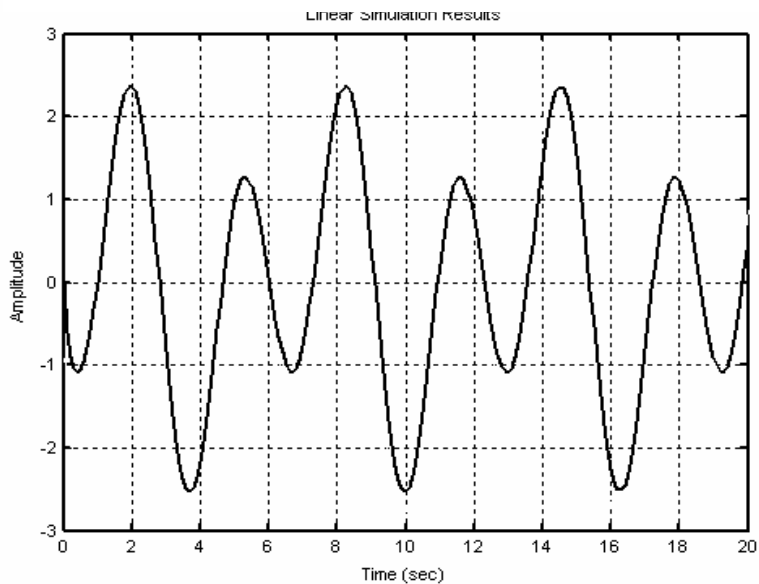
题图 6-5(b)  $r(t) = \sin(t + 30^\circ)$  时系统的稳态误差响应



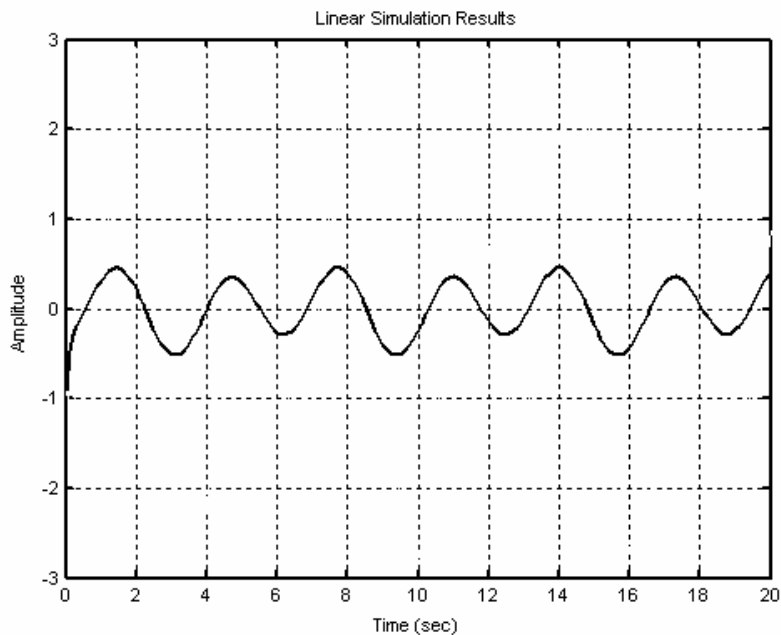
题图 6-5(c)  $r(t) = 2\cos(2t - 45^\circ)$  时系统的稳态输出响应



题图 6-5(d)  $r(t) = 2\cos(2t - 45^\circ)$  时系统的稳态误差响应



题图 6-5(e)  $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$  时系统的稳态输出响应



题图 6-5(f)  $r(t) = \sin(t + 30^\circ) - 2\cos(2t - 45^\circ)$  时系统的稳态误差响应

MATLAB 参考程序 graph605.m

```
t=0:0.1:20;
G1=tf(10,[1,11]);
G2=tf([1,1],[1,11]);
r1=sin(t+pi/6);
r2=2*cos(2*t-pi/4);
r3=sin(t+pi/6)-2*cos(2*t-pi/4);
figure(1);lsim(G1,r1,t);grid; figure(2);lsim(G2,r1,t);grid;
figure(3);lsim(G1,r2,t);grid; figure(4);lsim(G2,r2,t);grid;
figure(5);lsim(G1,r3,t);grid; figure(6);lsim(G2,r3,t);grid;
```

6-6 画出下列各开环传递函数的奈奎斯特图，并判别系统是否稳定。

$$(1) \quad G(s)H(s) = \frac{100}{(s+1)(0.1s+1)}$$

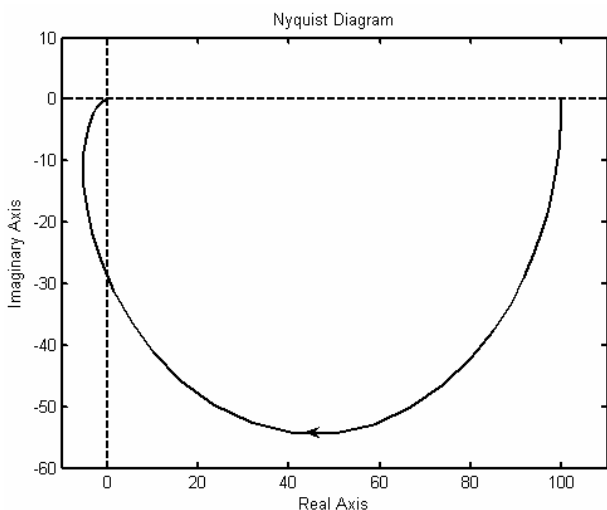
解：系统的频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{100}{(j\omega+1)(j0.1\omega+1)} = \frac{100[(1-0.1\omega^2) - j1.1\omega]}{(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)} \\ &= \frac{100(1-0.1\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)} - j \frac{110\omega}{(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)} \end{aligned}$$

①当  $\omega = 0$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 100$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = 0^\circ$

②当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -180^\circ$

系统的奈奎斯特图在第III和第IV象限间变化,且不包围点  $(-1, j0)$ , MATLAB 验证如题图 6-6(a) 所示,该系统稳定。



题图 6-6(a)  $G(s)H(s) = \frac{100}{(s+1)(0.1s+1)}$  的奈奎斯特图

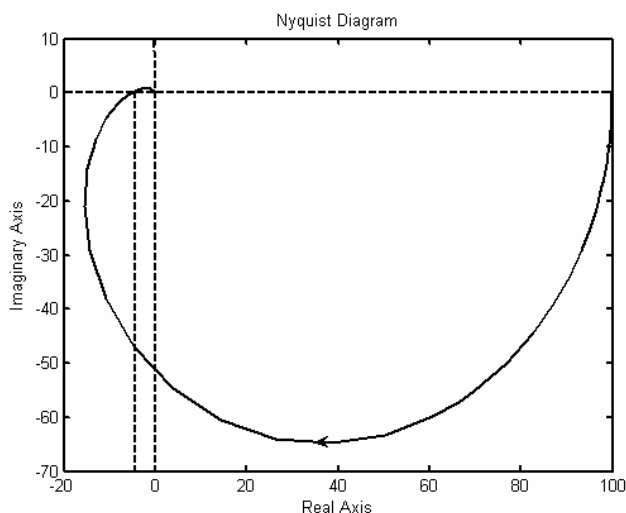


图 6-6(b)  $G(s)H(s) = \frac{100}{(0.5s+1)(0.2s+1)(0.05s+1)}$  的奈奎斯特图

$$(2) \quad G(s)H(s) = \frac{100}{(0.5s+1)(0.2s+1)(0.05s+1)}$$

解: 系统的频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{100}{(j0.5\omega+1)(j0.2\omega+1)(j0.05\omega+1)} \\ &= \frac{100[(1-0.135\omega^2) + j(0.005\omega^3 - 0.75\omega)]}{(1+0.25\omega^2)(1+0.04\omega^2)(1+0.0025\omega^2)} \\ &= \frac{100(1-0.135\omega^2)}{(1+0.25\omega^2)(1+0.04\omega^2)(1+0.0025\omega^2)} \\ &\quad + j \frac{100(0.005\omega^3 - 0.75\omega)}{(1+0.25\omega^2)(1+0.04\omega^2)(1+0.0025\omega^2)} \end{aligned}$$

①当  $\omega = 0$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 100$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = 0^\circ$

②当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -270^\circ$

③与实轴的交点

令  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ , 解得  $\omega_x = 14.3$

则  $R_e[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = -5.05$

系统的奈奎斯特图在第III和第IV象限间变化, 且包围点  $(-1, j0)$  两圈, MATLAB 验证如题图 6-6(b) 所示, 该系统不稳定。

$$(3) \quad G(s)H(s) = \frac{200}{s(s+1)(0.1s+1)}$$

解: 系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{200}{j\omega(j\omega+1)(j0.1\omega+1)} = \frac{200[1.1\omega^2 + j(-0.1\omega^3 + \omega)]}{-\omega^2(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)}$$

$$= -\frac{220}{(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)} + j\frac{200(0.1\omega^2-1)}{\omega(1+\omega^2)(1+0.01\omega^2)}$$

①当  $\omega = 0$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 220$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $\varphi(\omega) = -90^\circ$

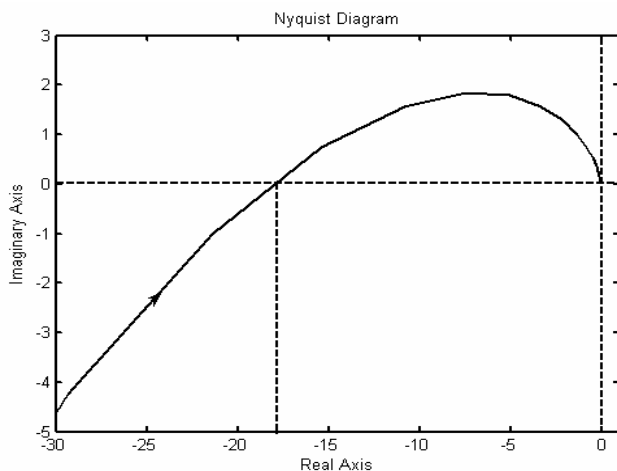
②当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -270^\circ$

③与实轴的交点

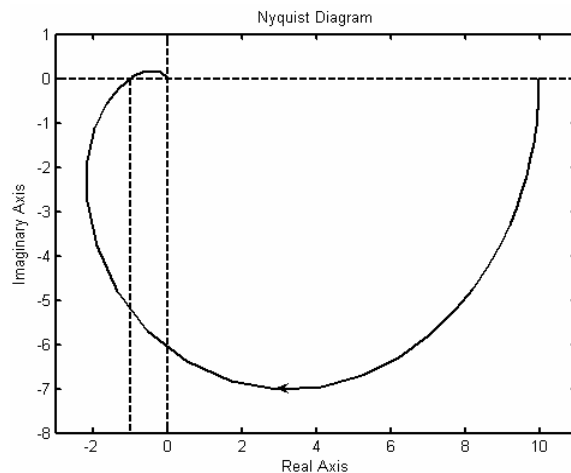
令  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ , 解得  $\omega_x = 3.16$

则  $R_e[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = -18.1$

系统的奈奎斯特图在第II和第III象限间变化, 且包围点  $(-1, j0)$  两圈, MATLAB 验证如题图 6-6(c) 所示, 该系统不稳定。



题图 6-6(c)  $G(s)H(s) = \frac{200}{s(s+1)(0.1s+1)}$  的奈奎斯特图



题图 6-6(d)  $G(s)H(s) = \frac{10}{(s+1)(2s+1)(3s+1)}$  的奈奎斯特图

$$(4) \quad G(s)H(s) = \frac{10}{(s+1)(2s+1)(3s+1)}$$

解：系统的频率特性为

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{10}{(j\omega+1)(j2\omega+1)(j3\omega+1)} = \frac{10[(1-11\omega^2) + j(6\omega^3 - 6\omega)]}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} \\ &= \frac{10(1-11\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} + j \frac{10(6\omega^3 - 6\omega)}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)(1+9\omega^2)} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \omega = 0 \text{ 时, } R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 10, \quad I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \quad \varphi(\omega) = -0^\circ$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \omega \rightarrow \infty \text{ 时, } R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \quad I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \quad \varphi(\omega) = -270^\circ$$

③与实轴的交点

$$\text{令 } I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \text{ 解得 } \omega_x = 1$$

$$\text{则 } R_e[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = -1$$

系统的奈奎斯特图在第III和第IV象限间变化, 且过点 $(-1, j0)$ , MATLAB 验证如题图 6-6(d) 所示, 该系统临界稳定。

$$(5) \quad G(s)H(s) = \frac{1}{1-0.01s}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(1-j0.01\omega)} = \frac{1+j0.01\omega}{1+0.0001\omega^2} = \frac{1}{1+0.0001\omega^2} + j \frac{0.01\omega}{1+0.0001\omega^2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \omega = 0 \text{ 时, } R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 1, \quad I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \quad \varphi(\omega) = 0^\circ$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \omega \rightarrow \infty \text{ 时, } R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \quad I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0, \quad \varphi(\omega) = 90^\circ$$

系统的奈奎斯特图在第 I 象限间变化, 不包围点 $(-1, j0)$ , MATLAB 验证如题图 6-6(e) 所示。

由于该系统在  $s$  右半平面有一个开环极点, 所以该系统不稳定。

$$(6) \quad G(s)H(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$$

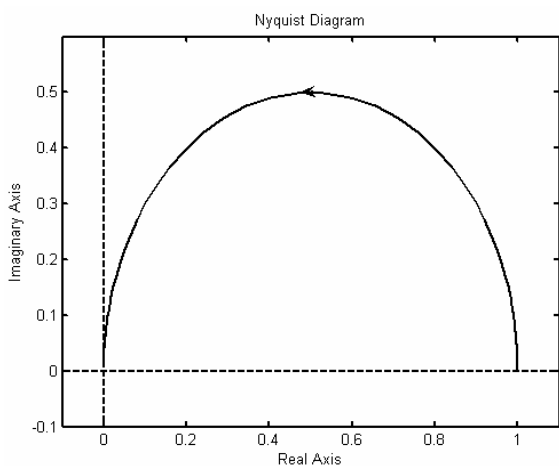
解：系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j0.1\omega+1)} = \frac{0.1\omega^2 + j\omega}{-\omega^2(1+\omega^2)} = -\frac{0.1}{(1+\omega^2)} - j \frac{1}{\omega(1+\omega^2)}$$

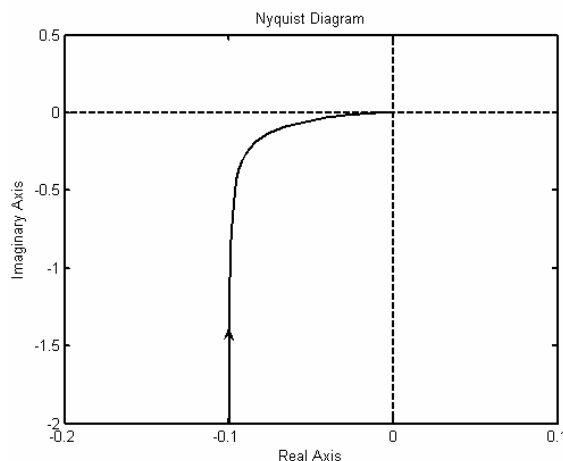
$$\textcircled{1} \text{ 当 } \omega = 0 \text{ 时, } R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -0.1, \quad I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty, \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$

②当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $\varphi(\omega) = -180^\circ$

系统的奈奎斯特图在第III象限间变化, 不包围点  $(-1, j0)$ , MATLAB 验证如题图 6-6(f) 所示, 该系统稳定。



题图 6-6(e)  $G(s)H(s) = \frac{1}{1-0.01s}$  的奈奎斯特图



题图 6-6(f)  $G(s)H(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)}$  的奈奎斯特图

$$(7) G(s)H(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$$

解: 系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j0.5\omega+1)(j0.1\omega+1)} = \frac{0.6\omega^2 + j(-0.05\omega^3 + \omega)}{-\omega^2(1+0.25\omega^2)(1+0.01\omega^2)}$$

$$= -\frac{0.6}{(1+0.25\omega^2)(1+0.01\omega^2)} + j\frac{(0.05\omega^2-1)}{\omega(1+0.25\omega^2)(1+0.01\omega^2)}$$

①当  $\omega = 0$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -0.6$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $\varphi(\omega) = -90^\circ$

②当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -270^\circ$

③与实轴的交点

令  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ , 解得  $\omega_x = 4.47$

则  $R_e[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = -0.08$

系统的奈奎斯特图在第II和第III象限间变化, 且包围点  $(-1, j0)$  两圈, MATLAB 验证如题图 6-6(g) 所示, 该系统不稳定。

$$(8) G(s)H(s) = \frac{50(0.6s+1)}{s^2(4s+1)}$$



解：系统的频率特性为

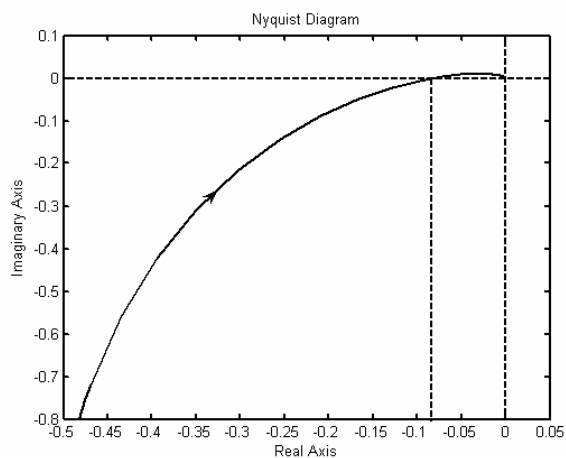
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{50(j0.6\omega+1)}{-\omega^2(j4\omega+1)} = \frac{50(1+2.4\omega^2-j3.4\omega)}{-\omega^2(1+16\omega^2)} = -\frac{50(1+2.4\omega^2)}{\omega^2(1+16\omega^2)} + j\frac{170\omega}{\omega^2(1+16\omega^2)}$$

①当  $\omega = 0$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = \infty$ ,  $\varphi(\omega) = -90^\circ$

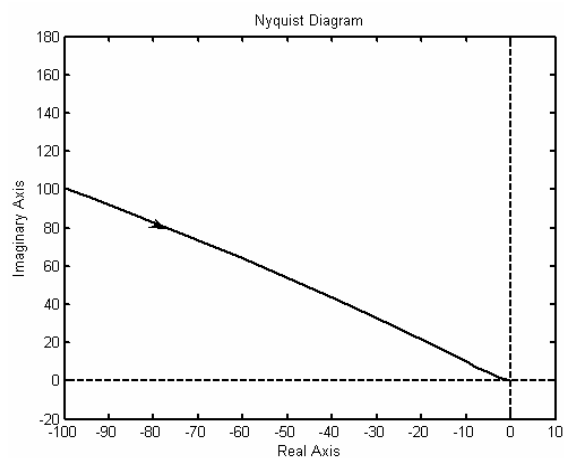
②当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $R_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $I_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -180^\circ$

系统的奈奎斯特图在第 II 象限间变化, 顺时针包围点  $(-1, j0)$  两圈, MATLAB 验证如题图 6-6(h)

所示, 该系统不稳定。



题图 6-6(g)  $G(s)H(s) = \frac{1}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$  的奈奎斯特图



题图 6-6(h)  $G(s)H(s) = \frac{50(0.6s+1)}{s^2(4s+1)}$  的奈奎斯特图

MATLAB 参考程序 graph606.m

```
G1=tf(100,conv([1,1],[0.1,1]));
```

```
figure(1);[re,im]=nyquist(G1);plot(re(:),im(:))
```

```
v1=[-10,110,-60,10];axis(v1)
```

```
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');title('Nyquist Diagram');
```

```
G2=tf(100,conv([0.5,1],conv([0.2,1],[0.05,1])));
```

```
figure(2);[re,im]=nyquist(G2);plot(re(:),im(:))
```

```
v2=[-20,100,-70,10];axis(v2)
```

```
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');title('Nyquist Diagram');
```

```
G3=tf(200,conv([1,0],conv([1,1],[0.1,1])));
```

```
figure(3);[re,im]=nyquist(G3);plot(re(:),im(:))
```

```
v3=[-30,1,-5,3];axis(v3)
```

```

xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');title('Nyquist Diagram');
G4=tf(10, conv([1, 1], conv([2, 1], [3, 1])));
figure(4);[re, im]=nyquist(G4);plot(re(:), im(:))
v4=[-3, 11, -8, 1];axis(v4)
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');title('Nyquist Diagram');
G5=tf(1, [-0.01, 1]);
figure(5);[re, im]=nyquist(G5);plot(re(:), im(:))
v5=[-0.1, 1.1, -0.1, 0.6];axis(v5)
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');title('Nyquist Diagram');
G6=tf(1, [0.1, 1, 0]);
figure(6);[re, im]=nyquist(G6);plot(re(:), im(:))
v6=[-0.2, 0.1, -2, 0.5];axis(v6)
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');title('Nyquist Diagram');
G7=tf(1, conv([1, 0], conv([0.5, 1], [0.1, 1])));
figure(7);[re, im]=nyquist(G7);plot(re(:), im(:))
v7=[-0.5, 0.05, -0.8, 0.1];axis(v7)
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');title('Nyquist Diagram');
G8=tf([30, 50], [4, 1, 0, 0]);
figure(8);[re, im]=nyquist(G8);plot(re(:), im(:))
v8=[-100, 10, -20, 180];axis(v8)
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');title('Nyquist Diagram');

```

6-7 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{10K(s+0.5)}{s^2(s+2)(s+10)}$$

试绘制  $G(s)H(s)$  在  $K=50$  和  $K=10$  时的极坐标图。

解：系统的频率特性为

$$\begin{aligned}
 G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{10K(j\omega+0.5)}{-\omega^2(j\omega+2)(j\omega+10)} = \frac{10K(10+12.5\omega^2 + j\omega^3 + j14\omega)}{-\omega^2(4+\omega^2)(100+\omega^2)} \\
 &= -\frac{10K(10+12.5\omega^2)}{\omega^2(4+\omega^2)(100+\omega^2)} - j\frac{10K(\omega^2+14)}{\omega(4+\omega^2)(100+\omega^2)}
 \end{aligned}$$

(1) 当  $K=50$  时, 系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{500(10+12.5\omega^2)}{\omega^2(4+\omega^2)(100+\omega^2)} - j\frac{500(\omega^2+14)}{\omega(4+\omega^2)(100+\omega^2)}$$

① 当  $\omega=0$  时,  $\operatorname{Re}_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $\operatorname{Im}_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $\varphi(\omega) = -180^\circ$

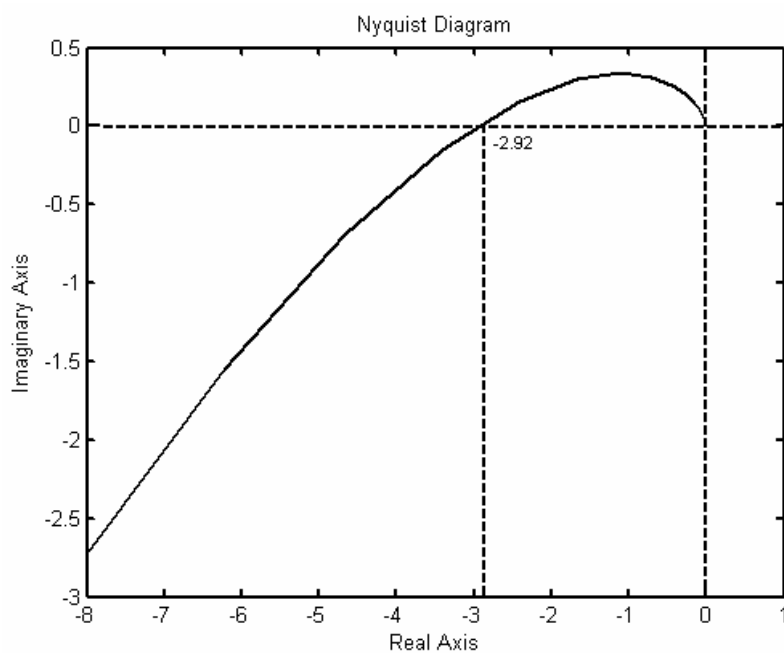
② 当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $\operatorname{Re}_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\operatorname{Im}_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -270^\circ$

③ 与实轴的交点

令  $\operatorname{Im}_e[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ , 解得  $\omega_x = 3.74$

则  $\operatorname{Re}_e[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = -2.92$

其中  $\omega_x$  为  $G(j\omega)H(j\omega)$  与实轴交点处的频率。系统的奈奎斯特图在第 II 和第 III 象限间变化, 且包围点  $(-1, j0)$  两圈, 如题图 6-7(a) 所示, 该系统不稳定。



题图 6-7(a)  $G(s)H(s) = \frac{500(s+1)}{s^2(s+2)(s+10)}$  的奈奎斯特图

(2) 当  $K=10$  时, 系统的频率特性为

当  $K=50$  时, 系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{500(10+12.5\omega^2)}{\omega^2(4+\omega^2)(100+\omega^2)} - j\frac{500(\omega^2+14)}{\omega(4+\omega^2)(100+\omega^2)}$$

① 当  $\omega=0$  时,  $\operatorname{Re}_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $\operatorname{Im}_e[G(j\omega)H(j\omega)] = -\infty$ ,  $\varphi(\omega) = -180^\circ$

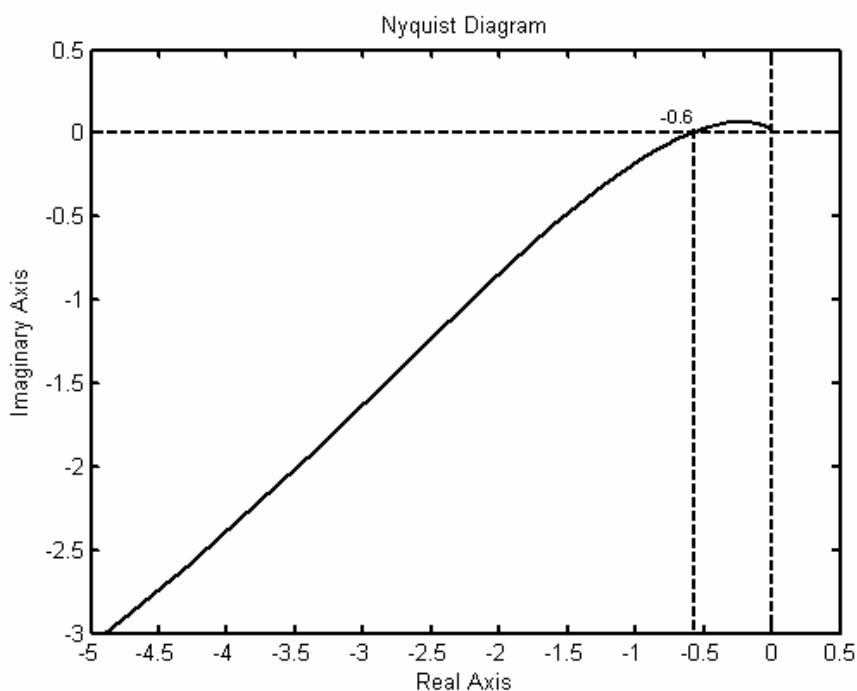
②当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $\operatorname{Re}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\operatorname{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ ,  $\varphi(\omega) = -270^\circ$

③与实轴的交点

令  $\operatorname{Im}[G(j\omega)H(j\omega)] = 0$ , 解得  $\omega_x = 3.74$

则  $\operatorname{Re}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)] = -2.92$

其中  $\omega_x$  为  $G(j\omega)H(j\omega)$  与实轴交点处的频率。系统的奈奎斯特图在第 II 和第 III 象限间变化, 且不包围点  $(-1, j0)$ , 如题图 6-7(b) 所示, 该系统稳定。



题图 6-7(b)  $G(s)H(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s+2)(s+10)}$  的奈奎斯特图

MATLAB 参考程序 graph607.m

```
n1=[500 250];d1=conv([1 0],conv([1 0],conv([1 2],[1 10])));
```

```
G1=tf(n1,d1);
```

```
figure(1);[re,im]=nyquist(G1);
```

```
plot(re(:),im(:))
```

```
v1=[-8,1,-3,0.5];axis(v1)
```

```
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');
```

```
title('Nyquist Diagram');
```

```
n2=[100 50];G2=tf(n2, d1);
n2=[100 50];G2=tf(n2, d1);
figure(2);[re, im]=nyquist(G2);
plot(re(:), im(:))
v2=[-5, 0.5, -3, 0.5];axis(v2)
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');
title('Nyquist Diagram')
```

6-8 试绘制具有下列传递函数的系统的对数坐标图并判断系统的稳定性。

(1)  $G(s) = \frac{1}{0.2s+1}$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{j0.2\omega + 1}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = -20\lg\sqrt{1+0.04\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan 0.2\omega$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(a) 所示。

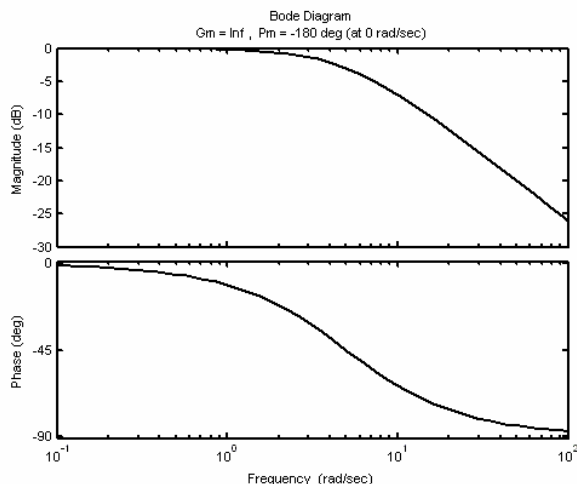
由题图 6-8(a) 可知，在  $L(\omega) > 0$  的频段内，没有穿越  $-180^\circ$  线，则

$$N = N_+ - N_- = 0$$

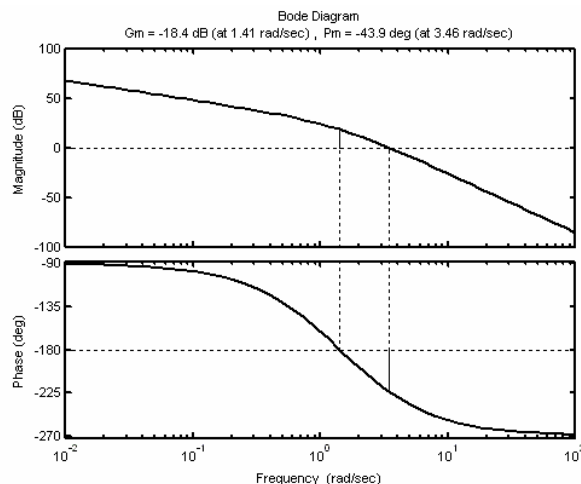
而  $P = 0$ ，于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 0$$

所以，系统闭环稳定。



题图 6-8(a)  $G(s) = \frac{1}{0.2s+1}$  的伯德图



题图 6-8(b)  $G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+2)}$  的伯德图

$$(2) G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+2)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{50}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 50 - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1+\omega^2} - 20\lg \sqrt{1+4\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega - \arctan 2\omega$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(b) 所示。

在题图 6-8(b) 中, 因为  $\nu = 1$ , 需要在对数相频特性的低频段曲线向上补作  $1 \times 90^\circ$  的垂线。

在  $L(\omega) > 0$  的频段内, 其对数相频特性曲线穿越  $-180^\circ$  线一次, 且为负穿越, 则

$$N = N_+ - N_- = -1$$

而  $P = 0$ , 于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 2$$

所以, 系统闭环不稳定。

$$(3) G(s) = 10s + 2$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = j10\omega + 2$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg \sqrt{100 + 4\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{10\omega}{2}$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(c) 所示。

由题图 6-8(c) 可知, 在  $L(\omega) > 0$  的频段内, 其对数相频特性曲线没有穿越  $-180^\circ$  线, 则

$$N = N_+ - N_- = 0$$

而  $P = 0$ , 于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 0$$

所以, 系统闭环稳定。

$$(4) G(s) = \frac{2.5(s+10)}{s^2(0.2s+1)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{2.5(j\omega+10)}{-\omega^2(j0.2\omega+1)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 2.5 + 20\lg \sqrt{100 + \omega^2} - 40\lg \omega - 20\lg \sqrt{1 + 0.04\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{10} - 180^\circ - \arctan 0.2\omega$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(d) 所示。

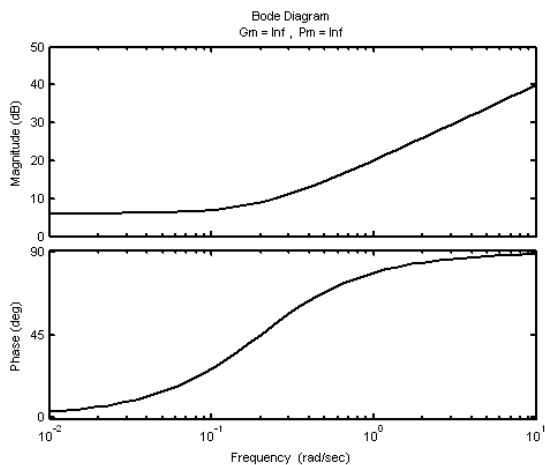
在题图 6-8(d) 中，因为  $\nu = 2$ ，需要在对数相频特性的低频段曲线向上补作  $2 \times 90^\circ$  的垂线。在  $L(\omega) > 0$  的频段内，其对数相频特性曲线穿越  $-180^\circ$  线一次，且为负穿越，则

$$N = N_+ - N_- = 1$$

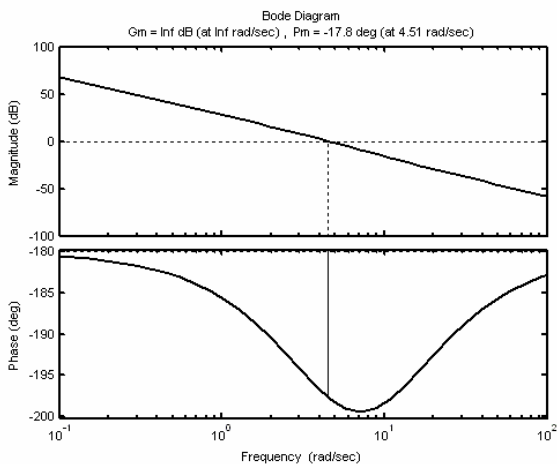
而  $P = 0$ ，于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 2$$

所以，系统闭环不稳定。



题图 6-8(c)  $G(s) = 10s + 2$  的伯德图



题图 6-8(d)  $G(s) = \frac{2.5(s+10)}{s^2(0.2s+1)}$  的伯德图

$$(5) G(s) = \frac{2.5(s+10)}{s(s^2+4s+100)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{2.5(j\omega+10)}{j\omega(100-\omega^2+j4\omega)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 2.5 + 20\lg \sqrt{100 + \omega^2} - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{(100 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{10} - 90^\circ - \arctan \frac{4\omega}{100 - \omega^2}$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(e) 所示。

在题图 6-8(e) 中, 因为  $\nu = 1$ , 需要在对数相频特性的低频段曲线向上补作  $1 \times 90^\circ$  的垂线。

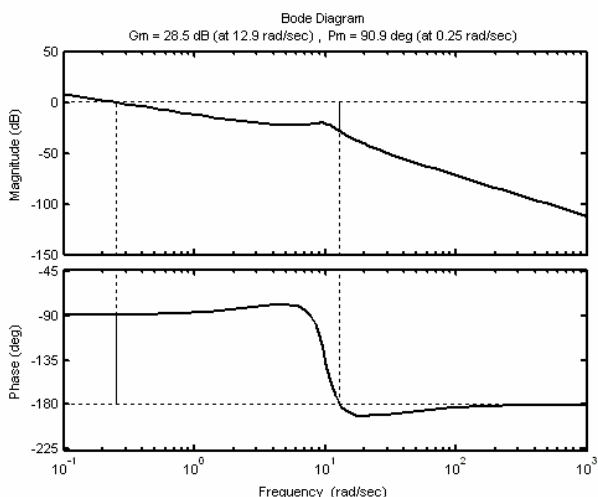
在  $L(\omega) > 0$  的频段内, 其对数相频特性曲线没有穿越  $-180^\circ$  线, 则

$$N = N_+ - N_- = 0$$

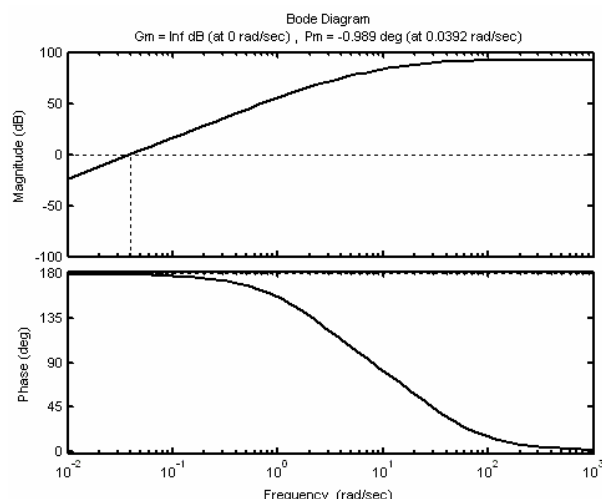
而  $P = 0$ , 于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 0$$

所以, 系统闭环稳定。



题图 6-8(e)  $G(s) = \frac{2.5(s+10)}{s^2+4s+100}$  的伯德图



题图 6-8(f)  $G(s) = \frac{650s^2}{(0.04s+1)(0.4s+1)}$  的伯德图

(6)  $G(s) = \frac{650s^2}{(0.04s+1)(0.4s+1)}$

解: 系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{-650\omega^2}{(j0.04\omega+1)(j0.4\omega+1)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 650 + 40\lg \omega - 20\lg \sqrt{1+0.0016\omega^2} - 20\lg \sqrt{1+0.16\omega^2}$$



$$\varphi(\omega) = 180^\circ - \arctan 0.04\omega - \arctan 0.4\omega$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(f) 所示。

由题图 6-8(f) 可知, 在  $L(\omega) > 0$  的频段内, 其对数相频特性曲线没有穿越  $-180^\circ$  线, 则

$$N = N_+ - N_- = 0$$

而  $P = 0$ , 于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 0$$

所以, 系统闭环稳定。

$$(7) G(s) = \frac{20(s+5)(s+40)}{s(s+0.1)(s+20)^2}$$

解: 系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{20(j\omega+5)(j\omega+40)}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+20)^2}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 20 + 20\lg \sqrt{25 + \omega^2} + 20\lg \sqrt{1600 + \omega^2} - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1 + \omega^2} - 20\lg(\omega^2 + 400)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ + \arctan \frac{\omega}{5} + \arctan \frac{\omega}{40} - \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{20}$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(g) 所示。

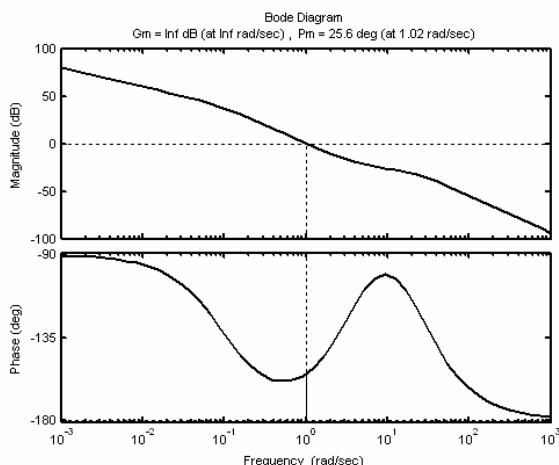
由题图 6-8(g) 可知, 在  $L(\omega) > 0$  的频段内, 其对数相频特性曲线没有穿越  $-180^\circ$  线, 则

$$N = N_+ - N_- = 0$$

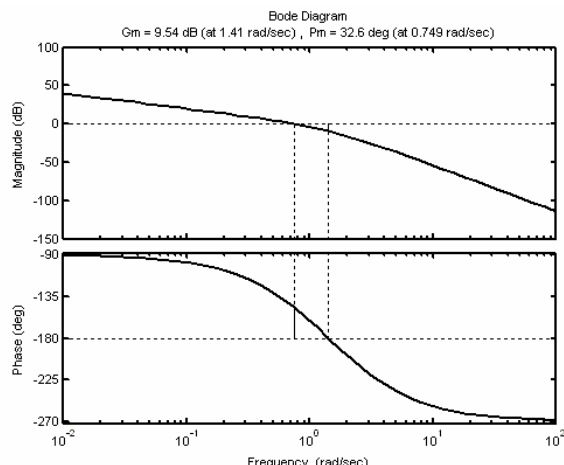
而  $P = 0$ , 于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 0$$

所以, 系统闭环稳定。



题图 6-8(g)  $G(s) = \frac{20(s+5)(s+40)}{s(s+0.1)(s+20)^2}$  的伯德图



题图 6-8(h)  $G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$  的伯德图

$$(8) G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{2}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 2 - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1+\omega^2} - 20\lg \sqrt{4+\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -270^\circ - \arctan 0.2\omega + \arctan \omega$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(h) 所示。

在题图 6-8(h) 中, 因为  $\nu = 1$ , 需要在对数相频特性的低频段曲线向上补作  $1 \times 90^\circ$  的垂线。

在  $L(\omega) > 0$  的频段内, 其对数相频特性曲线没有穿越  $-180^\circ$  线, 则

$$N = N_+ - N_- = 0$$

而  $P = 0$ , 于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 0$$

所以, 系统闭环稳定。

$$(9) G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(s-1)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j0.2\omega+1)(j\omega-1)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1+0.04\omega^2} - 20\lg \sqrt{1+\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.2\omega - \arctan \frac{\omega}{-1}$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(i) 所示。

在题图 6-8(i) 中, 因为  $\nu = 1$ , 需要在对数相频特性的低频段曲线向上补作  $1 \times 90^\circ$  的垂线。

在  $L(\omega) > 0$  的频段内, 其对数相频特性曲线穿越  $-180^\circ$  线半次, 且为负穿越, 故  $N_- = \frac{1}{2}$ ,

则

$$N = N_+ - N_- = -\frac{1}{2}$$

而  $P=1$ ，于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

所以，系统闭环不稳定。

$$(10) \quad G(s) = \frac{5(1-0.5s)}{s(1+0.1s)(1-0.2s)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{5(1-j0.5\omega)}{j\omega(1+j0.1\omega)(1-j0.2\omega)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 5 + 20\lg \sqrt{1+0.025\omega^2} - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{1+0.01\omega^2} - 20\lg \sqrt{1+0.04\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan 0.5\omega - \arctan 0.1\omega + \arctan 0.2\omega$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(j) 所示。

由题图 6-8(j) 可得： $\gamma = 32.5^\circ$ ,  $K_g(\text{dB}) \rightarrow \infty \text{dB}$ 。但是对于非最小相位系统来说，仅用  $\gamma$  或  $K_g$  不足以说明系统的稳定程度，而  $\gamma > 0$  和  $K_g > 0$  也不一定表明闭环系统必然稳定。

在题图 6-8(j) 中，因为  $\nu = 1$ ，需要在对数相频特性的低频段曲线向上补作  $1 \times 90^\circ$  的垂线。

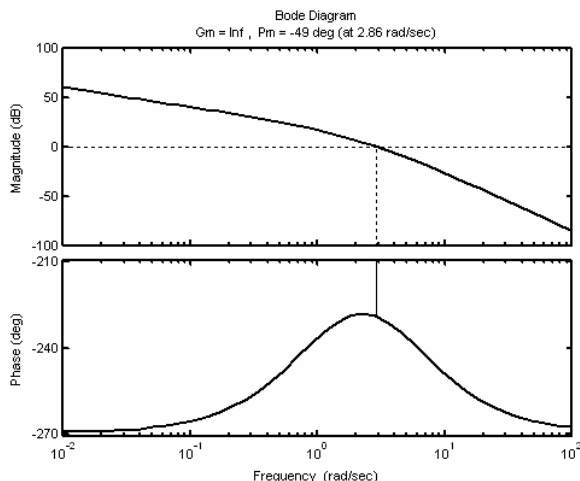
在  $L(\omega) > 0$  的频段内，其对数相频特性曲线没有穿越  $-180^\circ$  线，则

$$N = N_+ - N_- = 0$$

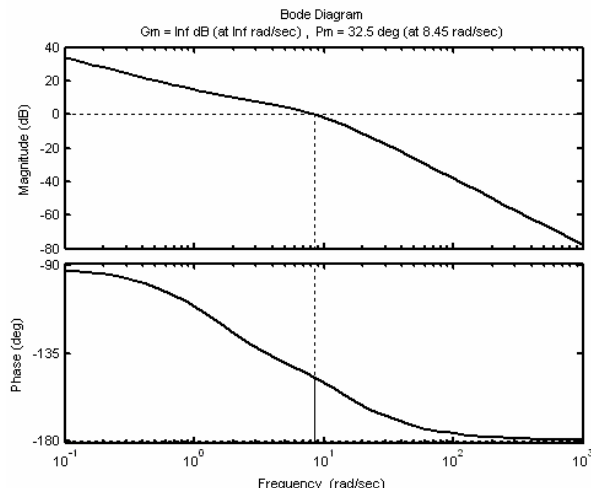
而  $P=1$ ，于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 1 - 2 \times 0 = 1$$

所以，系统闭环不稳定。



题图 6-8(i)  $G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(s-1)}$  的伯德图



题图 6-8(j)  $G(s) = \frac{5(1-0.5s)}{s(1+0.1s)(1-0.2s)}$  的伯德图

$$(11) \quad G(s) = \frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)}$$

解：系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{50}{(0.2s+1)(s+2)(s+0.5)} = \frac{50}{(0.2s+1)(0.5s+1)(2s+1)}$$

系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{50}{(j0.2\omega+1)(j0.5\omega+1)(j2\omega+1)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 50 - 20\lg \sqrt{1+0.04\omega^2} - 20\lg \sqrt{1+0.25\omega^2} - 20\lg \sqrt{1+4\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan 0.2\omega - \arctan 0.5\omega - \arctan 2\omega$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(k) 所示。

由题图 6-8(k) 可知，在  $L(\omega) > 0$  的频段内，其对数相频特性曲线穿越  $-180^\circ$  线一次，且为负穿越，则

$$N = N_+ - N_- = -1$$

而  $P = 0$ ，于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

所以，系统闭环不稳定。

$$(12) \quad G(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 2s)(0.2s + 1)}$$

解：系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 2s)(0.2s + 1)} = \frac{500}{s^2(0.5s + 1)(0.2s + 1)}$$

系统的频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{500}{-\omega^2(j0.5\omega + 1)(j0.2\omega + 1)}$$

则系统的对数幅频和相频特性为

$$L(\omega) = 20\lg 500 - 40\lg \omega - \sqrt{1 + 0.25\omega^2} - 20\lg \sqrt{1 + 0.04\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -180^\circ - \arctan 0.5\omega - \arctan 0.2\omega$$

绘出系统的对数坐标图如题图 6-8(1) 所示。

在题图 6-8(1) 中，因为  $\nu = 2$ ，需要在对数相频特性的低频段曲线向上补作  $2 \times 90^\circ$  的垂线。在  $L(\omega) > 0$  的频段内，其对数相频特性曲线穿越  $-180^\circ$  线一次，且为负穿越，故

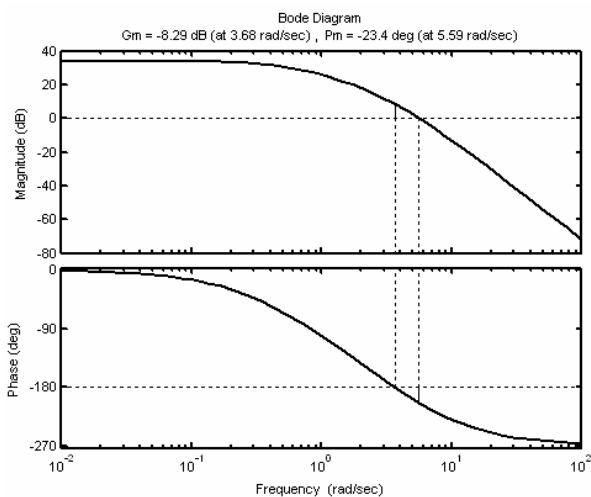
$N_- = 1$  则

$$N = N_+ - N_- = -1$$

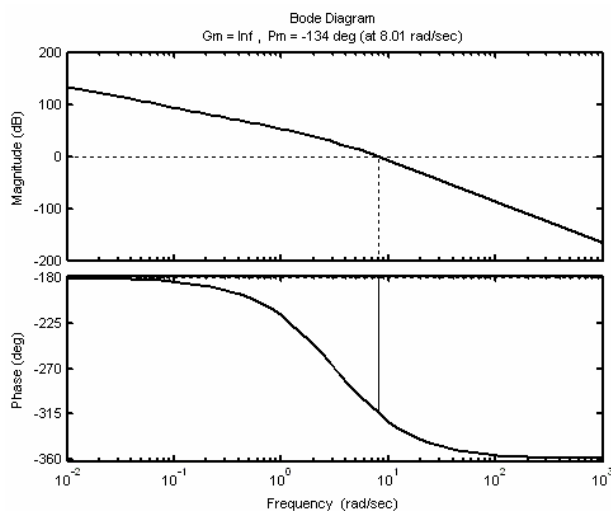
而  $P = 0$ ，于是闭环极点位于  $s$  右半平面的个数为

$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

所以，系统闭环不稳定。



题图 6-8(k)  $G(s) = \frac{50}{(0.2s + 1)(s + 2)(s + 0.5)}$  的伯德图



题图 6-8(l)  $G(s) = \frac{1000}{s^2(s^2 + 2s)(0.2s + 1)}$  的伯德图

MATLAB 参考程序 graph608.mm

```
G1=tf(1,[0.2,1]);
G2=tf(50,conv(conv([1,0],[1,1]],[1,2]));
G3=tf([10,2],1);
G4=tf([2.5,25],[0.2,1,0,0]);
G5=tf([2.5,25],[1,4,100,0]);
G6=tf([650,0,0],conv([0.04,1],[0.4,1]));
G7=tf([20,180,400],conv([1,0.1,0],[1,40,400]));
G8=tf(2,conv(conv([1,0],[1,1]],[1,2]));
G9=tf(10,conv(conv([1,0],[0.2,1]],[1,-1]));
G10=tf(5*[-0.5,1],conv(conv([1,0],[0.1,1],[-0.2,1]));
G11=tf(50,conv(conv([0.2,1],[1,2]],[1,0.5]));
G12=tf(1000,conv(conv([1,0],[1,2,0]],[0.2,1]));
figure(1);margin(G1);figure(2);margin(G2);
figure(3);margin(G3);figure(4);margin(G4);
figure(5);margin(G5);figure(6);margin(G6);
figure(7);margin(G7);figure(8);margin(G8);
figure(9);margin(G9);figure(10);margin(G10);
figure(11);margin(G11);figure(12);margin(G12);
```

6-9  $R$ - $C$  网络如题图 6-9 所示, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\tau s + 1}{Ts + 1}$$

其中  $\alpha = \frac{R_2 + R_1}{R_2} > 1$ ,  $\tau = R_1 C$ ,  $T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$ , 试绘

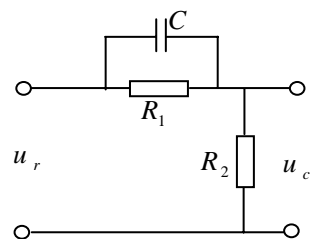
制  $\alpha = 10, 30$  和  $T = 1s$  时的对数坐标图。

解: (1) 当  $\alpha = 10, T = 1s$  时,

$$\alpha = \frac{R_2 + R_1}{R_2} = 10 \quad \textcircled{1}$$

$$T = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1} C = 1 \quad \textcircled{2}$$

通过解联立方程组①、②可求得



题图 6-9

$$\tau = R_1 C = 10$$

将  $\alpha, T, \tau$  代入  $G(s)$ ，从而得系统的开环传递函数为

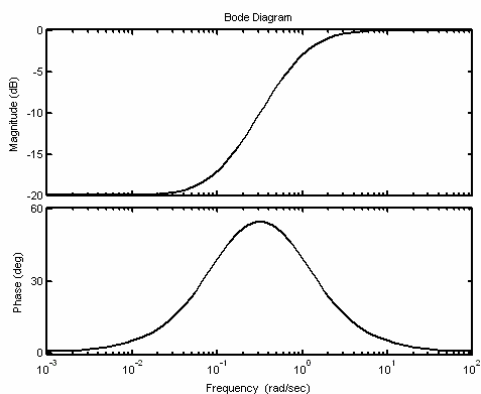
$$G(s) = \frac{1}{10} \frac{10s + 1}{s + 1}$$

对应的对数坐标图 6-9(a) 所示。

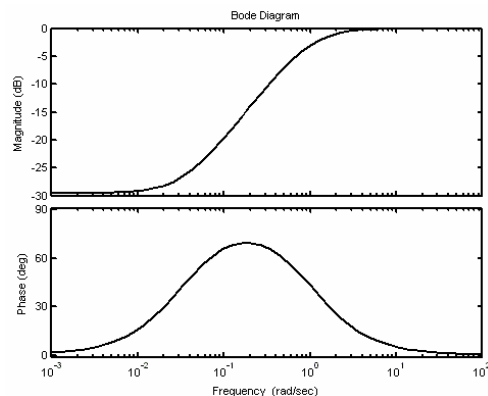
(2) 当  $\alpha = 30, T = 1s$  时，和 (1) 求解过程相似，得系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{30} \frac{30s + 1}{s + 1}$$

对应的对数坐标图 6-9(b) 所示。



题图 6-9(a)  $\alpha = 10, T = 1s$  时系统的伯德图



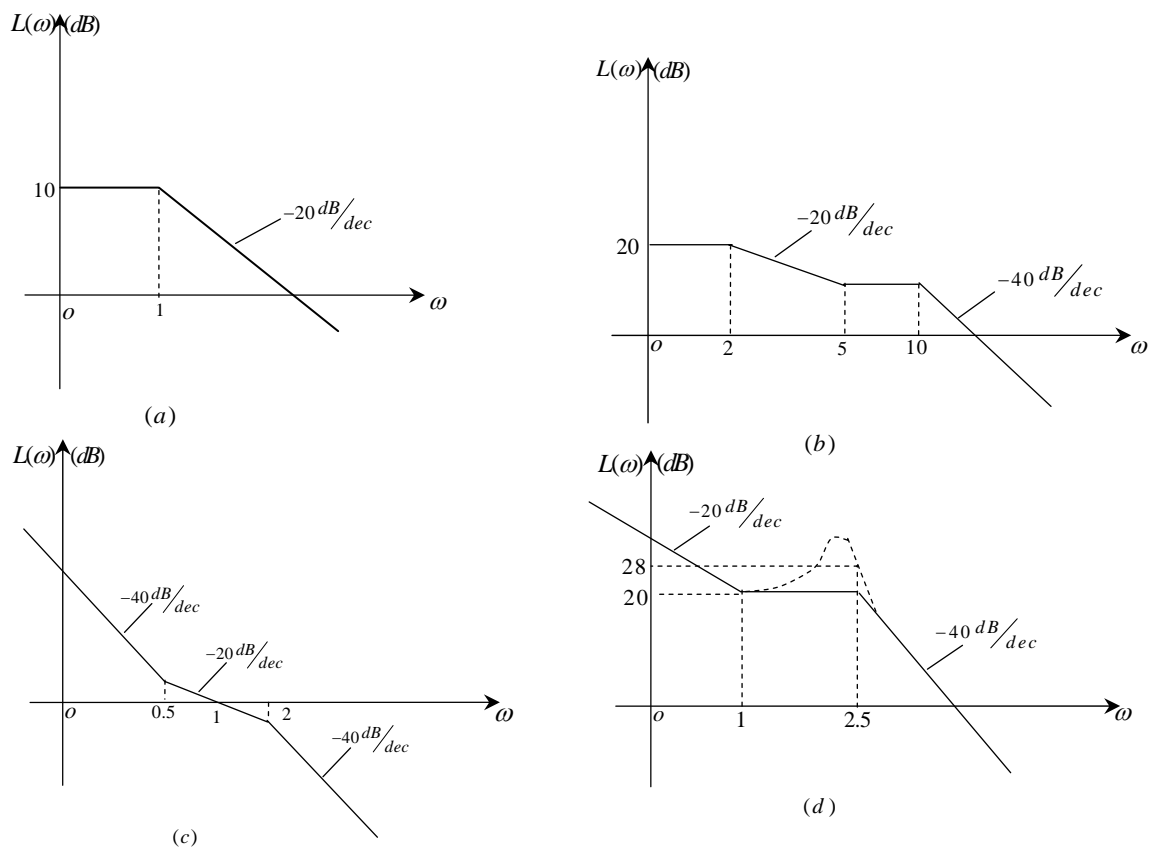
题图 6-9(b)  $\alpha = 30, T = 1s$  时系统的伯德图

MATLAB 参考程序 graph609.m

```
G1=tf([10, 1], [10, 10]);G2=tf([30, 1], [30, 30]);
```

```
figure(1);bode(G1);figure(2);bode(G2);
```

6-10 已知最小相位系统的幅频渐近线如题图 6-10 所示，试求取各系统的开环传递函数，并作出相应的相频特性曲线。



题图 6-10

解：本题分别求解如下

(1) 题图 6-10(a) 系统

① 确定系统积分环节或微分环节的个数。因为对数幅频特性的低频段渐近线的斜率为  $0\text{dB/dec}$ ，故有  $v = 0$ 。

② 确定系统传递函数结构形式。在  $\omega = 1$  处，斜率变化  $-20\text{dB/dec}$ ，对应惯性环节，因此系统应具有下述传递函数：

$$G(s) = \frac{K}{s+1}$$

③ 由给定条件确定传递函数参数。由于低频渐近线通过点  $(1, 20\lg K)$ ，故

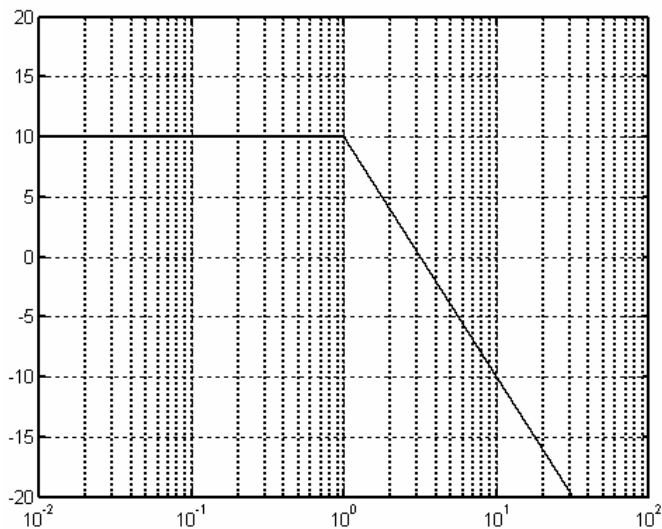
$$20\lg K = 10$$

解得  $K = \sqrt{10}$ ，于是，系统的传递函数为

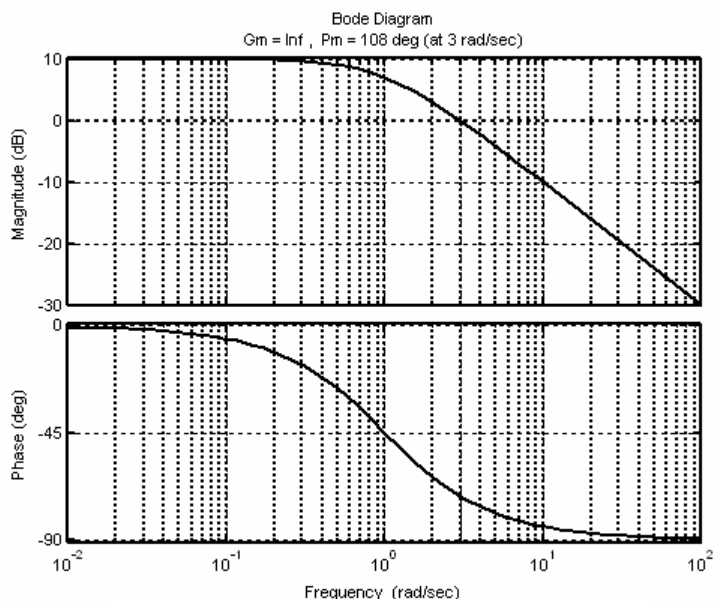
$$G(s) = \frac{\sqrt{10}}{s+1}$$



题图 6-10(a) 系统 MATLAB 验证结果如题图 6-10 (e) 所示, 伯德图如题图 6-10 (f) 所示。



题图 6-10(e)  $G(s) = \frac{\sqrt{10}}{s+1}$  的对数幅频渐近线



题图 6-10(f)  $G(s) = \frac{\sqrt{10}}{s+1}$  伯德图

- (2) ①确定系统积分环节或微分环节的个数。因为对数幅频特性的低频段渐近线的斜率为  $0\text{ dB/dec}$ ，故有  $\nu = 0$ 。
- ②确定系统传递函数结构形式。在  $\omega = 2$  处, 斜率变化  $-20\text{ dB/dec}$ ，对应惯性环节; 在  $\omega = 5$  处, 斜率变化  $+20\text{ dB/dec}$ ，对应一阶微分环节; 在  $\omega = 10$  处, 斜率变化  $-40\text{ dB/dec}$ ，对应两个惯性环节，因此系统应具有下述传递函数:

$$G(s) = \frac{K(0.2s+1)}{(0.5s+1)(0.1s+1)^2}$$

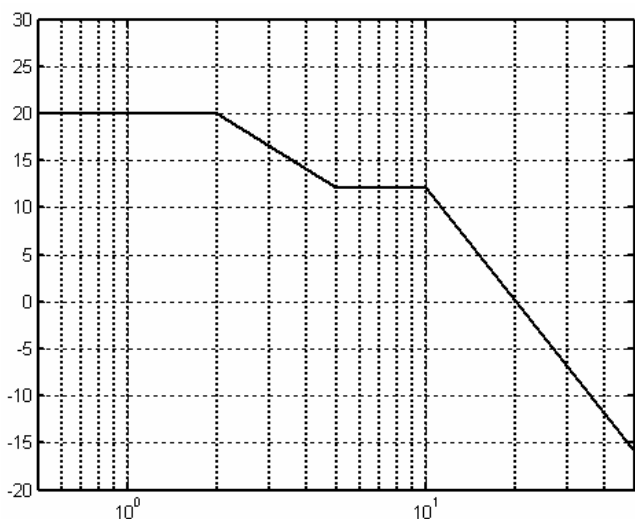
- ③由给定条件确定传递函数参数。由于低频渐近线通过点  $(1, 20\lg K)$ ，故

$$20\lg K = 20$$

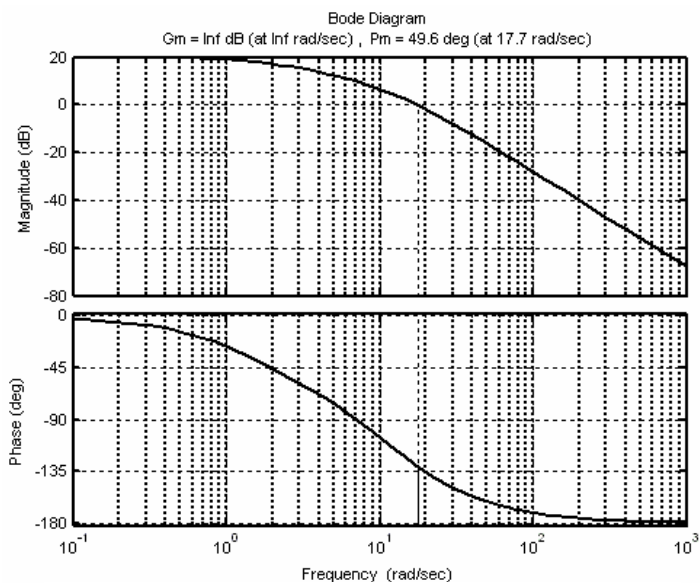
解得  $K = 10$ ，于是，系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{10(0.2s+1)}{(0.5s+1)(0.1s+1)^2}$$

题图 6-10(b) 系统 MATLAB 验证结果如题图 6-10 (g) 所示, 伯德图如题图 6-10 (h) 所示。



题图 6-10(g)  $G(s) = \frac{10(0.2s+1)}{(0.5s+1)(0.1s+1)^2}$  对数幅频渐近线



题图 6-10(h)  $G(s) = \frac{10(0.2s+1)}{(0.5s+1)(0.1s+1)^2}$  的伯德图

(3) ①确定系统积分环节或微分环节的个数。因为对数幅频特性的低频段渐近线的斜率为  $-40 \text{ dB/dec}$ ，故有  $\nu = 2$ 。

②确定系统传递函数结构形式。在  $\omega = 0.5$  处，斜率变化  $+20 \text{ dB/dec}$ ，对应一阶微分环节；在  $\omega = 2$  处，斜率变化  $-20 \text{ dB/dec}$ ，对应惯性环节，因此系统应具有下述传递函数：

$$G(s) = \frac{K(2s+1)}{s^2(0.5s+1)}$$

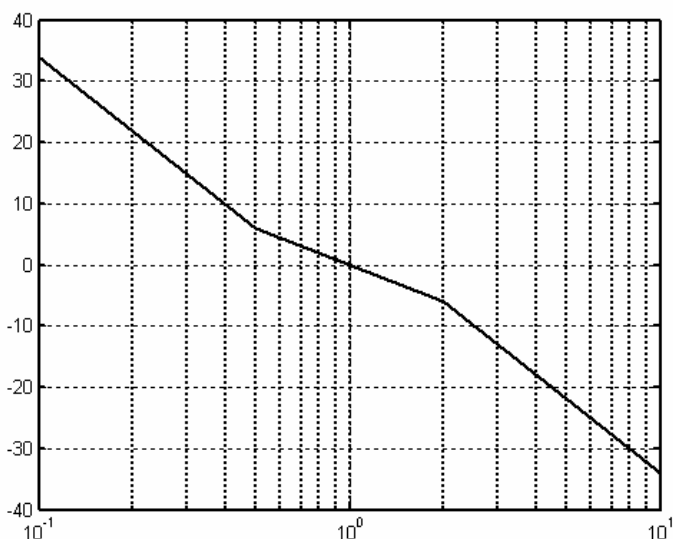
③由给定条件确定传递函数参数。由于低频渐近线通过点  $(1,0)$ ，故

$$20 \lg 2K = 0$$

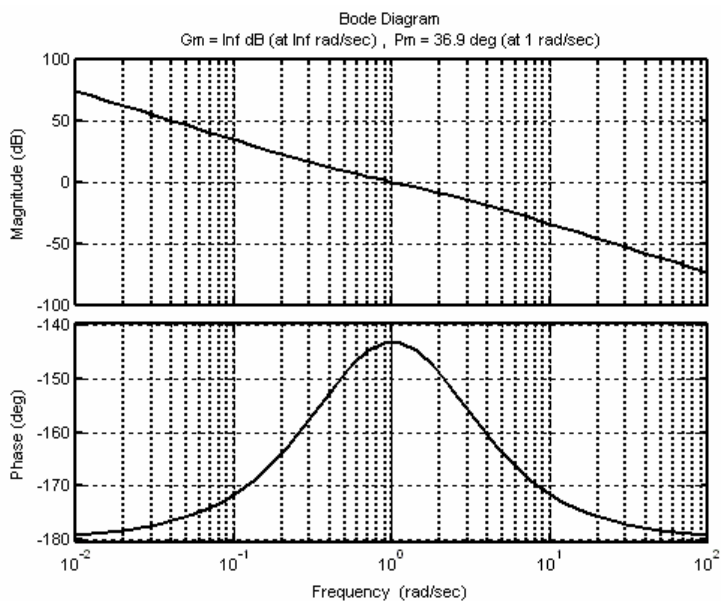
解得  $K = 0.5$ ，于是，系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{0.5(2s+1)}{s^2(0.5s+1)}$$

题图 6-10(c) 系统 MATLAB 验证结果如题图 6-10 (i) 所示，伯德图如题图 6-10 (j) 所示。



题图 6-10(i)  $G(s) = \frac{0.5(2s+1)}{s^2(0.5s+1)}$  对数幅频渐近线



题图 6-10(j)  $G(s) = \frac{0.5(2s+1)}{s^2(0.5s+1)}$  的伯德图

(4) ①确定系统积分环节或微分环节的个数。因为对数幅频渐近特性曲线的低频段渐近线的斜率为  $-20\text{dB/dec}$ ，故有  $\nu = 1$ 。

②确定系统传递函数结构形式。在  $\omega = 1$  处，斜率变化  $+20\text{dB/dec}$ ，对应一阶微分环节；在  $\omega = 2.5$  处，斜率变化  $-40\text{dB/dec}$ ，且有超调，对应振荡环节，因此系统应具有下述传递函数：

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s \left[ \left(\frac{s}{2.5}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{2.5}\right) + 1 \right]}$$

③由给定条件确定传递函数参数。

由  $L(1) = 20$ ，有  $20\lg \frac{K}{1} = 20$ ，解得  $K = 10$ ；

再由在  $\omega = 2.5$  处，谐振峰值为  $8\text{dB}$ ，则

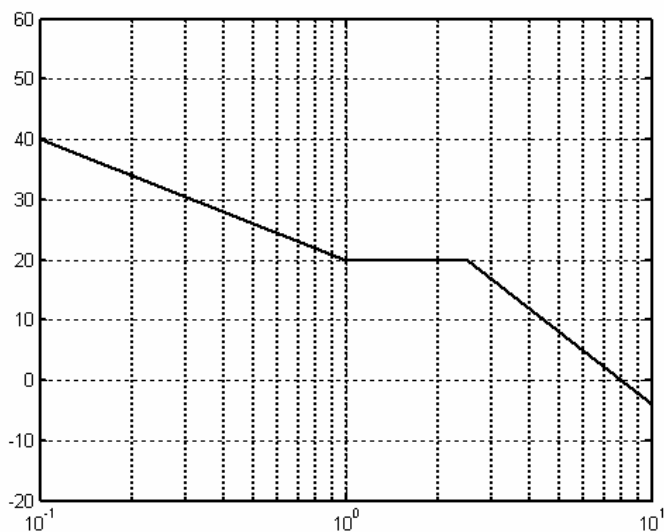
$$20\lg 2\xi\sqrt{1-\xi^2} = 8$$

即  $\xi = 0.2$

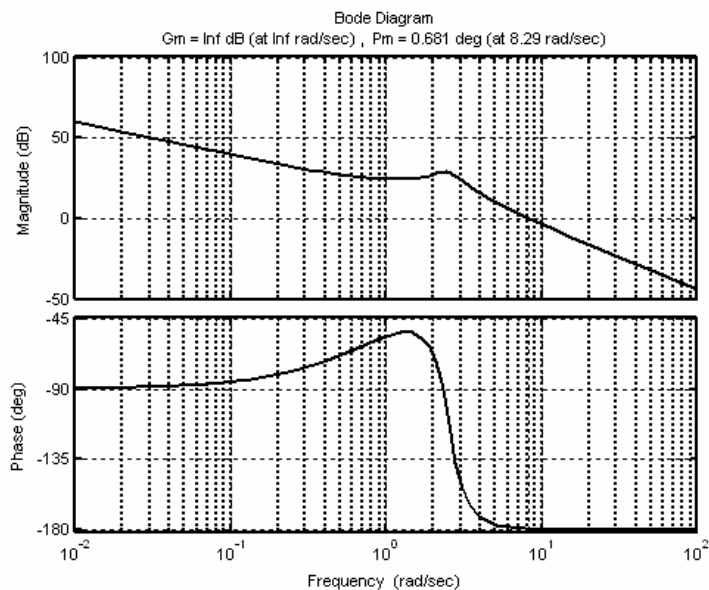
于是，系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s(0.04s^2 + 0.16s + 1)}$$

题图 6-10(d) 系统 MATLAB 验证结果如题图 6-10 (k) 所示, 伯德图如题图 6-10 (l) 所示。



题图 6-10(k)  $G(s) = \frac{10(s+1)}{s(0.16s^2+0.16s+1)}$  对数幅频渐近线



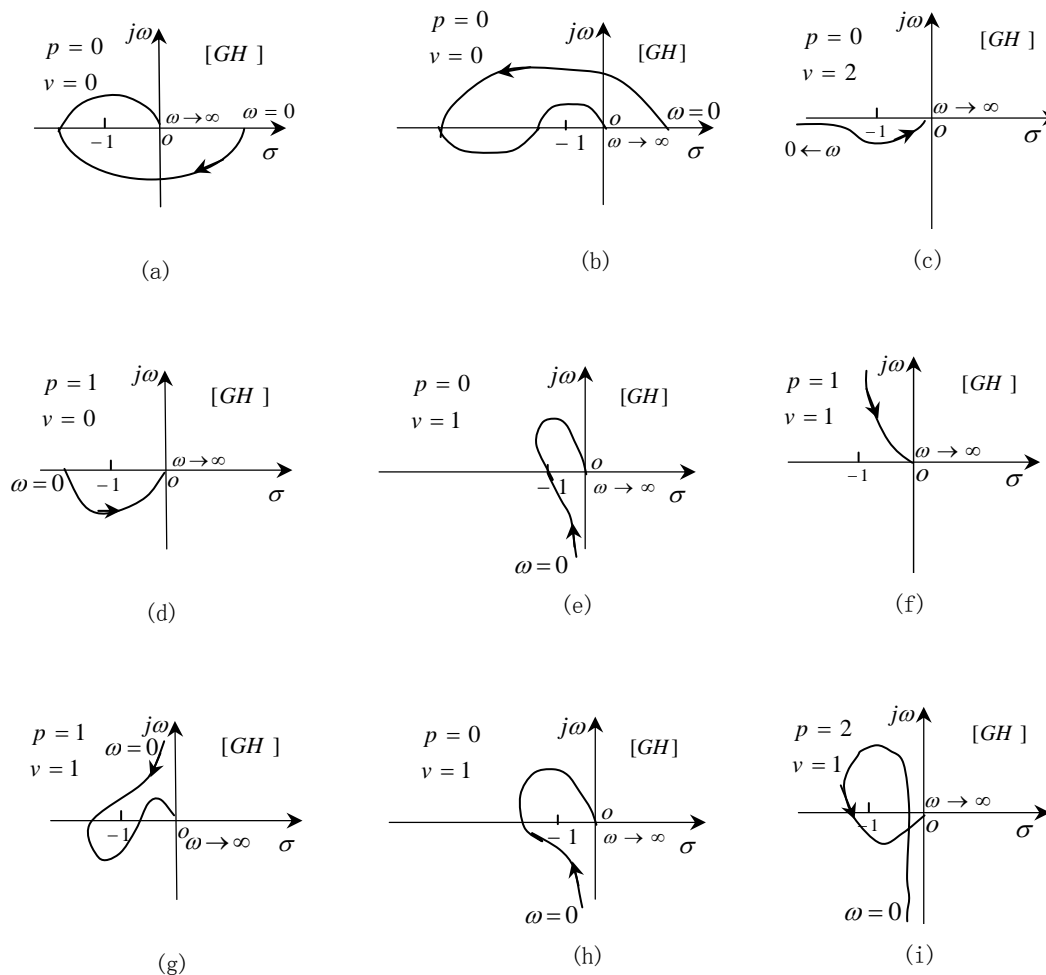
题图 6-10(l)  $G(s) = \frac{10(s+1)}{s(0.16s^2+0.16s+1)}$  的伯德图

MATLAB 参考程序 graph610.m

```
G1=tf(n1,d1);figure(1);margin(G1);grid;
n2=[2 10];d2=conv([0.5 1],conv([0.1 1],[0.1 1]));
G2=tf(n2,d2);figure(2);margin(G2);grid;
n3=[1 0.5];d3=conv([1 0],conv([1 0],[0.5 1]));
G3=tf(n3,d3);figure(3);margin(G3);grid;
n4=[10 10];d4=[0.16 0.16 1 0];
G4=tf(n4,d4);figure(4);margin(G4);grid;
w=0.01:1:100;
[x1,y1]=bd_asymp(G1,w);
[x2,y2]=bd_asymp(G2,w);
[x3,y3]=bd_asymp(G3,w);
[x4,y4]=bd_asymp(G4,w);
figure(5);semilogx(x1,y1,'r');hold;
figure(6);semilogx(x2,y2,'r');hold;
figure(7);semilogx(x3,y3,'r');hold;
```

figure(8);semilogx(x4,y4,'r');hold;

6-11 已知开环传递函数  $G(s)H(s)$  所包含的积分环节的个数  $v$  和系统在  $s$  平面的右半部的极点数  $p$ ，试根据题图 6-11 所示开环频率特性曲线分析相应的稳定性。



题图 6-11

解：(a)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=0$ ，由奈奎斯特曲线知  $N_+ = 0, N_- = 1$ ，故

$$N = N_+ - N_- = -1$$

应用奈奎斯特判据，算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 0 + 2 = 2$$

所以，闭环系统不稳定，有两个正实部闭环极点。

(b)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=0$ ，由奈奎斯特曲线知  $N_+ = 1, N_- = 1$ ，故

$$N = N_+ - N_- = 0$$

应用奈奎斯特判据，算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 0 - 0 = 0$$

所以，闭环系统稳定。

(c)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=0$ ，且  $\nu=2$ ，需要以无穷大为半径，从奈奎斯特曲线的起始端沿逆时针方向绕过  $2 \times 90^\circ$  作圆与实轴相交。由奈奎斯特曲线知  $N_+ = 0, N_- = 0$ ，故

$$N = N_+ - N_- = 0$$

应用奈奎斯特判据，算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 0 - 0 = 0$$

所以，闭环系统稳定。

(d)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=1$ ，由奈奎斯特曲线知  $N_+ = \frac{1}{2}, N_- = 0$ ，故

$$N = N_+ - N_- = \frac{1}{2}$$

应用奈奎斯特判据，算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 1 - 1 = 0$$

所以，闭环系统稳定。

(e)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=0$ ，且  $\nu=1$ ，需要以无穷大为半径，从奈奎斯特曲线的起始端沿逆时针方向绕过  $1 \times 90^\circ$  作圆与实轴相交。由奈奎斯特曲线知  $N_+ = 0, N_- = 0$ ，故

$$N = N_+ - N_- =$$

应用奈奎斯特判据，算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 0 - 0 = 0$$

由于图中奈奎斯特曲线穿越  $(-1, j0)$  点，所以，闭环系统临界稳定。

(f)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=1$ ，且  $\nu=1$ ，需要以无穷大为半径，从奈奎斯特曲线的起始端沿逆时针方向绕过  $1 \times 90^\circ$  作圆与实轴相交。由奈奎斯特曲线知

$N_+ = 0, N_- = 0$ , 故

$$N = N_+ - N_- = 0$$

应用奈奎斯特判据, 算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 1 - 0 = 1$$

所以, 闭环系统不稳定。

(g)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=1$ , 且  $\nu=1$ , 需要以无穷大为半径, 从奈奎斯特曲线的起始端沿逆时针方向绕过  $1 \times 90^\circ$  作圆与实轴相交。由奈奎斯特曲线知  $N_+ = 1, N_- = -\frac{1}{2}$ , 故

$$N = N_+ - N_- = \frac{1}{2}$$

应用奈奎斯特判据, 算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 1 - 1 = 0$$

所以, 闭环系统稳定。

(h)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=0$ , 且  $\nu=1$ , 需要以无穷大为半径, 从奈奎斯特曲线的起始端沿逆时针方向绕过  $1 \times 90^\circ$  作圆与实轴相交。由奈奎斯特曲线知  $N_+ = 0, N_- = -1$ , 故

$$N = N_+ - N_- = -1$$

应用奈奎斯特判据, 算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 0 - 2 \times (-1) = 2$$

所以, 闭环系统不稳定。

(i)  $G(s)H(s)$  在  $s$  右半平面的极点数  $P=2$ , 且  $\nu=1$ , 需要以无穷大为半径, 从奈奎斯特曲线的起始端沿逆时针方向绕过  $1 \times 90^\circ$  作圆与实轴相交。由奈奎斯特曲线知  $N_+ = 1, N_- = 0$ , 故

$$N = N_+ - N_- = 1$$

应用奈奎斯特判据, 算的  $s$  右半平面的闭环极点数为

$$Z = P - 2N = 2 - 2 = 0$$

所以，闭环系统稳定。

6-12 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{Ks^2}{(0.02s+1)(0.2s+1)}$$

试绘制系统的伯德图，并确定剪切频率  $\omega_c = 5\text{rad/s}$  时的  $K$  值。

解：由系统的开环传递函数，可得

$$\left| G(j\omega_c)H(j\omega_c) \right| = \frac{K\omega_c^2}{\sqrt{(0.02\omega_c)^2 + 1}\sqrt{(0.2\omega_c)^2 + 1}} \Big|_{\omega_c=5} = 1$$

解得  $K = 0.05688$

当剪切频率为  $\omega_c = 5\text{rad/s}$  时，系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{0.05688s^2}{(0.02s+1)(0.2s+1)}$$

对应的伯德图分别如题图 6-12(a)和 6-12(b)所示。

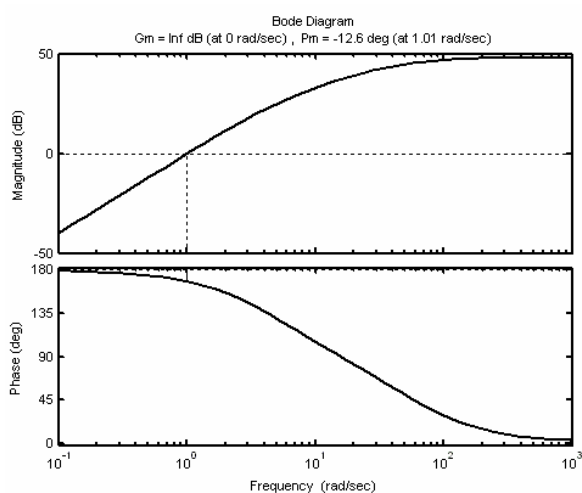
MATLAB 参考程序 graph612.m

```
G1=tf([1,0,0],conv([0.02,1],[0.2,1]));
```

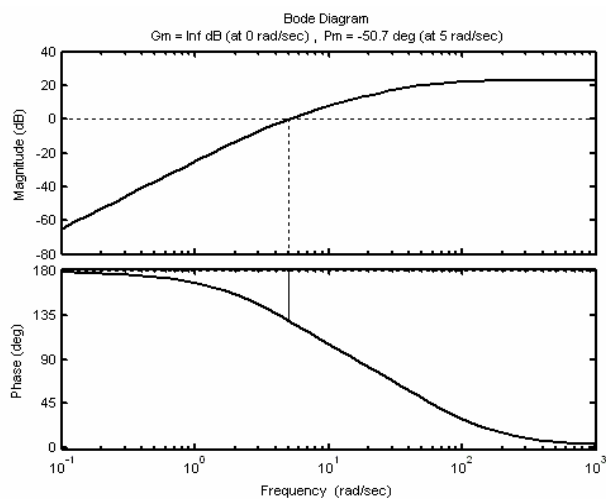
```
G2= tf([0.05688,0,0],conv([0.02,1],[0.2,1]));
```

```
figure(1);margin(G1);
```

```
figure(2); margin(G2);
```



题图 6-12(a)  $G(s)H(s) = \frac{s^2}{(0.02s+1)(0.2s+1)}$  的伯德图



题图 6-12(b)  $G(s)H(s) = \frac{0.05688s^2}{(0.02s+1)(0.2s+1)}$  的伯德图



6-13 设单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{3500}{s(s^2 + 10s + 70)}$$

试绘制系统的伯德图，并确定当相位裕度等于  $30^\circ$  时系统的开环放大系数的应增大或减小多少？

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{3500}{j\omega[(j\omega)^2 + j10\omega + 70]}$$

系统的对数幅频特性和相频特性分别为

$$L(\omega) = 20\lg 3500 - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{(70 - \omega^2)^2 + 100\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{10\omega}{70 - \omega^2}$$

绘出系统的伯德图如题图 6-13(a) 所示。

根据相位裕度的定义，当相位裕度等于  $30^\circ$  时，对应系统的相频特性为  $\varphi(\omega_c) = -150^\circ$ ，

由题图 6-13(a) 可知，当  $\varphi(\omega) = -150^\circ$  时对应的幅频特性  $L(\omega) = 18.6\text{dB} > 0$ ，要使

$L(\omega) = 0$ ，且  $\varphi(\omega) = -150^\circ$ ，应减小系统的开环放大系数  $K$ ，使原系统的幅频特性向下平移  $18.6\text{dB}$ ，即  $20\lg K' = -18.6\text{dB}$ ，求得

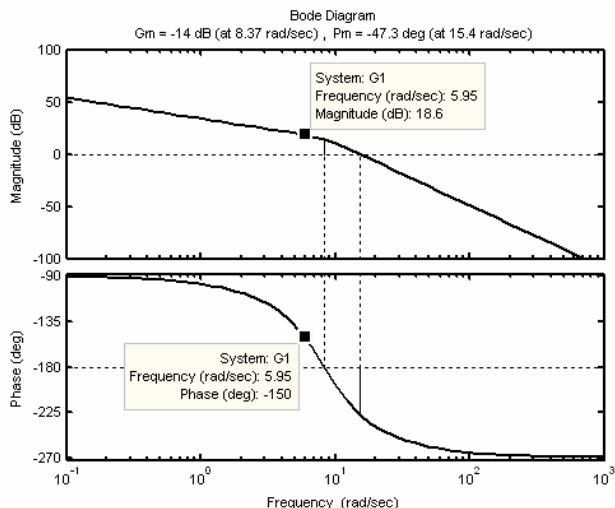
$$K' = 0.117$$

这相当于给系统串联了一个放大倍数为  $K' = 0.117$  的放大环节。

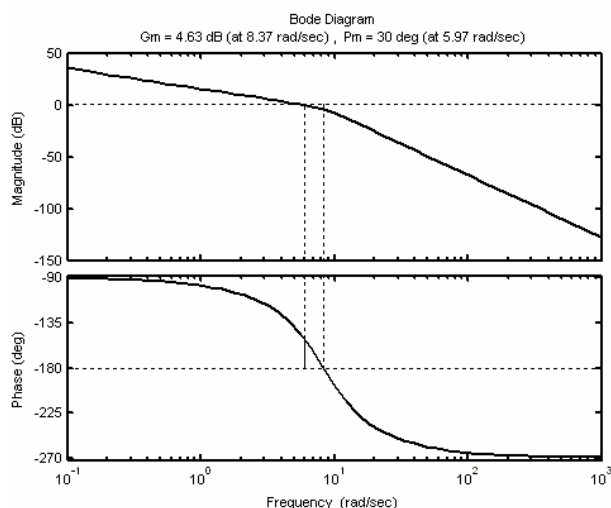
增加放大环节后系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{411}{s(s^2 + 10s + 70)}$$

MATLAB 验证结果如题图 6-13(b) 所示。



题图 6-13(a)  $G(s)H(s) = \frac{3500}{s(s^2 + 10s + 70)}$  的伯德图



题图 6-13(b)  $G(s)H(s) = \frac{411}{s(s^2 + 10s + 70)}$  的伯德图

MATLAB 参考程序 graph613.m

```
G1=tf([3500],[1 10 70 0]);
```

```
G2=tf([411],[1 10 70 0]);
```

```
figure(1);margin(G1);
```

```
figure(2); margin(G2);
```

6-14 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(7s+1)(3s+1)}$$

求幅值裕度为 20dB 时的 K 值。

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)(j7\omega+1)(j3\omega+1)}$$

系统的对数幅频特性和相频特性分别为

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{\omega^2 + 1} - 20\lg\sqrt{49\omega^2 + 1} - 20\lg\sqrt{9\omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \omega - \arctan 7\omega - \arctan 3\omega$$

根据幅值裕度的定义，当  $\varphi(\omega_g) = -180^\circ$  时， $K_g = \frac{1}{|G(j\omega_g)H(j\omega_g)|}$

有  $\varphi(\omega_g) = \arctan \omega_g - \arctan 7\omega_g - \arctan 3\omega_g$

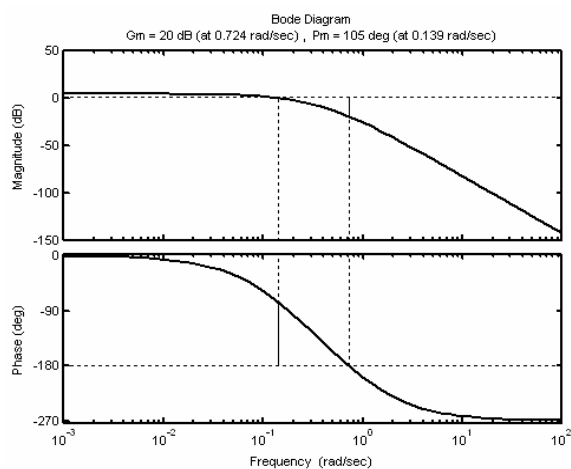
解得  $\omega_g = 0.725 \text{ rad/s}$ 。

将  $\omega_g = 0.725 \text{ rad/s}$  代入幅值裕度的计算式, 有

$$\begin{aligned} 20\lg K_g &= -20\lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| \\ &= -20\lg \frac{K}{\sqrt{\omega_g^2 + 1}\sqrt{49\omega_g^2 + 1}\sqrt{9\omega_g^2 + 1}} = 20\text{dB} \end{aligned}$$

解得  $K = 1.53$

MATLAB 验证结果图如题图 6-14 所示。



题图 6-14  $G(s)H(s) = \frac{1.53}{(s+1)(7s+1)(3s+1)}$  的伯德图

MATLAB 参考程序 graph614.m

```
G=tf([1.53],conv([1 1],conv([7 1],[3 1])));
```

```
figure;margin(G);
```

6-15 已知系统的开环传递函数如下, 用 MATLAB 绘制系统的伯德图和奈奎斯特图。

$$(1) G(s)H(s) = \frac{8(s+1)}{s^2(s+15)(s^2+6s+10)}$$

解: 系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{8(j\omega+1)}{(j\omega)^2(j\omega+15)[(j\omega)^2+j6\omega+10]}$$

系统的对数幅频特性和相频特性分别为

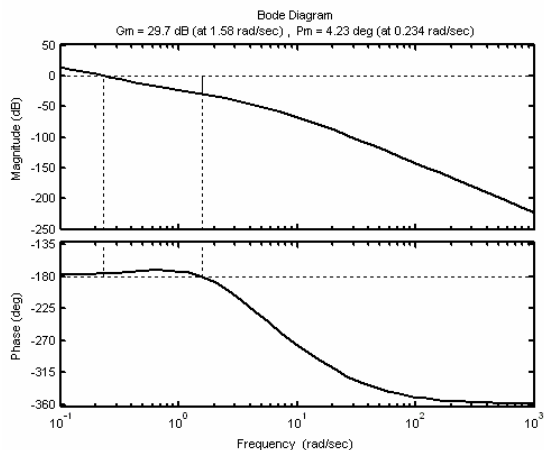
$$L(\omega) = 20\lg 8 + 20\lg \sqrt{\omega^2 + 1} - 20\lg \omega^2 - 20\lg \sqrt{\omega^2 + 15^2} - 20\lg \sqrt{(10 - \omega^2)^2 + 36\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \omega - 180^\circ - \arctan \frac{\omega}{15} - \arctan \frac{6\omega}{10 - \omega^2}$$

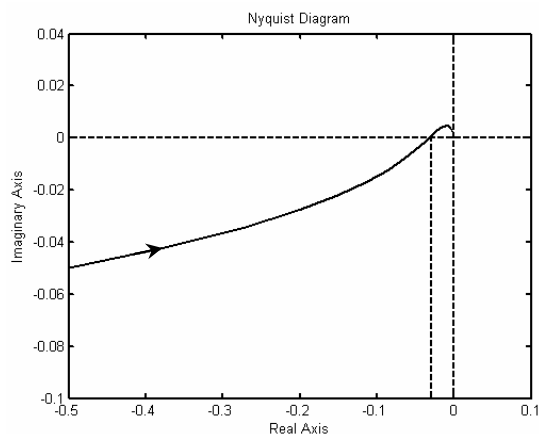
系统的幅相特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{8(150 + 79\omega^2 - \omega^4)}{\omega^2(225 + \omega^2)[(10 - \omega^2)^2 + 36\omega^2]} + j\frac{8(20\omega^2 - 50)}{\omega(225 + \omega^2)[(10 - \omega^2)^2 + 36\omega^2]}$$

绘出系统的伯德图和奈奎斯特图分别如题图 6-15(a)、6-15(b) 所示。



题图 6-15(a) 系统的伯德图



题图 6-15(b) 系统的奈奎斯特图

$$(2) G(s)H(s) = \frac{7.5(s+1)(0.2s+1)}{s(s^2+16s+100)}$$

解：系统的频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{7.5(j\omega+1)(j0.2\omega+1)}{j\omega[(j\omega)^2+j16\omega+100]}$$

系统的对数幅频特性和相频特性分别为

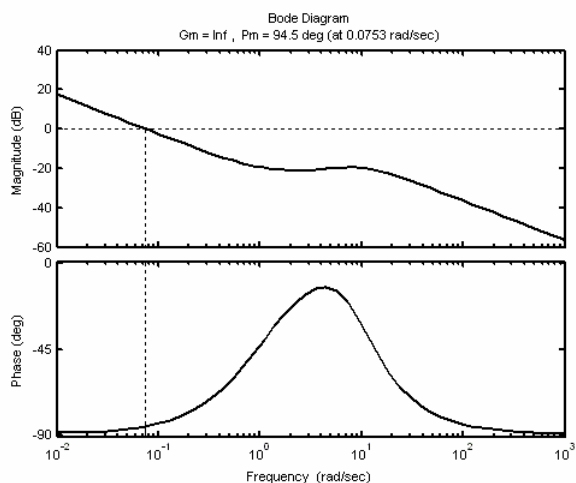
$$L(\omega) = 20\lg 7.5 + 20\lg \sqrt{\omega^2 + 1} + 20\lg \sqrt{0.04\omega^2 + 1} - 20\lg \omega - 20\lg \sqrt{(100 - \omega^2)^2 + (16\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \omega + \arctan 0.2\omega - 90^\circ - \arctan \frac{16\omega}{100 - \omega^2}$$

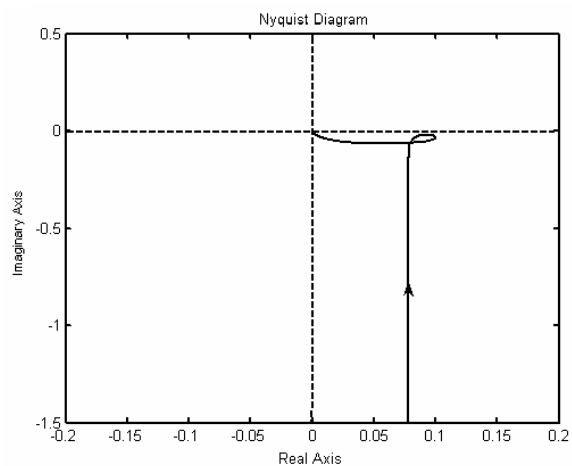
系统的幅相特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{7.5(2\omega^2 + 104)}{(16\omega)^2 + (100 - \omega^2)^2} + j\frac{7.5(0.2\omega^3 - 1.8\omega^2 + 100)}{\omega[(16\omega)^2 + (100 - \omega^2)^2]}$$

和奈奎斯特图分别如题图 6-15(c)、6-15(d) 所示。



题图 6-15(c) 系统的伯德图



题图 6-15(d) 系统的奈奎斯特图

MATLAB 参考程序 graph615.m

```
n1=[8 8];d1=conv([1 0],conv([1 0],conv([1 15],[1 6 10])));
```

```
G1=tf(n1,d1); figure(1);margin(G1);
```

```
figure(2);[re,im]=nyquist(G1);
```

```
plot(re(:),im(:))
```

```
v1=[-0.5,0.1,-0.1,0.04];axis(v1)
```

```
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');
```

```
title('Nyquist Diagram');
```

```
n2=conv([7.5 7.5],[0.2 1]);d2=[1 16 100 0];
```

```
G2=tf(n2,d2);
```

```
figure(3); margin(G2);
```

```
figure(4);[re,im]=nyquist(G2);
```

```
plot(re(:),im(:))
```

```
v2=[-0.2,0.2,-1.5,0.5];axis(v2)
```

```
xlabel('Real Axis');ylabel('Imaginary Axis');
```

```
title('Nyquist Diagram')
```

6-16 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

用 Matlab 绘制系统的伯德图，确定  $L(\omega) = 0$  的频率  $\omega_c$  和对应的相角  $\varphi(\omega_c)$ 。

解：系统的频率特性

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)^2}$$

则系统的对数幅频和相频特性分别为

$$L(\omega) = -20\lg \omega - 20\lg(\omega^2 + 1)$$

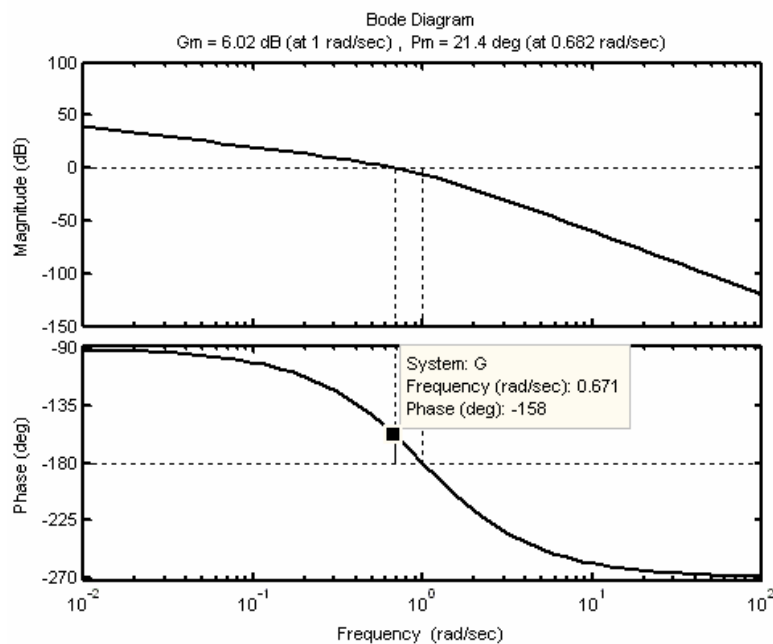
$$\varphi(\omega) = -90^\circ - 2\arctan \omega$$

绘出系统的对数频率特性图，如题图 6-16 所示。

MATLAB 参考程序 graph616.m

```
G=tf([1],conv([1 0],conv([1 1],[1 1])));
```

```
figure;margin(G);
```



题图 6-16  $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$  的伯德图

由图 6-16 可知， $L(\omega) = 0$  时的频率  $\omega_c = 0.672 \text{ rad/s}$ ， $\varphi(\omega_c) = -158^\circ$ 。

6-17 已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

- (1) 用 MATLAB 绘制系统的伯德图，计算系统的稳定裕度；
- (2) 试计算系统的谐振峰值  $M_r$ 、谐振频率  $\omega_r$  和截止频率  $\omega_b$ 。

解：系统的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^2 + j2\omega + 10}$$

则系统的对数幅频和相频特性分别为

$$L(\omega) = 20\lg 10 - 20\lg \sqrt{(10 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\omega}{10 - \omega^2}$$

绘出系统的对数频率特性图，如题图 6-17(a) 所示。

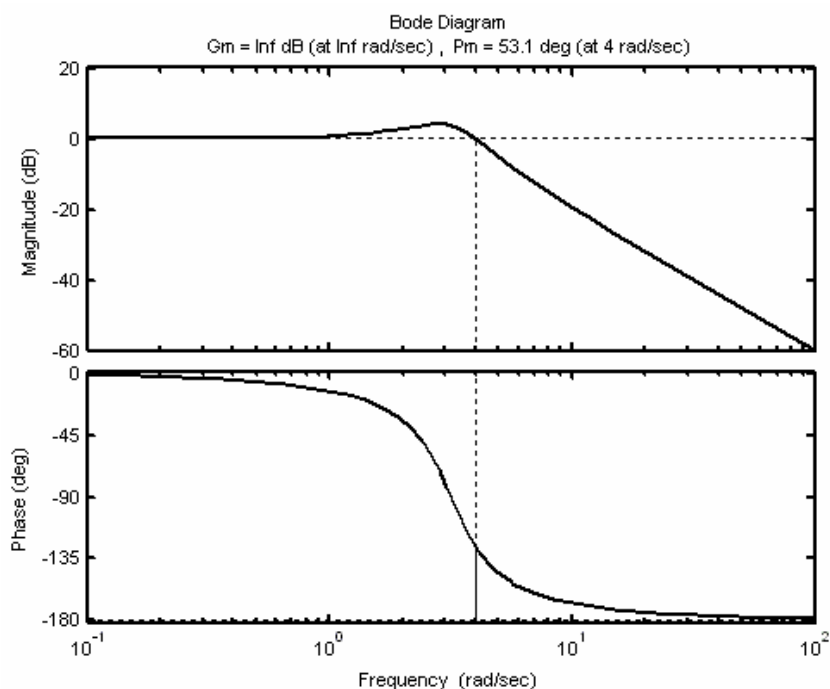
MATLAB 参考程序 graph6171.m

```
num=10; den=[1 2 10];margin(num,den);
```

由图 6-17(a) 可知， $L(\omega) = 0$  时的频率  $\omega_c = 4 \text{ rad/s}$ ， $\varphi(\omega_c) = -126.9^\circ$ ，根据相位裕度的定义可求得

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 53.1^\circ$$

由图 6-17(a) 可知，幅值裕度为无穷大。



题图 6-17(a)  $G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$  的伯德图

(2) 根据题图 6-17(a) 确定谐振峰值的大小和谐振频率。MATLAB 参考程序 graph6172.m

```
[m, p, w]=bode(num, den);
```

```
mr=max(m)
```

```
mr =
```

```
1.6667
```

```
wr=spline(m, w, mr)
```

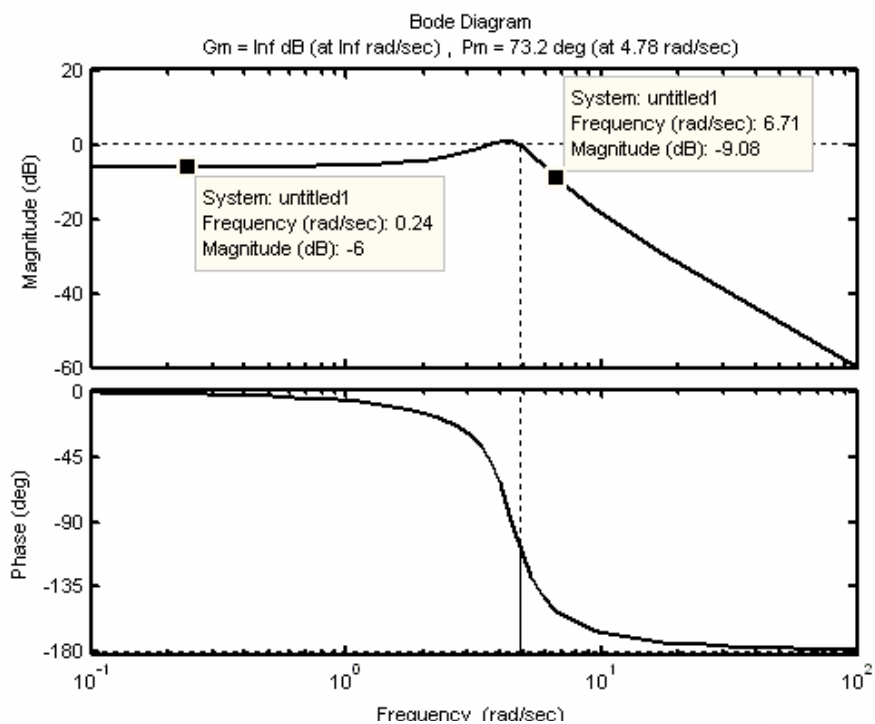
```
wr =
```

```
2.8284
```

根据以上运行结果可知，谐振峰值  $M_r = 1.6667$ ，谐振频率  $\omega_r = 2.8284 \text{ rad/s}$ 。将谐振峰

值转化为对数  $20\lg M_r = 20\lg 1.6667 = 4.437 \text{ dB}$

做出系统的闭环对数频率特性如题图 6-17(b) 所示，可测得， $\omega_b \approx 6.71 \text{ rad/s}$ 。



题图 6-17(b)  $G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 20}$  的伯德图

MATLAB 参考程序 graph6173.m

```
num=10; den=[1 2 20];margin(num, den);
```



6-18 已知单位负反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{22}{(s+1)(s+3)}$$

系统输入量为  $r(t)$ , 输出量为  $c(t)$ 。要求: (1) 当  $r(t) = 1(t)$ , 时,  $c(t)$  的最大值和稳态值;

(2) 当  $r(t) = A \sin \omega t$  时, 选取  $\omega$  值使系统稳态输出的振幅最大, 并求出此最大振幅。

解: 系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{22}{s^2 + 4s + 25}$$

(1) 当输入信号  $r(t) = 1(t)$ , 即  $R(s) = \frac{1}{s}$  时

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{22}{s(s^2 + 4s + 25)}$$

根据终值定理可得

$$c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{22}{s^2 + 4s + 25} = 0.88$$

又由系统的闭环传递函数可得系统的无阻尼自然振荡频率和阻尼比为

$$\omega_n = 5 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0.4$$

则系统的超调量为

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 25.4\%$$

系统的输出最大值为

$$c_{\max} = c(\infty) \times (1 + M_p) = 1.1$$

故  $r(t) = 1(t)$  时,  $c(t)$  的最大值为 1.1, 稳态值 0.88。时间响应曲线如题图 6-18(a) 所示。

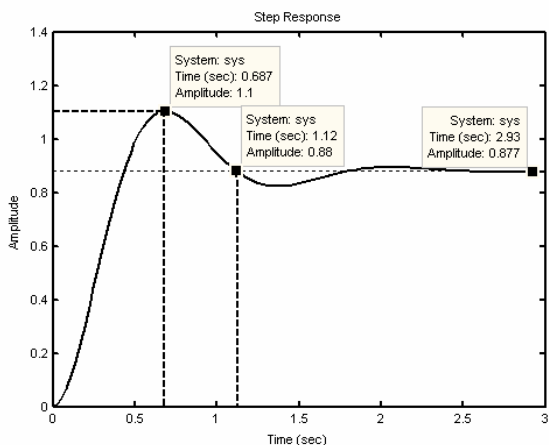
(2) 当  $r(t) = A \sin \omega t$  时

$$|\Phi(j\omega)| = \frac{22}{\sqrt{(25 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}} = \frac{22}{\sqrt{(\omega^2 - 17)^2 + 336}}$$

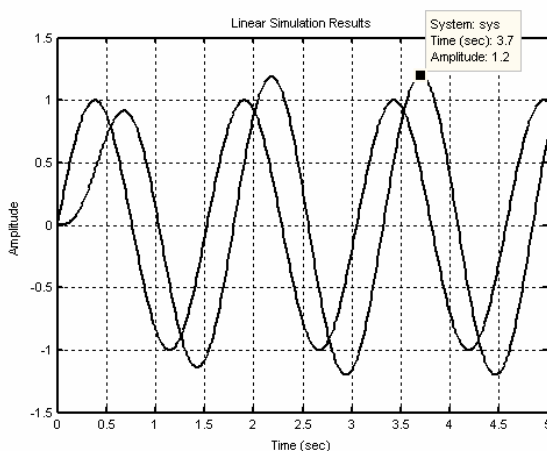
即当  $\omega^2 = 17$  时, 系统输出的振幅最大, 该最大振幅为

$$A_{\max} = A \times \frac{22}{\sqrt{336}} = 1.2A$$

当  $A=1, \omega=\sqrt{17}$  的时间响应曲线如题图 6-18(b) 所示。



题图 6-18(a)  $r(t) = 1(t)$  时系统的时间响应曲线



题图 6-18(b)  $A=1, \omega=\sqrt{17}$  时系统的时间响应曲线

MATLAB 参考程序 graph618.m

```
ng=[22]; dg=[1 4 3];nh=[1]; dh=[1];
[n, d]=feedback(ng, dg, nh, dh);
figure, step(n, d);
A=1; w=sqrt(17);
t=0:0.01:5; u=A*sin(w*t);
figure, lsim(n, d, u, t);grid on;
```

6-19 某单位反馈的二阶 I 型系统，其最大超调量为  $M_p = 16.3\%$ ，峰值时间为  $t_p = 114.6\text{ms}$ ，试求系统开环传递函数  $G(s)$ ，并求出闭环谐振峰值  $M(\omega_r)$  和谐振频率  $\omega_r$ 。

解：

(1) 因为  $M_p = 16.3\%$  即

$$e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 16.3\%$$

解得  $\xi = 0.5$

又因为  $t_p = 114.6\text{ms}$  即

$$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 114.6\text{ms} = 0.1146\text{s}$$

解得  $\omega_n = 31.65 \text{ rad/s}$

所以，系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{31.65^2}{s(s+31.65)} = \frac{31.65}{s(0.0316s+1)}$$

(2) 谐振峰值为

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = 1.15$$

转化为对数值为  $20\lg M_r = 20\lg 1.15 = 1.25(\text{dB})$

谐振频率为  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} = 22.38 \text{ rad/s}$